فصل ۱ ماتریس و کاربردها

قسمت اوّل: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تعریف هر جدول مستطیلی از دسته‌ای از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایهٔ آن ماتریس می‌نامیم. ماتریس‌ها را با حروف بزرگ نمایش می‌دهند. مانند:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۴ \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad C=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

سطر و ستون یک ماتریس

اعدادی که در امتداد یک خط افقی قرار گرفته‌اند، سطر ماتریس نامیده می‌شوند. هم‌چنین اعدادی که در امتداد یک خط قائم هستند، ستون ماتریس نامیده می‌شوند. برای هر درایهٔ ماتریس و به منظور مشخص کردن جایگاه آن، دو اندیس در نظر می‌گیریم اندیس سمت چپ شمارهٔ سطر و اندیس سمت راست شمارهٔ ستون آن درایه را مشخص می‌کند، پس a_{ij} یعنی درایهٔ روی سطر i ام و ستون j ام.

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱j} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲j} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{i۱} & a_{i۲} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

$$A=\begin{array}{c c} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۵ & -۳ & ۰ \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{سطر اول} \\ \text{سطر دوم} \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} & \text{ستون دوم} & & \end{array} & \end{array}$$

مرتبهٔ یک ماتریس

ماتریسی که دارای m سطر و n ستون است را یک ماتریس m در n گویند و بنا به قرارداد می‌گوییم مرتبهٔ ماتریس m در n است و آن را با نماد $A_{m\times n}$ یا $B_{m\times n}$، $\cdots$ نشان می‌دهیم. برای اختصار یک ماتریس m در n را با نماد $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ نشان می‌دهند که در آن $۱\le i\le m$ و $۱\le j\le n$ می‌باشند. مثلاً داریم:

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & -۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{۱۱}=۳ \quad , \quad a_{۱۲}=-۱ \\ a_{۲۱}=۲ \quad , \quad a_{۲۲}=-۲ \\ a_{۳۱}=۲ \quad , \quad a_{۳۲}=۴ \end{cases} \quad , \quad A=\left[i+j\right]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} ۱+۱ & ۱+۲ & ۱+۳ \\ ۲+۱ & ۲+۲ & ۲+۳ \\ ۳+۱ & ۳+۲ & ۳+۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

تست: ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{۲\times۲}$ را به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases} ۷ & i>j \\ ۵ & i=j \\ -۲ & i<j \end{cases}$ تعریف می‌کنیم. مجموع مربعات درایه‌های آن کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۲ ۳) ۱۰۱ ۴) ۱۰۳

پاسخ : بنا به فرض ماتریس A، ماتریسی ۲ در ۲ می‌باشد. داریم:

$$a_{ij}=\begin{cases} ۷ & i>j \\ ۵ & i=j \\ -۲ & i<j \end{cases} \Rightarrow a_{۱۱}=a_{۲۲}=۵ \ , \ a_{۲۱}=۷ \ , \ a_{۱۲}=-۲$$

$$A=\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع مربعات درایه‌ها}=۵^۲+۵^۲+۷^۲+(-۲)^۲=۵۰+۴۹+۴=۱۰۳ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۴) درست است.

نکته هر ماتریس $m\times n$ دقیقاً $m.n$ درایه دارد. مثلاً ماتریس ۳×۴ دقیقاً ۱۲ درایه دارد.

قرارداد: هرگاه در یک ماتریس $m\times n$ داشته باشیم $m=n=۱$، آن‌گاه یک ماتریس ۱×۱ خواهیم داشت. بنا به قرارداد چنین ماتریسی مساوی عدد داخل کروشه گرفته می‌شود:

$$\left[۳\right]_{۱\times۱}=۳ \quad , \quad \left[۲\right]_{۱\times۱}=۲$$

معرفی چند ماتریس خاص

۱ــ ماتریس مربعی: اگر در یک ماتریس تعداد سطرها و ستون‌ها مساوی باشد آن را ماتریس مربعی گویند. اگر A ماتریس $n \times n$ باشد، می‌گوییم A یک ماتریس مربعی مرتبهٔ n است و مطابق شکل‌های زیر هر ماتریس مربعی یک قطر فرعی و یک قطر اصلی دارد.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ & -۱ \\ -۴ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \qquad B=\begin{bmatrix} ۴ & -۱۰ \\ ۳ & ۱۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲} \qquad C=[۵]_{۱\times۱}=۵$$

قطر فرعی   قطر اصلی   قطر فرعی   قطر اصلی

۲ــ ماتریس سطری: ماتریسی که فقط یک سطر دارد، ماتریس سطری نامیده می‌شود. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی ماتریس‌های سطری هستند و صورت کلی آن‌ها $A_{۱\times n}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \end{bmatrix}_{۱\times n}$ می‌باشد.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۲ \end{bmatrix}_{۱\times۳} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}_{۱\times۴} \quad , \quad C=[۴]_{۱\times۱}=۴$$

۳ــ ماتریس ستونی: اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد، آن را ماتریس ستونی می‌نامیم. صورت کلی ماتریس‌های ستونی $A_{m\times۱}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ \vdots \\ a_{m۱} \end{bmatrix}$ است.

ماتریس‌های مقابل همگی ستونی هستند:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۱} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} ۴ \\ -۲ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}_{۵\times۱} \quad , \quad C=[-۳]_{۱\times۱}=-۳$$

۴ــ ماتریس قطری: ماتریس مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفرند، ماتریس قطری نامیده می‌شود. صورت کلی ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{n\times n}$، $a_{ij}=۰$، $i\neq j$ است. ماتریس‌های زیر همگی قطری‌اند.

$$A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \quad , \quad C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

تذکر درایه‌های قطر اصلی در ماتریس قطری می‌توانند صفر باشند.

۵ــ ماتریس اسکالر: اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، آن را یک ماتریس اسکالر می‌نامیم. صورت کلی آن $A=\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{n\times n}$، $a_{ij}=\begin{cases} ۰ & i\neq j \\ k & i=j \end{cases}$ می‌باشد. ماتریس‌های زیر همگی اسکالر هستند.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \quad , \quad C=[۲]_{۱\times۱}=۲$$

۶ــ ماتریس واحد یا ماتریس همانی: ماتریس مربعی است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی یک و بقیهٔ درایه‌های آن صفرند و آن را با نماد $I_{n\times n}$ یا I_n نشان می‌دهند (ماتریس همانی، ماتریس اسکالری است که در آن $k=۱$ می‌باشد).

$$I_۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad I_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

نکته هر ماتریس اسکالر را می‌توان به‌صورت $A_{n\times n}=kI_n$ نشان داد که در آن k یک عدد حقیقی است.

۷ــ ماتریس صفر: ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن صفر باشند، ماتریس صفر از مرتبهٔ $m\times n$ را با نماد $O_{m\times n}$ نشان می‌دهیم. صورت کلی آن $a_{ij}=۰$، $O_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m\times n}$ می‌باشد. ماتریس‌های زیر همگی ماتریس صفر هستند:

$$O_{۲\times۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad O_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad O_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

معمولاً ماتریس صفر را با نماد $\bar{O}$ نشان می‌دهند.

ماتریس‌های هم‌مرتبه

اگر تعداد سطرهای دو ماتریس با هم و تعداد ستون‌های آن‌ها نیز با یکدیگر برابر باشند، آن دو ماتریس هم‌مرتبه خوانده می‌شوند.

مثلاً ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۷ & ۲ & ۴ \\ ۸ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ هر دو از مرتبهٔ ۲×۳ هستند.

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم، هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند. به عبارت دیگر:

$$\forall\, i, j : a_{ij}=b_{ij} \Leftrightarrow \left[a_{ij}\right]=\left[b_{ij}\right]$$

تست: اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-y & ۹ \\ ۲ & z-۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & x+y \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آن‌گاه $x+y+z$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

پاسخ:

$$A=B \Rightarrow \begin{bmatrix} x-y & ۹ \\ ۲ & z-۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & x+y \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-y=۳ \\ x+y=۹ \\ z-۱=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=۳ \\ x+y=۹ \end{cases} ,\quad z=۶$$

$$x-y+x+y=۳+۹ \Rightarrow ۲x=۱۲ \Rightarrow x=۶ ,\ y=۹-۶=۳$$

بنابراین $x+y+z=۶+۳+۶=۱۵$ است. پس گزینهٔ (۳) درست است.

جمع دو ماتریس: فرض کنیم A و B دو ماتریس $m\times n$ باشند یا به عبارتی دو ماتریس هم‌مرتبه باشند. مجموع A و B یک ماتریس $m\times n$ است، به طوری‌که هر درایهٔ آن مساوی مجموع درایه‌های متناظر در A و B می‌باشد.

تست: مجموع درایه‌های ماتریس $A+B$ با فرض $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۵

پاسخ:

$$A+B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

و مجموع درایه‌های ماتریس $A+B$ برابر $۱+۲+۲+۳=۸$ است. پس گزینهٔ (۳) درست است.

نکته ۱ جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد یعنی همواره داریم: $A+B=B+A$

نکته ۲ تساوی $A+(B+C)=(A+B)+C$ برای هر سه ماتریس هم‌مرتبهٔ A، B و C درست است و به نام خاصیت شرکت‌پذیری در جمع ماتریس‌ها شناخته می‌شود.

قرینهٔ یک ماتریس

قرینهٔ ماتریس A، که به‌صورت $-A$ نوشته می‌شود، ماتریسی است که هر درایهٔ آن قرینهٔ درایهٔ متناظر در A می‌باشد و همواره داریم $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$، مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۴ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow -A=\begin{bmatrix} -۳ & ۱ \\ ۴ & -۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A+(-A)=(-A)+A=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۴ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۳ & ۱ \\ ۴ & -۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\bar{O}$$

نکته به طور کلی از جمع ماتریس صفر با هر ماتریس هم‌مرتبهٔ آن، خود آن ماتریس حاصل می‌شود و از جمع یک ماتریس با قرینه‌اش، ماتریس صفر به‌دست می‌آید. بنا به قرارداد، ماتریس صفر را عضو بی‌اثر یا خنثی در عمل جمع ماتریس‌ها می‌نامند.

تفاضل دو ماتریس

تفاضل ماتریس B از A که هم‌مرتبه هستند با نماد $A-B$ نشان داده می‌شود و به‌صورت $A+(-B)$ تعریف می‌شود.

ضرب یك عدد حقیقی در یک ماتریس

عدد حقیقی r و ماتریس A داده شده است. منظور از rA ماتریسی است که از ضرب عدد r در هر درایهٔ ماتریس A به‌دست می‌آید.

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n} ,\quad r\in\mathbb{R} \Rightarrow rA=r\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[ra_{ij}\right]_{m\times n}$$

تست: اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۲ & ۳\\ ۶ & ۵ & ۰\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۱ & ۳\\ ۳ & ۴ & ۰\end{bmatrix}$ و ماتریس C چنان باشد که $B-۲A+۳C=\bar{O}$، آن‌گاه درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس C کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ:

$$B-۲A+۳C=\bar{O}\Rightarrow ۳C=۲A-B\Rightarrow C=\frac{۲}{۳}A-\frac{۱}{۳}B$$

$$C=\frac{۲}{۳}\begin{bmatrix}-۲ & ۲ & ۳\\ ۶ & ۵ & ۰\end{bmatrix}-\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix}-۱ & ۱ & ۳\\ ۳ & ۴ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۴}{۳} & \frac{۴}{۳} & ۲\\ ۴ & \frac{۱۰}{۳} & ۰\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۱\\ ۱ & \frac{۴}{۳} & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۱ & ۱\\ ۳ & ۲ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow c_{۲۳}=۳\Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) درست است.

خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر A، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه و r و s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه داریم:

۱) $A+B=B+A$ خاصیت جابه‌جایی

۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ خاصیت شرکت‌پذیری

۳) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ خاصیت عضو خنثی در عمل جمع ماتریس‌ها

۴) $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$ خاصیت عضو قرینه

۵) $A\pm C=B\pm C\Leftrightarrow A=B$

۶) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

۷) $(r+s)A=rA+sA$

۸) $r(sA)=(rs)A$

۹) $\begin{cases}A=B\Rightarrow rA=rB\\ rA=rB\xrightarrow{r\neq ۰}A=B\end{cases}$

۱۰) $۰\times A=\bar{O}$

۱۱) $r\times\bar{O}=\bar{O}$

۱۲) $rA=\bar{O}\Rightarrow r=۰$ یا $A=\bar{O}$

۱۳) $۱A=A$

ضرب ماتریس‌ها

آ) ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی

اگر A یک ماتریس سطری از مرتبهٔ $۱\times n$ و B یک ماتریس ستونی از مرتبهٔ $n\times ۱$ باشد، حاصل‌ضرب A در B را با نماد $A\times B$ (یا AB) نشان می‌دهند که از مرتبهٔ ۱×۱ بوده و درایهٔ آن یک عدد حقیقی است و به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

هر درایهٔ ماتریس سطری A را در درایهٔ نظیرش از ماتریس ستونی B ضرب می‌کنیم. مثلاً درایهٔ اول A را در درایهٔ اول B، درایهٔ دوم A را در درایهٔ دوم B و الی آخر ضرب می‌کنیم، سپس این حاصل‌ضرب‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$A_{۱\times n}\times B_{n\times ۱}=$ (درایهٔ اول A × درایهٔ اول B) + (درایهٔ دوم A × درایهٔ دوم B) + ... + (درایهٔ nام A × درایهٔ nام B)

تست: اگر $A=\begin{bmatrix}-۳ & ۴ & -۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۵\\ ۲\\ ۶\end{bmatrix}$، آن‌گاه $A\times B$ کدام است؟

۱) ۱۸- ۲) ۲۰- ۳) ۲۲- ۴) ۱۶-

پاسخ:

$$A\times B=\begin{bmatrix}-۲ & ۴ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵\\ ۲\\ ۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-۲)\times ۵+۴\times ۲+(-۳)\times ۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲۰\end{bmatrix}=-۲۰\Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) درست است.

ب) ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی:

۱) اگر A و B دو ماتریس باشند، حاصل‌ضرب A در B وقتی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B یکی باشد، یعنی: $A_{m\times n}\times B_{n\times p}$

۲) اگر A از مرتبهٔ $m\times n$ و B از مرتبهٔ $n\times p$ باشد، آن‌گاه $A\times B$ تعریف می‌شود و ماتریسی از مرتبهٔ $m\times p$ است: $A_{m\times n}\times B_{n\times p}=C_{m\times p}$

۳) جهت به‌دست آوردن هر یک از درایه‌های ماتریس $A\times B$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

ستون اول ماتریس B × سطر اول ماتریس A = درایهٔ سطر اول و ستون اول $A\times B$

ستون دوم ماتریس B × سطر اول ماتریس A = درایهٔ سطر اول و ستون دوم $A\times B$

⋮ ⋮ ⋮

ستون jام ماتریس B × سطر iام ماتریس A = درایهٔ سطر iام و ستون jام $A\times B$

به مثال مقابل توجه کنید:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}_{2\times3} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix} -1\times1+2\times(-3)+3\times0 & -1\times2+2\times1+3\times6 \\ 0\times1+4\times(-3)+(-5)\times0 & 0\times2+4\times1+(-5)\times6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 18 \\ -12 & -26 \end{bmatrix}$$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}_{3\times2}$، آن‌گاه حاصل‌ضرب درایه‌های ماتریس $A\times B$ کدام است؟

۱) ۲۵۰ ۲) ۳۶۰- ۳) ۳۰۰- ۴) ۴۰۰

پاسخ:

$$A_{2\times3}\times B_{3\times2} = C_{2\times2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$c_{11} =$ سطر اول ماتریس A × ستون اول ماتریس B $= \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\times1-4+0=-2$

$c_{12} =$ سطر اول ماتریس A × ستون دوم ماتریس B $= \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 4+12+2=18$

$c_{21} =$ سطر دوم ماتریس A × ستون اول ماتریس B $= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3-1+0=2$

$c_{22} =$ سطر دوم ماتریس A × ستون دوم ماتریس B $= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 6+3-4=5$

بنابراین $C = \begin{bmatrix} -2 & 18 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ و حاصل‌ضرب درایه‌های آن برابر ۳۶۰- است. پس گزینهٔ (۲) درست است.

تست: اگر $\begin{bmatrix} x & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4y & y-2 \end{bmatrix}$، آن‌گاه $x-y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: ماتریس سمت چپ 1×3 و ماتریس سمت راست 3×2 است، پس حاصل‌ضرب آن‌ها تعریف می‌شود و یک ماتریس 1×2 است.

$$\begin{bmatrix} x & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\times1+0+1\times3 & 4x-2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3 & 4x \end{bmatrix}$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x+3 & 4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4y & y-2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3=4y \\ 4x=y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3=4y \\ y=4x+2 \end{cases} \Rightarrow x+3=4(4x+2)$$

$$\Rightarrow x+3=16x+8 \Rightarrow 15x=-5 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \quad , \quad y=2+4x=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

$x-y=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{3}{3}=-1 \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$، آن‌گاه درایهٔ سطر دوم و ستون سوم $A\times B$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۱۴

پاسخ:

$A\times B$ درایهٔ سطر دوم و ستون سوم $=$ (سطر دوم A) × (ستون سوم B) $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 2+0+12=14 \Rightarrow$ گزینهٔ (۴) درست است.

نوشتن سطر و ستون خاصی از $A \times B$ بدون نوشتن همهٔ درایه‌های آن

فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۰ & -۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & -۶ & ۵ \end{bmatrix}$، آن‌گاه داریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۵ & -۶ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۶ & -۲۱ & ۶ \\ -۴ & -۲ & -۴ \\ -۳ & ۷ & ۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین سطر دوم ماتریس $A \times B$ برابر است با $[-۴ \quad -۲ \quad -۴]$، اما به محاسبات زیر توجه کنید:

$$(\text{سطر دوم ماتریس } A) \times (\text{ماتریس } B) = [-۲ \quad ۰]\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۵ & -۶ & ۰ \end{bmatrix} = [-۴ \quad -۲ \quad -۴]$$

و به طور کلی داریم:

نکته اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ آن‌گاه:

$A \times B$ سطر i ام $= (A$ سطر i ام$) \times (B$ ماتریس$)$

$A \times B$ ستون j ام $= (A$ ماتریس$) \times (B$ ستون j ام$)$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل‌ضرب سطر دوم در ستون سوم ماتریس $A \times B$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ:

$$A \times B \text{ سطر دوم ماتریس } = (\text{سطر دوم ماتریس } A) \times (\text{ماتریس } B) = [۰ \quad -۱]\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = [-۱ \quad -۱ \quad -۱]$$

$$A \times B \text{ ستون سوم ماتریس } = (\text{ماتریس } A) \times (\text{ستون سوم } B) = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$(\text{سطر دوم ماتریس } A \times B) \times (\text{ستون سوم ماتریس } A \times B) = [-۱ \quad -۱ \quad -۱]\begin{bmatrix} ۴ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = -۴ + ۱ - ۲ = -۵ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) درست است.

ویژگی‌های ضرب دو ماتریس

اگر A و B دو ماتریس باشند، به طوری‌که $A \times B$ تعریف شود و با فرض این‌که m و n اعداد حقیقی باشند، داریم:

۱) $(mA) \times (nB) = (mn)A \times B$

۲) $(mA) \times B = A \times (mB) = m(A \times B)$

۳) $(-A) \times (-B) = A \times B$

۴) $A \times (-B) = (-A) \times B = -A \times B$

۵) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد، یعنی تساوی $A \times B = B \times A$ عموماً برقرار نیست.

۶) اگر A یک ماتریس مربعی مرتبهٔ n باشد، همواره داریم $A_{n \times n} \times I_n = I_n \times A_{n \times n} = A_{n \times n}$ (I_n عضو خنثی در عمل ضرب ماتریس‌های مربعی مرتبهٔ n است.)

۷) اگر A، B و C سه ماتریس باشند، در صورتی که $(A \times B) \times C$ و $A \times (B \times C)$ تعریف شوند، داریم $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

۸) ضرب ماتریس‌ها نسبت به جمع آن‌ها خاصیت پخشی یا توزیع‌پذیری دارد. یعنی اگر A، B و C سه ماتریس باشند، به شرط تعریف ضرب‌های زیر داریم:

$(B + C) \times A = B \times A + C \times A$ ، $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

۹) قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست. یعنی اگر $A \times B = A \times C$ باشد، عموماً نمی‌توان نتیجه گرفت $B = C$

۱۰) اگر $B = C$ باشد، آن‌گاه می‌توان نوشت $A \times B = A \times C$ و $B \times A = C \times A$

۱۱) ممکن است حاصل‌ضرب دو ماتریس غیرصفر برابر ماتریس صفر باشد.

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \bar{O}$$

بنابراین اگر $A \times B = \bar{O}$ باشد ممکن است ماتریس‌های A و B، ماتریس صفر باشند یا نباشند.

تست: اگر ماتریس A چنان باشد که $A\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}A$ و درایه‌های A اعداد صحیح مثبت باشند، کم‌ترین مقدار مجموع درایه‌های A کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: برای این‌که ضرب داده‌شده و تساوی ماتریسی فوق تعریف شود، باید ماتریس A، ۲×۲ باشد. یعنی $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ و داریم:

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a+۲b & a\\ c+۲d & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+c & b+d\\ ۲a & ۲b\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+۲b=a+c\\ a=b+d\\ c+۲d=۲a\\ c=۲b\end{cases}\Rightarrow a=b+d\ ,\ c=۲b$$

به ازای $b=۱$ داریم $c=۲$ و $a=d+۱$، پس $a+b+c+d=۴+۲d$ و به ازای $d=۱$ کم‌ترین مقدار آن، که عدد ۶ است به‌دست می‌آید؛ لذا گزینهٔ (۳) درست است.

تست: اگر $A=[۲i-j]_{۳\times۳}$ و $B=[i^۲+j^۲]_{۳\times۳}$، آن‌گاه درایهٔ سطر دوم و ستون سوم $A\times B-B\times A$ کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۲۸

پاسخ:

$$A\times B=[۲i-j]_{۳\times۳}\times[i^۲+j^۲]_{۳\times۳}\Rightarrow \text{درایهٔ سطر دوم و ستون سوم}=\begin{bmatrix}۳ & ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱۰\\ ۱۳\\ ۱۸\end{bmatrix}=۳۰+۲۶+۱۸=۷۴$$

$$B\times A=[i^۲+j^۲]_{۳\times۳}\times[۲i-j]_{۳\times۳}\Rightarrow \text{درایهٔ سطر دوم و ستون سوم}=\begin{bmatrix}۵ & ۸ & ۱۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\ ۱\\ ۳\end{bmatrix}=-۵+۸+۳۹=۴۲$$

$(A\times B-B\times A)$ درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس $=۷۴-۴۲=۳۲\Rightarrow$ گزینهٔ (۳) درست است.

نکتهٔ ۱ برای هر دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبهٔ A و B، حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی $A\times B$ با حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی $B\times A$ برابر است. مثلاً برای ماتریس‌های ۲×۲ داریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+bz & ay+bt\\ cx+dz & cy+dt\end{bmatrix}\ ,\ B\times A=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+cy & bx+dy\\ az+ct & bz+dt\end{bmatrix}$$

$A\times B$ حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی $=B\times A$ حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی $=ax+bz+cy+dt$

تست: اگر ماتریس‌های $A_{۳\times۳}$ و $B_{۳\times۳}$ چنان باشند که $A\times B=\begin{bmatrix}۶ & ۱۴ & ۳۱\\ ۱ & -۳ & ۷\\ -۵ & -۱ & ۳۰\end{bmatrix}$ و $B\times A=\begin{bmatrix}۶ & -۱۴ & ۶\\ -۸ & ۱۶ & ۰\\ ۱ & ۳۴ & a\end{bmatrix}$، آن‌گاه مقدار a کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ: با توجه به نکتهٔ فوق حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی $A\times B$ و $B\times A$ برابرند، پس داریم:

$۶+۱۶+a=۶-۳+۳۰\Rightarrow a+۲۲=۳۳\Rightarrow a=۱۱\Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

نکتهٔ ۲ برای هر دو ماتریس $A_{۲\times۲}$ و $B_{۲\times۲}$ درایه‌های قطر اصلی $A\times B-B\times A$ قرینهٔ یکدیگرند. با توجه به ماتریس‌های A و B در مثال نکتهٔ۱ داریم:

$$A\times B-B\times A=\begin{bmatrix}bz-cy & \bigcirc\\ \bigcirc & -(bz-cy)\end{bmatrix}$$

تست: اگر A و B دو ماتریس مربعی ۲×۲ باشند، آن‌گاه ماتریس $A\times B-B\times A$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\begin{bmatrix}۶ & ۴\\ ۰ & -۶\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۶ & ۴\\ ۰ & ۶\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۱۹ & ۳\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ ۴ & ۱۰\end{bmatrix}$

پاسخ: در ماتریس $\begin{bmatrix}۶ & ۴\\ ۰ & -۶\end{bmatrix}$ درایه‌های قطر اصلی قرینهٔ یکدیگرند، پس فقط این ماتریس می‌تواند برابر $A\times B-B\times A$ باشد. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

توان طبیعی ماتریس‌ها

پرسش: ماتریس A از مرتبه $m \times n$ را در نظر می‌گیریم، با چه شرطی $A \times A$ معنی دارد؟

پاسخ: $A \times A$ وقتی معنی دارد که تعداد سطر و ستون‌های آن برابر باشد $(m=n)$، یعنی A یک ماتریس مربعی باشد.

قرارداد: اگر A یک ماتریس مربعی باشد، $A \times A$ را با $A^۲$ نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$A^۱ = A$$
$$A^۲ = A \times A$$
$$A^۳ = A^۲ \times A = (A \times A) \times A = A \times (A \times A)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$A^{n+۱} = A^n \times A \qquad (\text{عدد طبیعی } n)$$

چند ویژگی از توان ماتریس‌ها

اعداد طبیعی m و n و ماتریس مربعی A مفروض هستند، داریم:

۱) $A^n \times A = A \times A^n = A^{n+۱}$

۲) $A^n \times A^m = A^m \times A^n = A^{m+n}$

۳) $(A^n)^m = (A^m)^n = A^{mn}$

۴) $I^n = I$ (I ماتریس واحد است.)

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix}$، در این‌صورت $A^۳$ کدام است؟

۱) I ۲) $-I$ ۳) A ۴) $-A$

پاسخ:

$$A^۲ = A \times A = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹-۸ & -۶+۶ \\ ۱۲-۱۲ & -۸+۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

$A^۳ = A^۲ \times A = I \times A = A \Rightarrow$ گزینهٔ (۳) درست است.

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A + A^۲ + A^۳ + \dots + A^{۱۳۹۵}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳۹۴ ۳) ۱۳ ۴) ۱۳۹۵

پاسخ:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۳ = A^۲ \times A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \bar{O} \Rightarrow A^۴ = A^۵ = \dots = \bar{O}$$

$$A + A^۲ + A^۳ + \dots + A^{۱۳۹۵} = A + A^۲ + \bar{O} + \bar{O} + \dots + \bar{O} = A + A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} ۷+۴+۱ = ۱۲ \Rightarrow$ گزینهٔ (۱) درست است.

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B \times A^n = \begin{bmatrix} ۴ & ۴۱ \\ ۳ & ۳۲ \end{bmatrix}$، آن‌گاه n کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad A^۳ = A^۲A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

و به طور استقرایی نتیجه می‌شود $A^n = \begin{bmatrix} ۱ & n \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، بنابراین داریم:

$$B \times A^n = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & n \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۴n+۱ \\ ۳ & ۳n+۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۴۱ \\ ۳ & ۳۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۴n+۱ = ۴۱ \\ ۳n+۲ = ۳۲ \end{cases} \Rightarrow n = ۱۰ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۴) درست است.

خواص ماتریس‌های قطری و اسکالر

۱) اگر A یک ماتریس قطری باشد، برای محاسبهٔ A^n کافی است که درایه‌های قطر اصلی A را به توان n برسانیم. به طور نمونه داریم:

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^3=\begin{bmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{bmatrix}$$

تست: اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس A^3-A کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ A^3-A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

۲) مجموع، تفاضل و حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری هم‌مرتبه، ماتریسی قطری است.

۳) ضرب ماتریس‌های قطری هم‌مرتبه خاصیت جابه‌جایی دارد:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax & 0 & 0 \\ 0 & by & 0 \\ 0 & 0 & cz \end{bmatrix}$$

۴) ضرب ماتریس قطری از چپ در ماتریس A:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax & ay & az \\ bm & bn & bp \\ c\alpha & c\beta & c\gamma \end{bmatrix}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید a در سطر اول A، b در سطر دوم A و c در سطر سوم A ضرب می‌شود.

۵) ضرب ماتریس قطری از راست در ماتریس A:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax & by & cz \\ am & bn & cp \\ a\alpha & b\beta & c\gamma \end{bmatrix}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید a در ستون اول A، b در ستون دوم A و c در ستون سوم A ضرب می‌شود.

۶) حاصل‌ضرب ماتریس اسکالر با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه با آن خاصیت جابه‌جایی دارد.

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} kx & ky & kz \\ km & kn & kp \\ k\alpha & k\beta & k\gamma \end{bmatrix}$$

۷) برای ماتریس اسکالر $A=kI$ داریم $A^n=k^nI$ (n عددی طبیعی است.)

ماتریس‌های تعویض‌پذیر

اگر A و B ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبه باشند، به طوری‌که $A\times B=B\times A$، در این صورت ماتریس‌های A و B را ماتریس‌های تعویض‌پذیر می‌نامند. برخی از نکات این ماتریس‌ها به شرح زیر است:

۱) اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$، آن‌گاه همهٔ ماتریس‌های تعویض‌پذیر با A به‌صورت $B=\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$ می‌باشند.

۲) ضرب دو ماتریس قطری دارای خاصیت تعویض‌پذیری است.

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \Rightarrow A\times B=B\times A=\begin{bmatrix} ad & 0 & 0 \\ 0 & be & 0 \\ 0 & 0 & cf \end{bmatrix}$$

۳) ماتریس‌های $A_{n\times n}$ و $I_{n\times n}$ همواره تعویض‌پذیرند.

۴) اگر A و B ماتریس‌های تعویض‌پذیر باشند $(A\times B=B\times A)$، آن‌گاه اتحادهای جبری بین ماتریس‌ها برقرار می‌شود:

آ) $(A\pm B)^{۲}=A^{۲}\pm ۲A\times B+B^{۲}$

ب) $(A+B)\times(A-B)=A^{۲}-B^{۲}$

پ) $(A+B)\times(A^{۲}-A\times B+B^{۲})=A^{۳}+B^{۳}$

ت) $(A-B)\times(A^{۲}+A\times B+B^{۲})=A^{۳}-B^{۳}$

نتیجه چون $A_{n\times n}$ و $I_{n\times n}$ تعویض‌پذیر هستند پس اتحادهای فوق برای آن‌ها برقرار است. مثلاً داریم:

$$(I+A)^{۲}=I^{۲}+۲I\times A+A^{۲}=I+۲A+A^{۲}\quad,\quad (I+A)^{۳}=I+۳A+۳A^{۲}+A^{۳}$$

۵) اگر A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، داریم: $(A\times B)^{n}=A^{n}\times B^{n}$

۶) اگر A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، داریم: $A^{m}\times B^{n}=B^{n}\times A^{m}$

تست: اگر $I=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$، $A=\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۱\end{bmatrix}$ و $(A+I)^{۳}=aI+bA$، آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۴

پاسخ: ماتریس‌های I و A تعویض‌پذیرند، پس می‌توان نوشت:

$$(A+I)^{۳}=A^{۳}+۳A^{۲}\times I+۳A\times I^{۲}+I^{۳}=A^{۳}+۳A^{۲}+۳A+I$$

$$A=\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۲\\۲&۲\end{bmatrix}=۲A$$

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=۲A\times A=۲A^{۲}=۲\times۲A=۴A$$

$$(A+I)^{۳}=۴A+۳(۲A)+۳A+I=۱۳A+I=aI+bA\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\b=۱۳\end{cases}\Rightarrow a+b=۱۴\Rightarrow$$ گزینهٔ (۴) درست است.

رابطهٔ $A^{۲}$ با A و I در ماتریس‌های ۲×۲ :

اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ باشد آن‌گاه:

$$A^{۲}-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$$

تست: با فرض $A=\begin{bmatrix}۴&۳\\۳&۲\end{bmatrix}$ داریم $A^{۲}=\alpha I+\beta A$، حاصل $۲\alpha-\beta$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۶-

پاسخ: **روش اول:** با توجه به دستور فوق داریم:

$$A=\begin{bmatrix}۴&۳\\۳&۲\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}-(۴+۲)A+(۸-۹)I=\bar{O}\Rightarrow A^{۲}-۶A-I=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^{۲}=I+۶A=\alpha I+\beta A\Rightarrow\alpha=۱\,,\,\beta=۶\Rightarrow ۲\alpha-\beta=۲-۶=-۴\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) درست است.

روش دوم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۴&۳\\۳&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴&۳\\۳&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲۵&۱۸\\۱۸&۱۳\end{bmatrix}$$

$$A^{۲}=\alpha I+\beta A\Rightarrow\begin{bmatrix}۲۵&۱۸\\۱۸&۱۳\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}۴&۳\\۳&۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\alpha&۰\\۰&\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۴\beta&۳\beta\\۳\beta&۲\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲۵&۱۸\\۱۸&۱۳\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\alpha+۴\beta&۳\beta\\۳\beta&\alpha+۲\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲۵&۱۸\\۱۸&۱۳\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+۴\beta=۲۵\\۳\beta=۱۸\\\alpha+۲\beta=۱۳\end{cases}\Rightarrow\beta=۶\;,\;\alpha=۱۳-۱۲=۱\Rightarrow ۲\alpha-\beta=۲-۶=-۴$$

محاسبهٔ درایه‌های ماتریس $(A\times B)\times C$

اگر $(A\times B)\times C=\left[d_{ij}\right]$، آن‌گاه:

$d_{ij}=$ (سطر i ام A) × (ماتریس B) × (ستون j ام C)

تست: اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۳ & -۱\end{bmatrix}$ و $(A+I)^{۶}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، در این صورت $a-b$ کدام است؟

۱) ۱۱۲ ۲) ۱۲۲ ۳) ۲۳۲ ۴) ۱۲۰

پاسخ:

$$A+I=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۳ & -۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ -۳ & ۰\end{bmatrix}$$

$$(A+I)^{۲}=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ -۳ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ -۳ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & ۴\\ -۶ & -۶\end{bmatrix}$$

$$(A+I)^{۶}=(A+I)^{۲}\times(A+I)^{۲}\times(A+I)^{۲}$$

$(A+I)^{۶}$ درایهٔ سطر اول و ستون اول $=\begin{bmatrix}-۲ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۴\\ -۶ & -۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲\\ -۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲۰ & -۳۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲\\ -۶\end{bmatrix}=۴۰+۱۹۲=۲۳۲$

$(A+I)^{۶}$ درایهٔ سطر اول و ستون دوم $=\begin{bmatrix}-۲ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۴\\ -۶ & -۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ -۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲۰ & -۳۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ -۶\end{bmatrix}=-۸۰+۱۹۲=۱۱۲$

پس $a=۲۳۲$، $b=۱۱۲$ و در نتیجه $a-b=۲۳۲-۱۱۲=۱۲۰$، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

تست: اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & x & y\\ ۰ & ۱ & x\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A^{۳}$ کدام است؟

۱) $۳x$ ۲) $۳y$ ۳) $۲(x^{۲}+y^{۲})$ ۴) $۳(x^{۲}+y^{۲})$

پاسخ: با توجه به این‌که $A^{۳}=(A\times A)\times A$ می‌باشد، داریم:

$A^{۳}$ درایهٔ سطر دوم و ستون سوم = (سطر دوم ماتریس A) × (ماتریس A) × (ستون سوم ماتریس A)

$\begin{bmatrix}۰ & ۱ & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & x & y\\ ۰ & ۱ & x\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ x\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۲x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ x\\ ۱\end{bmatrix}=x+۲x=۳x\Rightarrow$ گزینهٔ (۱) درست است.