خرید کتاب های کنکور
با تخفیف ویژه
و
ارسال رایگان
Medabook.com
مدابوک
یک جلسه تماس تلفنی رایگان
با مشاوران رتبه برتر
برای انتخاب بهترین منابع
دبیرستان و کنکور
۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰

بسم الله الرحمن الرحيم

GEOMETRY 11

Password نٓ وَ القَلَمِ وَمَا يَسطُرُونَ

www.gaj.ir

Other user

ENG

IR-MCI LTE 00:00 AM 100 %

gaj.ir

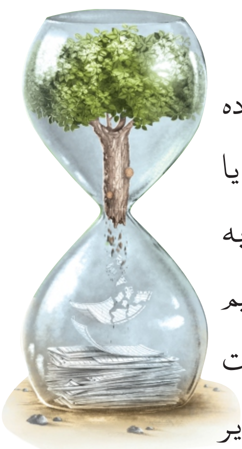
3K تعداد عناوین چاپ شده تا امروز	101 M تعداد جلدهای چاپ شده تا امروز	2K تعداد مؤلفین همکار

گاج ، گروه آموزشی جوکار
Since2002 Sep 3

gaj.ir gajmarket.com Mygaj.com driq.com gajino.com

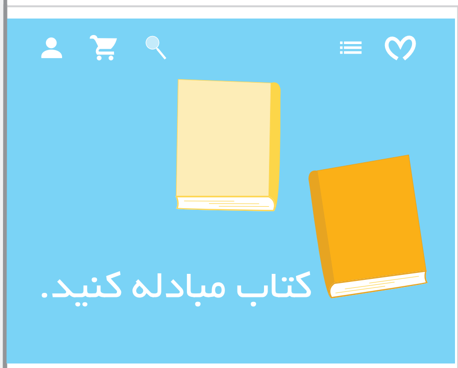
به نام خدا

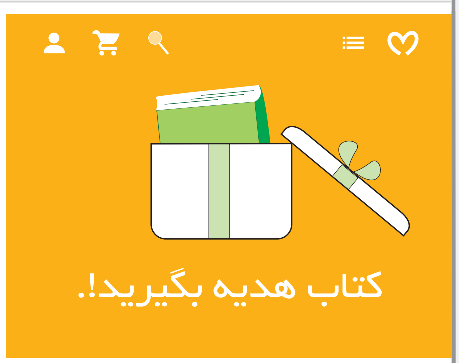
دوست خوب نادیده‌ام، سلام



در تهیه کاغذ این کتاب هیچ درختی قطع نشده است و در فرایند تولید آن نیز از مواد شیمیایی مضر استفاده نگردیده است. این کاغذ در کشور عزیزمان ایران تولید می‌شود و ماده اصلی تشکیل‌دهنده آن باگاس یا همان تفاله نیشکر است. امروزه در خیلی از کشورها رنگ کاغذ مصرفی کتاب، تیره است و این تیرگی به علت انعکاس نور کمتر باعث می‌شود چشم‌ها هنگام مطالعه خستگی کمتری را احساس کنند. اما بدانیم که هزینه‌های تولید کتاب بالاست، لذا تقاضا دارم بعد از مطالعه کتاب حاضر آن را در وب سایت **www.mygaj.com** قرار دهید و باقیمت کمتر به عنوان کتاب دست دوم بفروش برسانید تا سایر دوستانتان بتوانند با هزینه کمتر از آن استفاده کرده و از تولید مجدد آن جلوگیری و در نهایت در مصرف کاغذ صرفه‌جویی شود.

ارادتمند شما
ابوالفضل جوکار



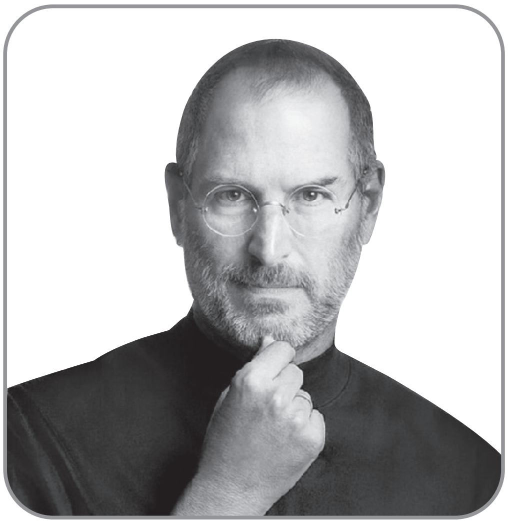


IR-MCI LTE 00:00 AM 100 %

حاضرم تمام دستاوردم ازتکنولوژی را از دست بدهم تا بتوانم یک بعد از ظهر با سقراط صحبت کنم !!!
استیو پاول جابز

Google

Steven Paul Jobs



استیو جابز نابغهٔ بزرگ در مراسم رونمایی از اولین گوشی آیفون پس از بیان تفاوت‌های اساسی و مهم گوشی آیفون نسبت به تمام گوشی‌های تلفن همراه تا آن روز اعلام کرد:

«ما تلفن را دوباره اختراع کردیم»

ما در سال ۱۳۸۱ برای اولین بار کتاب‌هایی تحت عنوان کتاب‌های محوری ارائه دادیم که به واکاوی تست‌های کنکور و انطباق آن بر صفحات کتاب درسی می‌پرداخت و بسیار زیاد مورد توجه معلمان و دانش‌آموزان آن روزگار قرار گرفت در ادامه در سال ۱۳۸۲ کتاب‌های میکروی سفید را تولید کردیم که الگوی جدیدی در طبقه بندی تست‌ها محسوب می‌شد و سلیقهٔ جدیدی برای دانش‌آموزان و معلمان آن زمان به وجود آورد. در سال ۱۳۹۰ با یک پوست‌اندازی کامل نسل جدید کتاب‌های میکرو [مشهور به میکروی نقره‌ای] وارد بازار شد که رکوردهای فروش در عرصهٔ نشر ایران را فرسنگ‌ها جابه‌جا کرد ....

اکنون سال ۱۳۹۹ است و با افتخار اعلام می‌کنیم که ما آموزش به روش سُنتی که پاسخگوی نیازهای دانش‌آموزان نسل‌های قبلی بود را به طور کامل دگرگون کردیم و آموزشی مدرن و هوشمند روی صفحات کاغذ مطابق با سلیقهٔ دانش‌آموزان عصر سرعت و اینترنت 5G ارائه کردیم که به جرأت می‌توان گفت شاید استفاده از هر کتاب دیگری به غیر از این نسل از کتاب همانند این است که شما در عصری که گوشی‌های آیفون جهان را تسخیر کرده از گوشی نوکیای نسل اول با دکمه‌های پلاستیکی و سایزی مشابه یک گوشت کوب برقی استفاده کنید و همان بها را نیز عیناً برای خرید آن بپردازید که در این صورت نه تنها متحمل ضررهای مالی خواهید شد بلکه ضرر بزرگ و هنگفت دیگری نیز در کمین شما خواهد بود که با هیچ بهایی قابل خرید نیست و آن بهای سنگین همان «زمان از دست رفته است» که مارسل پروست نویسندهٔ بزرگ در کتاب مهم و تأثیرگذارِ « در جستجوی زمان از دست رفته » از دیدگاه فلسفی به واکاوی اهمیت این موضوع می‌پردازد!

امروز ما نیز اگر بخواهیم به تفاوت‌های عمده و اساسی این کتاب با سایر کتاب‌های آموزشی که از آغاز تا به امروز نوشته شده اشاره کنیم باید اعلام کنیم که ما نه تنها کتاب‌های میکرو و کتاب‌های کمک آموزشی را دوباره اختراع کردیم، بلکه :

«ما آموزش روی کاغذ را دوباره اختراع کردیم ، کتابی که در دست شماست پنج سال از تمام کتاب‌های فعلی جلوتر است...»

[مدیر واحد نوآوری و استراتژی تألیف]

Wikpedia . 1 min ago

Home Collections Recent More

IR-MCI LTE 00:00 AM 100 %

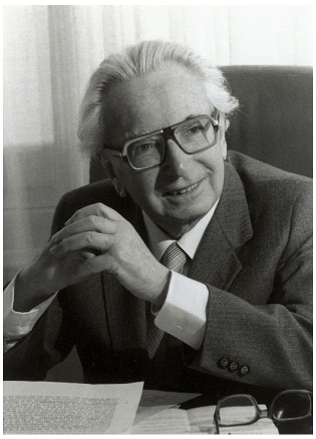
Ali.Monsef Shokri

70
تعداد عناوین تألیفی از این مؤلف

1.2 M
تعداد جلدهای چاپ شده تا امروز

36
تعداد مؤلفین همکار

بد نیست بدانید تألیف این کتاب تقریباً **چند روز** برای **من** ، **چند هفته** برای من و **مهندس حسینی‌فرد** برای تکمیل برخی تست‌ها و درسنامه‌ها، **چند ماه** برای من و **مهندس اسمعیلی** برای ارتقاء کیفیت محتوا و پوشش تمام نقاط تاریک کتاب درسی، متجاوز از **یک سال** برای من و **خانم جلال** برای مرتب سازی و صفحه‌آرایی و مجموعاً **۷۶ سال** برای من و **استیو جابز** برای طراحی ساختار و رسیدن به این معماری زمان برده است!!!



Dr.Viktor Frankl

دکتر ویکتور فرانکل در نامه‌ای خطاب به معلمان سراسر جهان برای تمام تاریخ این‌گونه می‌نویسد: من اتاق‌های گازی را دیدم که توسط بهترین مهندسین طراحی می‌شدند، من پزشکان ماهری را دیدم که کودکانی معصوم و بی‌گناه را به راحتی مسموم می‌کردند، من پرستارانی کاربلد را دیدم که انسان‌ها را با تزریق یک آمپول به قتل می‌رساندند و مجموع این دلایل مرا به آموزش مشکوک کرد. از شما تقاضا می‌کنم که تلاش کنید قبل از تربیت دانش‌آموزانتان به عنوان یک دکتر یا یک مهندس از آن‌ها یک انسان بسازید تا روزی تبدیل به جانوران روانی دانشمند نشوند !!!

به دانش‌آموزان خود بیاموزید بهترین ثروت آن‌ها انسانیت است.

Neil.Gaiman

من فهرستی از آن‌چه در مدرسه به ما یاد نمی‌دهند را تهیه کرده‌ام:

آن‌ها به ما یاد نمی‌دهند که چگونه کسی را دوست بداریم.

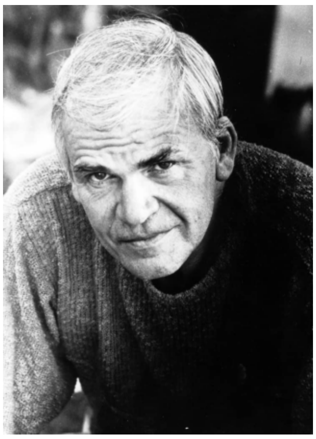
آن‌ها به ما یاد نمی‌دهند که چگونه در شهرت به درستی زندگی کنیم.

آن‌ها به ما یاد نمی‌دهند که چگونه در گمنامی، از زندگی لذت ببریم.

آن‌ها به ما یاد نمی‌دهند که چگونه از کسی که دوستش نداریم جدا شویم.

آن‌ها به ما یاد نمی‌دهند که به کسی که در حال مرگ است چه بگوئیم.

آن‌ها به ما هیچ چیزی را که ارزش یاد گرفتن داشته باشد، یاد نمی‌دهند.



Milan.Kundera

هیچ وسیله‌ای برای تشخیص تصمیم درست وجود ندارد، زیرا هیچ مقایسه‌ای امکان پذیر نیست.

در زندگی با همه‌چیز برای نخستین بار برخورد می کنیم، مانند هنرپیشه‌ای که بدون تمرین وارد صحنه شود اما اگر اولین تمرین زندگی، خود زندگی باشد، پس برای زندگی چه ارزشی می توان قائل شد؟

این است که زندگی همیشه به یک «طرح» شباهت دارد اما حتی طرح هم کلمهٔ درستی نیست، زیرا طرح همیشه زمینه‌سازی برای آماده کردن یک تصویر است،

اما طرحی که زندگی ماست طرح هیچ چیز نیست! طرحی بدون تصویر است !!!

IR-MCI LTE 00:00 AM 100 %

MESSAGES
S.Sepehri

Last years ago

روزی خواهم آمد و پیامی خواهم آورد
در رگ ها نور خواهم ریخت و صدا خواهم در داد، ای سبدهاتان پر خواب،
سیب آوردم، سیب ...

نکات اصلی	تذکر_توجه	راه میان بر	نتیجه گیری
اشتباه متداول	پاورقی	بیشتر بدانیم	عمق مفاهیم
مقایسه دوچیز	زیرعنوان	مثال_تمرین	پاسخ_اثبات
یادآوری	نگاهی به آینده	ترکیب با گذشته	ترکیب با آینده

Now

MESSAGES
A.Monsef Shokri [مدیرتألیف]

سیب را در افسانه‌ها نماد دانش، آگاهی و دانایی می‌دانند،
سیبی که با سقوط از درخت و خوردن به سَرِ نیوتن موجب کشف قوانین جاذبه شد، آدم آن را برداشت، گاز زد،
سیب دیگری ساخت، پشت گوشی تلفنش چسباند
و جهان را تسخیر کرد ...

IR-MCI LTE 00:00 AM 100 %

Chats

Special thanks

...typing

I ❤ gaj

همکارانی که تجربهٔ فراوان آن‌ها در تدریس و تألیف پشتوانهٔ این کتاب شد :

همکاران تالیف

With Collaboration

- مهندس محمدرضا حسینی‌فرد .... M. Hoseyni fard
- مهندس محسن اسمعیلی .... M . Esmaeili
- مهندس بهرام جلالی .... B . Jalali
- مهندس محمد حسین حشمت‌الواعظین .... M . Vaezin
- مهندس محمد صحت‌کار .... M. Sehat kar
- مهندس کیوان دارابی .... K . Darabi

May29

virastarni ke ba deghat va hoseleye bimanand satr be satr ketab ra khandand :

ویراستاران علمی

Board Editorial

- مهندس مریم ساسانی .... M. Sasani
- دکتر پیام طیوب .... Dr . P. tayoub
- دکتر آرمان آشتاب .... Dr . A. Ashtab
- مهندس امین خوانین‌زاده .... A . KHavanin Zadeh
- مهندس ایمان وهابی .... E . Vahabi
- مهندس مرجان ده‌حقی .... M. Deh haghi

Today

کارشناسان خبره‌ای که دانش و تجربهٔ خود را با ما به اشتراک گذاشتند :

کارشناسان علمی

Expert Scientific

- مهندس نوید اورازانی شجاعی .... N. O. Shojaee
- مهندس مجید علائی نسب .... M.alae nasab
- مهندس محمد ارباب بهرامی .... M. Arbab bahrami
- مهندس حسین خزائی .... H. khazaee
- مهندس حسین پیرزاد .... H. Pirzad
- مهندس سوگند روشنی .... S. Roshani

Message

طوفانی از کتاب‌های حرفه‌ای در راه است ...

IR-MCI LTE 00:00 AM 100 %

Search

CONTENTS

Circle | Geometric conversions | Logitudinal Relations

Chapter 1 — Circle

Chapter 2 — Geometric conversions

Chapter 3 — Logitudinal Relations

Edit

New Widget Available

IR-MCI LTE 00:01 AM 100 %

Tweet

Johan Forbes Nash
@Johan 1928

من همیشه به اعداد، معادلات و منطق که به عقلانیت منجر می‌شود باور داشتم. اما عمری جستجو در این راه مرا به این پرسش رساند: منطق واقعاً چیست و عقلانیت کدام است؟

I’ve always believed in numbers and the equations and logics that lead to reason . But after a life time of such pursuits , I ask, «What truly is logic? Who decides reason?»

Translate Tweet

07:30 . 5/31/20

View Tweet activity

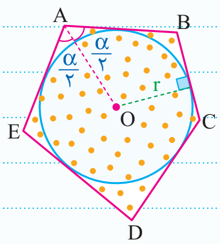
پرفسور جان‌نش ریاضیدان نابغه و برجستهٔ آمریکایی و برندهٔ جایزهٔ نوبل در اقتصاد بود وی به مدت بیش از چند دهه به بیماری اسکیزوفرنی مبتلا بود، سرانجام در ۲۳ می ۲۰۱۵ بعد از نیم قرن مبارزه با بیماری در ۸۶ سالگی در گذشت. فیلم ذهن زیبا براساس زندگی این دانشمند ساخته شده است ...

5,337 7,412 7,520,918,608

CHAPTER 1

Circle

Add another Tweet

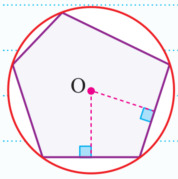


اگر یک n ضلعی بر یک دایره محیط شود [همهٔ اضلاع آن بر دایره مماس شود]، آنگاه مرکز دایره، محل همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی n ضلعی است. به این nضلعی، چندضلعی محیطی می‌گویند.

1. n ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر نیمسازهای زوایای داخلی آن همرس باشند.
2. اگر در یک nضلعی، $(n-1)$ نیمساز همرس باشند، آنگاه n اُمین نیمساز نیز از نقطهٔ همرسی می‌گذرد و می‌توان نتیجه گرفت که همهٔ نیمسازها همرسند.

مساحت هر n ضلعی محیطی برابر است با حاصل‌ضرب شعاع دایرهٔ محاطی در نصف محیط n ضلعی:

$$\boxed{S=r.p}$$



اگر یک n ضلعی درون دایره محاط شود [یک دایره از همهٔ رأس‌های آن بگذرد] آنگاه مرکز دایره محل همرسی عمودمنصف‌های اضلاع n ضلعی است. به این nضلعی، چندضلعی محاطی می‌گویند.

1. یک nضلعی محاطی است اگر و تنها اگر عمودمنصف‌های اضلاع آن همرس باشند.
2. اگر در یک n ضلعی $(n-1)$ عمودمنصف همرس باشند، آنگاه n اُمین عمودمنصف نیز از نقطهٔ همرسی می‌گذرد و می‌توان نتیجه گرفت که همهٔ عمودمنصف‌ها همرسند.

Test **در یک شش‌ضلعی محدب نیمسازهای ۵ تا از زاویه‌های داخلی در یک نقطه همرس شده‌اند، در این صورت ....**

۱) دایره‌ای وجود دارد که از همهٔ رأس‌های این شش ضلعی می‌گذرد.
۲) نقطهٔ همرسی از وسط‌های اضلاع به یک فاصله است.
۳) نقطهٔ همرسی از رأس‌ها به یک فاصله است.
۴) نقطهٔ همرسی از اضلاع به یک فاصله است.

۴ نقطهٔ همرسی نیمسازهای پنج زاویه روی نیمساز زاویهٔ ششم نیز قرار دارد و نتیجه می‌گیریم این نقطه مرکز دایرهٔ محاطی در شش ضلعی است و باید از همهٔ اضلاع به یک فاصله باشد.

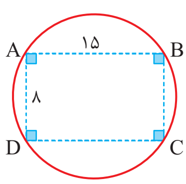
۱۰۴. یک پنج‌ضلعی محدب بر دایره‌ای به شعاع ۳ محیط شده است. اگر اندازهٔ محیط این پنج‌ضلعی برابر با ۲۴ باشد، آنگاه مساحتش چقدر است؟

۱) ۳۶ ۲) ۷۲
۳) ۲۴ ۴) ۴۸

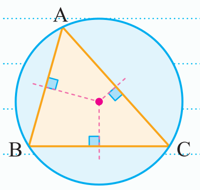
۱۰۵. تمام اضلاع یک ۷ ضلعی که مجموع طول اضلاع آن برابر ۱۸ است بر دایره‌ای به قطر ۴ مماس شده است. مساحت محصور بین ۷ ضلعی و دایره چقدر است؟

۱) $۱۸-۴\pi$ ۲) $۹-۲\pi$
۳) $۷۲-۱۶\pi$ ۴) $۲۶-۴\pi$

۱۰۶. در شکل مقابل ABCD مستطیل است. شعاع دایره چقدر است؟



۱) ۸
۲) ۸/۵
۳) ۹
۴) ۱۰/۵

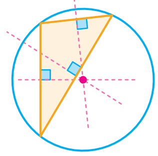


عمودمنصف‌های اضلاع در هر مثلث همرسند و نقطهٔ همرسی، نقطه‌ای است یکتا که از سه رأس به یک فاصله است. این نقطه، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است.

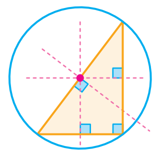
1 اگر مثلثی زاویهٔ منفرجه داشته باشد، مرکز دایرهٔ محیطی آن، خارج مثلث است.

2 در مثلث قائم‌الزاویه مرکز دایرهٔ محیطی، وسط وتر است.

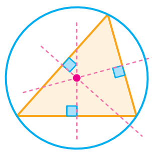
3 در مثلثی که همهٔ زوایای آن حاده است، مرکز دایرهٔ محیطی داخل مثلث است.



مثلث منفرجه‌الزاویه



مثلث قائم‌الزاویه

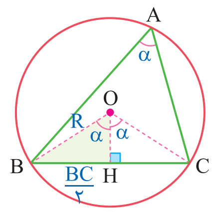


مثلث حاده‌الزاویه

اگر اندازهٔ یک ضلع از مثلث و زاویهٔ روبه‌رو به آن معلوم باشد، شعاع دایرهٔ محیطی و فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی تا ضلع BC برابر است با:

$\overset{\Delta}{OBH}: \cos\alpha = \dfrac{OH}{R}$

$OH = R.\cos A = \dfrac{BC}{2\tan A}$

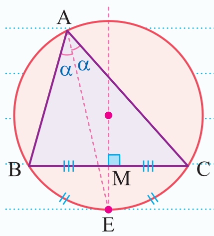


$\overset{\Delta}{OBH}: \sin\alpha = \dfrac{\frac{BC}{2}}{R}$

$R = \dfrac{BC}{2\sin A}$

در مثلث قائم‌الزاویه مرکز دایرهٔ محیطی وسط وتر و شعاع دایرهٔ محیطی، نصف وتر است؛ پس فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی تا وتر مثلث، صفر است.

درهر مثلث دلخواه نیمساز هر زاویهٔ داخلی و عمودمنصف ضلع مقابل به آن زاویه، روی دایرهٔ محیطی مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند [مطابق شکل مقابل نقطهٔ E وسط کمان BC است].



Test **اندازه‌های دو زاویه از مثلثی برابر °۶۵ و °۷۰ و طول ضلع بین آن‌ها برابر ۴ است. شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث چقدر است؟**

۱) ۴ ۲) $2\sqrt{2}$

۳) ۸ ۴) $4\sqrt{2}$

۲ از مثلث ABC دو زاویهٔ $\hat{B}=65^\circ$ و $\hat{C}=70^\circ$ معلوم است، بنابراین $\hat{A}=180^\circ-65^\circ-70^\circ=45^\circ$ است. حال می‌توانیم اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی را به‌دست آوریم:

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$$

۱۰۷. زاویه‌های یک مثلث با اعداد ۵ ، ۳ ، ۲ متناسب است، محل تلاقی عمود منصف‌ها کجاست؟

۱) داخل مثلث ۲) روی یکی از رأس‌های مثلث

۳) وسط یکی از اضلاع مثلث ۴) خارج مثلث

۱۰۸. طول اضلاع مثلثی برابر $\sqrt{3}$ ، ۳ ، $2\sqrt{3}$ است. شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث چقدر است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۰۹. در مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائمهٔ $۲\sqrt{۳}$ و $۲\sqrt{۲}$، مساحت دایرهٔ محیطی چقدر است؟

۱) ۶π ۲) ۱۰π ۳) ۵π ۴) ۹π

۱۱۰. نقطهٔ O از رأس‌های مثلث ABC که در آن $\hat{B}=۳۰^\circ$ و $\hat{C}=۲۰^\circ$ به یک فاصله است. زاویهٔ $B\hat{O}C$ چقدر است؟

۱) ۵۰° ۲) ۱۰۰° ۳) ۱۳۰° ۴) ۱۵۰°

۱۱۱. در مثلث ABC، داریم $\hat{B}=۵۰^\circ$ و $\hat{C}=۶۰^\circ$، نیمساز داخلی زاویهٔ $\hat{A}$ وعمود منصف ضلع BC در نقطهٔ M متقاطعند، زاویهٔ $M\hat{B}C$ چقدر است؟

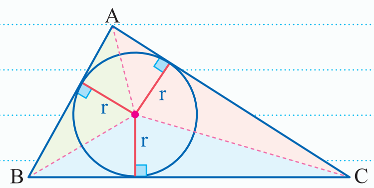
۱) ۲۵° ۲) ۳۰° ۳) ۳۵° ۴) ۴۰°

شعاع دایرهٔ محاطی داخلی

نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث همرسند و نقطهٔ همرسی آن‌ها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. این نقطه مرکز دایرهٔ محاطی داخلی است.

شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC با مساوی قرار دادن مجموع مساحت مثلث‌های رنگ شده با مساحت مثلث اصلی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$r=\frac{\text{مساحت مثلث}}{\text{نصف محیط مثلث}}=\frac{S}{p}$$



Test در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی چقدر است؟

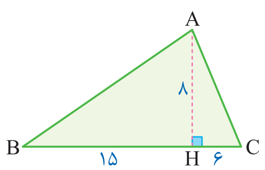
۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱ مساحت مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۴ برابر $۶=۴\times۳\times\frac{۱}{۲}$ است. از طرفی طول وتر این مثلث برابر ۵ و در نتیجه محیط آن برابر $۱۲=۵+۴+۳$ است، پس نصف محیط آن برابر ۶ است و خواهیم داشت: $r=\frac{S}{p}=\frac{۶}{۶}=۱$

۱۱۲. در مثلثی به اضلاع ۹,۱۲,۱۵ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱/۵

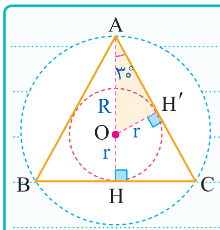
۱۱۳. در شکل زیر AH ارتفاع است. شعاع دایرهٔ محاطی داخلی چقدر است؟



۱) ۳ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) ۴

شعاع‌ها در مثلث متساوی‌الاضلاع

در مثلث متساوی‌الاضلاع بین شعاع دایرهٔ محاطی داخلی «r»، شعاع دایرهٔ محیطی «R» و ارتفاع مثلث «h» رابطهٔ زیر برقرار است:



$$\frac{r}{۱}=\frac{R}{۲}=\frac{h}{۳}$$

با توجه به رابطهٔ فوق می‌توان گفت در مثلث‌های متساوی‌الاضلاع شعاع دایرهٔ محیطی برابر با $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع و شعاع دایرهٔ محاطی برابر با $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع است.

Test در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC اگر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی برابر ۲ باشد، شعاع دایرهٔ محیطی چقدر است؟

۱) ۲ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۴

۴ می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع همواره $\frac{r}{۱}=\frac{R}{۲}=\frac{h}{۳}$ است، یعنی شعاع دایرهٔ محیطی در مثلث متساوی‌الاضلاع همواره ۲ برابر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی است،بنابراین $R=۲r=۴$ خواهد بود.

۱۱۴. شعاع دایرهٔ محیطی یک مثلث متساوی‌الاضلاع برابر $\sqrt{۶}$ است، محیط این مثلث کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۳}$ ۲) $۹\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۶}$ ۴) $۱۲\sqrt{۳}$

۱۱۵. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی که درون دایره به شعاع ۶ محاط شده، چقدر است؟

۱) $۲۷\sqrt{۳}$ ۲) $۳۶\sqrt{۳}$ ۳) $۱۸\sqrt{۳}$ ۴) $۲۴\sqrt{۳}$

۱۱۶. محیط مثلث متساوی‌الاضلاعی که بر دایره‌ای به شعاع واحد محیط شده، چقدر است؟

۱) $۶\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt{۶}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۱۱۷. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع $۲\sqrt{۳}$ شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟

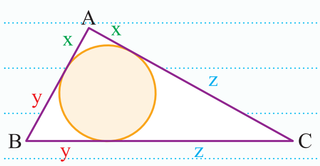
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۸. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC شعاع دایرهٔ محاطی ۲ است، مساحت مثلث کدام است؟

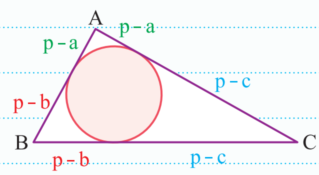
۱) $۶\sqrt{۳}$ ۲) $۱۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

محاسبهٔ قطعه‌های ایجاد شده توسط دایرهٔ محاطی داخلی

می‌دانیم «طول دو مماسی که از یک نقطه خارج دایره بر آن رسم می‌شود با هم برابر است». بنابراین اگر دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC را رسم کنیم، برای محاسبهٔ اندازهٔ قطعه‌های ایجادشده توسط دایرهٔ محاطی روی اضلاع مثلث، در هر کدام از رأس‌ها، از این نکته استفاده می‌کنیم. یعنی اگر اندازهٔ اضلاع مثلث ABC معلوم باشد و اندازهٔ قطعه‌ها را بخواهند، می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد:



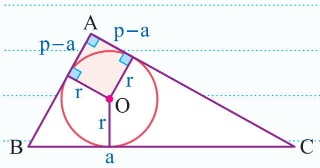
$$\begin{cases} x+y=c \\ x+z=b \\ y+z=a \end{cases} \Rightarrow x=p-a,\ y=p-b,\ z=p-c$$



در روابط فوق p نصف محیط مثلث ABC است.

در مثلث‌های قائم‌الزاویه، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مطابق شکل به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$r=p-a$$

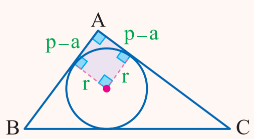


Test محیط یک مثلث قائم‌الزاویه برابر ۱۴ و طول وتر آن ۶ است. شعاع دایره محاطی داخلی آن چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۰/۵ ۳) ۸ ۴) ۷

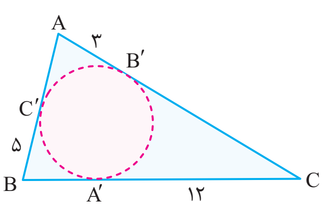
۱ چهارضلعی مشخص شده مربع است، بنابراین:

$$r=p-a=\frac{۱۴}{۲}-۶=۱$$

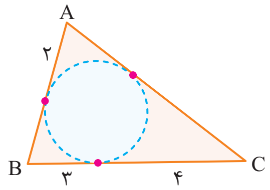


۱۱۹. در شکل مقابل با توجه به اندازه‌های داده شده، شعاع دایرهٔ محاطی چقدر است؟

۱) ۶
۲) ۵
۳) ۳
۴) ۴



۱۲۰. با توجه به اندازه‌های داده شده در شکل مقابل، محیط مثلث ABC چقدر است؟



۱) ۱۵
۲) ۱۸
۳) ۲۱
۴) ۲۴

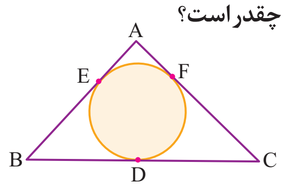
۱۲۱. در مثلثی با اضلاع ۷، ۵، ۴ دایرهٔ محاطی داخلی در نقاط تماس روی ضلع‌ها ۶ پاره‌خط به وجود آورده است. طول کوتاه‌ترین پاره‌خط چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۲
۳) ۱
۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۲۲. دایرهٔ محاطی داخلی مثلثی به اضلاع ۱۳، ۹، ۸ کوچک‌ترین ضلع مثلث را در نقطهٔ تماس، به دو قطعه تقسیم می‌کند. نسبت اندازه‌های این دو قطعه چقدر است؟

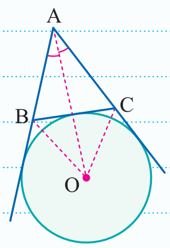
۱) ۳/۵
۲) ۳
۳) ۲/۵
۴) ۲

۱۲۳. در شکل مقابل D، E، F نقاط تماس دایرهٔ محاطی با اضلاع مثلث است. اگر BC=۷ ، AF=۲ ، CF=۴، طول ضلع AB چقدر است؟



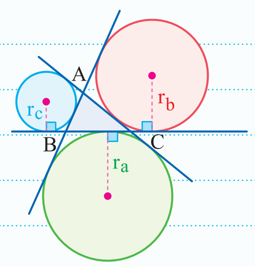
۱) ۴
۲) ۷
۳) ۶
۴) ۵

دایرهٔ محاطی خارجی



در هر مثلث، هر دو نیمساز خارجی و یک نیمساز داخلی همرسند. در شکل مقابل، نقطهٔ O نقطهٔ همرسی نیمساز زاویهٔ A و نیمسازهای زوایای خارجی B و C است. این نقطه از ضلع BC و امتداد اضلاع AB و AC به یک فاصله است، بنابراین مرکز دایره‌ای است که بر ضلع BC و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. به این دایره، دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأس A می‌گویند.

هر مثلث مطابق شکل، سه دایرهٔ محاطی خارجی دارد. اگر p نصف محیط مثلث باشد، شعاع این دایره‌ها به‌صورت‌های زیر به‌دست می‌آید:



$$r_a=\frac{S}{p-a} \qquad r_b=\frac{S}{p-b} \qquad r_c=\frac{S}{p-c}$$

هرچه ضلع مثلث بزرگ‌تر باشد، $p-a$ کوچک‌تر شده و شعاع دایرهٔ محاطی خارجی بزرگ‌تر می‌شود، پس بزرگ‌ترین دایرهٔ محاطی خارجی متناظر با بزرگ‌ترین ضلع یا روبه‌رو به بزرگ‌ترین زاویه از مثلث است و کوچک‌ترین دایرهٔ محاطی خارجی روبه‌رو به کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث است.

در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، شعاع دایره‌های محاطی خارجی با ارتفاع مثلث برابر است. [به عبارتی همهٔ چیزهای اندیس‌دار در مثلث متساوی‌الاضلاع برابرند.]

$$r_a=r_b=r_c=h_a=m_a=d_a$$

Test در مثلث متساوی‌الاضلاع به مساحت $۴\sqrt{۳}$، شعاع دایرهٔ محاطی خارجی کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) $۴\sqrt{۳}$
۴) ۲

۱ می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع از رابطهٔ $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=۴\sqrt{۳}\Rightarrow a^۲=۱۶\Rightarrow a=۴$$

حال باید طول ارتفاع مثلث را به‌دست آوریم که برابر با شعاع دایرهٔ محاطی خارجی است:

$$r_a=h_a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۴=۲\sqrt{۳}$$

IR-MCI LTE 00:02 AM 100 %

Tweet

Caucher Birkar
@Caucher 1978

وقتی عکس برندگان مدال فیلدز را در ایران می‌دیدم به خودم می‌گفتم آیا می‌توانم روزی با آن‌ها از نزدیک ملاقات کنم؟

I looked at them [Fields medalists] in Iran and said to myself : 'will I ever meet one of these people?'

درس اول : .... تبدیل‌های هندسی

درس دوم : .... کاربرد تبدیل‌ها

Translate Tweet

07:31 . 5/31/20

View Tweet activity

پرفسور کوچر بیرکار متولد روستای نی در مریوان، استاد دانشگاه کمبریج، برندهٔ مدال فیلدز در ۲۰۱۸ واندیشمند برتر سال ۲۰۱۹ جهان.

1,337 2,416 9,900,618,248

CHAPTER 2

Geometric Conversions

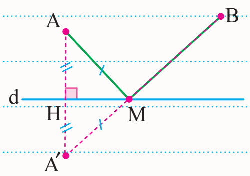
T T T

Add another Tweet

مسئله هرون [تیپ اول]

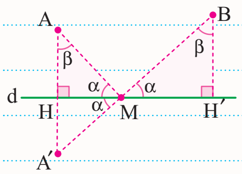
دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط d مفروض‌اند، اگر نقطهٔ M روی خط d بلغزد برای پیدا کردن کم‌ترین طول خط‌شکستهٔ AMB کافیست بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d یعنی A' را پیدا کنیم و از A' به B وصل کنیم تا خط d را در M قطع کند، در این صورت:

$$\text{Min}(AMB)=|A'B|$$

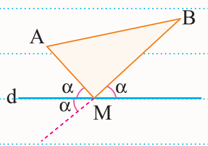


این مسئله به مسئلهٔ هرون مشهور است. در این تیپ از مسائل اگر طول پاره‌خط‌های AM یا BM را بخواهیم باید از تشابه دو مثلث AHM و BMH' استفاده کنیم.

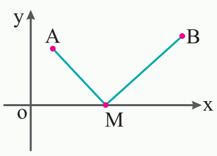
$$\frac{MB}{MA}=\frac{BH'}{AH}=\frac{MH'}{MH}$$



STOP در این حالت خط d نیمساز خارجی رأس M از مثلث ABM است و در ضمن زاویه‌های ساخته شده در طرفین نقطهٔ M نیز با هم برابرند.

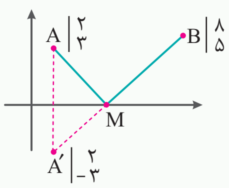


Test نقاط $A\begin{vmatrix}۲\\۳\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۸\\۵\end{vmatrix}$ مفروض‌اند، نقطهٔ M روی محور x ها می‌لغزد، کم‌ترین اندازهٔ خط شکستهٔ AMB کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۱۲
۳) ۸ ۴) ۱۰

۴ کافیست بازتاب نقطهٔ A نسبت به محور xها یعنی A' را پیدا کنیم و اندازهٔ $A'B$ را به‌دست آوریم:

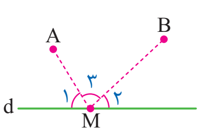


$$|A'B|=\sqrt{(۸-۲)^۲+(۵-(-۳))^۲}=۱۰$$

بازتاب یک نقطه نسبت به چهار خط مشهور صفحه

1. تصویر نقطهٔ $A(a,b)$ تحت بازتاب نسبت به محور xها نقطهٔ $A'(a,-b)$ است.
2. تصویر نقطهٔ $A(a,b)$ تحت بازتاب نسبت به محور yها نقطهٔ $A'(-a,b)$ است.
3. تصویر نقطهٔ $A(a,b)$ تحت بازتاب نسبت به خط $y=x$ [نیمساز ربع اول و سوم] نقطهٔ $A'(b,a)$ است.
4. تصویر نقطهٔ $A(a,b)$ تحت بازتاب نسبت به خط $y=-x$ [نیمساز ربع دوم و چهارم] نقطهٔ $A'(-b,-a)$ است.

۳۰۹. در شکل زیر اگر نقطهٔ M طوری روی خط d قرار گرفته باشد که، MA + MB کم‌ترین مقدار ممکن باشد، کدام گزینه درست است؟



۱) $\widehat{M}_۱+\widehat{M}_۲=\widehat{M}_۳$

۲) $\widehat{M}_۳=۲\widehat{M}_۲$

۳) $\widehat{M}_۳=۲\widehat{M}_۱$

۴) $\widehat{M}_۱=\widehat{M}_۲$

۳۱۰. در صفحه خط d و دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط مفروض‌اند. برای یافتن نقطه‌ای بر روی خط d که مجموع فاصله‌های آن از دو نقطه A و B کم‌ترین مقدار را داشته باشند، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

۱) بازتاب ۲) تجانس

۳) دوران ۴) انتقال

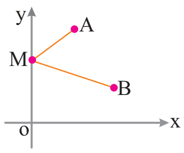
۳۱۱. در شکل زیر برای رسم مثلث ABC که رأس C از آن روی خط Δ باشد و محیط مثلث حداقل مقدار ممکن باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

۱) بازتاب ۲) تجانس

۳) انتقال ۴) دوران

۳۱۲. نقاط $A\left|\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض‌اند، نقطهٔ M روی محور yها می‌لغزد، کم‌ترین اندازهٔ خط شکستهٔ AMB کدام است؟

(مشابه داخل – ۹۸)



۱) ۴

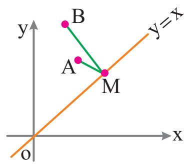
۲) ۵

۳) ۶

۴) ۸

۳۱۳. نقاط $A\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}1\\6\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ مختصات مفروض‌اند، نقطهٔ M روی نیمساز ناحیهٔ اول می‌لغزد، کمترین اندازهٔ خط شکسته AMB کدام است؟

(مشابه داخل – ۹۸)



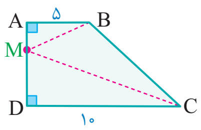
۱) ۴

۲) ۶

۳) ۵

۴) ۱۰

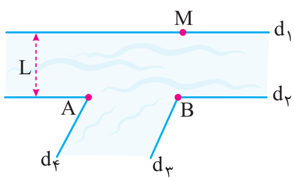
۳۱۴. در ذوزنقهٔ قائم شکل مقابل طول ساق قائم ۸ و قاعده‌ها ۵ و ۱۰ هستند. نقطهٔ M روی ساق قائم می‌لغزد، کم‌ترین طول خط شکستهٔ BMC کدام است؟



۱) ۱۷ ۲) ۱۶

۳) ۱۵ ۴) ۱۴

۳۱۵. می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها سه اسکله بسازیم، جای دو اسکلهٔ A و B مطابق شکل مشخص است، برای پیدا کردن جایگاه اسکلهٔ M که قایق‌ها هنگام طی مسیر MABM کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند، کدام تبدیل مناسب است؟



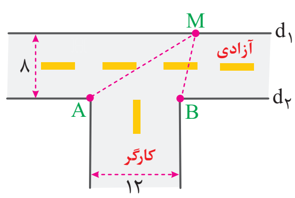
۱) انتقال به اندازهٔ بردار $\vec{L}$

۲) دوران 180° نقطهٔ A حول نقطهٔ B

۳) تجانس با نسبت ۱− نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ B

۴) بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d_1

۳۱۶. شکل زیر دو خیابان متقاطع آزادی و کارگر با عرض ۸ و ۱۲ را نشان می‌دهد، شخصی می‌خواهد از نقطهٔ A به سمت دیگر خیابان آزادی رفته و سپس به نقطهٔ B برود، طول کوتاه‌ترین مسیر طی شده، توسط شخص کدام است؟



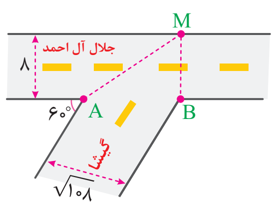
۱) ۱۰

۲) ۲۰

۳) ۱۵

۴) ۲۵

۳۱۷. مطابق شکل دو خیابان گیشا و اتوبان جلال آل‌احمد با زاویهٔ 60° همدیگر را قطع کرده‌اند، شخصی می‌خواهد از نقطهٔ A در انتهای خیابان گیشا به آن طرف اتوبان جلال آل‌احمد در نقطهٔ M رفته و سپس به نقطهٔ B در انتهای دیگر خیابان گیشا برود. اگر عرض اتوبان جلال آل‌احمد ۸ و عرض خیابان گیشا $\sqrt{108}$ باشد، کم‌ترین طول مسیری که این شخص می‌تواند طی کند، کدام است؟



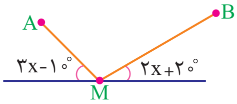
۱) ۲۰

۲) ۲۵

۳) ۱۵

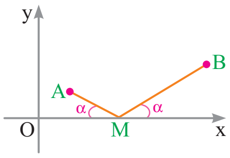
۴) ۲۴

۳۱۸. دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط d مفروض‌اند، اگر نقطهٔ M طوری قرارگرفته باشد که خط شکسته AMB کم‌ترین طول را داشته باشد، زاویهٔ $\widehat{AMB}$ کدام است؟



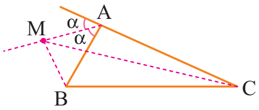
۱) ۴۰° ۲) ۵۰°
۳) ۶۰° ۴) ۲۰°

۳۱۹. اگر $A(۲,۱)$ و $B(۵,۳)$ و نقطهٔ M مطابق شکل روی محور xها قرار گرفته باشد، اندازهٔ خط شکسته AMB کدام است؟



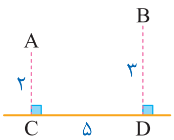
۱) ۵ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) ۸

۳۲۰. در شکل مقابل، نقطهٔ M روی نیمساز خارجی $\widehat{A}$ قرار دارد. نسبت $\dfrac{MB+MC}{AB+AC}$ چگونه است؟



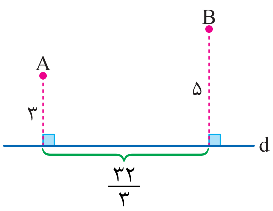
۱) بزرگتر از ۱ ۲) کوچکتر از ۱
۳) برابر با ۱ ۴) نامشخص

۳۲۱. در شکل زیر $BD=۳, AC=۲, CD=۵$. فرض کنیم نقطهٔ M روی خط d واقع است، کم‌ترین مقدار $AM+MB$ کدام است؟



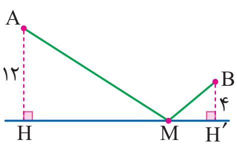
۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt{۵}$

۳۲۲. در شکل زیر نقطهٔ M را روی خط d طوری به‌دست می‌آوریم که $AM+BM$ کم‌ترین مقدار را داشته باشد. طول AM چقدر است؟



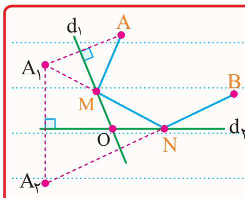
۱) ۷
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۵

۳۲۳. در شکل مقابل، نقاط A و B ثابت هستند. اگر کم‌ترین مقدار $AM+MB$ برابر ۳۲ باشد، زاویهٔ $H\widehat{A}M$ کدام است؟



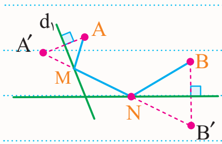
۱) ۱۵°
۲) ۳۰°
۳) ۴۵°
۴) ۶۰°

کاربرد مسئلهٔ هرون [تیپ دوم]

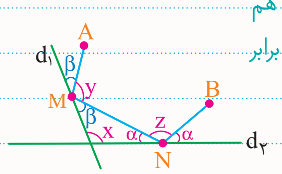


دو خط متقاطع d_1 و d_2 و نقاط ثابت A و B مطابق شکل مفروض‌اند، اگر نقطهٔ M روی خط d_1 و نقطهٔ N روی خط d_2 بلغزد، برای پیدا کردن کم‌ترین طول خط شکستهٔ AMNB کافیست قرینهٔ A را نسبت به d_1 پیدا کرده و A_1 بنامیم، حال اگر قرینهٔ A_1 را نسبت به خط d_2 پیدا کرده و A_2 بنامیم، A_2B برابر با کم‌ترین طول خط شکستهٔ AMNB است.

$$\boxed{Min(AMNB)=|A_2B|}$$



STOP یک راه دیگر برای حل این مسئله این است که بازتاب A نسبت به d_1 و بازتاب B نسبت به d_2 یعنی نقاط A' و B' را پیدا کرده و از A' به B' وصل کنیم تا این دو خط را در M و N قطع کنند. در این صورت خط شکستهٔ AMNB کوتاه‌ترین طول را دارد و اندازهٔ آن با $|A'B'|$ برابر است.

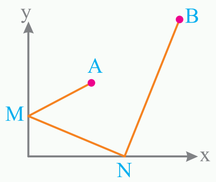


در هر یک از دو روش فوق وقتی AMNB کوتاه‌ترین طول را دارد، زاویه‌های طرفین M و زاویه‌های طرفین N باید با هم برابر باشد و برعکس [هرگاه این زاویه‌ها با هم برابر باشد، این کوتاه‌ترین طول است. در ضمن در این حالت زاویهٔ دو خط d_1 و d_2 برابر با میانگین زوایای داخلی خط شکستهٔ AMNB است یعنی $x=\dfrac{y+z}{۲}$

STOP قضیهٔ فوق را برای بیش از دو خط d_1 و d_2 نیز می‌توان تعمیم داد.

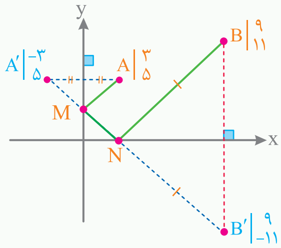
Test نقاط $A\left|\begin{smallmatrix}3\\5\end{smallmatrix}\right.$ و $B\left|\begin{smallmatrix}9\\11\end{smallmatrix}\right.$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض‌اند، دو نقطهٔ M و N همواره روی دو محور می‌لغزند. کم‌ترین اندازه خط شکسته AMNB، کدام است؟ (داخل ـ ۹۸)

۱) ۱۸
۲) ۱۹
۳) ۲۰
۴) ۲۱



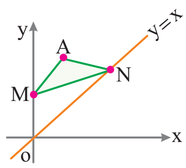
۳ اگر نقطهٔ A را نسبت به محور y و نقطهٔ B را نسبت به محور x قرینه کنیم و نقاط A' و B' را به هم وصل کنیم تا محورها xها و yها را در N و M قطع کند، در این صورت خط شکستهٔ AMNB کم‌ترین اندازه را خواهد داشت چون برابر $A'B'$ است.

$$\text{Min}|AMNB| = |A'B'| = \sqrt{12^2+16^2} = 20$$



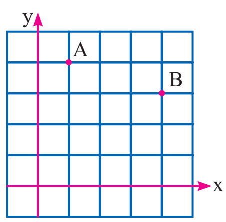
۳۲۴. نقطهٔ $A\left|\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right.$ مفروض است، نقطهٔ M روی محورyها و نقطهٔ N روی نیمساز ناحیهٔ اول می‌لغزند، کمترین محیط مثلث AMN کدام است؟ (مشابه داخل ـ ۹۸)

۱) $4\sqrt{2}$
۲) $2\sqrt{3}$
۳) $\sqrt{10}$
۴) $2\sqrt{5}$



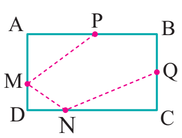
۳۲۵. در شبکهٔ شطرنجی زیر دو نقطهٔ ثابت A و B مفروض‌اند. اندازهٔ کوتاه‌ترین مسیر حرکت از نقطهٔ A به طوری‌که پس از برخورد با محورهای x و y به نقطهٔ B بر سیم، برابر کدام است؟ (مشابه داخل ـ ۹۸)

۱) $\sqrt{71}$
۲) $\sqrt{72}$
۳) $\sqrt{73}$
۴) $\sqrt{74}$



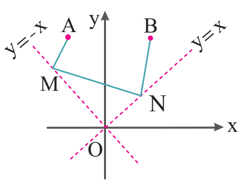
۳۲۶. مستطیل ABCD به اضلاع ۸ و ۶ مفروض است. اگر نقاط P و Q وسط اضلاع AB و BC باشند و نقاط M و N بر اضلاع AD و DC بلغزند، کم‌ترین طول خط شکسته PMNQ کدام است؟ (مشابه داخل ـ ۹۸)

۱) ۱۶
۲) ۲۰
۳) ۱۸
۴) ۱۵



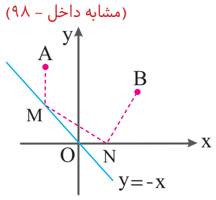
۳۲۷. نقاط $A\left|\begin{smallmatrix}-2\\3\end{smallmatrix}\right.$ و $B\left|\begin{smallmatrix}7\\9\end{smallmatrix}\right.$ در صفحهٔ مختصات مفروض‌اند، نقطهٔ M روی نیمساز ناحیهٔ دوم و نقطهٔ N روی نیمساز ناحیهٔ اول در حال لغزش هستند، کم‌ترین طول خط شکسته AMNB کدام است؟ (مشابه داخل ـ ۹۸)

۱) ۲۰
۲) ۱۳
۳) ۱۰
۴) ۸

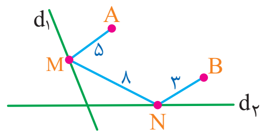


۳۲۸. نقاط $A\left|\begin{smallmatrix}-2\\3\end{smallmatrix}\right.$ و $B\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right.$ در صفحهٔ مختصات مفروض‌اند، نقطهٔ M روی نیمساز ناحیهٔ دوم و نقطهٔ N روی قسمت مثبت محور xها می‌لغزند، کم‌ترین طول خط شکسته AMNB کدام است؟ (مشابه داخل ـ ۹۸)

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۱۰

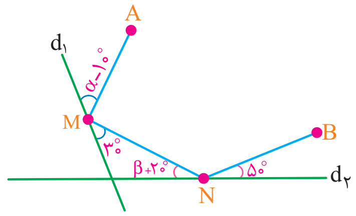


۳۲۹. نقاط ثابت A و B مفروض‌اند، نقطهٔ M روی خط d_1 و نقطهٔ N روی خط d_2 طوری می‌لغزد که خط شکسته AMNB کمترین طول را دارد. اگر A' بازتاب A نسبت به d_1 و B' بازتاب B نسبت به خط d_2 باشد، اندازهٔ پاره‌خط $A'B'$ کدام است؟



۱) ۱۴
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۱۸

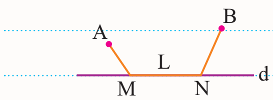
۳۳۰. نقاط A و B مطابق شکل مفروض‌اند، اگر نقاط M و N روی خطوط d_1 و d_2 بلغزد به‌طوری که خط شکسته AMNB کم‌ترین طول را داشته باشد، زاویهٔ $\alpha+\beta$ کدام است؟



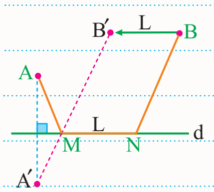
۱) 75°
۲) 70°
۳) 80°
۴) 85°

کاربرد مسئله هرون [تیپ سوم]

نقاط A و B در یک طرف خط d مفروض‌اند، نقاط M و N روی خط d به فاصلهٔ L از هم قرار دارند، برای پیدا کردن کوتاه‌ترین طول خط شکستهٔ AMNB به صورت زیر عمل می‌کنیم:

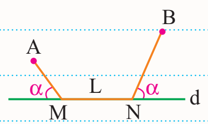


1. بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d یعنی A' را پیدا می‌کنیم.
2. نقطهٔ B را به اندازهٔ بردار $\vec{L}$ به سمت A انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ B' به دست آید.
3. از A' به B' وصل می‌کنیم تا خط d را در M قطع کند با معلوم شدن M به اندازهٔ L به سمت راست می‌رویم و به نقطهٔ N می‌رسیم در این صورت حداقل طول خط شکستهٔ AMNB برابر است با:

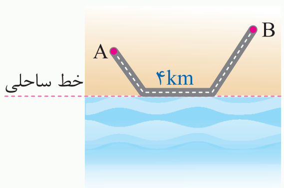


$$\boxed{Min(AMNB)=|A'B'|+L}$$

در این حالت زاویهٔ $\hat{M}$ و زاویهٔ $\hat{N}$ باید با هم برابر باشند.

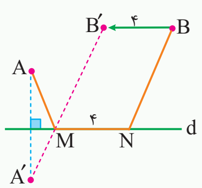


Test در شکل زیر قرار است جاده‌ای از A به B احداث شود به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده باید در کنار ساحل باشد. برای پیدا کردن موقعیت محدودهٔ جادهٔ ساحلی به طوری که کل جاده کوتاه‌ترین طول ممکن را داشته باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

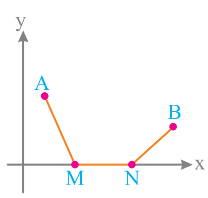


۱) بازتاب و دوران
۲) بازتاب و انتقال
۳) انتقال و تجانس
۴) دوران و تجانس

۲ باید نقطهٔ B را به اندازهٔ ۴ واحد به سمت A انتقال دهیم و همچنین بازتاب A نسبت به خط ساحلی را پیدا کرده و از A' به B' وصل کنیم تا نقطهٔ M به دست آید اگر به اندازهٔ ۴ واحد از M به سمت راست حرکت کنیم به N می‌رسیم و از N به B وصل می‌کنیم، مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر است.



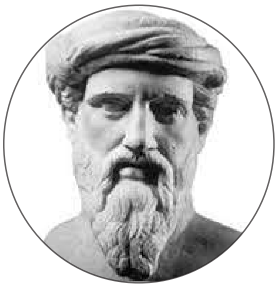
۳۳۱. نقاط $A\begin{vmatrix}2\\3\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}8\\1\end{vmatrix}$ در صفحهٔ مختصات مفروض‌اند، اگر نقاط M و N با فاصلهٔ ۳ واحد روی محور xها قرار گرفته باشند، حداقل طول خط شکستهٔ AMNB کدام است؟ (مشابه داخل-۹۹)



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

IR-MCI LTE 00:03 AM 100 %

Tweet



Pythagorsa

@Pythagorsa 570 bc

اعداد بر جهان فرمان می‌رانند

Number rules the univeres

Translate Tweet

07:32 . 5/31/20

View Tweet activity

برتراند راسل دربارهٔ او می‌نویسد: هیچکس را نمی‌شناسم که در عالم اندیشه به اندازهٔ فیثاغورس تأثیرگذار بوده باشد.

91,337 5,847 10,130,950,908

CHAPTER 3

Relations Logitudinal

Add another Tweet

۴۰۳. طول اضلاع مثلثی ۷ , ۷ , ۱۰ است، طول کوتاه‌ترین میانه چقدر است؟

۱) ۶
۲) $\sqrt{6}$
۳) $2\sqrt{6}$
۴) ۵

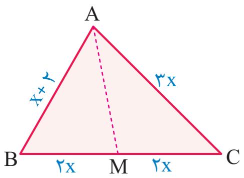
۴۰۴. در مثلثی با اضلاع x , ۵ , ۲x اگر مجموع مربعات میانه‌ها برابر $\frac{105}{2}$ باشد، محیط مثلث چقدر است؟

۱) ۱۷
۲) ۱۵
۳) ۱۲
۴) ۱۴

۴۰۵. در مثلثی مجموع مربعات اضلاع برابر با ۱۸۴ می‌باشد، اگر میانه‌های مثلث برابر با $x+1, x, 5$ باشند، طول بزرگ‌ترین میانهٔ مثلث چقدر است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۴۰۶. در مثلث شکل مقابل، اگر میانهٔ AM برابر با $\sqrt{37}$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟



۱) ۴۰
۲) ۴۱
۳) ۴۲
۴) ۴۳

۴۰۷. اگر اندازه‌های سه میانهٔ مثلثی ۱۰ , ۷ , ۵ باشد مجموع مربعات اضلاع این مثلث چقدر است؟

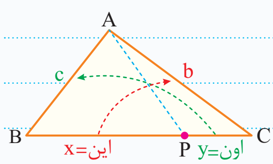
۱) ۲۸۴
۲) ۲۳۲
۳) ۲۵۶
۴) ۱۷۴

۴۰۸. طول اضلاع یک متوازی‌الاضلاع ۴ و ۵ است. مجموع مربعات قطرها در این متوازی‌الاضلاع چقدر است؟

۱) ۱۰۰
۲) ۸۲
۳) ۹۰
۴) ۷۲

رابطهٔ استوارت

در مثلث ABC، اگر نقطهٔ دلخواه P ضلع BC را به دو قطعهٔ x و y تقسیم کند، با توجه به شکل، رابطهٔ استوارت به‌صورت زیر برقرار است:

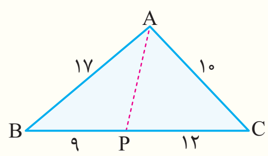


$$AP^2 = \frac{xb^2 + yc^2}{x+y} - xy$$

این در مربع اون ضلع — اون در مربع این ضلع — ضرب این و اون — جمع این و اون

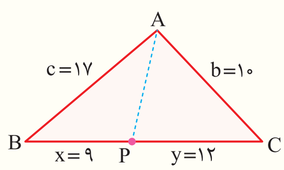
بنابراین به کمک رابطهٔ استوارت می‌توانیم طول هر پاره‌خطی که رأس مثلث را به نقطه‌ای از ضلع مقابل وصل می‌کند، به‌دست آوریم.

Test در شکل مقابل، طول AP چقدر است؟



۱) ۱۱
۲) ۹
۳) ۱۲
۴) ۱۰

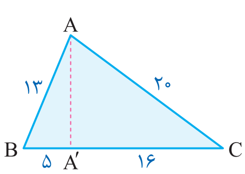
F به کمک رابطهٔ استوارت، طول AP را به‌دست می‌آوریم:



$$AP^2 = \frac{xb^2+yc^2}{x+y} - xy \Rightarrow AP^2 = \frac{(9\times 10^2)+(12\times 17^2)}{9+12} - 9\times 12$$

$$AP^2 = \frac{(\cancel{9}^{3}\times 10^2)+(\cancel{12}^{4}\times 17^2)}{\cancel{21}_{7}} - 108 = \frac{(3\times 100)+(4\times 289)}{7} - 108 \Rightarrow AP^2 = \frac{1456}{7} - 108 \Rightarrow AP^2 = 208-108 = 100 \Rightarrow AP = 10$$

۴۰۹. در شکل زیر طول AA' چقدر است؟

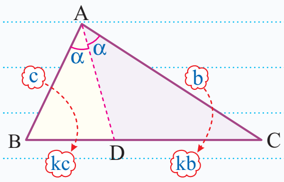


۱) ۹
۲) $5\sqrt{6}$
۳) $6\sqrt{5}$
۴) ۱۲

قضیهٔ نیمسازها

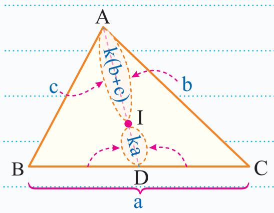
در هر مثلث، نیمساز یک زاویهٔ داخلی، ضلع مقابل به آن زاویه را به نسبت اضلاع مجاورش تقسیم می‌کند.

$$\boxed{\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}}$$

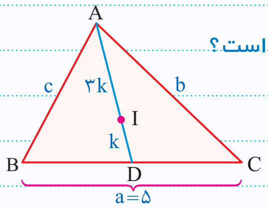


هر نیمساز داخلی مثلث، در محل همرسی نیمسازها به نسبت «مجموع اندازه‌های دو ضلع مجاور» به «مجموع اندازه‌های دو پاره‌خط مقابل» [یعنی اندازهٔ ضلع سوم] تقسیم می‌شود. به عبارت دیگر، در شکل مقابل اگر I نقطهٔ همرسی سه نیمساز باشد، پاره‌خط AI مضربی از $b+c$ و پاره‌خط DI، همان مضرب از ضلع a است:

$$\boxed{\frac{AI}{DI}=\frac{b+c}{a}}$$

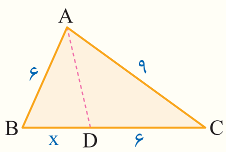


در شکل مقابل، اگر نقطهٔ I نقطهٔ همرسی نیمسازهای مثلث ABC و $AI=۳DI$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟



$$\frac{AI}{DI}=\frac{b+c}{a}\Rightarrow\frac{۳}{۱}=\frac{b+c}{۵}\Rightarrow b+c=۱۵$$ محیط $=a+b+c=۲۰$

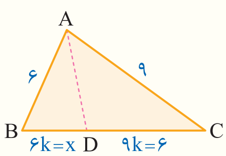
Test در شکل زیر AD نیمساز است، x کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۵

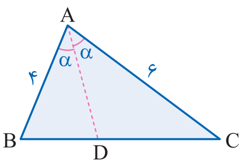
۳) ۴/۵ ۴) ۳/۵

۱ طبق قضیهٔ نیمساز، نسبت پاره‌خط‌های ایجاد شده را می‌نویسیم:



$$۹k=۶\Rightarrow k=\frac{۲}{۳}\Rightarrow x=۶k=۴$$

۴۱۸. در مثلث ABC مطابق شکل اگر $AB=۴, AC=۶, BC=۵$ باشد، حاصل $DC-BD$ کدام است؟



۱) ۰/۵ ۲) ۱

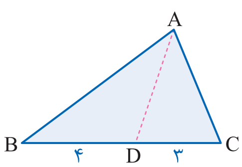
۳) ۱/۵ ۴) ۲/۵

۴۱۹. در مثلثی با اضلاع ۹,۶,۵ طول کوتاه‌ترین پاره‌خطی که نیمساز وارد بر ضلع کوچکتر ایجاد می‌کند، چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) ۲

۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۱۰}{۹}$

۴۲۰. در شکل مقابل AD نیمساز است و محیط مثلث برابر ۲۱ می‌باشد، طول AC چقدر است؟



۱) ۶ ۲) ۹

۳) ۸ ۴) ۱۲

۴۲۱. در مثلث ABC به اضلاع ۸,۷,۳ ارتفاع و نیمساز نظیر بزرگ‌ترین ضلع، آن را به ترتیب در H و D قطع می‌کنند، اندازهٔ DH کدام است؟ (مشابه داخل ـ ۹۸)

۱) ۱/۲ ۲) ۱

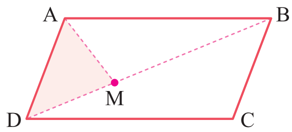
۳) ۰/۸ ۴) ۰/۹

۴۲۷. اضلاع مثلثی با اعداد ۴، ۳، ۲ متناسب است. نیمساز داخلی زاویهٔ متوسط را رسم می‌کنیم. مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟ (خارج ریاضی - ۸۵)

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۴۲۸. در متوازی‌الاضلاع شکل زیر $AB = ۲AD$. نیمساز زاویهٔ A قطر BD را در M قطع می‌کند، مساحت مثلث ADM چه کسری از مساحت متوازی‌الاضلاع است؟

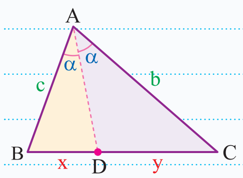


۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$

۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۱۰}$

رابطهٔ طول نیمساز

در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر نیمساز داخلی، برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌های دو ضلع مجاور منهای حاصل‌ضرب اندازه‌های دو پاره‌خط که روی ضلع سوم ایجاد شده است. به عبارت دیگر اگر در شکل زیر، AD نیمساز زاویهٔ A باشد آنگاه رابطهٔ طول نیمساز به‌صورت زیر خواهد بود:



حاصل‌ضرب اضلاع زاویه — حاصل‌ضرب قطعه‌ها

$$\boxed{AD^۲ = bc - xy}$$

اگر سه ضلع مثلث را داشته باشیم، برای استفاده از رابطهٔ بالا، ابتدا به کمک قضیهٔ نیمساز، طول پاره‌خط‌ها [یعنی x و y] را به دست می‌آوریم، سپس به سراغ طول نیمساز می‌رویم.

در مثلث ABC، اگر دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها معلوم باشد، طول نیمساز وارد بر ضلع سوم از رابطهٔ $d_a = \cos\frac{A}{۲} \times \frac{۲bc}{b+c}$ قابل محاسبه است، که در این رابطه d_a طول نیمساز زاویهٔ A است.

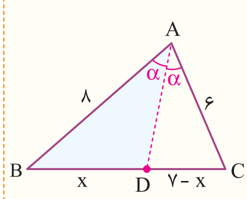
$d_a = \cos\frac{A}{۲} \times \frac{۲bc}{b+c}$	سه حالت خاص مهم در محاسبهٔ طول نیمساز		
	$\hat{A} = ۶۰^\circ$	$\hat{A} = ۹۰^\circ$	$\hat{A} = ۱۲۰^\circ$
	$d_a = \sqrt{۳} \times \frac{bc}{b+c}$	$d_a = \sqrt{۲} \times \frac{bc}{b+c}$	$d_a = \frac{bc}{b+c}$

Test در مثلثی با اضلاع ۸، ۷، ۶ طول نیمساز وارد بر ضلع متوسط چقدر است؟

۱) ۶ ۲) $\sqrt{۳۰}$

۳) ۵ ۴) $۴\sqrt{۲}$

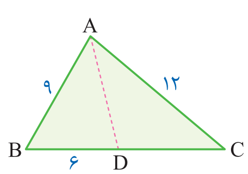
۱ ابتدا به کمک قضیهٔ نیمساز، طول پاره‌خط‌های ایجاد شده روی ضلع متوسط را به‌دست می‌آوریم، سپس از رابطهٔ طول نیمساز استفاده می‌کنیم:



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{x}{۷-x} = \frac{۸}{۶} \Rightarrow ۶x = ۵۶ - ۸x \Rightarrow ۱۴x = ۵۶ \Rightarrow x = ۴$$

$$AD^۲ = bc - BD \cdot DC \Rightarrow AD^۲ = ۶ \times ۸ - ۴ \times ۳ = ۳۶ \Rightarrow AD = ۶$$

۴۲۹. در شکل زیر طول نیمساز AD کدام است؟



۱) $۶\sqrt{۲}$ ۲) ۷

۳) ۸ ۴) $۲\sqrt{۱۵}$

پاسخنامه
تمام تشریحی
و تمام رنگی

ANSWERS

Password سُوگَند بِه قَلَم وَ آن چِه می نِویسَند

www.gaj.ir

Other user

ENG

57 ٣ از تساوی طول کمان‌ها نسبت شعاع‌های دو دایره معلوم می‌شود:

$$\frac{90^\circ}{360^\circ}(2\pi R)=\frac{45^\circ}{360^\circ}(2\pi R')\Rightarrow R'=2R$$

بنابراین نسبت مساحت دو دایره مجذور نسبت شعاع‌ها است:

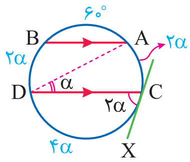
$$\frac{S_1}{S_2}=(\frac{R'}{R})^2=(\frac{2R}{R})^2=4$$

58 ١ کمان‌های R , $\sqrt{2}R$, $\sqrt{3}R$ متناظر با زاویه‌های 60° , 90° , 120° هستند، بنابراین:

$$\overset{\frown}{AD}=60^\circ , \overset{\frown}{CD}=90^\circ , \overset{\frown}{BC}=120^\circ$$

$$\overset{\frown}{AB}=360^\circ-60^\circ-90^\circ-120^\circ=90^\circ$$

59 ٤ با فرض $\beta=2\alpha$ کمان $\overset{\frown}{DC}$ روبه‌زاویهٔ ظلی $D\hat{C}X$ است، بنابراین $\overset{\frown}{DC}=4\alpha$ و همچنین کمان $\overset{\frown}{AC}$ روبه‌زاویهٔ محاطی $A\hat{D}C$ است، در نتیجه $\overset{\frown}{AC}=2\alpha$ در ضمن از موازی بودن AB و DC نتیجه می‌گیریم $\overset{\frown}{BD}=2\alpha$ خواهد بود، از طرف اگر اندازهٔ یک وتر برابر باشعاع دایره باشد کمان روبه‌رو به آن 60° است، بنابراین:



$$2\alpha+60^\circ+2\alpha+4\alpha=360^\circ\Rightarrow 8\alpha=300^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{BD}=2\alpha=75^\circ$$

60 ٢ اگر طول پاره‌خط‌های AM و MB را برابر x و 4x در نظر بگیریم داریم: $AM.MB=CM.MD\Rightarrow x(4x)=4\times9\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=3$

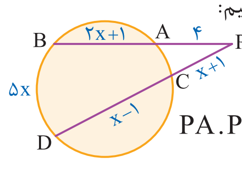
با معلوم شدن مقدار x اندازهٔ پاره‌خط‌های AM و MB و در نتیجه AB معلوم می‌شود: $AM=x=3 , MB=4x=12\Rightarrow AB=3+12=15$

61 ٢ اگر طول پاره‌خط MB را برابر x فرض کنیم طول پاره‌خط AM برابر $11-x$ خواهد بود و با توجه به روابط طولی در دایره داریم:

$$3\times6=x(11-x)\Rightarrow x^2-11x+18=0\Rightarrow\begin{cases}x=2\\x=9\end{cases}$$

بنابراین تفاضل $MB-MA$ برابر $9-2=7$ به دست می‌آید.

62 ١ روابط طولی را برای نقطهٔ P می‌نویسیم:

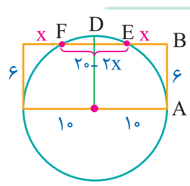


$$PA.PB=PC.PD\Rightarrow \underbrace{4(2x+5)}_{8x+20}=\underbrace{(x+1)(2x)}_{2x^2+2x}$$

$$2x^2-6x-20=0\Rightarrow x^2-3x-10=0\Rightarrow\begin{cases}x=5\\x=-2\ \times\end{cases}$$

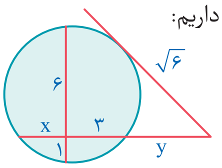
حال می‌توانیم طول AB را به دست آوریم: $AB=2x+1=11$

63 ٣ از نقطهٔ B یک مماس و یک قاطع رسم شده است. اگر دایره را کامل کنیم با توجه به $OA=OD=10$ داریم:



$$BA^2=BE.BF\Rightarrow 6^2=x(20-2x+x)\Rightarrow \underbrace{x^2-20x+36}_{(x-2)(x-18)}=0\Rightarrow\begin{cases}x=2\\x=18\end{cases}$$

64 ١ از روابط طولی برای دو نقطه در دایره داریم:

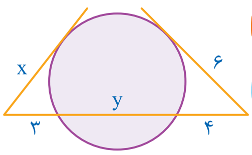


1 $x(3)=1\times6\Rightarrow x=2$

2 $y(y+5)=6\Rightarrow\begin{cases}y=1\\y=-6\ \times\end{cases}$

بنابراین $y-x=-1$ خواهد بود.

65 ٣ برای دو نقطه روابط طولی در دایره را استفاده می‌کنیم:



1 $6^2=4(4+y)\Rightarrow y=5$

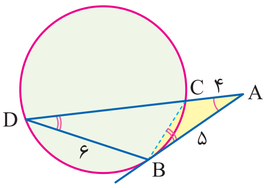
2 $x^2=3(3+y)=24\Rightarrow x=2\sqrt{6}$

66 ٣ ابتدا برای دو وتر AB و CD که در M متقاطع‌اند، رابطهٔ طولی را می‌نویسیم: 1 $MA.MB=MC.MD\Rightarrow 3x=1\times6\Rightarrow x=2$

حال برای امتداد دو وتر AB و DE که در F متقاطع‌اند، رابطهٔ طولی را می‌نویسیم:

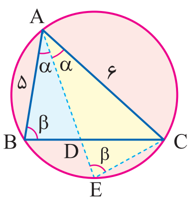
2 $FB.FA=FE.FD\Rightarrow \underbrace{4(4+2+3)}_{4\times9}=\underbrace{y(y+3y)}_{4y^2}\Rightarrow y^2=9\Rightarrow y=3$

67 ٤ با توجه به زاویه‌های مشخص شده در شکل، دو مثلث ABC و ABD متشابه‌اند؛ اگر نسبت اضلاع متناظر را برای آن‌ها بنویسیم، خواهیم داشت:



$$\overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{ABD}\Rightarrow\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{AB}\Rightarrow\frac{BC}{6}=\frac{4}{5}\Rightarrow BC=\frac{24}{5}=4/8$$

68 ١ از E به C وصل می‌کنیم، مثلث‌های ABD و ACE با دو زاویهٔ برابر متشابه‌اند. بنابراین:



$$\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}\Rightarrow AD.AE=AB.AC\Rightarrow AD.AE=5\times6=30$$

69 ١ برای این‌که دو دایره متخارج باشند باید $d>R+R'$ باشد. در نتیجه داریم: $8>R+5\Rightarrow R<3$

70 ٢ دو دایره دارای ۳ مماس مشترک هستند، پس مماس خارج‌اند و رابطهٔ $d=R+R'$ برقرار است، یعنی:

$$d=R+R'\Rightarrow 7=x+2+x-1\Rightarrow 2x=6\Rightarrow x=3$$

71 ٢ دو دایره دارای چهار مماس مشترک هستند، پس متخارج‌اند، بنابراین باید $O_1O_2>R_1+R_2$ باشد:

1 $O_1O_2=\sqrt{(4-0)^2+(0-0)^2}=4\Rightarrow 4>2+\sqrt{16-a}\Rightarrow\sqrt{16-a}<2$

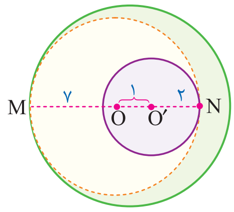
$16-a<4\Rightarrow a>12$

از طرفی شعاع دایره‌ها نیز باید عدد حقیقی باشد، بنابراین:

2 $16-a>0\Rightarrow a<16$

با اشتراک‌گیری از روابط 1 و 2 خواهیم داشت: $12<a<16$

72 ۴ قطر بزرگ‌ترین دایرهٔ مماس بر دو دایره همواره برابر با $MN=d+R+r$ است:



$$MN=1+7+2=10$$

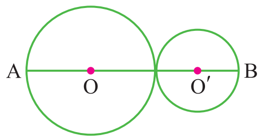
بنابراین شعاع بزرگ‌ترین دایرهٔ مماس بر هر دو دایره برابر ۵ است.

73 ۲ قطر کوچک‌ترین دایرهٔ مماس بر دو دایره همواره برابر با است با:

$$MN=|d-R|-r=|1-7|-2=4$$

بنابراین شعاع کوچک‌ترین دایرهٔ مماس بر هر دو دایره برابر ۲ است.

74 ۴ دو دایره مماس خارج‌اند، بنابراین طول خط‌المرکزین برابر مجموع شعاع دو دایره است:

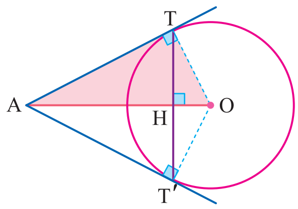


$$OO'=r+3\Rightarrow 2r+1=r+3\Rightarrow r=2$$

بیش‌ترین فاصلهٔ بین نقاط دو دایره برابر است با:

$$AB=d+R+r=5+3+2=10$$

75 ۲ مطابق شکل مثلث OAT یک مثلث قائم‌الزاویه است به‌طوری‌که $OA=5$ و $OT=3$ پس $AT=4$ است، از طرفی TH ارتفاع وارد بر وتر است، بنابراین:

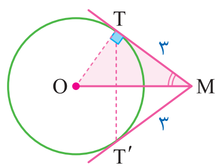


$$TH.OA=AT.OT\Rightarrow TH\times 5=4\times 3\Rightarrow TH=\frac{12}{5}=2.4$$

حال اندازهٔ پاره‌خط واصل بین نقاط تماس قابل محاسبه است:

$$TT'=2TH=4.8$$

76 ۳ مساحت دایره برابر 3π است، پس شعاع دایره $\sqrt{3}$ است. حال در مثلث قائم‌الزاویه رنگ شده خواهیم داشت:

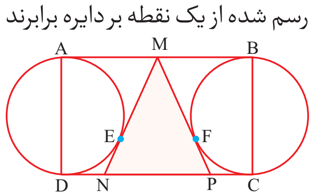


$$\tan\left(\frac{\hat{M}}{2}\right)=\frac{OT}{MT}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \frac{\hat{M}}{2}=30^\circ\Rightarrow \hat{M}=60^\circ$$

$\overset{\Delta}{MTT'}$ متساوی‌الاضلاع است، بنابراین داریم:

$$TT'=MT=MT'=3$$

77 ۳ می‌دانیم طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره برابرند پس به مماس‌هایی که از نقاط M, N, P بر دایره رسم شده توجه می‌کنیم:

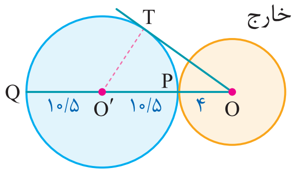


$$PF=PC, NE=ND, MA=ME, MB=MF$$

پس محیط مثلث MNP با مجموع $AB+CD$ برابر است.

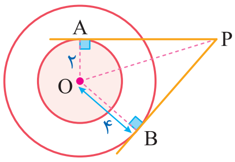
$$AB=CD=17\Rightarrow AB+CD=34$$

78 ۴ از روابط طولی برای نقطهٔ O خارج از دایرهٔ بزرگ‌تر استفاده می‌کنیم:



$$OT^2=OP.OQ=4(25)=100\Rightarrow OT=10$$

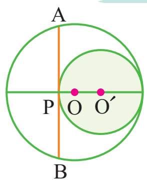
79 ۴ برای به‌دست آوردن طول مماس بر دایرهٔ بزرگ‌تر ابتدا در مثلث OAP مقدار OP را پیدا می‌کنیم: $OP=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}$



حال به سراغ مثلث OPB می‌رویم و به کمک فیثاغورس PB را به دست می‌آوریم:

$$PB=\sqrt{PO^2-OB^2}=\sqrt{40-16}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

80 ۴ بلندترین وتر، وتری است که به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد، پس وتری که در P بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشد، بلندترین وتر است.



$$AP=\sqrt{AO^2-OP^2}=\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}\Rightarrow AB=4\sqrt{6}$$

81 ۳ طول مماس مشترک داخلی از رابطهٔ $L=\sqrt{d^2-(R+R')^2}$ به دست می‌آید:

$$TT'=\sqrt{17^2-(10+5)^2}=\sqrt{289-225}=\sqrt{64}=8$$

82 ۴ اگر طول خط‌المرکزین را با d نمایش دهیم، داریم:

$$9=\sqrt{d^2-(7+5)^2}\Rightarrow 81=d^2-144\Rightarrow d^2=225\Rightarrow d=15$$

83 ۳ اگر زاویهٔ بین مماس مشترک‌های داخلی را با θ نشان دهیم، داریم:

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{R+R'}{OO'}\Rightarrow \sin\frac{\theta}{2}=\frac{7+5}{24}=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{\theta}{2}=30^\circ\Rightarrow \theta=60^\circ$$

84 ۴ طول مماس مشترک خارجی از رابطهٔ $L=\sqrt{d^2-(R-R')^2}$ به دست می‌آید:

$$12=\sqrt{d^2-(9-4)^2}\Rightarrow d=13$$

بنابراین بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط دو دایره برابر است با:

$$d+R+r=13+9+4=26$$

85 ۲ باید طول خط‌المرکزین را با مجموع و تفاضل دو شعاع مقایسه کنیم:

$$TT'=\sqrt{d^2-(R-R')^2}\Rightarrow 4R=\sqrt{d^2-(4R-R)^2}\Rightarrow d=5R$$

چون $d=4R+R$ است، [طول خط‌المرکزین با مجموع شعاع‌ها برابر است]، پس دو دایره مماس خارج هستند.

86 ۳ از رابطهٔ داده شده برای طول مماس مشترک خارجی دو دایره استفاده می‌کنیم:

$$L=\sqrt{d^2-(R-R')^2}\Rightarrow 15=\sqrt{d^2-(14-6)^2}\Rightarrow d=17$$

87 ۱ به‌کمک زاویهٔ بین مماس مشترک‌های خارجی دو دایره، طول خط‌المرکزین را پیدا می‌کنیم:

$$\sin\frac{60^\circ}{2}=\frac{R-R'}{d}\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{13-3}{d}\Rightarrow d=20$$

177 ۱ بررسی تک تک موارد:

A همهٔ اضلاع دو مثلث نظیر به نظیر موازی نیست، پس تبدیل T شیب‌پا نیست.

B دو مثلث همنهشت‌اند، یعنی تبدیل T طول‌پا است.

C شکل ۱ پادساعتگرد و شکل ۲ ساعتگرد است پس تبدیل T جهت‌پا نیست.

178 ۴ دو شکل F, F' الزاماً هم‌مساحت یا هم هم‌جهت نیستند و حتی ممکن است اضلاع آن‌ها موازی نباشد اما در هرشرایطی زوایای دو شکل با هم برابر است.

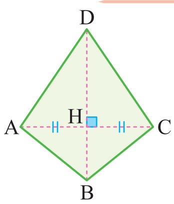
179 ۱ تبدیل T ایزومتری نیست و شیب اضلاع را نیز ثابت نگه نداشته است، ولی در تبدیل T جهت شکل F, F' عوض شده است.

180 ۴ اندازهٔ شکل ۱ توسط تبدیل T تغییر کرده، بنابراین این تبدیل ایزومتری یا طول‌پا نیست، همچنین جهت شکل نیز توسط این تبدیل عوض شده بنابراین این تبدیل جهت‌پا نیست در ضمن شیب اضلاع نظیر در دو شکل با هم یکسان نیست، در نتیجه این تبدیل شیب‌پا نیز محسوب نمی‌شود. پس گزینهٔ ۴ صحیح می‌باشد.

181 ۳ در تبدیل طول پا، اندازهٔ پاره‌خط، فاصلهٔ بین نقاط و مساحت شکل ثابت می‌ماند ولی در مورد شیب خط نمی‌توان اظهارنظر کرد.

182 ۳ اضلاع مثلث M_1 با اضلاع نظیرشان در مثلث M_2 موازی نیستند، پس تبدیل T شیب پا نیست.

183 ۴ مطابق شکل، نقطهٔ A با بازتاب نسبت به قطر BD روی C تصویر می‌شود یعنی داریم:



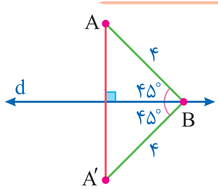
$$AH=HC \Rightarrow \begin{cases} AB=BC \\ AD=DC \end{cases}$$

بنابراین چهار ضلعی ABCD محیطی است.

184 ۳ باید توجه کنیم که محور بازتاب باید عمود منصف پاره‌خطی باشد که هر نقطه و تصویرش را به هم وصل می‌کند. در گزینهٔ ۳ چنین چیزی رعایت نشده است.

185 ۲ باید نقطهٔ A روی B تصویر شود، پس خط بازتاب باید عمود منصف AB باشد. این خط از مرکز دو دایره می‌گذرد.

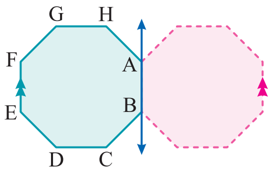
186 ۳ مطابق شکل نقطهٔ A را به A' وصل می‌کنیم، چون بازتاب ایزومتری است و اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند پس:



$$\begin{cases} A'B=AB=۴ \\ A\hat{B}A'=۴۵°+۴۵°=۹۰° \end{cases} \Rightarrow S_{ABA'}=\frac{۴\times۴}{۲}=۸$$

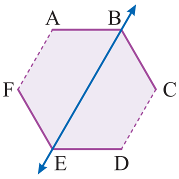
187 ۳ مطابق شکل، ۸ ضلعی منتظم را نسبت به امتداد ضلع AB بازتاب می‌دهیم، بنابراین ضلع AB بر خودش منطبق است و شیب آن عوض نمی‌شود، ضلع EF نیز بر خطی موازی با خودش تصویر می‌شود، دو ضلع CD و GH بر محور بازتاب عمودند پس در تصویرآن‌ها شیب عوض نمی‌شود، پس در مجموع شیب دقیقاً ۴ تا از اضلاع تحت بازتاب، ثابت می‌ماند.

[بازتاب تنها در صورتی شیب خط را حفظ می‌کند که خط موازی محور بازتاب یا عمود بر آن باشد.]

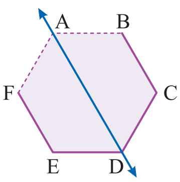


188 ۲ بررسی هر دو حالت:

۱ در شکل مقابل دو ضلع AF و CD اضلاع مقابل از شش‌ضلعی منتظم هستند که با بازتاب نسبت به قطر بزرگ BE روی یکدیگر تصویر می‌شوند.

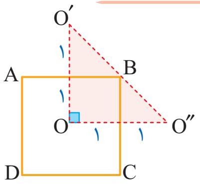


۲ در شکل مقابل نیز دو ضلع مجاور AB و AF نسبت به قطر بزرگ AD [که نیمساز زاویهٔ بین این دو ضلع مجاور است]، روی یکدیگر تصویر می‌شوند.



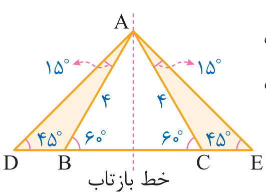
189 ۳ محور بازتاب باید عمودمنصف پاره‌خط‌هایی باشد که هر نقطه را به تصویرش وصل می‌کند، همچنین دو شکل دارای جهت‌های تغییر یافته هستند بنابراین خط بازتاب باید در امتداد AO باشد.

190 ۲ شکل را رسم می‌کنیم که با توجه به اندازه‌ها، مثلث $OO'O''$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین به ضلع ۲ است، بنابراین:



$$S_{OO'O''}=\frac{۲\times۲}{۲}=۲$$

191 ۲ مطابق شکل خط بازتاب عمودمنصف BC است که از A می‌گذرد همچنین دو مثلث ABD و ACE هم‌نهشت‌اند بنابراین داریم:



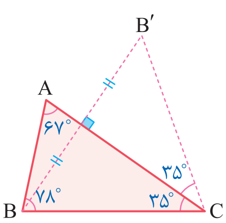
$$\begin{cases} AB=AC=۴ \\ \hat{D}=\hat{E}=۴۵° \\ B\hat{A}D=C\hat{A}E=۱۵° \end{cases} \Rightarrow A\hat{B}C=A\hat{C}B=۶۰°$$

بنابراین مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و طول ضلع BC نیز برابر ۴ است.

192 ۱ می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث $۱۸۰°$ است، بنابراین:

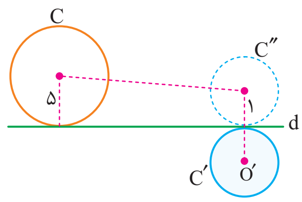
$$A\hat{C}B=۱۸۰°-۶۷°-۷۸°=۳۵°$$

از طرفی محور بازتاب نیمساز زاویهٔ بین خط و تصویرش است، پس AC نیمساز زاویهٔ بین BC و $B'C$ است و داریم:



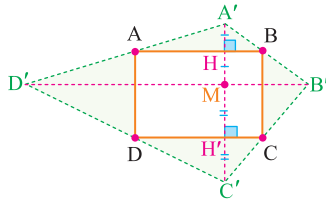
$$A\hat{C}B'=۳۵° \Rightarrow B\hat{B'}C=۹۰°-۳۵°=۵۵°$$

193 ۲ خط d اکنون مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ C'', C محسوب می‌شود، بنابراین به سراغ رابطهٔ طول مماس مشترک می‌رویم: [شکل فرضی است]



$$L=\sqrt{d^۲-(R_۱-R')^۲}\Rightarrow ۳=\sqrt{d^۲-(۵-۱)^۲}\Rightarrow d^۲=۹+۱۶=۲۵\Rightarrow d=۵$$

194 ۳ نقطهٔ M با بازتاب نسبت به AB و CD روی A' و C' تصویر شده است، پس AB عمودمنصف MA' و همچنین پاره‌خط CD عمودمنصف MC' است، بنابراین:



$$A'C'=A'M+MC'=۲MH+۲MH'=۲(MH+MH')=۲AD$$

به همین ترتیب $B'D'=۲AB$ است، حال می‌توانیم نسبت مساحت‌ها را به دست آوریم:

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{۱}{۲}A'C'.B'D'}{AB.AD}=\frac{\frac{۱}{۲}(۲AD)(۲AB)}{AB.AD}=۲$$

مساحت هر چهارضلعی با قطرهای عمود بر هم، با نصف حاصل‌ضرب اندازهٔ قطرها برابر است.

195 ۲ بازتاب $A(۳,۴)$ نسبت به محور xها $A'(۳,-۴)$ و بازتاب $A'(۳,-۴)$ نسبت به محور yها $A''(-۳,-۴)$ است. حال باید طول سه ضلع مثلث را به دست آوریم:

$$AA'=\sqrt{۰^۲+۸^۲}=۸$$
$$A'A''=\sqrt{۰^۲+۶^۲}=۶ \Rightarrow \text{محیط}=۸+۶+۱۰=۲۴$$
$$AA''=\sqrt{۶^۲+۸^۲}=۱۰$$

196 ۱ بازتاب $A(۲,۱)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم $A'(۱,۲)$ و بازتاب $B(۲,-۴)$ نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم $B'(۴,-۲)$ است، بنابراین:

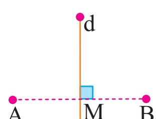
$$A'(۱,۲),\ B'(۴,-۲) \Rightarrow |A'B'|=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۲+۲)^۲}=۵$$

197 ۲ چون عرض دو نقطه قرینهٔ هم است، بنابراین نقطهٔ A تحت بازتاب نسبت به محور xها روی نقطهٔ A' تصویر می‌شود.

198 ۳ خط d عمود بر پاره‌خط AA' است، بنابراین شیب آن عکس قرینهٔ شیب AA' است:

$$m_{AA'}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-۶+۴}{۳-۲}=-۲\Rightarrow m_d=\frac{۱}{۲}$$

199 ۲ محور بازتاب عمود منصف پاره‌خط AB است:



$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۳-(-۱)}{۱-۵}=-۱$$

$$M=\frac{A+B}{۲}=\frac{(۱,۳)+(۵,-۱)}{۲}=(۳,۱)$$

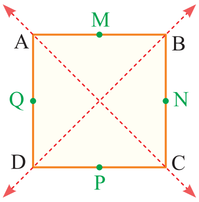
شیب خط d عکس و قرینهٔ شیب AB است و از نقطهٔ M می‌گذرد، بنابراین معادلهٔ آن به‌صورت مقابل است: $y-۱=۱(x-۳)\Rightarrow y=x-۲$

200 ۱ باید وسط پاره‌خط AB بر خط D منطبق شود.

$$M=\frac{A+B}{۲}=\frac{(۳,a)+(-a,۵)}{۲}=\left(\frac{۳-a}{۲},\frac{a+۵}{۲}\right)$$

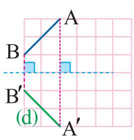
$$\frac{a+۵}{۲}=\frac{۳-a}{۲}+۲\Rightarrow a+۵=۳-a+۴\Rightarrow ۲a=۲\Rightarrow a=۱$$

201 ٤ در بازتاب نسبت به قطر AC نقطهٔ M به Q تبدیل می‌شود، پس گزینه‌های ۱، ۳ درست نیست. در بازتاب نسبت به قطر BD نقطهٔ N به نقطهٔ M تصویر می‌شود، پس گزینهٔ ۲ درست نیست. اما قطر BD عمودمنصف PQ است، یعنی در بازتاب نسبت به قطر BD نقطهٔ P به Q تبدیل می‌شود، پس گزینهٔ ۴ درست است.

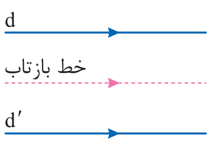


202 ۳ خطوط $L_۱$ و $L_۲$ ممکن است متقاطع نیز باشند، بنابراین گزینهٔ ۱ نادرست است. در ضمن در حالتی که $L_۱$ و $L_۲$ موازی هستند، خط d نیمساز زاویهٔ $L_۱$ و $L_۲$ نیست، یعنی گزینهٔ ۲ نیز نادرست است. از طرفی گزینهٔ ۴ تنها در حالتی می‌تواند درست باشد که $L_۱$ و $L_۲$ بر هم منطبق باشند؛ پس گزینهٔ ۴ نیز نادرست است. اما اگر یکی از دو خط $L_۱$ یا $L_۲$ با خط d موازی باشد، خط دیگر نیز با آن موازی است، بنابراین تنها گزینهٔ قابل قبول، گزینهٔ ۳ است.

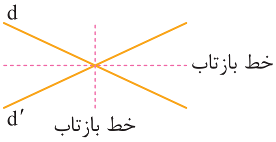
203 ٤ پاره‌خط AB با پاره‌خط (b) هم‌اندازه نیست، پس گزینهٔ ۲ نادرست است. در سایر گزینه‌ها نیز فقط پاره‌خط (d) می‌تواند تصویر پاره‌خط AB باشد، زیرا با توجه به شکل اگر دو سر پاره‌خط (d) را با A' و B' نام‌گذاری کنیم، عمودمنصف‌های دو پاره‌خط AA' و BB' بر هم منطبق هستند ولی برای بقیهٔ پاره‌خط‌ها، این اتفاق نمی‌افتد.



204 ۱ فقط خطی که وسط d و d' قرار دارد و با آن‌ها موازی است می‌تواند خط بازتاب باشد. بنابراین فقط یک محور بازتاب وجود دارد.



205 ۲ هرکدام از نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط می‌توانند خط بازتاب باشند. پس دو خط بازتاب وجود دارد.

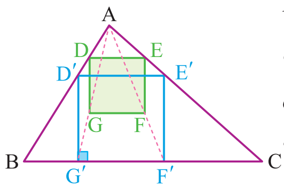


206 ۲ دو خط داده شده دارای شیب‌های مختلف هستند، بنابراین متقاطع هستند، در نتیجه تحت بازتاب نسبت به نیمسازهای دو خط به هم تصویر می‌شوند. یعنی دو خط مختلف.

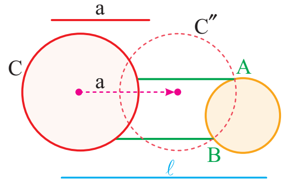
207 ۱ شیب دو خط $y=۳x+۵$, $y=۳x-۱$ یکسان است و تحت بازتاب نسبت به خط $y=۳x+\frac{۵+(-۱)}{۲}$ بر هم تصویر می‌شوند. یعنی یک محور بازتاب وجود دارد.

359 ۲ برای رسم پاره‌خطی که به نسبت k تقسیم شده باشد، از تجانس استفاده می‌شود.

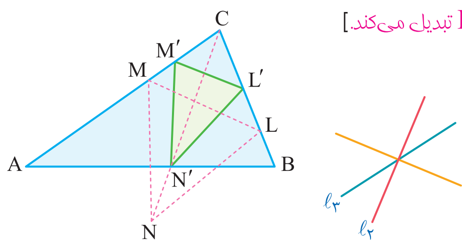
360 ۲ مربع دلخواه DEFG را درون مثلث چنان در نظر می‌گیریم که دو رأس D و E روی اضلاع AB و AC باشد و ضلع DE موازی قاعدهٔ BC باشد این مربع را با ضریب مناسبی مانند k منبسط می‌کنیم تا دو رأس G و F به روی قاعدهٔ BC منطبق شود، در واقع در این فرآیند ما از تجانس به مرکز A و با نسبت $k=\frac{G'F'}{GF}$ استفاده کرده‌ایم.



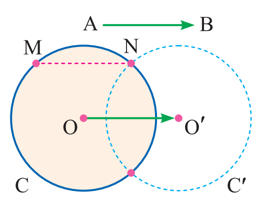
361 ۲ چون صحبت از رسم یک پاره‌خط با اندازهٔ مشخص و موازی راستای خصوص است، انتقال جواب است. [دایرهٔ C را به طول داده شدهٔ a در امتداد ℓ انتقال می‌دهیم. فرض کنیم ″C وضعیت جدید C باشد و A و B نقاط تقاطع ″C با ′C باشد دو خط موازی با ℓ که از یکی از نقطهٔ A بگذرد و دیگری از نقطهٔ B، جواب‌های مسئله هستند.]



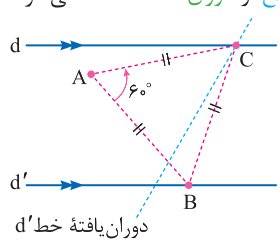
362 ۳ برای رسم یک شکل محاط در یک شکل دیگر از تبدیل تجانس استفاده می‌شود. [مثلث داده شده را ABC و خطوط داده شده را ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 می‌نامیم. مثلث LMN را طوری رسم می‌کنیم که ضلع‌هایش موازی با ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 باشد و L روی BC و M روی CA قرار بگیرد. اگر ′N نقطهٔ برخورد خط‌های CN و AB باشد. آنگاه تجانس به مرکز C و نسبت $k=\frac{CN'}{CN}$، مثلث LMN را به مثلث مطلوب L′M′N′ تبدیل می‌کند.]



363 ۳ برای رسم پاره خط به طول معلوم و موازی راستای به خصوص از انتقال استفاده می‌شود. [در شکل زیر دایرهٔ C را با بردار $\overrightarrow{AB}$ انتقال داده‌ایم تا دایرهٔ C′(O′,R) به دست آید. دو دایره در نقطهٔ N متقاطع‌اند و اگر از N موازی با $\overrightarrow{BA}$ رسم کنیم نقطهٔ M به‌دست می‌آید و پاره‌خط MN وتری موازی و مساوی با AB است.]



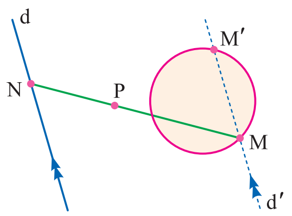
364 ۲ برای رسم مثلث متساوی‌الاضلاع از دوران 60° استفاده می‌شود. [در شکل مقابل خط ′d را با دوران 60° به مرکز A تصویر کرده‌ایم. این تصویر با خط d در نقطهٔ C متقاطع است و اگر AC را ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع در نظر بگیریم نقطهٔ B سومین رأس از این مثلث است و مثلث رسم می‌شود.]



365 ۴ برای رسم پاره‌خط به طول معلوم و موازی راستای به‌خصوص از انتقال استفاده می‌شود.

366 ۳ برای رسم یک شکل محاط در یک شکل دیگر از تبدیل تجانس استفاده می‌شود.

367 ۳ برای رسم پاره‌خطی که به نسبت k تقسیم شده باشد، از تجانس استفاده می‌شود. [خط d را در تجانس به مرکز P و نسبت ۲– تصویر می‌کنیم تا خط ′d به‌دست آید. خط ′d و دایره در نقطهٔ M متقاطع‌اند. اگر MP را امتداد دهیم تا خط d را در نقطهٔ N قطع کند طبق ویژگی‌های تجانس داریم:]



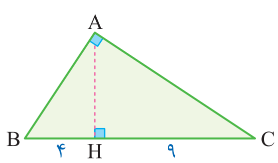
$$\frac{MP}{NP}=2\Rightarrow MP=2NP$$

اگر دقت کنید متوجه می‌شوید که در شکل فوق خط ′d، دایره را در نقطهٔ دیگری مانند ′M نیز قطع می‌کند که همهٔ داستان‌ها برای ′M هم دقیقاً صادق است. در مورد تعداد جواب‌های مسئله به وضعیت خط ′d و دایره نگاه می‌کنیم. اگر خط ′d و دایره متقاطع باشند، مسئله دارای دو جواب و اگر خط ′d و دایره مماس باشند، مسئله دارای یک جواب است و اگر خط ′d دایره را قطع نکند، مسئله بدون جواب است.

368 ۴ چون قرار است پاره‌خطی رسم کنیم که نقطهٔ وسط آن معلوم است از تجانس معکوس با نسبت $k=-1$ استفاده می‌شود. البته این تبدیل دوران 180° نیز به حساب می‌آید.

روابط طولی Relations Longitudinal

369 ۳ مطابق شکل، C زاویهٔ کوچکتر است، برای پیدا کردن آن باید ابتدا AH را به‌دست آوریم سپس تانژانت زاویهٔ C را در مثلث AHC محاسبه کنیم:



$$AH^2=BH.HC\Rightarrow AH^2=36\Rightarrow AH=6$$

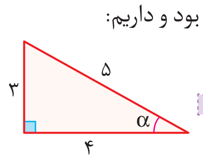
حال در مثلث AHC اضلاع مقابل و مجاور به زاویهٔ C معلوم است، بنابراین:

$$\tan\hat{C}=\frac{AH}{CH}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

370 ۳ ابتدا به کمک رابطهٔ فیثاغورس طول اضلاع را به دست می‌آوریم:

$$\underbrace{x^2+(x+1)^2}_{x^2+x^2+2x+1}=\underbrace{(x+2)^2}_{x^2+4x+4}\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ x=-1\ \times\end{cases}$$

به ازای $x=3$ طول اضلاع مثلث برابر ۵، ۴، ۳ خواهد بود و داریم:



$$\sin\alpha=\frac{3}{5}=0/6$$

371 ٤ ابتدا زاویهٔ C را به‌دست می‌آوریم:

$$\hat A+\hat B+\hat C=180° \Rightarrow 45°+75°+\hat C=180° \Rightarrow \hat C=60°$$

حال با استفاده از قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow \frac{4}{\frac{\sqrt2}{2}}=\frac{AB}{\frac{\sqrt3}{2}}\Rightarrow AB=2\sqrt6$$

372 ٢ چون نسبت دو ضلع و یک زاویه معلوم است، برای پیدا کردن زاویهٔ دیگر از قضیهٔ سینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{\sin C}{\sin B}\Rightarrow \sqrt2=\frac{\sin C}{\frac12}$$

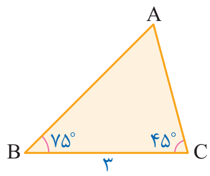
$$\sin C=\frac{\sqrt2}{2}\Rightarrow \begin{cases}\hat C=45°\Rightarrow \hat A=105°\\ \hat C=135°\Rightarrow\hat A=15°\end{cases}$$

373 ٣ یک ضلع و تمام زاویه‌های مثلث معلوم است، برای پیدا کردن دو ضلع دیگر می‌توانیم از قضیهٔ سینوس‌ها استفاده کنیم:

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow\frac{AC}{\sin45°}=\frac{6}{\sin30°}$$

$$AC=\frac{6}{\frac12}\times\frac{\sqrt2}{2}=12\times\frac{\sqrt2}{2}=6\sqrt2$$

374 ٢ با معلوم بودن دو زاویه، زاویهٔ سوم قابل به‌دست آوردن است:



$$\hat A=180°-45°-75°=60°$$

حال طبق قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow\frac{3}{\frac{\sqrt3}{2}}=\frac{AB}{\frac{\sqrt2}{2}}\Rightarrow AB=\sqrt6$$

375 ١ با معلوم بودن دو زاویه، زاویهٔ سوم قابل به‌دست آوردن است:

$$\hat A=120°\,,\ \hat C=15°\Rightarrow\hat B=45°$$

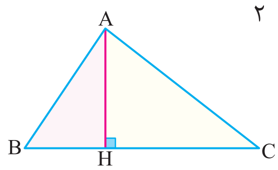
حال طبق قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow\frac{AC}{\frac{\sqrt2}{2}}=\frac{2\sqrt3}{\frac{\sqrt3}{2}}\Rightarrow AC=2\sqrt2$$

376 ٤ ابتدا به کمک قضیهٔ سینوس‌ها طول ضلع AC را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{AC}{\sin45°}=\frac{AB}{\sin30°}\Rightarrow\frac{AC}{\frac{\sqrt2}{2}}=\frac{2}{\frac12}\Rightarrow AC=2\sqrt2$$

حال چون $\hat A=105°$ است، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم:

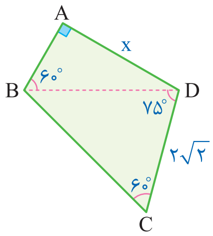


$$\overset{\triangle}{AHB}: BH=AB.\cos45°=\sqrt2$$

$$\overset{\triangle}{AHC}: CH=AC.\cos30°=\sqrt6$$

$$BC=\sqrt2+\sqrt6$$

377 ٤ برای محاسبهٔ x نیاز به معلوم بودن ضلع BD از مثلث ABD داریم. بنابراین ابتدا به سراغ مثلث BDC می‌رویم و ضلع BD را به دست می‌آوریم:



$$D\hat BC=180°-60°-75°=45°$$

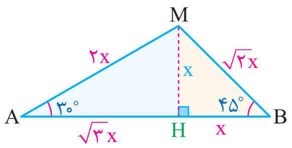
طبق قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث BDC داریم:

$$\frac{BD}{\sin60°}=\frac{CD}{\sin45°}\Rightarrow\frac{BD}{\frac{\sqrt3}{2}}=\frac{2\sqrt2}{\frac{\sqrt2}{2}}\Rightarrow BD=2\sqrt3$$

حال در مثلث ABD داریم:

$$\sin60°=\frac{x}{BD}\Rightarrow x=\frac{\sqrt3}{2}BD=\frac{\sqrt3}{2}\times2\sqrt3=3$$

378 ٣ زاویهٔ M در این مثلث $105°$ است، پس ارتفاع MH را رسم می‌کنیم، حال اگر فرض کنیم $MH=x$ باشد، در این صورت:



$$MH=x\Rightarrow\begin{cases}\overset{\triangle}{AMH}: AH=\sqrt3x\,,\ AM=2x\\ \overset{\triangle}{BMH}: BH=x\,,\ MB=\sqrt2x\end{cases}$$

با توجه به روابط فوق طول ضلع AB بر حسب x قابل محاسبه است:

$$AB=\sqrt3x+x=20\Rightarrow x=\frac{20}{\sqrt3+1}\times\frac{\sqrt3-1}{\sqrt3-1}=10(\sqrt3-1)$$

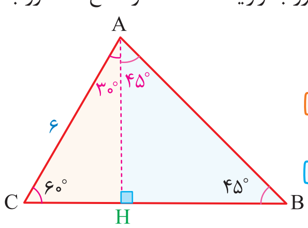
بنابراین فاصلهٔ هواپیما تا نزدیک‌ترین ایستگاه برابر است با:

$$MB=10(\sqrt3-1)\times\sqrt2=10(\sqrt6-\sqrt2)$$

379 ٢ ابتدا اندازهٔ زاویهٔ A را به‌دست می‌آوریم:

$$\hat A+\hat B+\hat C=180°\Rightarrow\hat A+45°+60°=180°\Rightarrow\hat A=75°$$

حال با توجه به این‌که $\hat A=75°$ است از رأس A، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH، ضلع CH رو به زاویهٔ $30°$ است و ضلع AH رو به زاویهٔ $60°$ است، بنابراین:



(1) $CH=\frac12\times6=3$

(2) $AH=\frac{\sqrt3}{2}\times6=3\sqrt3$

از طرفی دیگر مثلث ABH، مثلثی قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. بنابراین:

$$BH=AH=3\sqrt3\Rightarrow BC=CH+BH=3+3\sqrt3=3(\sqrt3+1)$$

380 ١ چون رابطهٔ بین اضلاع و زوایای مقابل آن‌ها داده شده به سراغ قضیهٔ سینوس‌ها می‌رویم:

$$\frac{b}{\sin\hat B}=\frac{c}{\sin\hat C}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} b\sin\hat C=c\sin\hat B$$

از طرفی طبق فرض مسئله رابطهٔ $b\cos\hat C=c\sin\hat B$ برقرار است، بنابراین:

$$b\sin\hat C=b\cos\hat C\Rightarrow\sin\hat C=\cos\hat C\Rightarrow \hat C=45°$$