فصل

قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

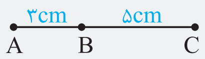
قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

درسنامهٔ ۱

نسبت و تناسب

نسبت: اگر a و b از یک جنس باشند (یعنی واحد اندازه‌گیری آن‌ها یکی باشد) آن‌گاه به $\frac{a}{b}$ یک نسبت می‌گوییم.

واضح است که در نسبت $\frac{a}{b}$ همواره $b \neq 0$ می‌باشد. مثلاً در شکل مقابل نسبت $\frac{AB}{BC}$ برابر $\frac{۳}{۵} = ۰/۶$ است.



تناسب: تساوی میان دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را با شرط $b, d \neq 0$ یک تناسب می‌گوییم. در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ به a و d طرفین و به c و b وسطین گفته می‌شود، زیرا:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \div b = c \div d$$

وسطین
طرفین

ویژگی‌های تناسب

به کمک روش‌های جبری می‌توان از هر تناسب، تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت:

① در هر تناسب، حاصل‌ضرب طرفین با حاصل‌ضرب وسطین برابر است:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc}$$

② اگر با تناسب $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ هر کاری کنیم که تساوی حاصل‌ضرب طرفین با حاصل‌ضرب وسطین یعنی $ad = bc$ به هم نریزد آن کار مجاز است. این کارهای مجاز عبارتند از:

- طرفین تناسب را می‌توان معکوس کرد:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}}$$

- جای طرفین را با هم و جای وسطین را با هم می‌توان عوض کرد:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}} \qquad \boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}}$$

- ترکیب و تفضیل در صورت یا مخرج تناسب امکان‌پذیر است:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}} \qquad \boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}}$$

- در هر تناسب می‌توان صورت‌ها را با هم و مخرج‌ها را با هم جمع و تفریق کرد:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a \pm c}{b \pm d}}$$

دقت کنید ویژگی فوق را می‌توان تعمیم داد:

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = k \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \cdots}{b_1 + b_2 + \cdots} = k}$$

نکته: به‌طور کلی اگر در یک تناسب، هر کاری که روی صورت‌ها انجام می‌دهیم، همان کار را در مخرج‌ها نیز انجام دهیم، نسبت حاصل با نسبت‌های قبلی برابر است:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{ax \pm cy}{bx \pm dy}}$$

واسطهٔ هندسی

اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد، مانند تناسب‌های $\frac{x}{c} = \frac{a}{x}$ یا $\frac{c}{x} = \frac{x}{a}$، با طرفین وسطین کردن تناسب به تساوی $x^2 = ac$ می‌رسیم که در این صورت x را واسطهٔ هندسی a و c می‌گوییم.

مثلاً اگر دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۱۶ داشته باشیم، پاره‌خطی به طول ۸ واسطهٔ هندسی بین آن‌ها است، زیرا $۸^۲ = ۴ \times ۱۶$ می‌باشد.

۱- اگر $\frac{۳}{۵} = \frac{z}{۶} = \frac{y}{۳} = \frac{x}{۲}$ باشد، حاصل $x + ۲y + ۳z$ کدام است؟

۱) ۱۵/۶ ۲) ۱۶/۵ ۳) ۱۴/۶ ۴) ۱۶/۴

۲- اگر $\frac{a}{b}=\frac{۲۴-a}{۱۸-b}$ باشد، حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳

۳- اگر $\frac{۲}{۳}=\frac{a}{b}$ باشد، $\frac{۲a+۲b}{a+۲b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۴- از تناسب‌های $\frac{۱}{۴}=\frac{۲(c-۲b)}{۷}=\frac{۳b-c}{۶}=\frac{a+۲b}{۳}$، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳/۷۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۳/۲۵

۵- نقطه‌های P و Q روی پاره‌خط AB و در یک طرف وسط AB قرار دارند. اگر $\frac{۲}{۳}=\frac{BP}{AP}$، $\frac{۳}{۴}=\frac{QB}{QA}$ و $PQ=۲$ باشد، طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۶۸ ۳) ۷۰ ۴) ۷۵

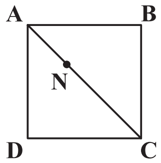
۶- در شکل مقابل $OA=۲$، $OB=۴$، $OC=۵$ و $OD=۷$ می‌باشد. نقطهٔ P بین B و C طوری قرار دارد که $\frac{BP}{PC}=\frac{AP}{PD}$، در این صورت طول OP کدام است؟

۱) ۴/۶ ۲) ۴/۲ ۳) ۴/۸ ۴) ۴/۵

۷- روی پاره‌خط $AB=۱۲$، دو نقطهٔ M و N را به قسمی اختیار می‌کنیم که $۲=\frac{BN}{AN}=\frac{AM}{MB}$، در این صورت طول پاره‌خط MN کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۸

۸- در شکل مقابل، طول ضلع مربع ۶ و $\frac{۳}{۲}=\frac{NC}{AN}$ است. فاصلهٔ N از مرکز مربع کدام است؟



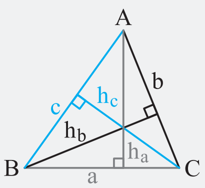
۱) $\frac{۶\sqrt{۲}}{۵}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۵}$ ۳) $\frac{۱۲\sqrt{۲}}{۵}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۱۰}$

۹- اگر x واسطهٔ هندسی b و c باشد، کدام رابطه صحیح است؟

۱) $\frac{c}{x}=\frac{x+c}{x+b}$ ۲) $\frac{c}{x}=\frac{x-c}{x-b}$ ۳) $\frac{c}{b}=\frac{x+c}{x+b}$ ۴) $\frac{c}{b}=\frac{x-c}{x-b}$

درسنامه ۲

رابطهٔ اضلاع و ارتفاع‌ها در مثلث



می‌دانیم مساحت هر مثلث از رابطهٔ «**ارتفاع × قاعده** × $\frac{۱}{۲}$» به‌دست می‌آید، یعنی:

$$S=\frac{۱}{۲}a.h_a=\frac{۱}{۲}b.h_b=\frac{۱}{۲}c.h_c$$

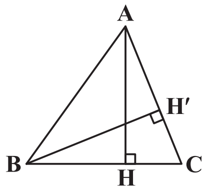
با تبدیل هر یک از برابری‌های فوق به یک تناسب، می‌توان گفت «در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع وارد بر آن‌ها برابر است.» مثلاً:

$$\frac{۱}{۲}a.h_a=\frac{۱}{۲}b.h_b \Rightarrow a.h_a=b.h_b \Rightarrow \boxed{\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}}$$

نتیجه: هر رابطهٔ هم‌درجه‌ای که بین اضلاع یک مثلث برقرار باشد (چه رابطهٔ مساوی، چه رابطهٔ نامساوی)، همان رابطه بین معکوس ارتفاع‌ها نیز برقرار است. مثلاً در یک مثلث قائم‌الزاویه که رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$ در آن برقرار است، رابطهٔ $\frac{۱}{h_a^۲}=\frac{۱}{h_b^۲}+\frac{۱}{h_c^۲}$ نیز در آن برقرار می‌باشد.

۱۰- در مثلث ABC دو ارتفاع AH و BH′ را رسم کرده‌ایم. نسبت $\frac{AH}{BH'}$ با کدام نسبت برابر است؟

۱) $\frac{AC}{BC}$ ۲) $\left(\frac{AC}{BC}\right)^۲$ ۳) $\frac{BC}{AC}$ ۴) $\left(\frac{BC}{AC}\right)^۲$



۱۱- در مثلث ABC با طول اضلاع $a=۵$، $b=۶$ و $c=۹$، حاصل $\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_c}{h_a}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷۸}{۵۳}$ ۲) $\frac{۴۵}{۷۹}$

۳) $\frac{۵۳}{۷۸}$ ۴) $\frac{۷۹}{۴۵}$

۱۲- در مثلث ABC، طول اضلاع $a=۴$، $b=۶$ و $c=۸$ می‌باشد. حاصل $\frac{h_a^۲}{h_b h_c}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۴

۱۳- در مثلث ABC، اگر $a<b<c$ باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $h_a<h_b<h_c$ ۲) $h_a>h_b>h_c$ ۳) $h_b>h_c>h_a$ ۴) $h_b>h_a>h_c$

۱۴- در مثلث ABC، اگر $a=۴$، $b=۶$ و $h_c=h_a+h_b$ باشد، اندازهٔ ضلع c کدام است؟

۱) ۳/۲ ۲) ۳/۶ ۳) ۲/۸ ۴) ۲/۴

۱۵- در مثلثی اندازه‌های دو ضلع ۱۰ و ۱۵ واحد است. مجموع ارتفاع‌های وارد بر این دو ضلع، برابر ارتفاع ضلع سوم است. اندازهٔ ضلع سوم کدام است؟ تجربی خارج ۹۵

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۷/۵ ۴) ۸

۱۶- در مثلث ABC، اگر $h_a \times h_b=۱۶$ باشد، مساحت مثلث کدام است؟

۱) $\sqrt{ab}$ ۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt{ab}$ ۳) $۲\sqrt{ab}$ ۴) $۴\sqrt{ab}$

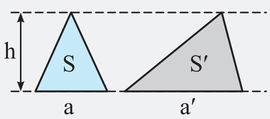
۱۷- در یک مثلث با محیط ۲۳، ارتفاع‌های وارد بر اضلاع ۴، ۶ و $\frac{۹}{۲}$ می‌باشند. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

درسنامهٔ ۳

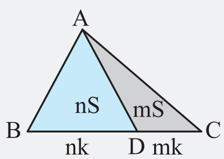
مساحت مثلث‌های هم‌قاعده و هم‌ارتفاع

① با توجه به این‌که مساحت مثلث از رابطهٔ «ارتفاع × قاعده × $\frac{۱}{۲}$» به‌دست می‌آید، اگر ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت اندازهٔ قاعده‌هایی که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد می‌شوند.

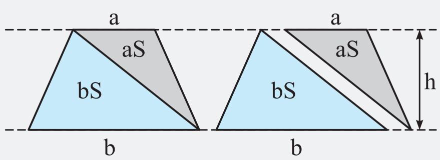


$$\frac{S}{S'}=\frac{a}{a'}$$

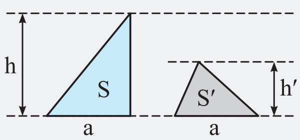
نتیجه: الف) اگر خطی از یک رأس مثلث طوری رسم شود که قاعده را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کند، مساحت مثلث هم به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم می‌شود.



ب) در ذوزنقه‌ها وقتی یک قطر رسم می‌شود، نسبت مساحت دو مثلث ایجاد شده برابر نسبت قاعده‌ها است.

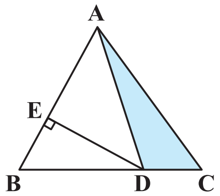


② اگر قاعده‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازهٔ ارتفاع‌های وارد بر این قاعده‌ها است.



$$\frac{S}{S'}=\frac{h}{h'}$$

۱۸- در شکل مقابل، AB = ۸ ، DE = ۶ و ۲BD = ۳DC می‌باشد. مساحت قسمت رنگی کدام است؟



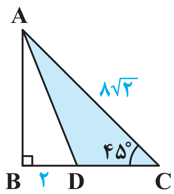
۱) ۱۸

۲) ۱۶

۳) ۱۲

۴) ۲۰

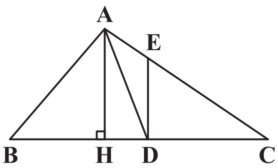
۱۹- در شکل مقابل، مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟



۱) ۱۸ ۲) ۲۴

۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۲۰- در شکل مقابل، $\frac{AE}{EC} = \frac{۱}{۳}$ ، CD = ۶ و AH = ۸ می‌باشد. مساحت مثلث ADE کدام است؟



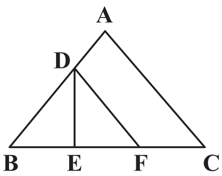
۱) ۶

۲) ۸

۳) ۴

۴) ۹

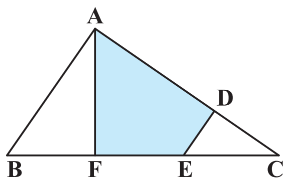
۲۱- در شکل مقابل، ۲AD = BD و مساحت مثلث ABC برابر ۳۶ است. اگر BE = EF = FC باشد، مساحت مثلث DEF کدام است؟



۱) ۶ ۲) ۸

۳) ۱۲ ۴) ۹

۲۲- در شکل مقابل، AD = ۲DC و BF = FE = EC می‌باشد. اگر مساحت قسمت رنگی ۲۰ باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟



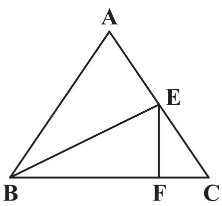
۱) ۶۰

۲) ۴۸

۳) ۴۰

۴) ۳۶

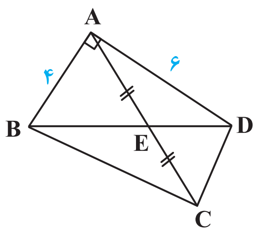
۲۳- در شکل مقابل، E وسط ضلع AC و BC = ۳CF می‌باشد. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۴۲ باشد، مساحت مثلث BEF کدام است؟



۱) ۱۴ ۲) ۱۲

۳) ۱۸ ۴) ۱۶

۲۴- در شکل مقابل، مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟



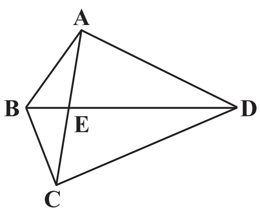
۱) ۱۸

۲) ۲۴

۳) ۲۷

۴) ۳۲

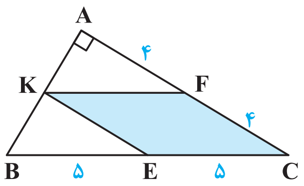
۲۵- در شکل مقابل، ED = ۴BE می‌باشد. مساحت مثلث ABC چه کسری از مساحت چهارضلعی است؟



۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۷}$

۲۶- در شکل مقابل، مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟



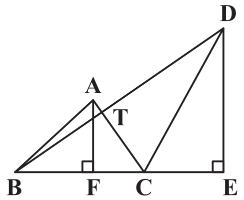
۱) ۱۰

۲) ۱۶

۳) ۸

۴) ۱۲

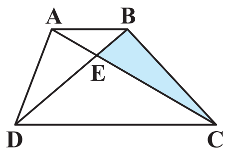
۲۷- در شکل مقابل، DE = ۲AF، مساحت مثلث ABT برابر ۳ و مساحت مثلث DTC برابر ۱۲ است.
مساحت مثلث BTC کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

۲۸- در ذوزنقهٔ شکل مقابل، مساحت مثلث ADE برابر ۶ می‌باشد. مساحت قسمت رنگی کدام است؟



۱) ۸

۲) ۶

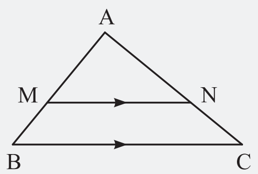
۳) ۵

۴) ۷

درسنامهٔ ۴

تالس

۱ـ قضیهٔ تالس: اگر خطی موازی یک ضلع مثلث به گونه‌ای رسم شود که دو ضلع دیگر آن را قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آن‌ها نسبت‌های مساوی پدید می‌آورند:



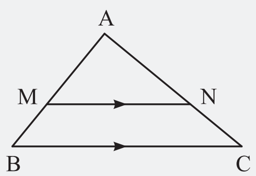
$$\boxed{\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}}$$

نکته: به کمک خواص تناسب می‌توان قضیهٔ تالس را به‌صورت‌های زیر نیز بیان کرد:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{AM}{AM+MB}=\frac{AN}{AN+NC}\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\Rightarrow\boxed{\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}}$$

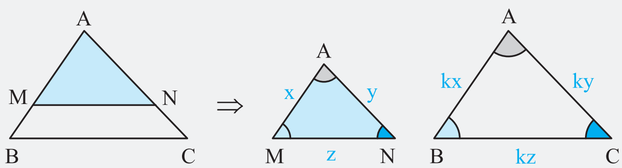
$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{AM+MB}{MB}=\frac{AN+NC}{NC}\Rightarrow\frac{AB}{MB}=\frac{AC}{NC}\Rightarrow\boxed{\frac{MB}{AB}=\frac{NC}{AC}}$$

۲ـ تعمیم قضیهٔ تالس (تالس جزء به کل): اگر خطی موازی یک ضلع مثلث به‌گونه‌ای رسم شود که دو ضلع دیگر آن را قطع کند، آن‌گاه مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب است. به‌طور کلی اگر طول پاره‌خط MN جزء داده‌ها یا خواسته‌های مسأله باشد، از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم:

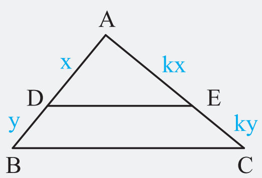


$$\boxed{\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}}$$

نتیجه: اضلاع مثلث AMN با اضلاع مثلث ABC نظیر به نظیر متناسب است و در ضمن زاویه‌های آن‌ها نیز برابر می‌باشد (دو مثلث متشابه‌اند).

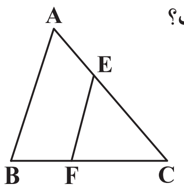


۳ـ عکس قضیهٔ تالس: اگر در یک مثلث خطی دو ضلع مثلث را به گونه‌ای قطع کند که روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط با نسبت‌های مساوی پدید آورد، آن‌گاه آن خط، موازی ضلع سوم مثلث است.



$$\boxed{\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow DE\parallel BC}$$

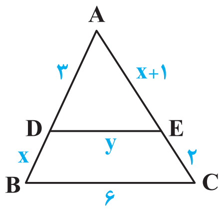
۲۹- در شکل مقابل $AB \parallel FE$ ، $BF = m + ۱$ ، $AE = ۳m + ۱$ و $\frac{EC}{FC} = \frac{۵}{۳}$ می‌باشد. طول پاره‌خط AE کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲

۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۳۰- در شکل مقابل، $BC \parallel DE$ است. $x + y$ کدام است؟



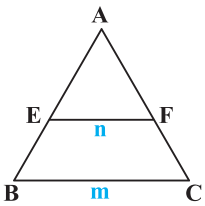
۱) ۵/۶

۲) ۶

۳) ۴/۶

۴) ۵

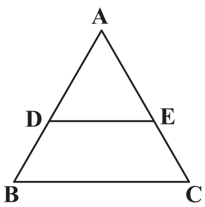
۳۱- در شکل مقابل، $EF \parallel BC$ ، $AB = ۱۲$ ، $BC = m$ و $EF = n$ می‌باشد. اگر $۲m^۲ - mn - ۳n^۲ = ۰$ باشد، طول پاره‌خط AE کدام است؟



۱) ۸ ۲) ۱۰

۳) ۶ ۴) ۹

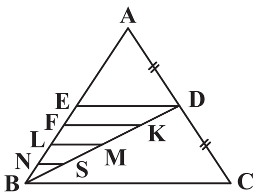
۳۲- در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ ، $DE = ۳$ و $BC = ۴$ است. حاصل $\frac{AD + AE}{DB + EC}$ کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۲

۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۷}$

۳۳- در شکل مقابل، تمام پاره‌خط‌های افقی موازی قاعدهٔ BC می‌باشند. اگر $EF = FL = LN = NB$ ، $NS = ۲$ و D وسط ضلع AC باشد، طول ضلع BC کدام است؟



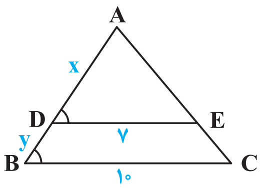
۱) ۸

۲) ۱۲

۳) ۱۶

۴) ۱۴

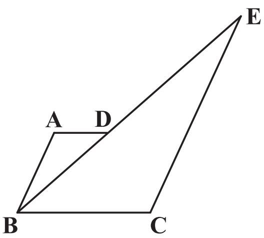
۳۴- در شکل مقابل، $\hat{B} = \hat{D}$ می‌باشد. حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟



۱) $\frac{۷}{۱۰}$ ۲) ۲

۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۳۵- در شکل مقابل $BC \parallel AD$ و $CE \parallel AB$ می‌باشد. اگر $AD = ۴$ ، $AB = ۶$ و $EC = ۱۵$ باشد، طول BC کدام است؟



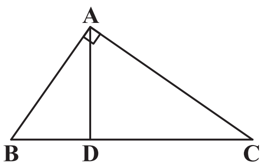
۱) ۸

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۷

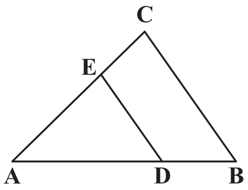
۳۶- در شکل مقابل، $AD = ۴$ ، $BD = ۲$ و $DC = ۶$ می‌باشد. طول ضلع AC کدام است؟



۱) ۶ ۲) $۲\sqrt{۶}$

۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۱۰}$

۳۷- در شکل مقابل، به‌ازای کدام مقادیر داده شده، $DE \parallel BC$ است؟



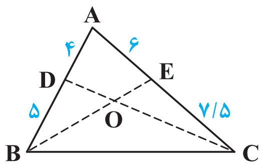
۱) $AB=۱۴$، $AD=۶$، $AC=۷$ و $AE=۳$

۲) $AB=۱۲$، $AD=۳$، $AC=۸$ و $AE=۶$

۳) $AD=۶$، $DB=۵$، $AE=۹$ و $EC=۸$

۴) $AC=۲۱$، $EC=۹$، $AB=۱۴$ و $AD=۵$

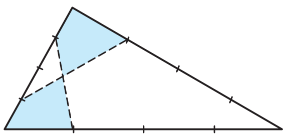
۳۸- در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟ تجربی خارج ۸۷



۱) $\frac{۲}{۳}$　　۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $\frac{۵}{۶}$　　۴) ۱

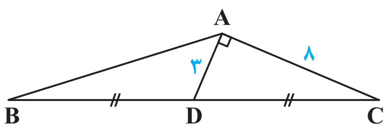
۳۹- در شکل مقابل، هر ضلع مثلث به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. دو چهارضلعی رنگی نسبت به هم کدام وضع را دارند؟ ریاضی خارج ۸۹



۱) هم‌مساحت　　۲) هم‌محیط

۳) هم‌نهشت　　۴) متشابه

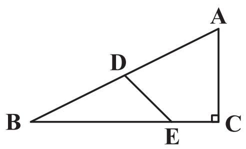
۴۰- در شکل مقابل، طول ضلع AB کدام است؟



۱) ۸　　۲) ۹

۳) ۱۰　　۴) ۱۱

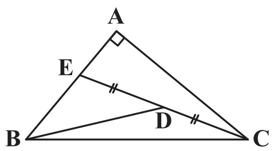
۴۱- در شکل مقابل، $AC=۶$ و $BC=۱۲$ می‌باشد. اگر $\frac{۱}{۳}=\frac{EC}{BE}$ و D وسط ضلع AB باشد، طول پاره‌خط DE کدام است؟



۱) ۴　　۲) $۳\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۳}$　　۴) ۳

۴۲- در شکل مقابل، مثلث BAC قائم‌الزاویه، $ED=DC$، $AC=۲EB$، $AE=۴$ و $BD=۱۰$ می‌باشد. طول ضلع AC کدام است؟



۱) ۸　　۲) ۱۲

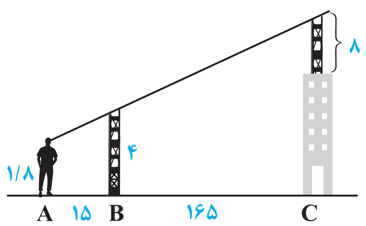
۳) ۶　　۴) ۱۰

۴۳- در شکل مقابل، یک کودک به بلندی قد ۱ متر، مقابل یک درخت که طول سایه‌اش ۶۰ متر است ایستاده و سایه‌اش روی امتداد سایهٔ درخت می‌باشد و نوک سایهٔ کودک نیز بر نوک سایهٔ درخت منطبق است. اگر طول سایهٔ کودک ۳ متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟

۱) ۳۰　　۲) ۲۰

۳) ۲۵　　۴) ۱۵

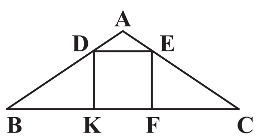
۴۴- در شکل مقابل، دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشمی ناظری به ارتفاع ۱/۸ متر، از ارتفاع دکل و یک تیرک ۴ متری در یک راستا است. بلندی برج چند متر است؟ ریاضی داخل ۸۷



۱) ۱۹/۸　　۲) ۲۰/۲

۳) ۲۰/۸　　۴) ۲۱/۲

۴۵- در شکل مقابل، DEFK مربع می‌باشد. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۵۰ و $BC=۲۰$ باشد، طول ضلع مربع کدام است؟



۱) ۲　　۲) $۴\sqrt{۲}$

۳) ۴　　۴) ۵

پاسخ‌های تشریحی

۱ ۱ نسبت‌ها را طوری تغییر می‌دهیم تا عبارت $x+۲y+۳z$ حاصل شود:

$$\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{x+۲y+۳z}{۲+۲(۳)+۳(۶)}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{x+۲y+۳z}{۲۶}=\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow ۵(x+۲y+۳z)=۳\times۲۶\Rightarrow x+۲y+۳z=\frac{۳\times۲۶}{۵}=۱۵/۶$$

۲ ۲ **روش اول:** با استفاده از ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{۲۴-a}{۱۸-b}=\frac{a}{b}=\frac{۲۴-a+a}{۱۸-b+b}=\frac{۲۴}{۱۸}=\frac{۴}{۳}$$

حال به کمک تناسب $\frac{a}{b}=\frac{۴}{۳}$ می‌توان گفت:

$$\frac{a}{b}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{a-b}{a+b}=\frac{۴-۳}{۴+۳}=\frac{۱}{۷}$$

روش دوم:

نیم‌نگاه

در تست‌هایی که یک نسبت داده شده و نسبت دیگری را می‌خواهد، می‌توان صورت کسرها را با هم و مخرج کسرها را نیز با هم برابر درنظر گرفت. این کار برای به‌دست آوردن طول پاره‌خط‌ها و ... مفید نیست.

$$\frac{۲۴-a}{۱۸-b}=\frac{a}{b}\Rightarrow\begin{cases}۲۴-a=a\Rightarrow a=۱۲\\ ۱۸-b=b\Rightarrow b=۹\end{cases}$$

حال مقادیر a و b را در نسبت $\frac{a-b}{a+b}$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{۱۲-۹}{۱۲+۹}=\frac{۳}{۲۱}=\frac{۱}{۷}$$

۳ ۴ از تناسب $\frac{m}{n}=\frac{a}{b}$، هر کجا که لازم باشد می‌توان نتیجه گرفت که $a=mk$ و $b=nk$. بنابراین داریم:

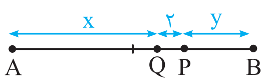
$$\frac{a}{b}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow a=۲k\ ,\ b=۳k\Rightarrow\frac{۲a+۲b}{a+۲b}=\frac{۴k+۶k}{۲k+۶k}=\frac{۱۰k}{۸k}=\frac{۵}{۴}$$

البته می‌توانستید $a=۲$ و $b=۳$ را نیز در نسبت $\frac{۲a+۲b}{a+۲b}$ جای‌گذاری کنید.

۴ ۲ کافی است صورت نسبت‌ها را با هم و مخرج آن‌ها را با هم جمع کنیم؛ یعنی:

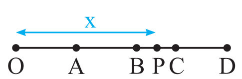
$$\frac{(a+۲b)+(۳b-c)+(۲c-۴b)}{۳+۶+۷}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{a+b+c}{۱۶}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow a+b+c=۴$$

۵ ۳ مطابق توضیحات سؤال، نحوه‌های قرارگیری نقاط به شکل مقابل می‌باشد. با فرض $BP=y$ و $QA=x$ داریم:



$$\begin{cases}\frac{BP}{AP}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{y}{x+۲}=\frac{۲}{۳}\\ \frac{QB}{QA}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{y+۲}{x}=\frac{۳}{۴}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳y-۲x=۴\\ -۴y+۳x=۸\end{cases}\Rightarrow x=۴۰,y=۲۸\Rightarrow AB=x+۲+y=۲۸+۲+۴۰=۷۰$$

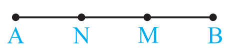
۶ ۴ فرض می‌کنیم $OP=x$ باشد. در این‌صورت داریم:



$$\Rightarrow\frac{AP}{PD}=\frac{BP}{PC}\Rightarrow\frac{x-۲}{۷-x}=\frac{x-۴}{۵-x}\Rightarrow(x-۲)(۵-x)=(۷-x)(x-۴)$$

$$\Rightarrow-\cancel{x^۲}+۵x-۱۰+۲x=-\cancel{x^۲}+۷x-۲۸+۴x\Rightarrow۴x=۱۸\Rightarrow x=\frac{۹}{۲}=۴/۵\Rightarrow OP=۴/۵$$

۷ ۳ با توجه به نسبت داده‌شده، نقاط M و N به‌صورت مقابل روی پاره‌خط AB قرار دارند. حال داریم:



$$\begin{cases}\frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۱}\Rightarrow\frac{AM+MB}{MB}=\frac{۳}{۱}\Rightarrow\frac{AB}{MB}=\frac{۳}{۱}\xrightarrow{AB=۱۲}MB=۴\\ \frac{BN}{AN}=\frac{۲}{۱}\Rightarrow\frac{BN+AN}{AN}=\frac{۳}{۱}\Rightarrow\frac{AB}{AN}=\frac{۳}{۱}\xrightarrow{AB=۱۲}AN=۴\end{cases}\Rightarrow MN=AB-AN-MB=۱۲-۴-۴=۴$$

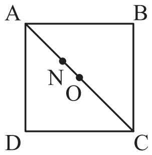
۸ **۲** ابتدا به کمک رابطهٔ فیثاغورس، طول قطر مربع را به‌دست می‌آوریم:

$$AB^۲+BC^۲=AC^۲\Rightarrow ۶^۲+۶^۲=AC^۲\Rightarrow AC=۶\sqrt{۲}$$

حال از تناسب $\frac{NC}{AN}=\frac{۳}{۲}$ داریم:

$$\frac{NC}{AN}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{NC}{AN+NC}=\frac{۳}{۲+۳}\Rightarrow\frac{NC}{AC}=\frac{۳}{۵}\xrightarrow{AC=۶\sqrt{۲}}\frac{NC}{۶\sqrt{۲}}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow NC=\frac{۱۸\sqrt{۲}}{۵}$$

مرکز مربع هم محل تلاقی قطرهای مربع می‌باشد که در وسط قطر واقع است، پس:



$$OC=\frac{۱}{۲}AC=\frac{۱}{۲}\times۶\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}$$

$$NO=NC-OC=\frac{۱۸\sqrt{۲}}{۵}-۳\sqrt{۲}=\frac{۱۸\sqrt{۲}-۱۵\sqrt{۲}}{۵}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۵}$$

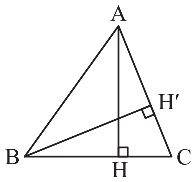
۹ **۱** **روش اول:** چون x واسطهٔ هندسی b و c می‌باشد، پس $\frac{x}{b}=\frac{c}{x}$ می‌باشد. حال داریم:

$$\frac{x}{b}=\frac{c}{x}\Rightarrow\frac{x}{b}=\frac{c}{x}=\frac{x+c}{b+x}$$

روش دوم: می‌توانستیم b را برابر ۴ و c را برابر ۹ فرض کنیم. در این صورت $x=۶$ خواهد بود. حال این اعداد را در تناسب‌های گزینه‌ها چک می‌کنیم که تنها در تناسب گزینهٔ (۱) صدق می‌کند:

$$\frac{x+c}{x+b}=\frac{c}{x}\Rightarrow\frac{۶+۹}{۶+۴}=\frac{۹}{۶}\Rightarrow\frac{۱۵}{۱۰}=\frac{۹}{۶}$$

۱۰ **۱** با توجه به شکل مقابل داریم:



$$\Rightarrow\frac{AH}{BH'}=\frac{AC}{BC}$$

۱۱ **۴** می‌دانیم در هر مثلث $\frac{h_b}{h_a}=\frac{a}{b}$ و $\frac{h_c}{h_a}=\frac{a}{c}$ می‌باشد، پس:

$$\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_c}{h_a}=\frac{b}{a}+\frac{a}{c}=\frac{۶}{۵}+\frac{۵}{۹}=\frac{۵۴+۲۵}{۴۵}=\frac{۷۹}{۴۵}$$

۱۲ **۲** می‌توان نسبت $\frac{h_a^۲}{h_bh_c}$ را به‌صورت ضرب دو نسبت $\frac{h_a}{h_b}$ و $\frac{h_a}{h_c}$ نوشت، یعنی:

$$\frac{h_a^۲}{h_bh_c}=\frac{h_a}{h_b}\times\frac{h_a}{h_c}$$

حال به جای نسبت ارتفاع‌ها، نسبت اضلاع را قرار می‌دهیم:

$$\frac{h_a}{h_b}\times\frac{h_a}{h_c}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{a}=\frac{bc}{a^۲}=\frac{۶\times۸}{۴^۲}=\frac{۴۸}{۱۶}=۳$$

۱۳ **۲** هر رابطهٔ هم‌درجه‌ای که بین اضلاع برقرار باشد، همان رابطه بین معکوس ارتفاع‌ها نیز برقرار است، پس:

$$a<b<c\Rightarrow\frac{۱}{h_a}<\frac{۱}{h_b}<\frac{۱}{h_c}\Rightarrow h_a>h_b>h_c$$

۱۴ **۴** یک رابطهٔ هم‌درجه بین ارتفاع‌ها داده شده، پس همین رابطه بین معکوس اضلاع برقرار است:

$$h_c=h_a+h_b\Rightarrow\frac{۱}{c}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\Rightarrow\frac{۱}{c}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}\Rightarrow\frac{۱}{c}=\frac{۳+۲}{۱۲}\Rightarrow\frac{۱}{c}=\frac{۵}{۱۲}\Rightarrow c=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

۱۵ **۱** با توجه به صورت سؤال، $h_a=h_b+h_c$ می‌باشد، پس:

$$h_a=h_b+h_c\Rightarrow\frac{۱}{a}=\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\Rightarrow\frac{۱}{a}=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۵}\Rightarrow\frac{۱}{a}=\frac{۱۵+۱۰}{۱۵۰}=\frac{۲۵}{۱۵۰}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow a=۶$$

۱۶ **۳** با توجه به روابط $S=\frac{۱}{۲}ah_a=\frac{۱}{۲}bh_b$ می‌توان گفت که $h_a=\frac{۲S}{a}$ و $h_b=\frac{۲S}{b}$ می‌باشند، پس:

$$h_a\times h_b=۱۶\Rightarrow\frac{۲S}{a}\times\frac{۲S}{b}=۱۶\Rightarrow\frac{۴S^۲}{ab}=۱۶\Rightarrow۴S^۲=۱۶ab\Rightarrow S^۲=۴ab\Rightarrow S=۲\sqrt{ab}$$

۱۷ **۲** می‌دانیم محیط مثلث به اضلاع a، b و c برابر $a+b+c$ می‌باشد، پس:

$$a+b+c=۲۳$$

با توجه به صورت سؤال که در آن صحبت از ارتفاع و مساحت مثلث شده است، می‌توان به جای هر ضلع با توجه به رابطهٔ $S=\frac{۱}{۲}a.h_a=\frac{۱}{۲}b.h_b=\frac{۱}{۲}c.h_c$ معادل اضلاع یعنی $a=\frac{۲S}{h_a}$، $b=\frac{۲S}{h_b}$ و $c=\frac{۲S}{h_c}$ را در تساوی $a+b+c=۲۳$ قرار داد:

$$\frac{۲S}{h_a}+\frac{۲S}{h_b}+\frac{۲S}{h_c}=۲۳\Rightarrow\frac{۲S}{۴}+\frac{۲S}{۶}+\frac{۲S}{\frac{۹}{۲}}=۲۳\Rightarrow۲S(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}+\frac{۲}{۹})=۲۳$$

$$\Rightarrow۲S(\frac{۹+۶+۸}{۳۶})=۲۳\Rightarrow۲S(\frac{۲۳}{۳۶})=۲۳\Rightarrow۲S=۳۶\Rightarrow S=۱۸$$

۱۸ **۲** ابتدا مساحت مثلث ABD را به‌دست می‌آوریم:

$$S_{ABD}=\frac{۱}{۲}\times AB\times DE=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۶=۲۴$$

دو مثلث ABD و ADC هم‌ارتفاع هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها با نسبت قاعده‌هایشان برابر است، یعنی:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}=\frac{BD}{DC}\xrightarrow{۲BD=۳DC\Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{۳}{۲}}\frac{۲۴}{S_{ADC}}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow S_{ADC}=\frac{۲}{۳}\times ۲۴=۱۶$$

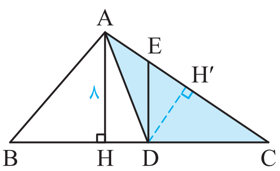
۱۹ **۲** مثلث ABC قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، چون یک زاویهٔ حادهٔ آن ۴۵° می‌باشد، بنابراین $AB=BC$ است و داریم:

$$AB^۲+BC^۲=AC^۲\Rightarrow x^۲+x^۲=(۸\sqrt{۲})^۲\Rightarrow x^۲=۶۴\Rightarrow x=۸\Rightarrow AB=BC=۸$$

با توجه به این‌که $BC=۸$ و $BD=۲$ می‌باشد، $DC=۶$ می‌شود. از آن‌جایی که دو مثلث ABC و ADC (رنگی) هم‌ارتفاع هستند، داریم:

$$\frac{S_{\text{رنگی}}}{S_{ABC}}=\frac{DC}{BC}\Rightarrow\frac{S_{\text{رنگی}}}{\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۸}=\frac{۶}{۸}\Rightarrow S_{\text{رنگی}}=\frac{۶}{۸}\times\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۸=۲۴$$

۲۰ **۱** مساحت مثلث ADC برابر است با:



$$S_{ADC}=\frac{۱}{۲}CD\times AH=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۸=۲۴$$

حال در مثلث ADC ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم می‌کنیم. DH' ارتفاع مثلث ADE نیز می‌باشد. پس دو مثلث ADE و ADC هم‌ارتفاع هستند و در نتیجه نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت قاعده‌های آن‌ها می‌باشد:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ADC}}=\frac{AE}{AC}\qquad (۱)$$

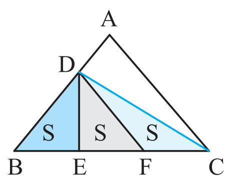
از طرفی از تناسب $\frac{AE}{EC}=\frac{۱}{۳}$ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\frac{AE}{EC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{AE}{AE+EC}=\frac{۱}{۱+۳}\Rightarrow\frac{AE}{AC}=\frac{۱}{۴}\qquad (۲)$$

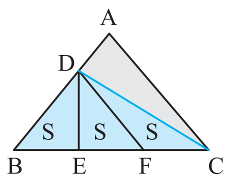
از روابط (۱) و (۲) و همچنین $S_{ADC}=۲۴$ داریم:

$$\frac{S_{ADE}}{۲۴}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow S_{ADE}=۶$$

۲۱ **۲** از D به C وصل می‌کنیم. چون سه مثلث BDE، EDF و FDC قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر دارند، پس مساحت آن‌ها برابر است.



از طرفی دو مثلث ACD و BCD هم‌ارتفاع هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها با نسبت قاعده‌های آن‌ها برابر است، یعنی:

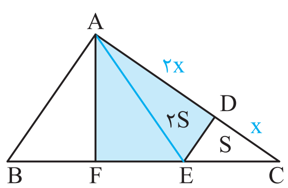


$$\frac{S_{ACD}}{S_{BCD}}=\frac{AD}{BD}\Rightarrow\frac{S_{ACD}}{۳S}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow S_{ACD}=\frac{۳}{۲}S$$

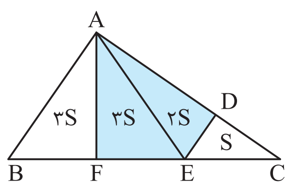
در صورت سؤال گفته شده $S_{ABC}=۳۶$، بنابراین داریم:

$$S+S+S+\frac{۳}{۲}S=۳۶\Rightarrow\frac{۹}{۲}S=۳۶\Rightarrow S=۸\Rightarrow S_{DEF}=S=۸$$

۲۲ **۴** از E به A وصل می‌کنیم. دو مثلث EDC و AED دارای ارتفاع‌های برابر هستند، پس مساحت آن‌ها به نسبت قاعده‌ها می‌باشد.



حال سه مثلث AEC، AFE و ABF دارای قاعده و ارتفاع برابر هستند، پس مساحت آن‌ها با هم برابر است. چون مساحت قسمت رنگی برابر ۲۰ می‌باشد، داریم:

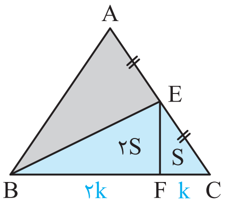


$$۳S+۲S=۲۰\Rightarrow ۵S=۲۰\Rightarrow S=۴$$

مساحت مثلث ABC برابر ۹S است، پس:

$$S_{ABC}=۹S=۹\times ۴=۳۶$$

۲۳ | ۱ با توجه به رابطهٔ $BC=۳CF$ با فرض $CF=k$ داریم:



$$CF=k \Rightarrow BC=۳k \Rightarrow BF=BC-CF=۳k-k=۲k$$

چون دو مثلث BEF و CEF هم‌ارتفاع می‌باشند، پس مساحت مثلث BEF دو برابر مساحت مثلث CEF است. همچنین چون دو مثلث ABE و CBE دارای قاعده و ارتفاع برابر هستند، پس مساحت آن‌ها با هم برابر است، یعنی $S_{ABE}=۳S$.

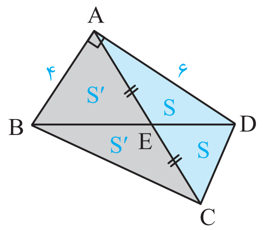
در صورت سؤال گفته شده $S_{ABC}=۴۲$، بنابراین:

$$S_{ABC}=۲S+S+۳S=۶S=۴۲ \Rightarrow S=۷$$

حال مساحت مثلث BEF برابر است با:

$$S_{BEF}=۲S=۲\times۷=۱۴$$

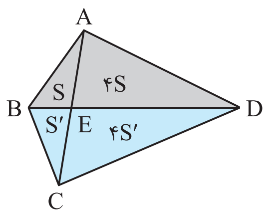
۲۴ | ۲ مثلث‌های ADE و CDE ارتفاع‌های برابر و قاعده‌های برابر دارند، پس مساحت آن‌ها با هم برابر است. به همین دلیل مساحت مثلث‌های ABE و CBE نیز با هم برابر است. پس داریم:



$$S_{ABD}=S+S'=\frac{۱}{۲}\times۴\times۶=۱۲$$

$$S_{ABCD}=S+S+S'+S'=۲S+۲S'=۲(S+S')=۲\times۱۲=۲۴$$

۲۵ | ۱ مثلث‌های ABE و ADE و همچنین CDE و CBE دارای ارتفاع‌های برابر هستند، پس نسبت مساحت آن‌ها به نسبت قاعده‌های آن‌ها می‌باشد، بنابراین داریم:

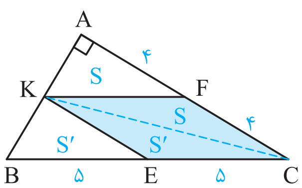


$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABCD}}=\frac{S+S'}{۵S+۵S'}=\frac{S+S'}{۵(S+S')}=\frac{۱}{۵}$$

۲۶ | ۴ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲ \Rightarrow ۱۰^۲=AB^۲+۸^۲ \Rightarrow AB^۲=۳۶ \Rightarrow AB=۶$$

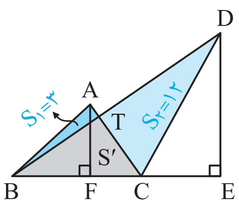
حال پاره‌خط KC را رسم می‌کنیم، مثلث‌های AKF و CKF و همچنین مثلث‌های BKE و CKE چون قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر دارند، مساحت آن‌ها با هم برابر است:



از طرفی $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times۶\times۸=۲۴$ می‌باشد، بنابراین داریم:

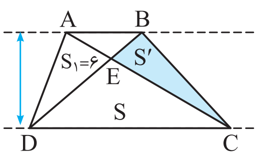
$$S_{ABC}=S+S+S'+S' \Rightarrow ۲۴=۲S+۲S' \Rightarrow S+S'=۱۲ \Rightarrow S_{\text{رنگی}}=۱۲$$

۲۷ | ۳ فرض می‌کنیم مساحت مثلث BTC برابر S' باشد. دو مثلث ABC و DBC قاعده‌های برابر دارند اما ارتفاع مثلث DBC دو برابر ارتفاع مثلث ABC است ($DE=۲AF$)، پس مساحت مثلث DBC دو برابر مساحت مثلث ABC می‌باشد. بنابراین با توجه به داده‌های سؤال در شکل مقابل داریم:



$$S_{DBC}=۲S_{ABC} \Rightarrow (۱۲+S')=۲(S'+۳) \Rightarrow ۱۲+S'=۲S'+۶ \Rightarrow S'=۶$$

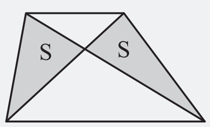
۲۸ | ۲ فرض می‌کنیم مساحت مثلث DEC برابر S باشد، مطابق شکل دو مثلث BDC و ADC، دارای قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر می‌باشند، پس مساحت آن‌ها برابر است و داریم:



$$S_{BDC}=S_{ADC}=\cancel{S}+S'=\cancel{S}+۶ \Rightarrow S'=۶$$

نیم‌نگاه

بال‌های پروانهٔ اسیر بین دو ساق یک ذوزنقه، هم‌مساحت می‌باشند.



۲۹ **۳** در مثلث ABC، چون FE || AB می‌باشد، از قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم:

$$\frac{EC}{AE}=\frac{FC}{BF}\Rightarrow\frac{EC}{۳m+۱}=\frac{FC}{m+۱}$$

حال چون در صورت سؤال، نسبت $\frac{EC}{FC}$ داده شده است، کافی است جای وسطین را در تناسب به‌دست آمده عوض کنیم:

$$\frac{EC}{۳m+۱}=\frac{FC}{m+۱}\Rightarrow\frac{EC}{FC}=\frac{۳m+۱}{m+۱}\Rightarrow\frac{۵}{۳}=\frac{۳m+۱}{m+۱}\Rightarrow ۳(۳m+۱)=۵(m+۱)$$

$$\Rightarrow ۹m+۳=۵m+۵\Rightarrow ۴m=۲\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

حال طول پاره‌خط AE برابر است با:

$$AE=۳m+۱=۳(\frac{۱}{۲})+۱=\frac{۵}{۲}$$

۳۰ **۱** چون DE || BC می‌باشد، سراغ قضیهٔ تالس می‌رویم و از آن‌جایی که y را می‌خواهیم، از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}\frac{۳}{۳+x}=\frac{x+۱}{۳+x}=\frac{y}{۶}\Rightarrow\frac{۳}{۳+x}=\frac{x+۱}{۳+x}\Rightarrow ۳=x+۱\Rightarrow x=۲\\ \frac{۳}{۳+x}=\frac{y}{۶}\xrightarrow{x=۲}\frac{۳}{۵}=\frac{y}{۶}\Rightarrow y=۳/۶\end{cases}\Rightarrow x+y=۵/۶$$

۳۱ **۱** داده‌های سؤال به طرز عجیبی آدم را یاد تالس می‌اندازد. بنابراین ابتدا نسبت $\frac{n}{m}$ را پیدا می‌کنیم:

$$۲m^۲-mn-۳n^۲=۰\Rightarrow(۲m-۳n)(m+n)=۰\Rightarrow\begin{cases}m+n=۰ \text{ غق‌ق}\\ ۲m-۳n=۰\Rightarrow\frac{n}{m}=\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

حال به کمک قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{AE}{۱۲}=\frac{n}{m}\xrightarrow{\frac{n}{m}=\frac{۲}{۳}}\frac{AE}{۱۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۳AE=۲\times ۱۲\Rightarrow AE=۸$$

۳۲ **۱** چون DE جزء داده‌های سؤال است از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{۳}{۴}$$

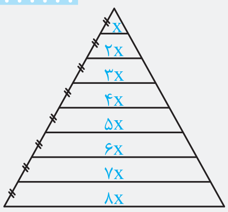
اما در سؤال، حاصل $\frac{AD+AE}{DB+EC}$ خواسته شده، بنابراین به کمک ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{AD}{AB-AD}=\frac{AE}{AC-AE}=\frac{۳}{۴-۳}\Rightarrow\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=۳\Rightarrow\frac{AD+AE}{DB+EC}=۳$$

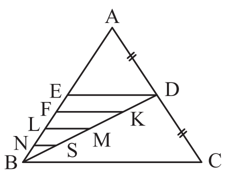
۳۳ **۳**

نیم‌نگاه

هرگاه یک ضلع مثلث به n قسمت مساوی تقسیم و از هر قسمت، خطوطی موازی قـاعده رسم شود، پاره‌خط‌های ایجادشده، تشکیل دنبالهٔ عددی با قدرنسبت x می‌دهند.



با توجه به مطلب فوق داریم:



$$NS=۲\Rightarrow LM=۴\Rightarrow FK=۶\Rightarrow ED=۸$$

از آن‌جایی که D وسط ضلع AC و ED || BC می‌باشد، پس:

$$ED=\frac{BC}{۲}\Rightarrow ۸=\frac{BC}{۲}\Rightarrow BC=۱۶$$

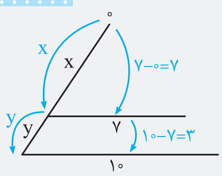
۳۴ **۳** در این سؤال به طور غیرمستقیم موازی بودن DE و BC مطرح شده است. چون $\widehat{B}=\widehat{D}$ می‌باشد، مطابق عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب DE || BC است. بنابراین به کمک تالس جزء به کل داریم:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{x}{x+y}=\frac{۷}{۱۰}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{x}{x+y-x}=\frac{۷}{۱۰-۷}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۷}{۳}$$

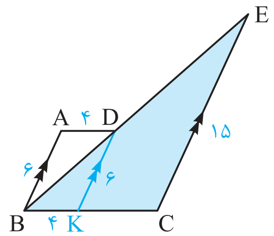
نیم‌نگاه

در مسائل تالس جزء به کل می‌توانیم نقطهٔ A را صفر فرض کرده و مانند شکل مقابل به کمک فلش‌زنی نسبت‌ها را پیدا کنیم:

$$\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۷}{۳}$$

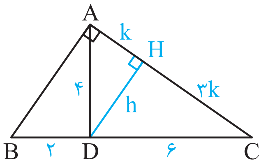


۳۵ ۳ از نقطهٔ D پاره‌خط DK را به موازات AB رسم می‌کنیم. چهارضلعی ADKB متوازی‌الاضلاع است، چون ضلع‌های روبه‌رو با هم موازی‌اند. بنابراین اضلاع روبه‌رو نیز با هم مساوی می‌باشند. حال به کمک تالس جزء به کل در مثلث EBC داریم:



$$\frac{BK}{BC}=\frac{KD}{CE}\Rightarrow\frac{۴}{BC}=\frac{۶}{۱۵}\Rightarrow BC=۱۰$$

۳۶ ۴ از D بر AC عمود AC می‌کنیم. چون DH و BA هر دو بر AC عمودند، پس با هم موازی‌اند. حال همه چیز برای استفاده از تالس در مثلث ABC فراهم است:



$$\frac{CH}{HA}=\frac{CD}{DB}\Rightarrow\frac{CH}{HA}=\frac{۶}{۲}\Rightarrow\frac{CH}{HA}=۳\Rightarrow HA=k, CH=۳k$$

حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های AHD و CHD داریم:

$$\begin{cases}h^۲+k^۲=۱۶\\ h^۲+۹k^۲=۳۶\end{cases}\overset{-}{\Rightarrow}۸k^۲=۲۰\Rightarrow k^۲=\frac{۲۰}{۸}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow k=\sqrt{\frac{۵}{۲}}\Rightarrow AC=۴k=۴\sqrt{\frac{۵}{۲}}=۲\sqrt{۱۰}$$

۳۷ ۱ طبق عکس قضیهٔ تالس، وقتی DE || BC است که پاره‌خط‌های ایجاد شده روی اضلاع مثلث متناسب باشند، بنابراین تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

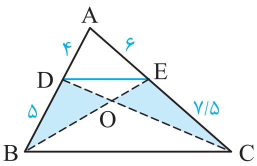
$$۱)\ \frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow\frac{۳}{۷}=\frac{۶}{۱۴}\ \checkmark$$

$$۲)\ \frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow\frac{۶}{۸}\neq\frac{۳}{۱۲}$$

$$۳)\ \frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}\Rightarrow\frac{۹}{۸}\neq\frac{۶}{۵}$$

$$۴)\ \frac{AD}{AB}=\frac{\overbrace{AE}^{AC-EC}}{AC}\Rightarrow\frac{۵}{۱۴}\neq\frac{\overbrace{۱۲}^{۲۱-۹}}{۲۱}$$

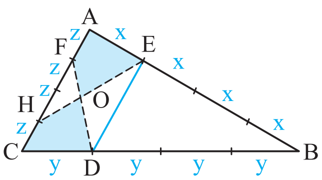
۳۸ ۴ D را به E وصل می‌کنیم. قطعات روی اضلاع مثلث، به‌طور عجیبی عکس تالس را فریاد می‌زنند. پس نسبت‌ها را چک می‌کنیم، اگر برابر بودند پاره‌خط DE موازی BC است.



$$\frac{۴}{۵}=\frac{۶}{۷/۵}\Rightarrow ۴\times۷/۵=۶\times۵\Rightarrow ۳۰=۳۰\Rightarrow DE \parallel BC$$

بنابراین چهارضلعی DECB ذوزنقه است. می‌دانیم مساحت بال‌های پروانهٔ متکی بر ساق‌های ذوزنقه با هم برابر است، پس $\frac{S_{OEC}}{S_{OBD}}=۱$.

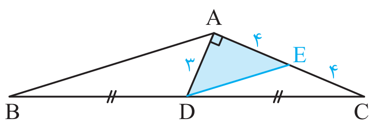
۳۹ ۱ D را به E وصل می‌کنیم. با توجه به اینکه هر ضلع به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است، چون قطعات ایجاد شده روی ضلع متناسب می‌باشند، پس طبق عکس قضیهٔ تالس DE || AC است، پس:



$$\frac{۳x}{x}=\frac{۳y}{y}\Rightarrow ۳=۳\Rightarrow DE \parallel AC$$

چون DE || AC است، پس مثلث‌های AEH و FDC هم‌ارتفاع بوده و قاعده‌های برابر نیز دارند، پس هم‌مساحت می‌باشند. حال اگر مثلث OFH را از هر دوی آن‌ها برداریم، دو چهارضلعی باقی‌مانده، هم‌مساحت خواهند بود.

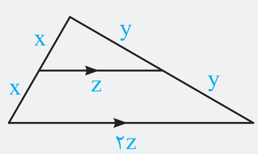
۴۰ ۳ از D به وسط AC یعنی نقطهٔ E وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ DAE به کمک قضیهٔ فیثاغورس DE = ۵ می‌شود. در مثلث ABC چون $\frac{CE}{EA}=\frac{CD}{DB}=۱$ می‌باشد، پس طبق عکس قضیهٔ تالس DE || AB است و به کمک تالس جزء به کل داریم:



$$\frac{CE}{CA}=\frac{DE}{AB}\Rightarrow\frac{۴}{۸}=\frac{۵}{AB}\Rightarrow AB=۱۰$$

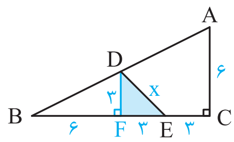
نیم‌نگاه

پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل می‌کند، موازی با ضلع سوم و نصف آن است.



۴۱ ۲ ابتدا طول پاره‌خط‌های BE و EC را به‌دست می‌آوریم:

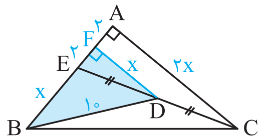
$$\frac{EC}{BE}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow EC=k\ ،\ BE=۳k \xrightarrow[BC=BE+EC]{BC=۱۲} ۱۲=k+۳k\Rightarrow k=۳\Rightarrow EC=۳\ ،\ BE=۹$$



حال از D به وسط ضلع BC وصل می‌کنیم. چون DF وسط دو ضلع AB و BC را به هم وصل کرده، پس موازی ضلع AC و نصف آن است. دقت کنید چون $DF \parallel AC$ و AC بر BC عمود است، پس DF نیز بر BC عمود می‌باشد. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ DFE داریم:

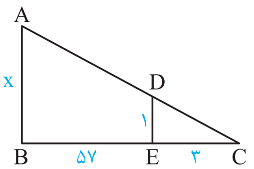
$$x^۲=۳^۲+۳^۲\Rightarrow x=۳\sqrt{۲}\Rightarrow DE=۳\sqrt{۲}$$

۴۲ ۲ از D به وسط AE وصل می‌کنیم. چون در مثلث EAC، پاره‌خط DF وسط دو ضلع مثلث را به هم وصل کرده، پس موازی ضلع AC و نصف آن است. دقت کنید چون $DF \parallel AC$ و AC بر BA عمود است، پس DF نیز بر BA عمود می‌باشد. بنابراین با فرض $EB=x$، طول پاره‌خط $AC=۲x$ خواهد بود و در نتیجه $DF=x$ می‌شود. حال در مثلث BFD به کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم:



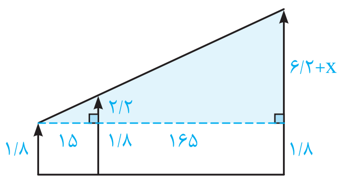
$$BD^۲=BF^۲+FD^۲\Rightarrow ۱۰۰=(x+۲)^۲+x^۲\Rightarrow x^۲+۲x-۴۸=۰\Rightarrow (x+۸)(x-۶)=۰\Rightarrow x=۶\Rightarrow AC=۲x=۲\times۶=۱۲$$

۴۳ ۲ ابتدا با توجه به توضیحات سؤال، شکل مقابل را رسم می‌کنیم. حال چون DE با AB موازی است، بنابراین به کمک قضیهٔ تالس داریم:



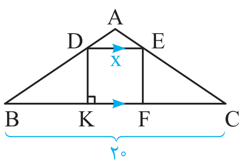
$$\frac{CE}{CB}=\frac{DE}{AB}\Rightarrow \frac{۳}{۶۰}=\frac{۱}{x}\Rightarrow ۳x=۶۰\Rightarrow x=۲۰$$

۴۴ ۲ فرض می‌کنیم بلندی برج x متر باشد. ابتدا شکل را ساده‌تر رسم می‌کنیم. چون خطوط موازی در شکل دیده می‌شود، سراغ قضیهٔ تالس می‌رویم. اما برای به کار بردن قضیهٔ تالس نیاز به یک مثلث داریم، بنابراین مثلثی در شکل ایجاد می‌کنیم و با بازسازی اطلاعات داده‌شده داریم:



$$\frac{۲/۲}{۶/۲+x}=\frac{۱۵}{۱۶۵+۱۵}\Rightarrow \frac{۲/۲}{۶/۲+x}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow x+۶/۲=۲۶/۴\Rightarrow x=۲۰/۲$$

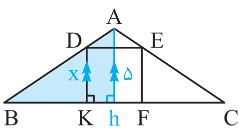
۴۵ ۳ چون DEFK مربع می‌باشد، پس $DE \parallel BC$ است. با فرض $DE=x$ به کمک تالس جزء به کل در مثلث ABC داریم:



$$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow \frac{x}{۲۰}=\frac{AD}{AB}\qquad (۱)$$

از طرفی چون مساحت مثلث برابر ۵۰ می‌باشد، داریم:

$$۵۰=\frac{۱}{۲}\times BC\times h\Rightarrow ۵۰=\frac{۱}{۲}\times ۲۰\times h\Rightarrow h=۵$$



حال به کمک تالس جزء به کل در مثلث رنگ‌شده داریم:

$$\frac{BD}{AB}=\frac{DK}{h}\Rightarrow \frac{BD}{AB}=\frac{x}{۵}$$

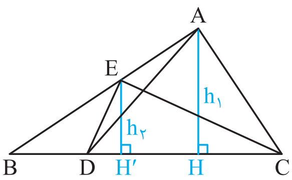
به کمک خواص تناسب می‌توان گفت:

$$\frac{BD}{AB}=\frac{x}{۵}\Rightarrow \frac{AB-BD}{AB}=\frac{۵-x}{۵}\Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{۵-x}{۵}$$

در تناسب (۱) مقدار $\frac{AD}{AB}=\frac{x}{۲۰}$ به‌دست آمده بود، پس:

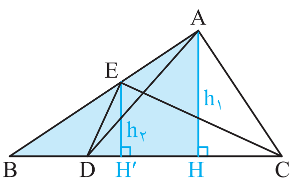
$$\frac{AD}{AB}=\frac{۵-x}{۵}\Rightarrow \frac{x}{۲۰}=\frac{۵-x}{۵}\Rightarrow ۵x=۲۰(۵-x)\Rightarrow ۵x=۱۰۰-۲۰x\Rightarrow ۲۵x=۱۰۰\Rightarrow x=۴$$

۴۶ ۴ دو مثلث EDC و ADC قاعدهٔ مشترک DC دارند، بنابراین نسبت مساحت آن‌ها با نسبت ارتفاع‌های وارد بر قاعدهٔ DC برابر است:



$$\frac{S_{EDC}}{S_{ADC}}=\frac{h_۲}{h_۱}$$

حال در مثلث BAH، چون $EH' \parallel AH$ است، می‌توانیم از تالس جزء به کل استفاده کنیم:



$$\frac{EH'}{AH}=\frac{BE}{BA}=\frac{BH'}{BH}\Rightarrow \frac{h_۲}{h_۱}=\frac{BE}{BA}\Rightarrow \frac{S_{EDC}}{S_{ADC}}=\frac{BE}{BA}$$