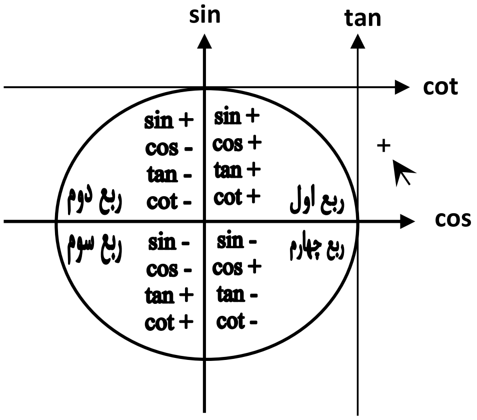
دایره ی مثلثاتی :

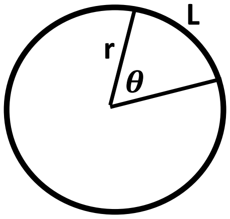
۱- طول شعاع آن یک واحد است.   ۲- چهار محور sin θ , cos θ , tan θ , cot θ روی آن قرار دارند   ۳- دارای چهار ربع (ناحیه) می باشد



۴ - علامت های نسبت های مثلثاتی در ناحیه ها متفاوت است. ۵- مرکز آن مبدا مختصات است

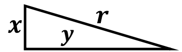
۶- جهت مثبت آن حرکت روی محیط دایره خلاف حرکت عقربه ساعت می باشد.

تبدیل واحد های اندازه گیری : $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}=\frac{G}{۲۰۰}$



در هر قطاع داریم (زاویه بر حسب رادیان): $L = r \times \theta$

جدول نسبت های مثلثاتی (مقدار زاویه ها) :

رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π		
زاویه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°	فرمول ها در مثلث	$r^۲ = x^۲ + y^۲$
$sin\theta$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰	$sin\theta=\frac{y}{r}$	$-۱ \le sin\theta \le ۱$
$cos\theta$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱	$cos\theta=\frac{x}{r}$	$-۱ \le cos\theta \le ۱$
$tan\theta$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞	۰	∞	۰	$tan\theta=\frac{y}{x}$	$tan\theta \in \mathbb{R}$
$cot\theta$	∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	∞	۰	∞	$cot\theta=\frac{x}{y}$	$cot\theta \in \mathbb{R}$

روابط مربوط به کمان ها

نسبت های مثلثاتی $(\pi - \theta)$ بر حسب θ (ربع دوم)	نسبت های مثلثاتی $(\frac{\pi}{۲} + \theta)$ بر حسب θ (ربع دوم)	نسبت های مثلثاتی $(\frac{\pi}{۲} - \theta)$ بر حسب θ (ربع اول)	نسبت های مثلثاتی $(-\theta)$ بر حسب θ (ربع چهارم)
$sin(\pi - \theta) = sin(\theta)$ $cos(\pi - \theta) = -cos(\theta)$ $tan(\pi - \theta) = -tan(\theta)$ $cot(\pi - \theta) = -cot(\theta)$	$sin\left(\frac{\pi}{۲} + \theta\right) = cos(\theta)$ $cos\left(\frac{\pi}{۲} + \theta\right) = -sin(\theta)$ $tan\left(\frac{\pi}{۲} + \theta\right) = -cot(\theta)$ $cot\left(\frac{\pi}{۲} + \theta\right) = -tan(\theta)$	$sin\left(\frac{\pi}{۲} - \theta\right) = cos(\theta)$ $cos\left(\frac{\pi}{۲} - \theta\right) = sin(\theta)$ $tan\frac{\pi}{۲} - (\theta) = cot(\theta)$ $cot\left(\frac{\pi}{۲} - \theta\right) = tan(\theta)$	$sin(-\theta) = -sin(\theta)$ $cos(-\theta) = cos(\theta)$ $tan(-\theta) = -tan(\theta)$ $cot(-\theta) = -cot(\theta)$
نسبت های مثلثاتی $(۲\pi + \theta)$ بر حسب θ (ربع اول)	**نسبت های مثلثاتی $(۲\pi - \theta)$ بر حسب θ (ربع چهارم)**	**نسبت های مثلثاتی $(\frac{۳\pi}{۲} \pm \theta)$ بر حسب θ (ربع چهارم و سوم)**	**نسبت های مثلثاتی $(\pi + \theta)$ بر حسب θ (ربع سوم)**
$sin(۲\pi + \theta) = sin(\theta)$ $cos(۲\pi + \theta) = cos(\theta)$ $tan(۲\pi + \theta) = tan(\theta)$ $cot(۲\pi + \theta) = cot(\theta)$	$sin(۲\pi - \theta) = -sin(\theta)$ $cos(۲\pi - \theta) = cos(\theta)$ $tan(۲\pi - \theta) = -tan(\theta)$ $cot(۲\pi - \theta) = -cot(\theta)$	$sin\left(\frac{۳\pi}{۲} \pm \theta\right) = -cos(\theta)$ $cos\left(\frac{۳\pi}{۲} \pm \theta\right) = \pm sin(\theta)$ $tan\left(\frac{۳\pi}{۲} \pm \theta\right) = \mp cot(\theta)$ $cot\left(\frac{۳\pi}{۲} \pm \theta\right) = \mp tan(\theta)$	$sin(\pi + \theta) = -sin(\theta)$ $cos(\pi + \theta) = -cos(\theta)$ $tan(\pi + \theta) = tan(\theta)$ $cot(\pi + \theta) = cot(\theta)$

روابط خاص در مثلث دلخواه

$a = bcosC + ccosB$

$b = acosC + ccosA$

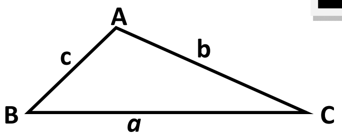
$c = bcosA + acosB$

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = ۲R$$

$s = \frac{۱}{۲} bcsinA$

$s = \frac{۱}{۲} acsinB$

$s = \frac{۱}{۲} absinC$



$A + B + C = ۱۸۰^{\circ}$

$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲b.c.cosA$

$b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲a.c.cosB$

$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲a.b.cosC$

نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل و ۲ برابر و ۳ برابر کمان

نسبت های مثلثاتی $(\alpha - \beta)$ بر حسب α و β (بسط مجموع)	نسبت های مثلثاتی $(\alpha + \beta)$ بر حسب α و β (بسط مجموع)
$sin(\alpha - \beta) = sin\,\alpha\, cos\,\beta - sin\,\beta\, cos\,\alpha$	$sin(\alpha + \beta) = sin\,\alpha\, cos\,\beta + sin\,\beta\, cos\,\alpha$
$cos(\alpha - \beta) = cos\,\alpha\, cos\,\beta + \sin\alpha \sin\beta$	$cos(\alpha + \beta) = cos\,\alpha\, cos\,\beta - \sin\alpha \sin\beta$
$tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{۱ + \tan\alpha.\tan\beta}$	$tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha.\tan\beta}$
$cot(\alpha - \beta) = \frac{cot\,\alpha.\cot\beta + ۱}{cot\,\alpha - \cot\beta}$	$cot(\alpha + \beta) = \frac{cot\,\alpha.\cot\beta - ۱}{cot\,\alpha + \cot\beta}$

نسبت های مثلثاتی (۳α) بر حسب α	نسبت های مثلثاتی (۲α) بر حسب α
$sin(۳\alpha) = ۳sin\,\alpha - ۴sin^۳\,\alpha$	$sin(۲\alpha) = ۲sin\,\alpha\, cos\,\alpha$
$cos(۳\alpha) = ۴cos^۳\,\alpha - ۳\,cos\,\alpha$	$cos(۲\alpha) = cos^۲\,\alpha - sin^۲\,\alpha$
$tan(۳\alpha) = \frac{۳\tan\alpha - \tan^۳\alpha}{۱ - ۳\tan^۲\alpha}$	$tan(۲\alpha) = \frac{۲\tan\alpha}{۱ - \tan^۲\alpha}$
$cot(۳\alpha) = \frac{۳\,cot\,\alpha - cot^۳\,\alpha}{۱ - ۳\cot^۲\alpha}$	$cot(۲\alpha) = \frac{cot^۲\,\alpha - ۱}{۲\,cot\,\alpha}$

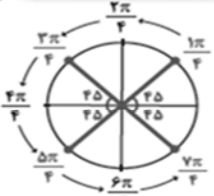
بررسی زوایای پرکاربرد و محور های مختصات از نوع مثلثاتی

۱) ضربدر با مدل ۳۰ درجه:

هر کدوم از ضلع‌های این ضربدر، با افق زاویه‌ی ۳۰ درجه (یعنی $\frac{\pi}{۶}$) می‌سازن . بنابراین زاویه‌هایی که روی ضربدر با مدل ۳۰ درجه قرار دارن بر حسب $\frac{\pi}{۶}$ هستن. (یعنی: $\frac{۱\pi}{۶}$، $\frac{۵\pi}{۶}$، $\frac{۷\pi}{۶}$ و $\frac{۱۱\pi}{۶}$)

۲) ضربدر با مدل ۴۵ درجه:

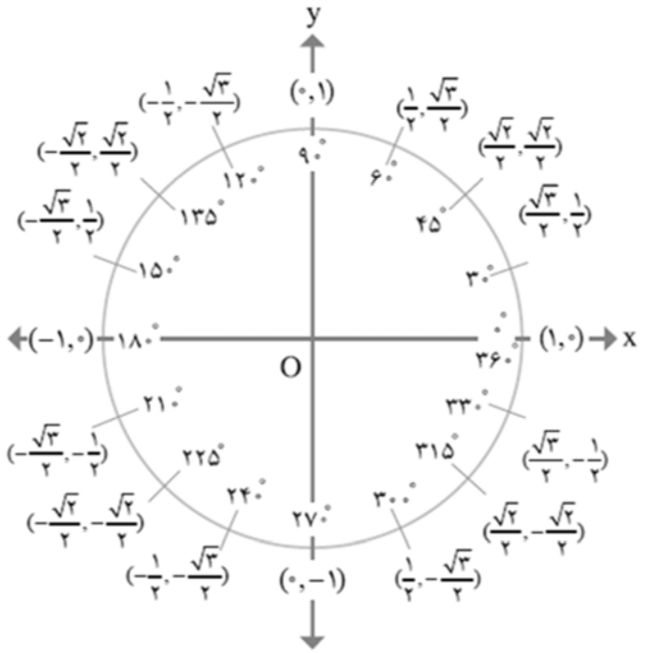
ضلع‌های این ضربدر، با افق زاویه‌ی ۴۵ درجه (یعنی $\frac{\pi}{۴}$) می‌سازن. بنابراین زاویه‌هایی که روی ضربدر با مدل ۴۵ درجه قرار دارن بر حسب $\frac{\pi}{۴}$ هستن. (یعنی: $\frac{۱\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴}$، $\frac{۵\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۴}$)

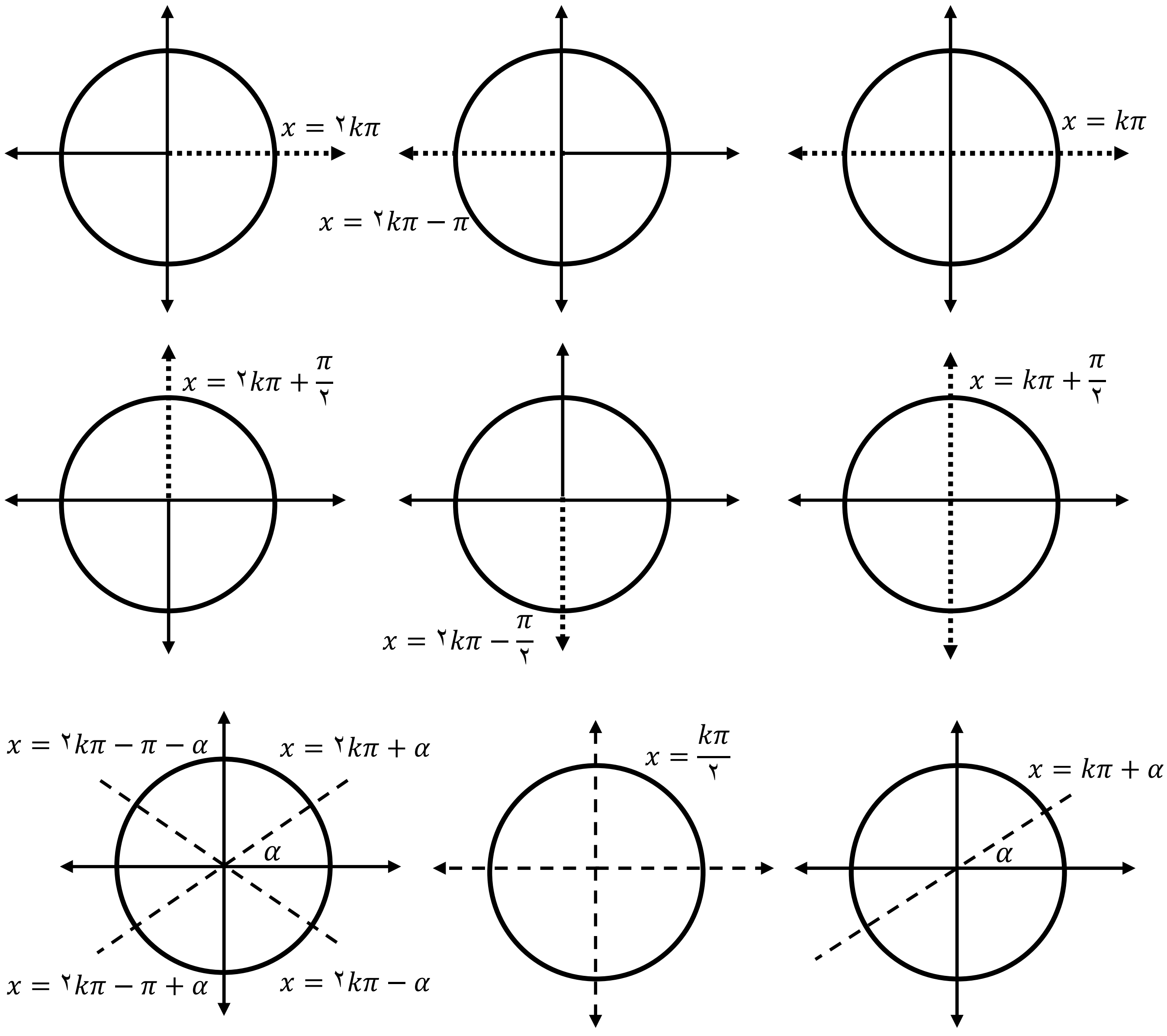


۳) ضربدر با مدل ۶۰ درجه:

اضلاع این ضربدر، زاویه‌ی ۶۰° یا $\frac{\pi}{۳}$ با افق ایجاد می‌کنن. بنابراین زاویه‌هایی که روی ضربدر با مدل ۶۰ درجه قرار دارن بر حسب $\frac{\pi}{۳}$ هستن. (یعنی: $\frac{۱\pi}{۳}$، $\frac{۲\pi}{۳}$، $\frac{۴\pi}{۳}$ و $\frac{۵\pi}{۳}$)

حال مقادیر دقیق سینوس و کسینوس بعضی از زوایای خاص را روی دایره مثلثاتی مشخص می کنیم.





معادلات مثلثاتی و حالت های خاص sin θ و cos θ

$\cos x = \cos \alpha \rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi - \alpha \end{cases}$

(حالت های خاص) → $\begin{cases} \cos x = ۰ \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \cos x = ۱ \rightarrow x = ۲k\pi \\ \cos x = -۱ \rightarrow x = ۲k\pi + \pi \end{cases}$

$\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$

(حالت های خاص) → $\begin{cases} \sin x = ۰ \rightarrow x = k\pi \\ \sin x = ۱ \rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \sin x = -۱ \rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$

معادلات مثلثاتی و حالت های خاص tan θ و cot θ

$$x = k\pi + \alpha$$

$\cot x = \cot \alpha \rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \alpha \\ x = k\pi + \alpha \end{cases}$

(حالت های خاص) → $\begin{cases} \cot x = ۰ \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \cot x = ۱ \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ \cot x = -۱ \rightarrow x = k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \end{cases}$

$\tan x = \tan \alpha \rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \alpha \\ x = k\pi + \alpha \end{cases}$

(حالت های خاص) → $\begin{cases} \tan x = ۰ \rightarrow x = k\pi \\ \tan x = ۱ \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ \tan x = -۱ \rightarrow x = k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \end{cases}$

تبدیل جمع به ضرب	تبدیل ضرب به جمع
$\sin\alpha + \sin\beta = ۲\sin\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)\cos\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)$	$\sin\alpha . \sin\beta = \frac{۱}{۲}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$
$\sin\alpha - \sin\beta = ۲\sin\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)\cos\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)$	$\cos\alpha . \cos\beta = \frac{۱}{۲}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$
$\cos\alpha + \cos\beta = ۲\cos\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)\cos\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)$	$\sin\alpha . \cos\beta = \frac{۱}{۲}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$
$\cos\alpha - \cos\beta = -۲\sin\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)\sin\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)$	$\cos\alpha . \sin\beta = \frac{۱}{۲}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$
$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$	$\tan\alpha . \tan\beta = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}$
$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$	$\cot\alpha . \cot\beta = \frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$

فرمول های پرکاربرد مثلثات در سوالات

۱) $\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=۱$

۲) $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

۳) $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

٤) $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{۲}\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)=\sqrt{۲}\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)$

٥) $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{۲}\sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)=-\sqrt{۲}\cos\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)$

٦) $۱+\cot^{۲}\alpha=\frac{۱}{\sin^{۲}\theta}$

۷) $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^{۲}\alpha$

۸) $\tan\theta+\cot\theta=\frac{۲}{\sin ۲\theta}$

۹) $\cos^{۲}\theta=\frac{۱+\cos ۲\theta}{۲}$

۱۰) $\sin^{۲}\theta=\frac{۱-\cos ۲\theta}{۲}$

۱۱) $\tan\alpha\,.\cot\beta=۱$

۱۲) $۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\theta}$

۱۳) $\sin ۲\theta=\frac{۲\tan\theta}{۱+\tan^{۲}\theta}$

۱۴) $\cos ۲\theta=\frac{۱-\tan^{۲}\theta}{۱+\tan^{۲}\theta}$

۱۵) $\cos ۲\alpha=۲\cos^{۲}\theta-۱$

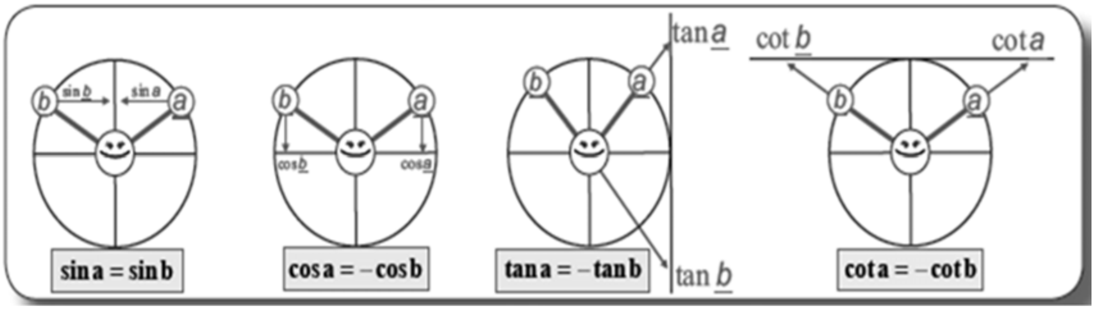
۱۶) $\sin^{۴}\theta+\cos^{۴}\theta=۱-\frac{۱}{۲}\sin^{۲}۲\theta$

۱۷) $(\sin\theta\pm\cos\theta)^{۲}=۱\pm\sin ۲\theta$

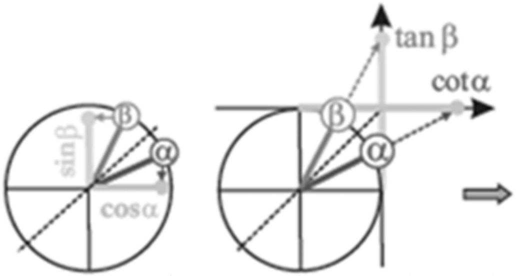
۱۸) $\cot\theta-\tan\theta=۲\cot ۲\theta$

۱۹) $\tan^{۲}\theta=\frac{۱-\cos ۲\theta}{۱+\cos ۲\theta}$

$\alpha+\beta=\pi \Longrightarrow$ β و α مکملند



$\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲} \Longrightarrow$ β و α متممند



$\Longrightarrow$

$\sin\beta=\cos\alpha$
$\tan\beta=\cot\alpha$

در هر یک از قسمت های زیر u بر حسب x فرض شده ، همچنین a عدد ثابتی است .

ردیف	تابع	مشتق	مثال	
۱	$\boldsymbol{y = \sin(x)}$	$y' = \cos(x)$	$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
۲	$\boldsymbol{y = \sin(ax)}$	$y' = a\cos(ax)$	$y = \sin(۹x)$	$y' = ۹\cos(۹x)$
۳	$\boldsymbol{y = \sin(u)}$	$y' = u'\cos(u)$	$y = \sin((۳x+۱)^{۲})$	$y' = ۶(۳x+۱)\cos(۳x+۱)^{۲}$
٤	$\boldsymbol{y = \sin^{n} u}$	$y' = nu'\cos(u)\sin(u)^{n-۱}$	$y = sin^{۵}۳x$	$y' = ۵(۳)\, cos\,۳x\, sin^{۴}۳x$
٥	$\boldsymbol{y = \cos(\,x)}$	$y' = -\sin(x)$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
٦	$\boldsymbol{y = \cos(\,ax)}$	$y' = -a\sin(ax)$	$y = \cos ۹x$	$y' = -۹\sin ۹x$
۷	$\boldsymbol{y = \cos(u)}$	$y' = -u'\sin(u)$	$y = \cos(x^{۲}-۳)$	$y' = -۲x\sin(x^{۲}-۳)$
۸	$\boldsymbol{y = \cos^{n} u}$	$y' = -nu'\sin(u)\,(\cos(u))^{n-۱}$	$y = \cos^{۳}۵x$	$y' = -۳\sin ۵x(\cos ۵x)^{۲}$
۹	$\boldsymbol{y = \tan(x)}$	$y' = (۱+\tan^{۲}x)$	$y = \tan x$	$y' = (۱+\tan^{۲}x)$
۱۰	$\boldsymbol{y = \tan(ax)}$	$y' = a(۱+\tan^{۲}ax)$	$y = \tan ۲x$	$y' = ۲(۱+\tan^{۲}۲x)$
۱۱	$\boldsymbol{y = \tan(u)}$	$y' = u'(۱+\tan^{۲}u)$	$y = \tan(۳x+۴)$	$y' = ۳(۱+\tan^{۲}(۳x+۴))$
۱۲	$\boldsymbol{y = \tan^{n} u}$	$y' = nu'(۱+\tan^{۲}u)(\tan u)^{n-۱}$	$y = \tan^{۳}۲x$	$y' = ۲(۳)(۱+$ $\tan^{۲}۲x)(\tan ۲x)^{۲}$
۱۳	$\boldsymbol{y = \cot(x)}$	$y' = -(۱+\cot^{۲}x)$	$y = \cot x$	$y' = -(۱+\cot^{۲}x)$
۱٤	$\boldsymbol{y = \cot(ax)}$	$y' = -a(۱+\cot^{۲}ax)$	$y = \cot ۵x$	$y' = -۵(۱+\cot^{۲}۵x)$
۱٥	$\boldsymbol{y = \cot(u)}$	$y' = -u'(۱+\cot^{۲}u)$	$y = \cot(x^{۳}-۱)$	$y' = -۳x^{۲}(۱+$ $\cot^{۲}(x^{۳}-۱))$
۱٦	$\boldsymbol{y = \cot^{n} u}$	$y' = -nu'(۱+\cot^{۲}u)(\cot u)^{n-۱}$	$y = \cot^{۶}(x^{۲})$	$y' = -۱۲x(۱+$ $\cot^{۲}(x^{۲}))\cot^{۵}(x^{۲})$

نمودارهای مثلثاتی