



موسسه ایران دانش نوین

رویای خودت شود...



@IranDaneshNovies

برای دانلود بقیه ی گام به گام ها و جزوات با کلیک روی لینک
های زیر به سایت یا کانال ما در تلگرام سر بزنید:

www.IDNovin.com

<https://telegram.me/irandaneshnovin>

ماتریس و کاربردها

فصل ۱

قسمت اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تساوی، جمع و تفاضل ماتریس‌ها

۱. ☆ ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با فرض $i = j$ یا $i > j$ یا $i < j$ تعریف می‌شود. مجموع درایه‌های آن کدام است؟

- (۱) ۲۹ (۲) ۴۰ (۳) ۳۹ (۴) ۳۰

۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، در صورتی که $A = B$ باشد، $x + y + z$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

۳. حاصل $\cos \theta \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} + \sin \theta \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $\bar{O}$ (۲) I (۳) $-I$ (۴) $2I$

۴. ☆ اگر $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ، $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ و $C + D = 2I$ ، آنگاه مقدار k کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۴ (۳) -۳ (۴) -۱

۵. ماتریس $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ با شرط $\begin{cases} i = j & a_{ij} = 2 \\ i \neq j & a_{ij} = 0 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) ماتریس صفر (۲) ماتریس همانی (۳) ماتریس سطری (۴) ماتریس اسکالر

۶. ☆ دو ماتریس $A = [2i - j]_{3 \times 3}$ و $B = [i + j]_{3 \times 3}$ مفروض‌اند. درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس $2A + 3B$ کدام است؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۲۲ (۳) -۴ (۴) ۱۳

۷. مجموع درایه‌های ماتریس $A = [i^2 - j^2]_{3 \times 3}$ کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) -۱۳ (۳) ۱۲ (۴) -۱۲

۸. ماتریس‌های $\begin{bmatrix} a & m-1 \\ 2m+1 & b \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} a & 2m+1 \\ m-1 & b \end{bmatrix}$ برابرند. m کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

ضرب ماتریس‌ها - توان ماتریس‌ها - ماتریس‌های تعویض‌پذیر

۹. ☆ اگر $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $B^T \times A = A$ (۲) $B \times A = I$ (۳) $B \times A = A \times B$ (۴) $B^T \times A = I$

۱۰. اگر $A^2 = \begin{bmatrix} x & y \\ -6 & z \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 1 \end{bmatrix}$ ، m کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) ۲

دانش‌آموزان عزیز! در صورت کمبود وقت حتماً به تست‌های دارای علامت ☆ پاسخ دهید. تست‌های دارای علامت ★ کمی دشوارتر هستند.

۱۱☆. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ، ماتریس $A^2 - A^3$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

۱۲. اگر $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^6 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، حاصل $a + b + c + d$ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۸ (۴) ۱۸

۱۳. جواب‌های معادله $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ کدام‌اند؟

(۱) $-1, -3$ (۲) $1, -3$ (۳) $-1, 3$ (۴) $1, 3$

۱۴☆. برای دو ماتریس A و B داریم $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ و $B^2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ ، حاصل $A \times B + B \times A$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۵☆. اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و ماتریس $A \times B$ قطری باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۵ (۴) ۷

۱۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و رابطه $A^5 \times \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A^5 \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برقرار باشد، حاصل $b + c$ کدام است؟

(۱) -5 (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) -4

۱۷. کدام مورد مثال نقض برای حکم «حاصل ضرب دو ماتریس مخالف صفر، ماتریسی مخالف صفر است.» نیست؟

(۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

۱۸☆. اگر برای دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه A و B رابطه $A \times B = 2B \times A$ برقرار باشد، $(A + B)^2$ کدام است؟

(۱) $A^2 + A \times B + B^2$ (۲) $A^2 + 2A \times B + B^2$ (۳) $A^2 + B^2 + 2A \times B$ (۴) $A^2 + 2B \times A + B^2$

۱۹☆. اگر برای ماتریس‌های A ، B و C داشته باشیم $A = B + C$ ، حاصل $A^2 + B^2 - A \times B - B \times A$ کدام است؟

(۱) $-C^2$ (۲) C^2 (۳) $\bar{O}$ (۴) C

۲۰☆. فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه بوده و $AB = A$ و $BA^2 = B$ باشد، ماتریس A^3 کدام است؟

(۱) A (۲) B (۳) I (۴) BA

۲۱☆. برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، حاصل $A^n - A^{n-1}$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۲۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A^{100} کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -1 (۴) ۲

۲۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^{1381} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آنگاه $a + b + c + d$ کدام است؟

(۱) ۱۳۸۱ (۲) ۱۳۸۲ (۳) ۱۳۸۳ (۴) ۱۳۸۴

۲۴☆. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A + \beta I_2$ ، آنگاه دوتایی (α, β) کدام است؟

(۱) $(2, 1)$ (۲) $(2, 13)$ (۳) $(4, 11)$ (۴) $(4, 13)$

۲۵★. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^3 = mA + nI_2$ ، آنگاه m^n کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) -۱

۲۶. اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس A^5 کدام است؟

- (۱) -۲۵ (۲) 2^{10} (۳) -2^{10} (۴) 2^5

۲۷★. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $(A+I)^6 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آنگاه $a-b$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۶ (۳) ۱ (۴) ۳۶

۲۸★. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس $A^3 \times (A+I)$ کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۱۶ (۳) ۹۴ (۴) ۴۸

۲۹. اگر $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، آنگاه حاصل $a+b-c-d$ چقدر است؟

- (۱) -۴ (۲) صفر (۳) ۴ (۴) ۲

۳۰★. اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس A^{1389} کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) صفر (۳) -۲ (۴) ۱

۳۱★. اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ، آنگاه حاصل $A^{20} \times B^{60}$ کدام است؟

- (۱) $-2^{60} I$ (۲) $\frac{1}{2^{60}} I$ (۳) $2^{20} I$ (۴) $2^{-60} I$

۳۲. حاصل $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} -16 \\ -8 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 16 \\ -8 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -8 \\ 16 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 8 \\ -16 \end{bmatrix}$

۳۳★. اگر ماتریس $A_{2 \times 2}$ چنان باشد که $A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$ ، آنگاه حاصل $A^3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

۳۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = A \times B$ ، آنگاه c_{33} کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱۶ (۳) ۲۲ (۴) ۲۴

۳۵★. ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ (-1)^i + (-1)^j & i \neq j \end{cases}$ تعریف شده است. $A^2 - 2A$ کدام است؟

- (۱) A (۲) ماتریس قطری (۳) ماتریس صفر (۴) ماتریس همانی

۳۶★. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، عضو نظیر درایه سطر دوم و ستون دوم ماتریس $(A+I)(A-I)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) صفر

۳۷☆. مقدار x از تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $2 \pm \sqrt{6}$ (۲) $6 \pm \sqrt{2}$ (۳) $-2 \pm \sqrt{6}$ (۴) $-6 \pm \sqrt{2}$

۳۸☆. ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 2 & i \neq j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس $A^2 - 4A$ کدام است؟

(سراسری ریاضی فارغ از کشور - ۹۶)

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱

۳۹. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ، در این صورت سطر دوم ماتریس $A \times B$ کدام است؟

- (۱) $[6 \quad 33]$ (۲) $[9 \quad 30]$ (۳) $[12 \quad 41]$ (۴) $[10 \quad 20]$

۴۰. اگر M یک ماتریس 3×2 باشد، به طوری که $M \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $M \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، آنگاه حاصل جمع درایه‌های M کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۲۴ (۴) ۱۸

۴۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، در ماتریس A^{100} حاصل جمع درایه‌ها کدام است؟

- (۱) ۳۰۳ (۲) ۱۰۳ (۳) ۲۰۰ (۴) ۲۰۳

۴۲☆. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، A^5 کدام است؟

- (۱) $243A$ (۲) $81A$ (۳) $5A$ (۴) A

۴۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $A^3 - A^2$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -9 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

۴۴☆. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، درایه نظیر سطر سوم و ستون دوم A^2 کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) صفر (۴) ۲

۴۵☆. ماتریس $A_{3 \times 3}$ چنان است که $A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ a \end{bmatrix}$ ، حاصل $A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

۴۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، درایه نظیر سطر سوم و ستون اول A^3 کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۴۷. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، در ماتریس A^6 مجموع درایه‌های ستون دوم کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۲۷

۴۸☆. در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، حاصل جمع درایه‌های $A + A^2 + A^3 + A^4$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۱۲ (۴) ۶

۴۹. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل جمع درایه‌های سطر اول ماتریس A^6 کدام است؟

- (۱) ۳۷ (۲) ۳۱ (۳) $2 \times 3^6 + 1$ (۴) $2 \times 3^5 + 1$

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

۵۰☆. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^4 کدام می‌باشد؟

- (۱) درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر است. (۳) قطری غیرهمانی
(۲) درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر است. (۴) همانی

۵۱☆. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع درایه‌های $(2I - A)^{100}$ کدام است؟

- (۱) ۳۰۱ (۲) ۳۰۲ (۳) ۳۰۰ (۴) ۳۰۳

۵۲☆. فرض کنیم A یک ماتریس 3×3 باشد که همه درایه‌های آن یک است. اگر $aI + bA = (I + \frac{A}{3})^3$ شود، آنگاه $a + b$ کدام است؟

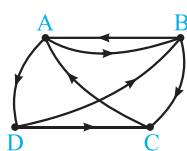
- (۱) $\frac{10}{3}$ (۲) $\frac{7}{3}$ (۳) ۲ (۴) ۴

۵۳☆. بین چهار تیم فوتبال A, B, C و D مسابقاتی برگزار شده است و نتایج توسط یک نمودار در زیر رسم شده است (جهت پیکان روی هر

خط یا منحنی واصل بین دو تیم از طرف تیم برنده به سمت تیم بازنده است). در کنار این نمودار ماتریسی 4×4 نوشته شده که متناظر با آن نمودار است. اگر این ماتریس را H بنامیم و جهت همه پیکان‌ها را برعکس کنیم، ماتریس نمودار جدید را K می‌نامیم. مجموع همه

(برگرفته از کتاب درسی)

درایه‌های $H \times K$ کدام است؟



$$H = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ A & 0 & 1 & 0 & 1 \\ B & 1 & 0 & 1 & 0 \\ C & 1 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(۱) ۹

(۲) ۱۰

(۳) ۱۳

(۴) ۱۲

۵۴☆. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & & & \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C^2 کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴

(سراسری ریاضی- ۹۷)

قسمت دوم: وارون ماتریس و دترمینان

دترمینان‌های 2×2

۵۵. اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $A^2 + A$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۵۶☆. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ، دترمینان A^2 کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۵

۵۷. اگر تمام عضوهای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ را با عدد k جمع کنیم، دترمینان ماتریس A چه تغییری می‌کند؟

- (۱) k برابر می‌شود. (۲) تغییر نمی‌کند. (۳) با k جمع می‌شود. (۴) به مقدار k بستگی دارد.

۵۸☆. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & a \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & a \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $C = A \times B$ ، آنگاه به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، حاصل دترمینان C منفی است؟

(سراسری ریاضی فارغ از کشور- ۸۶، با کمی تغییر)

- (۱) $\emptyset$ (۲) $\{a : a < 1\}$ (۳) $\{a : a > 1\}$ (۴) $\mathbb{R}$

۵۹☆. مجموع ریشه‌های معادله $\begin{vmatrix} 3-x^2 & 4+x \\ 1-x^2 & 2+x \end{vmatrix} = 14$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) -۳

۶۰☆. اگر ماتریس A به صورت $A = \begin{bmatrix} 5|A| & -1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ تعریف شود ($|A|$ ، دترمینان ماتریس A است)، آنگاه حاصل $|A|$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۶۱. اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ و $A^2 \times B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$ ، آنگاه $|A|$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) -۴

(سراسری ریاضی فارغ از کشور- ۹۰)

۶۲☆. اگر $A = \begin{bmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{bmatrix}$ ، آنگاه $|A|$ کدام است؟

- (۱) $2 \log 1/25$ (۲) $\log 2/5$ (۳) $\log 3$ (۴) $\log 6/25$

۶۳☆. اگر $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$ ، آنگاه $\begin{vmatrix} 5a-7b & 4a+3b \\ 5c-7d & 4c+3d \end{vmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۴۳ (۲) -۸۶ (۳) صفر (۴) ۸۶

۶۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه حاصل $|2A \times B^{-1}|$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

۶۵. اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ و $|A| + |B| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ ، آنگاه مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{1-bc}{d}$ (۲) $\frac{1+bc}{d}$ (۳) $\frac{1+bd}{c}$ (۴) $\frac{1-cd}{b}$

۶۶☆. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ ، آنگاه حاصل $\frac{|A^2 + A \times B|}{|B^2 + B \times A|}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) $-\frac{1}{2}$

۶۷☆. اگر ماتریسی 2×2 باشد و $|A| = -2$ ، آنگاه دترمینان ماتریس $|A^2|$ کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۸ (۳) -۱۶ (۴) -۸

۶۸☆. دو ماتریس 2×3 $A = [i^2 - j]$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ مفروضند. حاصل دترمینان $A \times B$ کدام است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۴۹ (۳) ۵۴ (۴) ۶۴

۶۹☆. اگر $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع دترمینان‌های دو ماتریس سمت راست تساوی کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳۶ (۳) ۲۰ (۴) ۱۶

۷۰. اگر $A = [2i^3 - j^2]_{2 \times 1}$ ، آنگاه دترمینان ماتریس $A \times [1 \quad 15]$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۲۲۵ (۳) ۱۶ (۴) صفر

☆ ۷۱. اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و a, b, c, d اعداد طبیعی باشند به طوری که $6 + |A| - 5|A|^2 = 0$ آنگاه کمترین مقدار $a + b + c + d$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸ (برگرفته از کتاب درسی)

دترمینان‌های 3×3

☆ ۷۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -a & -2 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ و $|A^4| = 25$ ، آنگاه مقدار a کدام است؟

- (۱) فقط $\sqrt{5}$ (۲) $\pm\sqrt{5}$ (۳) فقط $-\sqrt{5}$ (۴) صفر

☆ ۷۳. اگر $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix} = A + x \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ ، مقدار A کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

☆ ۷۴. اگر a و b دو عدد حقیقی و i و j شماره‌های سطر و ستون هر درایه باشند، دترمینان ماتریس 3×3 $A = [ai + bj]$ کدام است؟ (سراسری ریاضی-۸۹)

- (۱) صفر (۲) $ab(a+b)$ (۳) ab (۴) $a+b$

☆ ۷۵. به ازای کدام مقادیر a و b ، اگر ۲ واحد به درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس $\begin{bmatrix} a+3 & b & c \\ 3 & b+2 & c \\ a & b & c+1 \end{bmatrix}$ اضافه شود، آنگاه ۳ واحد

(سراسری ریاضی فیزیک از کشور-۸۸)

به مقدار دترمینان آن افزوده می‌شود؟

- (۱) a هر چه باشد، $b = -\frac{1}{4}$ (۲) a هر چه باشد، $b = \frac{1}{4}$
(۳) b هر چه باشد، $a = -\frac{1}{4}$ (۴) b هر چه باشد، $a = \frac{1}{4}$

☆ ۷۶. اگر $2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ، آنگاه حاصل $\begin{vmatrix} a_1 & -3b_1 & c_1 \\ -2a_2 & 6b_2 & -2c_2 \\ a_3 & -3b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ کدام است؟

- (۱) -۱۲ (۲) -۶ (۳) ۶ (۴) ۱۲

☆ ۷۷. اگر در دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & a \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ به درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم دو واحد اضافه شود، به مقدار دترمینان کدام عدد افزوده می‌شود؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۳۰ (۴) ۴۰

☆ ۷۸. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ مفروض است. دترمینان ماتریس A^2 کدام است؟ (سراسری ریاضی-۸۹، با کمی تغییر)

- (۱) ۳۲ (۲) ۶۴ (۳) ۷۲ (۴) ۱۴۴

☆ ۷۹. به هر درایه سطر سوم دترمینان $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ کدام عدد افزوده شود تا مقدار دترمینان ۸ واحد بیش‌تر گردد؟ (سراسری ریاضی-۹۱)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

☆ ۸۰. اگر به تمام درایه‌های ستون دوم ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & a & 7 \\ 3 & b & 6 \end{bmatrix}$ ، یک واحد اضافه شود، به مقدار دترمینان ماتریس اولیه کدام عدد اضافه می‌شود؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) ۶ (سراسری ریاضی-۹۶)

☆ ۸۱. اگر به هر درایه واقع در سطر دوم دترمینان $\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ یک واحد افزوده شود، به مقدار دترمینان ۶ واحد اضافه می‌شود. a کدام است؟

(سراسری ریاضی فیزیک از کشور-۸۹)

- (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

☆ ۸۲. اگر دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & m & -2 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}$ برابر ۲۰، $10 = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$ و $10 = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ باشد، آنگاه مقدار m کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۲ (۴) -۳



ماتریس و کاربردها

۱

پاسخ فصل

۸ ۱ ۲ ۳ ۴

بنابه فرض دو ماتریس $\begin{bmatrix} a & 2m+1 \\ m-1 & b \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} a & m-1 \\ 2m+1 & b \end{bmatrix}$ برابرند، پس داریم:

$$2m+1 = m-1 \Rightarrow m = -2$$

۹ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: ضرب هر ماتریس در I برابر آن ماتریس است.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B^T \times A = I \times A = A$$

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-m & -2 \\ 2m & -m+1 \end{bmatrix}$$

بنابه فرض $A^T = \begin{bmatrix} x & y \\ -6 & z \end{bmatrix}$ پس $2m = -6$ و $m = -3$

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^T = (A^T)^T \times A = I^T \times A = I \times A = A$$

$$A^T - A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود $A^6 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و در نتیجه:

$$a + b + c + d = 1 + 6 + 0 + 1 = 8$$

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -x+2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow [-x^2 + 2x + 3] = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = 3$$

۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$(A+B)^T = (A+B) \times (A+B) = (A+B) \times A + (A+B) \times B$$

$$= A^T + B \times A + A \times B + B^T$$

۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 12 \\ 2+1 & 7 & 22 \\ 3+1 & 3+2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌های } A} 3 \times 7 + 2 \times 4 + 5 + 3 + 2 = 39$$

۲ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: دو ماتریس A و B برابرند هرگاه مرتبه آن‌ها یکی باشد و درایه‌های نظیر آن‌ها برابر باشند.

$$A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-y=3 \\ 2x+y=5 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=2, y=1$$

پس $x+y+z=2+1-2=1$

۳ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\cos \theta \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} + \sin \theta \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$C + D = 2I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4+k & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 4+k=0 \Rightarrow k=-4$$

۵ ۱ ۲ ۳ ۴

درایه‌های قطر اصلی همگی ۲ و سایر درایه‌های ماتریس $A_{n \times n}$ برابر صفر است، پس این ماتریس اسکالر است.

۶ ۱ ۲ ۳ ۴

بنابه فرض $A = [2i - j]_{3 \times 3}$ و $B = [i + j]_{3 \times 3}$ داریم:

$$C = 2A + 3B \Rightarrow c_{33} = 2a_{33} + 3b_{33}$$

$$= 2(4-3) + 3(2+3) = 2+15=17$$

۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A = [i^2 - j^2]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1-4 & 1-9 \\ 4-1 & 4-4 & 4-9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} -13$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۲۰

$$A^T = AA^T \xrightarrow{A=AB} A^T = (AB)A^T = A(BA^T)$$

$$\xrightarrow{BA^T=B} A^T = AB \xrightarrow{AB=A} A^T = A$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۲۱

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود $A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ در نتیجه داریم:

$$A^n - A^{n-1} = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^n - 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۲۲

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^{100} = (A^T)^{33} \times A = (-I)^{33} \times A = -I \times A = -A$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های A^{100} برابر -۱ است.

۴ ۳ ۲ ۱ ۲۳

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^T \times A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بنابراین:

$$A^{1381} = \begin{bmatrix} 1 & 1381 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a=1, b=1381, c=0, d=1$$

$$\Rightarrow a+b+c+d=1383$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۲۴

روش اول:

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+5 & -2-2 \\ -10+20 & 5+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \alpha A + \beta I_T \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta - 2\alpha & \alpha \\ 5\alpha & \beta + 4\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \beta - 2\alpha = 9 \\ \alpha = 2 \\ 5\alpha = 10 \\ \beta + 4\alpha = 21 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 13$$

$$\Rightarrow (\alpha, \beta) = (2, 13)$$

$$, B^T = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \text{ و } A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, A+B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} + B \times A + A \times B + \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} + B \times A + A \times B$$

$$\Rightarrow B \times A + A \times B = \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۱۵

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & 2a-8 \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

برای این‌که این ماتریس قطری باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} b-3=0 \\ 2a-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=4 \end{cases} \Rightarrow a+b=7$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۱۶

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^4 = A^T \times A^T = I \times I = I^T = I, A^5 = A^4 \times A = I \times A = A$$

$$A^4 \times \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A^5 \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow I \times \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -c=1 \\ -d=6 \\ -a=2 \\ -b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-4 \\ c=-1 \\ d=-6 \end{cases}$$

$$b+c=-4-1=-5$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۱۷

حاصل $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس غیرصفر است.

۴ ۳ ۲ ۱ ۱۸

$$(A+B)^T = (A+B) \times (A+B) = (A+B) \times A + (A+B) \times B$$

$$= A^T + B \times A + A \times B + B^T$$

بنابه فرض $A \times B = 2B \times A$ می‌باشد. پس داریم:

$$(A+B)^T = A^T + 3B \times A + B^T$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۱۹

$$A^T + B^T - A \times B - B \times A = A^T - A \times B + B^T - B \times A$$

$$= A \times (A-B) + B \times (B-A) = A \times (A-B) - B \times (A-B)$$

$$= (A-B) \times (A-B) = (A-B)^T$$

اما بنابه فرض $A = B + C$ ، پس $A - B = C$ و نهایتاً داریم:

$$A^T + B^T - A \times B - B \times A = (A-B)^T = C^T$$

۲۸

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 \times (A + I) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $A^2 \times (A + I)$ برابر است با: $4 \times 12 = 48$

۲۹

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$$

بنا به فرض این ماتریس برابر ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ است، پس نتیجه می‌شود:

$$a = 4, b = 3, c = 2, d = 1 \Rightarrow a + b - c - d = 4 + 3 - 2 - 1 = 4$$

۳۰

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = -I$$

$$A^{1289} = (A^3)^{429} = (-I)^{429} = -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} -2$$

۳۱

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^{20} = (A^4)^5 = (-I)^5 = (-1)^5 I^5 = -I$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^3 = \begin{bmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^6 = B^3 \times B^3 = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -64 & 0 \\ 0 & -64 \end{bmatrix} = -64I$$

$$A^{20} \times B^6 = (-I) \times (B^6)^1 = (-I) \times (-64I)^1 = -2^{26} I^1 = -2^{26} I$$

روش دوم:

نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ آن‌گاه داریم:

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = \bar{O}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - (-2+4)A + (-8-5)I = \bar{O}$$

$$\Rightarrow A^2 - 2A - 13I = \bar{O} \Rightarrow A^2 = 2A + 13I \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 13$$

$$\Rightarrow (\alpha, \beta) = (2, 13)$$

۲۵

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A^3)^n = mA + nI \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^n = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} m & 0 \\ -m & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n & 0 \\ -m & m+n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+n=1 \\ -m=-3 \end{cases} \Rightarrow m=3, n=-2 \Rightarrow m^n = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

۲۶

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I$$

$$\Rightarrow A^3 = A^2 \times A = 4I \times A = 4A$$

$$\Rightarrow A^4 = A^3 \times A = 4A \times A = 4A^2 = 4 \times 4I = 16I$$

$$A^5 = A^4 \times A = 16I \times A = 16A = \begin{bmatrix} -32 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی}} -32 \times 32 = -1024$$

۲۷

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A + I)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(A + I)^6 = (A + I)^2 \times (A + I)^2 \times (A + I)^2$$

$$a = (A + I)^6 \text{ درایه سطر اول و ستون اول } = ((A + I)^2)^3$$

$$\times ((A + I)^2)^3 \text{ (ستون اول } (A + I)^2 \text{)} \times ((A + I)^2)^3 \text{ (ماتریس } (A + I)^2 \text{)}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{bmatrix}$$

$$= 41 \times 5 + 4 \times 40 = 205 + 160 = 365$$

$$b = (A + I)^6 \text{ درایه سطر اول و ستون دوم } = ((A + I)^2)^3$$

$$\times ((A + I)^2)^3 \text{ (ستون دوم } (A + I)^2 \text{)} \times ((A + I)^2)^3 \text{ (ماتریس } (A + I)^2 \text{)}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{bmatrix}$$

$$= 4 \times 41 + 5 \times 40 = 164 + 200 = 364$$

پس $a - b = 365 - 364 = 1$ می‌باشد.

می توان نوشت: $(A + I) \times (A - I) = A^2 - I^2 = A^2 - I$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A^2 (ستون دوم) $\times$ (سطر دوم A) = درایه سطر دوم و ستون دوم

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

I = درایه سطر دوم و ستون دوم

بنابراین درایه سطر دوم و ستون دوم ماتریس $(A + I) \times (A - I)$ برابر است با: $1 - 1 = 0$

۳۷

$$\begin{bmatrix} x & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x + 4 & x + 2 & 12 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$\Rightarrow [2x^2 + 4x + 4x + 8 - 12] = \bar{O} \Rightarrow 2x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{4+2} = -2 \pm \sqrt{6}$$

۳۸

بنابه فرض $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 2 & i \neq j \end{cases}$ و $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ پس درایه های ماتریس A به صورت زیر می باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 4A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

و مجموع درایه های ماتریس $A^2 - 4A$ برابر ۱۵ است.

۳۹

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(ماتریس B) $\times$ (سطر دوم ماتریس A) = سطر دوم ماتریس

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 23 \end{bmatrix}$$

۴۰

بنابه فرض ماتریس M به صورت $M = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$ می باشد. داریم:

$$M \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & e \\ 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow d=1, e=2, f=3$$

۳۲

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ -8 \end{bmatrix}$$

۳۳

روش اول: بنابه فرض ماتریس $A_{2 \times 2}$ چنان است که $A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$ داریم:

$$A^2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = A^2 (A \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}) = A^2 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = A(A \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}) = A \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

روش دوم: یکی از ماتریس های A که در تساوی $A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$ صدق می کند $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ است. داریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۳۴

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \times \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$c_{23} = (A \text{ سطر دوم ماتریس}) \times (B \text{ ستون سوم ماتریس})$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \times 4 + 2 \times 1 = 22$$

۳۵

بنابه فرض $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ (-1)^i + (-1)^j & i \neq j \end{cases}$ و $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$

ماتریس A را با درایه های نشان می دهیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 2A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

پس $A^2 - 2A$ یک ماتریس قطری است.

۳۶

نکته: دو ماتریس $A_{n \times n}$ و $I_{n \times n}$ تعویض پذیرند، پس اتحادهای جبری برای آنها برقرار است.