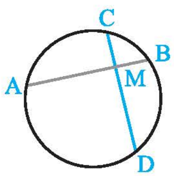
فصل ۱

قسمت دوم

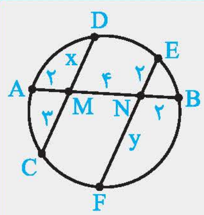
رابطه‌های طولی در دایره



آ) وترهای متقاطع: اگر دو وتر در یک دایره متقاطع باشند، آن‌گاه حاصل‌ضرب پاره‌خط‌های یکی با حاصل‌ضرب پاره‌خط‌های روی دیگری برابر است.

حکم : $MA \times MB = MC \times MD$

مثال



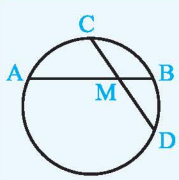
در شکل مقابل مقادیر x و y را محاسبه کنید.

پاسخ : بنابه رابطهٔ طولی وترهای متقاطع داریم:

$$MA \times MB = MD \times MC \Rightarrow ۲ \times (۴+۲) = x \times ۳ \Rightarrow x = \frac{۱۲}{۳} = ۴$$

$$NA \times NB = NF \times NE \Rightarrow (۲+۴) \times ۲ = y \times ۲ \Rightarrow y = \frac{۱۲}{۲} = ۶$$

تست



مطابق شکل طول وتر AB در دایرهٔ C(O،R)، ۱۴ سانتی‌متر می‌باشد. این وتر، وتر CD را به نسبت ۲ به ۳ تقسیم کرده است. اگر CD = ۱۰ سانتی‌متر باشد، آن‌گاه تفاضل طول پاره‌خط‌های MA و MB کدام است؟ (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۱۱ ۴) ۹

پاسخ : بنابه فرض، وتر CD به نسبت ۲ به ۳ تقسیم شده است. پس می‌توانیم فرض کنیم $MC = ۲k$ و $MD = ۳k$ و داریم:

$$CD = ۱۰ \Rightarrow ۲k + ۳k = ۱۰ \Rightarrow ۵k = ۱۰ \Rightarrow k = ۲ \Rightarrow \begin{cases} MC = ۴ \\ MD = ۶ \end{cases}$$

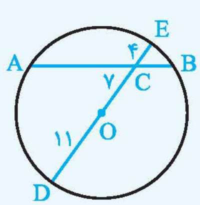
$$MA \times MB = MC \times MD \xrightarrow[MA=۱۴-x]{MB=x} (۱۴-x) \times x = ۴ \times ۶ \Rightarrow x^۲ - ۱۴x + ۲۴ = ۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۱۲) = ۰ \Rightarrow x = ۲ \text{ یا } x = ۱۲$$

بنابراین با فرض $MA > MB$ نتیجه می‌شود $MA = ۱۲$ و $MB = ۲$ و تفاضل این دو مقدار برابر ۱۰ است. پس گزینهٔ (۱) درست است.

تست

وتری به طول ۱۸ در یک دایره به شعاع ۱۱ مفروض است. نقطه‌ای روی این وتر، از مرکز دایره به فاصلهٔ ۷ می‌باشد. این نقطه، وتر را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



پاسخ : بنابه فرض $AB = ۱۸$، $OC = ۷$ و $OE = OD = ۱۱$، پس $CE = ۴$. فرض کنیم $BC = x$ بنابراین داریم:

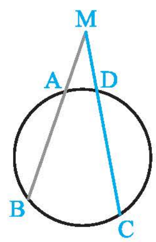
$$AC \cdot BC = CD \cdot CE \Rightarrow (۱۸-x)x = (۱۱+۷) \times ۴ \Rightarrow x^۲ - ۱۸x + ۷۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۶)(x-۱۲) = ۰ \Rightarrow x = ۶ \text{ یا } x = ۱۲$$

و با فرض $AC > BC$ داریم:

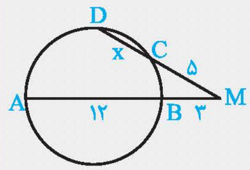
$$\frac{AC}{BC} = \frac{۱۸-x}{x} = \frac{۱۸-۶}{۶} = \frac{۱۲}{۶} = ۲ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

ب) رابطهٔ طولی وترهایی با امتداد متقاطع: اگر امتداد دو وتر AB و CD در نقطهٔ M متقاطع باشند، آن‌گاه $MA.MB = MD.MC$



حکم : $MA \times MB = MD \times MC$

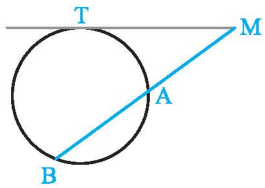
مثال با توجه به شکل مقابل مقدار x را بیابید.



پاسخ: $MB \times MA = MC \times MD \Rightarrow ۳\times(۳+۱۲) = ۵\times(۵+x) \Rightarrow ۳\times۱۵ = ۵\times(۵+x)$

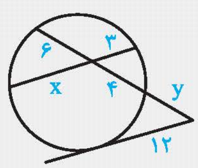
$\Rightarrow ۳\times۳ = ۵+x \Rightarrow x+۵ = ۹ \Rightarrow x = ۴$

پ) رابطهٔ طولی مماس و قطعات قاطع: اگر از نقطهٔ M یک خط مماس و یک خط قاطع بر دایرهٔ مفروض رسم کنیم، آن‌گاه طول پاره‌خط مماس (MT) واسطهٔ هندسی قطعات قاطع (MA و MB قطعات قاطع هستند) می‌باشد.



حکم : $MT^۲ = MA \times MB$

مثال در شکل مقابل مقادیر x و y را بیابید.

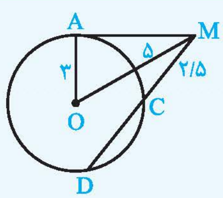


پاسخ: $۳\times x = ۶\times۴ \Rightarrow ۳x = ۲۴ \Rightarrow x = ۸$

$۱۲^۲ = y\times(y+۶+۴) \Rightarrow y(y+۱۰) = ۱۴۴ \Rightarrow y^۲+۱۰y = ۱۴۴ \Rightarrow y^۲+۱۰y-۱۴۴ = ۰$

$\Rightarrow (y+۱۸)(y-۸) = ۰ \Rightarrow y = -۱۸$ یا $y = ۸ \xrightarrow{y>۰} y = ۸$

تست در شکل مقابل MA در نقطهٔ A بر دایره مماس و شعاع دایره برابر ۳ است. اگر فاصلهٔ M تا مرکز دایره برابر ۵ باشد و $MC = ۲/۵$، آن‌گاه طول وتر CD کدام است؟



۱) ۴/۲ ۲) ۳/۹ ۳) ۳/۶ ۴) ۴/۵

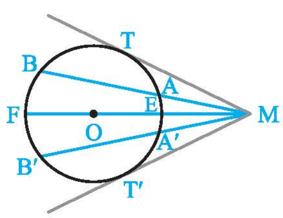
پاسخ: خط مماس، بر شعاع نقطهٔ تماس عمود است. پس مثلث MAO در رأس A قائمه است و داریم:

$MA^۲ = OM^۲ - OA^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow MA = ۴$

حال بنابه رابطهٔ طولی مماس و قطعات قاطع داریم: $MA^۲ = MC\times MD \Rightarrow ۴^۲ = ۲/۵\times(۲/۵+CD) \Rightarrow ۱۶ = ۲/۵\times(۲/۵+CD)$

$\Rightarrow CD + ۲/۵ = \frac{۱۶}{۲/۵} = \frac{۶۴}{۱۰} = ۶/۴ \Rightarrow CD = ۶/۴ - ۲/۵ = ۳/۹ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

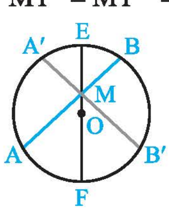
نتیجه روابط طولی وترهای متقاطع و مماس



۱) اگر نقطهٔ معلوم M خارج دایرهٔ $C(O,R)$ باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب همهٔ قطعات قاطع و مربع طول دو مماسی که بر دایره رسم می‌شود برابر مقدار ثابت $OM^۲ - R^۲$ می‌باشد و با فرض $OM = d$ این مقدار ثابت به‌صورت $d^۲ - R^۲$ نوشته می‌شود، زیرا: $MT^۲ = MT'^۲ = MA\times MB = MA'\times MB' = \cdots = ME\times MF$

از طرفی داریم: $ME\times MF = (OM-OE)(OM+OF) = (d-R)(d+R) = d^۲ - R^۲$

بنابراین: $MT^۲ = MT'^۲ = MA\times MB = MA'\times MB' = \cdots = d^۲ - R^۲$



۲) اگر نقطهٔ M درون دایره باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب پاره‌خط‌های روی هر وتر گذرنده از نقطهٔ M برابر مقدار ثابت $R^۲ - d^۲$ است. اثبات همانند حالت قبل می‌باشد.

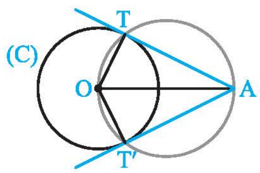
$MA\times MB = MA'\times MB' = \cdots = ME\times MF = R^۲ - d^۲$

۳) اگر نقطهٔ M روی دایره باشد، حاصل‌ضرب‌های فوق برابر صفر است.

مثال شعاع یک دایره ۵ و فاصلهٔ یک نقطهٔ معلوم از مرکز آن ۸ است. حاصل‌ضرب همهٔ قطعات قاطعی را که از این نقطه بر دایره رسم می‌شود، محاسبه کنید.

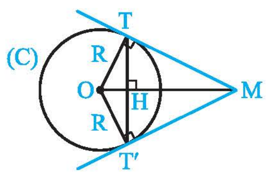
پاسخ: با توجه به مطلب قبل داریم:
$MA \times MB = MA' \times MB' = \cdots = ME \times MF = d^2 - R^2 = 8^2 - 5^2 = 64 - 25 = 39$

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره



نقطهٔ A را خارج دایرهٔ $C(O,R)$ در نظر می‌گیریم. O را به A وصل می‌کنیم، دایره‌ای به قطر OA رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن با دایرهٔ (C) را T و T' می‌نامیم. زوایای OTA و $OT'A$ روبه‌رو به قطرند، پس قائمه‌اند. در نتیجه AT و AT' بر دایرهٔ (C) مماس‌اند.

خواص دو مماس رسم‌شده بر یک دایرهٔ معلوم از یک نقطه خارج آن



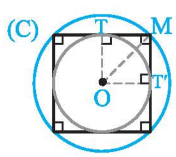
فرض کنید مطابق شکل از نقطهٔ M دو مماس MT و MT' بر دایرهٔ $C(O,R)$ رسم شود و H نقطهٔ برخورد وتر TT' با پاره‌خط OM باشد. بنابراین داریم:

۱) طول مماس‌های MT و MT' برابر است ($MT = MT'$).

۲) OM نیمساز زوایای TMT' و TOT' است.

۳) OM عمودمنصف پاره‌خط واصل نقطه‌های تماس می‌باشد، یعنی OM عمودمنصف TT' است.

۴) اگر $\widehat{M} \neq 90^\circ$ باشد، آن‌گاه چهارضلعی $MTOT'$ کایت (شبه‌لوزی) است.



۵) اگر $\widehat{M} = 90^\circ$ باشد، آن‌گاه چهارضلعی $MTOT'$ مربع است. در این حالت از هر نقطه روی دایره به مرکز O و شعاع $OM = R\sqrt{2}$ می‌توان ۲ مماس عمود بر هم بر دایره رسم کرد و بر عکس اگر از نقطه‌ای دو مماس عمود بر هم، بر دایرهٔ (C) رسم شود، آن‌گاه آن نقطه روی دایره به مرکز O و شعاع $R\sqrt{2}$ قرار دارد.

۶) طول پاره‌خط واصل نقاط تماس برابر است با: $TT' = \dfrac{2R.MT}{OM}$

اثبات: مساحت چهارضلعی $MTOT'$ را به دو روش می‌نویسیم:

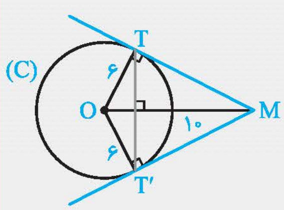
$$1)\ S(MTOT') = \frac{1}{2}OM \times TT'\ ,\ 2)\ S(MTOT') = 2S(MTO) = 2 \times \frac{1}{2} \times OT \times MT \Rightarrow \frac{1}{2}OM \times TT' = OT \times MT \Rightarrow TT' = \frac{2R \times MT}{OM}$$

۷) مثلث‌های MTO، MHT و THO متشابه هستند.

مثال از نقطهٔ M دو مماس MT و MT' را بر دایرهٔ $C(O,6)$ رسم می‌کنیم. اگر $OM = 10$ باشد، آن‌گاه:

آ) طول مماس‌های MT و MT' را به‌دست آورید.

ب) طول پاره‌خط TT' را بیابید.



پاسخ: آ) در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMT داریم:

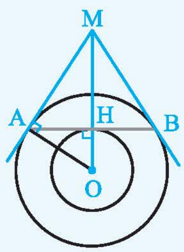
$$OM^2 = OT^2 + MT^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + MT^2 \Rightarrow MT^2 = 100 - 36$$
$$\Rightarrow MT^2 = 64 \Rightarrow MT = MT' = 8$$

ب) برای محاسبهٔ TT' می‌گوییم، مساحت چهارضلعی $MTOT'$ برابر $\frac{1}{2}OM \times TT'$ است، زیرا قطرهای آن بر هم عمودند. از طرفی مساحت همین چهارضلعی دو برابر مساحت مثلث OMT است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}TT' \times OM = 2 \times \frac{1}{2}MT \times OT \Rightarrow TT' \times 10 = 2 \times 8 \times 6 \Rightarrow TT' = \frac{96}{10} = 9/6$$

تست

دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاع‌های ۸ و ۱۲ مفروض‌اند. وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر مماس بر دایرهٔ کوچک‌تر است. اگـر دو مماس مرسوم از دو سر این وتر بر دایرهٔ بزرگ‌تر در نقطهٔ M متقاطع باشند، آن‌گاه فاصلهٔ M تا مرکز دایره‌هـا کدام است؟



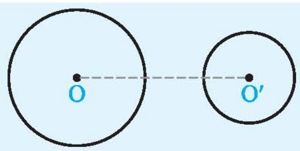
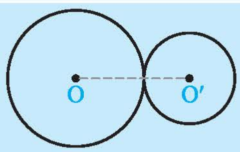
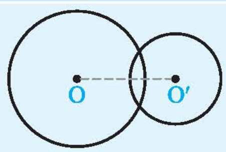
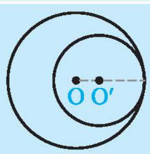
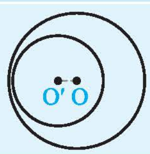
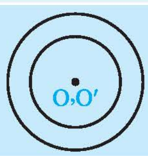
۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

پاسخ: در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAM بنابه رابطهٔ طولی داریم:

$OA^{۲} = OH \times OM \Rightarrow ۱۲^{۲} = ۸ \times OM \Rightarrow OM = \frac{۱۴۴}{۸} = ۱۸ \Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها

دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ در نظر می‌گیریم. حالت‌های مختلفی که این دو دایره می‌توانند نسبت به هم داشته باشند به‌صورت زیر است:

دو دایرهٔ برون هم (متخارج)	$d > R + R'$	
دو دایرهٔ مماس برون	$d = R + R'$	
دو دایرهٔ متقاطع	$R - R' < d < R + R'$	
دو دایرهٔ مماس درون	$d = R - R'$	
دو دایرهٔ متداخل	$d < R - R'$	
دو دایرهٔ هم‌مرکز	$d = ۰$	

نکته در حالتی‌که دو دایره مماس برون و مماس داخل هستند، مراکز دو دایره و نقطهٔ تماس آن‌ها روی یک خط قرار دارند.

مثال

طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس داخل ۵ و مساحت ناحیهٔ بین دو دایره ۸۵π است. محیط هر یک از دایره‌ها را به‌دست آورید.

(مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

پاسخ: طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس داخل برابر $R - R'$، $(R > R')$ است. داریم:

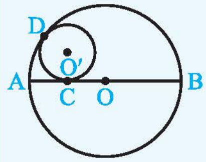
مساحت بین دو دایره $= \pi R^{۲} - \pi R'^{۲} \Rightarrow ۸۵\pi = \pi R^{۲} - \pi R'^{۲} \Rightarrow R^{۲} - R'^{۲} = ۸۵$

$$\Rightarrow (R - R')(R + R') = ۸۵ \xrightarrow[\text{بنابه فرض}]{R-R'=۵} R + R' = \frac{۸۵}{۵} = ۱۷$$

$$\begin{cases} R + R' = ۱۷ \\ R - R' = ۵ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲R = ۲۲ \Rightarrow R = ۱۱ \text{ ، } R' = ۶$$

پس محیط دایره‌ها برابر ۲۲π و ۱۲π است.

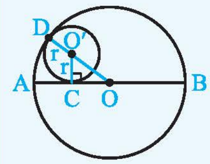
تست



در شکل مقابل، دایرهٔ کوچک بر قطر AB و دایرهٔ بزرگ مماس است. اگر $BC = ۱۲$ و $AC = ۶$، آن‌گاه شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: در دو دایرهٔ مماس داخل، مراکز دو دایره و نقطهٔ تماس آن‌ها روی یک خط قرار دارند. داریم:



$$AB = ۲R \Rightarrow AC + BC = ۲R \Rightarrow ۶ + ۱۲ = ۲R \Rightarrow R = ۹$$

$$OD = OO' + O'D \Rightarrow ۹ = OO' + r \Rightarrow OO' = ۹ - r$$

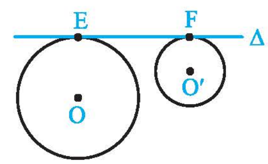
$$OA = OC + AC \Rightarrow ۹ = OC + ۶ \Rightarrow OC = ۳$$

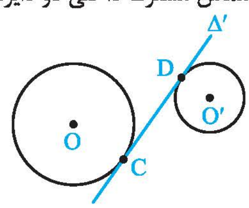
$$OO'^۲ = O'C^۲ + OC^۲ \Rightarrow (۹ - r)^۲ = r^۲ + ۳^۲ \Rightarrow ۸۱ + r^۲ - ۱۸r = r^۲ + ۹ \Rightarrow ۱۸r = ۷۲ \Rightarrow r = \frac{۷۲}{۱۸} = ۴ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) درست است.

مماس مشترک‌های دو دایره

آ) اگر خطی بر دو دایره مماس باشد و دو دایره یک طرف خط مماس باشند، آن‌گاه آن خط را مماس مشترک خارجی دو دایره گویند. (خط Δ)

ب) اگر خطی بر دو دایره مماس باشد و دو دایره، دو طرف خط مماس باشند، آن خط را مماس مشترک داخلی دو دایره گویند. (خط Δ')

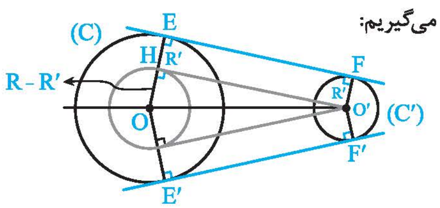




بنابه قرارداد اندازهٔ EF را طول مماس مشترک خارجی و اندازهٔ CD را طول مماس مشترک داخلی دو دایره می‌نامند.

رسم مماس مشترک‌های دو دایره

آ) رسم مماس مشترک خارجی دو دایره: دو دایرهٔ $C(O, R)$ و $C'(O', R')$، $(R > R')$ را در نظر می‌گیریم:



۱) دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R - R'$ رسم می‌کنیم.

۲) از نقطهٔ O' مماس $O'H$ را بر دایرهٔ روبه‌رو رسم می‌کنیم.

۳) O را به H وصل می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ (C) را در نقطهٔ E قطع کند.

۴) مطابق شکل از نقطهٔ O' خطی موازی OE رسم می‌کنیم تا دایرهٔ C' را در نقطهٔ F قطع کند. EF مماس مشترک خارجی دو دایره است. زیرا چهارضلعی $EFO'H$ مستطیل است ($O'F = R' \overset{\parallel}{=} EH$ و $\widehat{H} = ۹۰^\circ$). اگر O' خارج دایره به مرکز O و شعاع $R - R'$ باشد، مسئله همواره دو جواب دارد.

محاسبهٔ طول مماس مشترک خارجی دو دایره: در شکل فوق در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHO' داریم:

$$OO'^۲ = OH^۲ + O'H^۲ \Rightarrow OO'^۲ = (R - R')^۲ + EF^۲ \Rightarrow EF = \sqrt{OO'^۲ - (R - R')^۲}$$

با فرض این‌که طول خط‌المرکزین دو دایره $OO' = d$ باشد، داریم:

$$EF = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$$

مثال

دو دایره به شعاع‌های ۶ و ۹ و طول خط‌المرکزین ۲۱ مفروض‌اند. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را محاسبه کنید.

پاسخ: بنابه فرض $R = ۹$، $R' = ۶$ و $d = ۲۱$ است، در نتیجه داریم:

$$TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{۲۱^۲ - (۹ - ۶)^۲} = \sqrt{۲۱^۲ - ۳^۲} = \sqrt{۱۸ \times ۲۴} = ۶\sqrt{۱۲} = ۱۲\sqrt{۳}$$

مثال

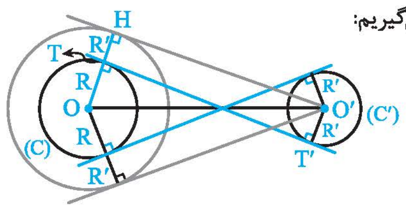
شعاع‌های دو دایره ۲ و ۱۰ و طول خط‌المرکزین و طول مماس مشترک خارجی آن‌ها به ترتیب $۴x + ۱$ و $۳x + ۳$ است. مقدار x و طول خط‌المرکزین و مماس مشترک خارجی دو دایره را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$(۳x + ۳)^۲ = (۴x + ۱)^۲ - (۱۰ - ۲)^۲ \Rightarrow ۹x^۲ + ۱۸x + ۹ = ۱۶x^۲ + ۸x + ۱ - ۶۴$$

$$\Rightarrow ۷x^۲ - ۱۰x - ۷۲ = ۰ \Rightarrow (x - ۴)(۷x + ۱۸) = ۰ \Rightarrow x = ۴ \text{ یا } x = -\frac{۱۸}{۷}$$

جواب منفی قابل قبول نیست، پس $x = ۴$ و در نتیجه طول خط‌المرکزین دو دایره $۴x + ۱ = ۱۷$ و طول مماس مشترک خارجی آن‌ها $۳x + ۳ = ۱۵$ است.



ب) رسم مماس مشترک داخلی دو دایره: دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$، $(R > R')$ را در نظر می‌گیریم:

۱) به مرکز O و شعاع $R+R'$ یک دایره رسم می‌کنیم.

۲) از نقطهٔ O' مماس $O'H$ را بر دایرهٔ روبه‌رو رسم می‌کنیم.

۳) OH را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با دایرهٔ (C) نقطهٔ T می‌نامیم.

۴) از نقطهٔ O' خطی موازی OH رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (C') را در نقطهٔ T' قطع کند، خط TT' مماس مشترک داخلی دو دایره است، زیرا $\hat{T} = \hat{T'} = 90^\circ$ (چهارضلعی $O'T'TH$ مستطیل است، چون $O'T' = R' \overset{\parallel}{=} TH$ و $\hat{H} = 90^\circ$). اگر O' خارج دایرهٔ به مرکز O و شعاع $R+R'$ باشد، مسئله همواره دو جواب دارد.

محاسبهٔ طول مماس مشترک داخلی دو دایره: با توجه به شکل فوق و با فرض $OO' = d$ در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OO'H$ داریم:

$$OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \Rightarrow d^2 = (R+R')^2 + TT'^2 \Rightarrow TT' = \sqrt{d^2 - (R+R')^2}$$

نتیجه طول مماس مشترک داخلی دو دایره همواره از طول مماس مشترک خارجی آن‌ها کوچک‌تر است.

مثال

دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۴ و طول خط‌المرکزین ۹ مفروض است. اندازهٔ مماس مشترک‌های داخلی آن را به‌دست آورید.

پاسخ: بنابه فرض $R = 3$، $R' = 4$ و $d = 9$ است. بنابراین داریم:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R+R')^2} = \sqrt{9^2 - 7^2} = \sqrt{2 \times 16} = 4\sqrt{2}$$

تست

اندازه‌های مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایره به ترتیب $\sqrt{24}$ و $\sqrt{48}$ است. حاصل‌ضرب شعاع‌های این دو دایره کدام است؟

۱) ۴ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۶

پاسخ: فرض کنیم $EF = \sqrt{24}$ و $CD = \sqrt{48}$، بنابراین داریم:

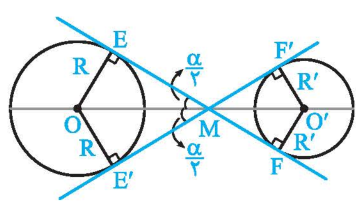
$$\begin{cases} EF^2 = d^2 - (R+R')^2 \\ CD^2 = d^2 - (R-R')^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} CD^2 - EF^2 = (R+R')^2 - (R-R')^2$$

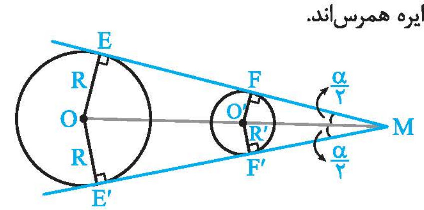
$$\Rightarrow CD^2 - EF^2 = R^2 + 2RR' + R'^2 - R^2 - R'^2 + 2RR' = 4RR' \Rightarrow RR' = \frac{CD^2 - EF^2}{4} \Rightarrow RR' = \frac{48-24}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

همرسی مماس مشترک‌های دو دایره و خط‌المرکزین

اگر شعاع‌های دو دایره نابرابر باشند، آن‌گاه مماس مشترک‌های خارجی و خط‌المرکزین دو دایره همرس‌اند. هم‌چنین مماس‌مشترک‌های داخلی و خط‌المرکزین دو دایره همرس‌اند.





نکتهٔ۱ نقطهٔ همرسی مماس مشترک‌ها و خط‌المرکزین، خط‌المرکزین دو دایره را به نسبت شعاع‌ها تقسیم می‌کند $\frac{OM}{O'M} = \frac{R}{R'}$

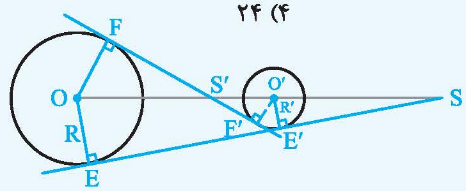
نکتهٔ۲ اگر α زاویهٔ بین مماس مشترک‌ها باشد، با فرض $(R > R')$ داریم:

زاویهٔ بین دو مماس مشترک خارجی $\alpha \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R-R'}{OO'}$

زاویهٔ بین دو مماس مشترک داخلی $\alpha \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R+R'}{OO'}$

تست دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸ و خط‌المرکزین ۱۵ مفروض‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی مماس مشترک‌های داخلی از نقطهٔ تلاقی مماس مشترک‌های خارجی دو دایره کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴



پاسخ: بنابه فرض $R=8$ ، $R'=4$ و $OO'=15$. بنابراین داریم:

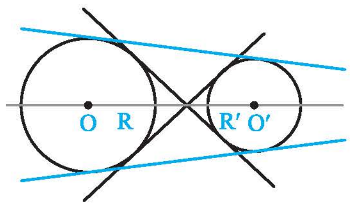
$$\overset{\Delta}{OFS'} \sim \overset{\Delta}{O'F'S'} \Rightarrow \frac{O'S'}{OS'}=\frac{O'F'}{OF} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{O'S'}{OO'}=\frac{R'}{R+R'}$$

$$\Rightarrow O'S'=15\times\frac{4}{8+4}=5$$

$$\overset{\Delta}{O'SE'} \sim \overset{\Delta}{OSE} \Rightarrow \frac{O'S}{OS}=\frac{O'E'}{OE} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{O'S}{OO'}=\frac{R'}{R-R'} \Rightarrow O'S=15\times\frac{4}{8-4}=15$$

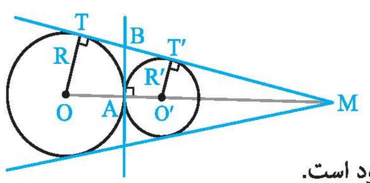
$SS'=O'S'+O'S=5+15=20 \Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌های دو دایره



۱) دو دایره را متخارج گویند، هرگاه همهٔ نقاط دو دایره بیرون یکدیگر باشند و در این حالت همواره داریم $OO'>R+R'$. دو دایرهٔ متخارج دارای ۴ مماس مشترک می‌باشند.

دو دایره متخارج‌اند. $\Leftrightarrow OO'>R+R'$



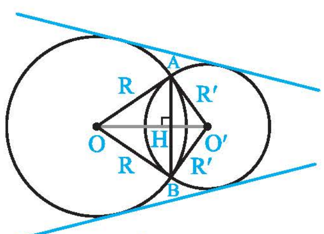
۲) دو دایره که فقط در یک نقطه مشترک باشند و سایر نقاط آن‌ها بیرون یکدیگر باشند، مماس خارج نامیده می‌شوند. در این حالت داریم $OO'=R+R'$. دو دایرهٔ مماس خارج دارای ۳ مماس مشترک هستند که دو تای آن‌ها خارجی و سومی داخلی است.

دو دایره مماس خارج‌اند. $\Leftrightarrow OO'=R+R'$

نکته آ) مماس مشترک داخلی دو دایرهٔ مماس خارج، همواره بر خط‌المرکزین دو دایره در نقطهٔ تماس عمود است.

ب) طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس خارج، برابر $TT'=2\sqrt{RR'}$ است.

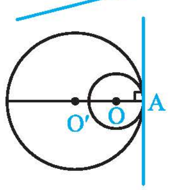
پ) مماس مشترک داخلی دو دایره، پاره‌خط مماس مشترک خارجی را نصف می‌کند. $(BT=BT')$



۳) دو دایره که فقط در دو نقطه مشترک باشند، متقاطع نامیده می‌شوند. در این حالت داریم $|R-R'|<OO'<R+R'$. دو دایرهٔ متقاطع همواره دارای دو مماس مشترک خارجی هستند و مماس مشترک داخلی ندارند.

دو دایره متقاطع‌اند. $\Leftrightarrow |R-R'|<OO'<R+R'$

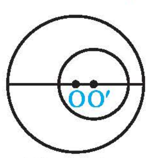
نکته در دو دایرهٔ متقاطع، خط‌المرکزین دو دایره همواره عمودمنصف وتر مشترک آن‌ها است.



۴) دو دایره که فقط در یک نقطه مشترک باشند و سایر نقاط یکی از آن‌ها درون دایرهٔ دیگر باشد، مماس درون نامیده می‌شوند. در این حالت داریم $OO'=|R-R'|$

دو دایره مماس داخل هستند. $\Leftrightarrow OO'=|R-R'|$

نکته دو دایرهٔ مماس درون فقط یک مماس مشترک خارجی دارند که بر خط‌المرکزین دو دایره در نقطهٔ تماس عمود است.



دو دایرهٔ متداخل

۵) دو دایره را متداخل گویند، هرگاه همهٔ نقاط یکی از آن‌ها درون دایرهٔ دیگر باشد. در این حالت داریم $OO'<|R-R'|$. دو دایرهٔ متداخل مماس مشترک ندارند.

دو دایرهٔ هم‌مرکز با شعاع‌های متفاوت یکی از حالات دو دایرهٔ متداخل است.

مثال اندازهٔ شعاع‌های دو دایره ۴ و ۱۱ و طول مماس مشترک خارجی دو دایره $7\sqrt{3}$ است.

آ) طول خط‌المرکزین دو دایره را به‌دست آورید. ب) وضعیت دو دایره را نسبت به هم تعیین کنید.

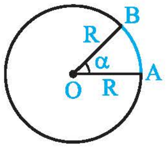
پاسخ: بنابه فرض $R=11$ ، $R'=4$ و $TT'=7\sqrt{3}$. داریم:

آ) $TT'=\sqrt{d^2-(R-R')^2} \Rightarrow 7\sqrt{3}=\sqrt{d^2-(11-4)^2} \Rightarrow 49\times3=d^2-7^2$

$\Rightarrow d^2-49=3\times49 \Rightarrow d^2=4\times49 \Rightarrow d=2\times7=14$

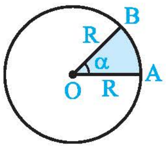
ب) از $R=11$ ، $R'=4$ و $d=14$ نتیجه می‌شود $R-R'<d<R+R'$. پس دو دایره متقاطع هستند.

طول کمان و مساحت قطاع



طول کمان AB (l) که زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به آن α درجه است، برابر است با:

$$l=\frac{\alpha}{360}(\text{محیط دایره})=\frac{\alpha}{360}(2\pi R)=\frac{\pi R\alpha}{180}$$

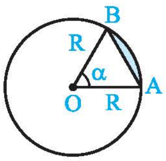


قطاع دایره: ناحیه‌ای از درون و روی دایره را که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است، قطاع دایره می‌نامند.

ناحیهٔ بین کمان AB و شعاع‌های OA و OB، قطاع دایره با زاویهٔ مرکزی α درجه نامیده می‌شود و مساحت آن برابر است با:

$$S_{\text{قطاع}}=\frac{\alpha}{360}S_{\text{دایره}}=\frac{\alpha}{360}\pi R^2=\frac{lR}{2}$$

این دستور، مانند دستور محاسبهٔ مساحت مثلث است.

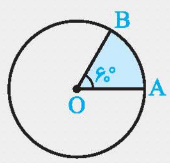


مساحت قطعه: ناحیهٔ بین کمان AB و وتر AB قطعه نامیده می‌شود و مساحت آن برابر است با:

$$S_{\text{قطعه}}=S_{\text{قطاع}}-S(ABO)=\frac{\pi R^2\alpha}{360}-\frac{1}{2}R^2\sin\alpha=\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180}-\sin\alpha\right)$$

مثال

شعاع دایرهٔ مقابل ۶ سانتی‌متر و اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB برابر 60° است. طول کمان AB و مساحت قطاع AOB را به‌دست آورید.



پاسخ:

$$l=\frac{\pi R}{180}\alpha=\frac{\pi\times 6}{180}\times 60=2\pi\,cm\quad,\quad S=\frac{\pi R^2\alpha}{360}=\frac{\pi\times 6^2\times 60}{360}=6\pi\,cm^2$$

مثال

اندازهٔ یک زاویهٔ محاطی در یک دایره 30° و طول کمان روبه‌رو به آن ۴ سانتی‌متر است. محیط دایره را به‌دست آورید.

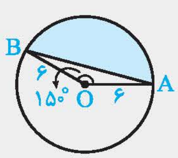
پاسخ: چون اندازهٔ زاویهٔ محاطی داده‌شده 30° است، پس اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن 60° می‌باشد. بنابه فرض طول کمان برابر $l=4$ سانتی‌متر است، لذا داریم:

$$l=\frac{\pi R\alpha}{180}\Rightarrow 4=\frac{\pi R\times 60}{180}\Rightarrow R=\frac{12}{\pi}$$

$$\text{محیط دایره}=2\pi R=2\pi\times\frac{12}{\pi}=24\,cm$$

مثال

شعاع دایرهٔ مقابل ۶ و اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB برابر 150° است. مساحت قسمت رنگی را به‌دست آورید.

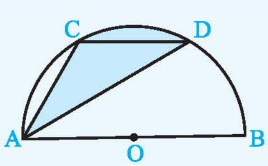


پاسخ:

$$S=\frac{1}{2}\times R^2\times\left(\frac{\pi\alpha}{180}-\sin\alpha\right)=\frac{1}{2}\times 6^2\times\left(\frac{\pi\times 150}{180}-\sin 150^\circ\right)\Rightarrow S=18\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)=15\pi-9$$

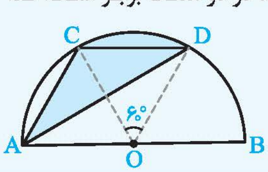
تست

در نیم‌دایره به مرکز O و قطر $AB=12$، وتر CD موازی AB و $CD=6$ است. مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟

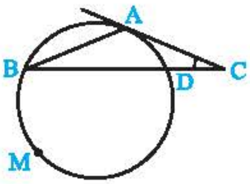


۱) 3π
۲) 8π
۳) 4π
۴) 6π

پاسخ: چون طول وتر CD با شعاع دایره برابر است، پس مثلث OCD متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ است. در نتیجه زاویهٔ COD به اندازهٔ 60° می‌باشد. دو مثلث ACD و OCD دارای قاعدهٔ مشترک CD هستند و چون $AB \parallel CD$، پس ارتفاع وارد بر این قاعده در دو مثلث برابر است. لذا مساحت این دو مثلث برابر و در نتیجه مساحت ناحیهٔ رنگی با مساحت قطاع OCD برابر است و داریم:

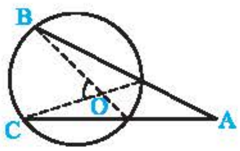


$$\text{مساحت مطلوب}=\text{مساحت قطاع } OCD=\frac{\pi\times 6^2\times 60}{360}=6\pi\Rightarrow$$ گزینهٔ (۴) درست است.



۴۳☆. در شکل مقابل، مماس AC بر دایره، با وتر AB از دایره برابر است، اگر کمان $\widehat{DMB}$ برابر ۲۲۲ درجه باشد، زاویهٔ C چند درجه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۱)

۱) ۲۱ ۲) ۲۲
۳) ۲۳ ۴) ۲۴

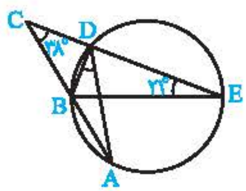


۴۴☆. در شکل مقابل، $\hat{A}=۲۷^\circ$ و $\hat{O}=۷۱^\circ$، کمان $\widehat{BC}$ چند درجه است؟ (سراسری ریاضی- ۸۶)

۱) ۹۸ ۲) ۱۰۰
۳) ۱۰۲ ۴) ۱۰۴

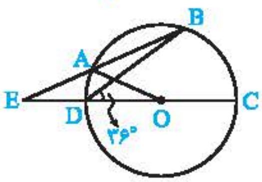
۴۵☆. در متوازی‌الاضلاع ABCD ، دایرهٔ محیطی مثلث ACD امتداد ضلع BC را در نقطهٔ M قطع کرده است. مثلث ABM کدام نوع است؟

۱) متشابه ACD ۲) متساوی‌الساقین ۳) متساوی‌الاضلاع ۴) قائم‌الزاویه



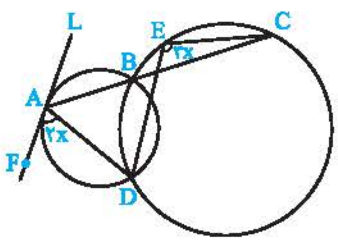
۴۶☆. در شکل مقابل، BE قطر دایره است. اندازهٔ زاویهٔ ADB چند درجه است؟

۱) ۲۸
۲) ۳۰
۳) ۳۱
۴) ۳۲



۴۷☆. در شکل روبه‌رو O مرکز دایره است. امتداد قطر CD و وتر AB در نقطهٔ E متقاطع‌اند. اگر $\hat{D}=۳۶^\circ$ و AE = AO باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ E چند درجه است؟

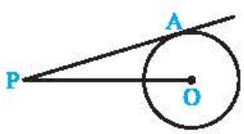
۱) ۱۸ ۲) ۲۴
۳) ۲۷ ۴) ۳۰



۴۸☆. در شکل روبه‌رو دو دایره در نقاط B و D متقاطع‌اند. از نقطهٔ B خطی رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی آن با دایره‌ها را A و C می‌نامیم. خط L در نقطهٔ A بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس و نقطهٔ E روی دایرهٔ بزرگ‌تر است. اندازهٔ زاویهٔ DEC چند درجه است؟

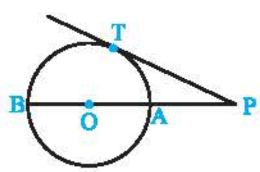
۱) ۱۲۰ ۲) ۱۰۸
۳) ۱۳۵ ۴) ۱۰۰

قسمت دوم: رابطه‌های طولی در دایره



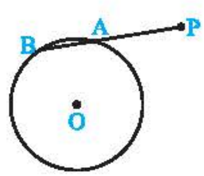
۴۹☆. در شکل روبه‌رو، PO برابر ۵ و شعاع دایره واحد است. طول PA کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۲}$ ۲) $۵\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۶}$



۵۰☆. در شکل مقابل، شعاع دایره ۶، AB قطر و PA = ۴ می‌باشد. طول مماس PT کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۵\sqrt{۲}$
۳) ۱۴ ۴) ۸

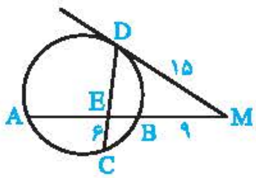


۵۱☆. در شکل مقابل، PA = ۵ ، AB = ۳ و شعاع دایره برابر ۴ واحد است. فاصلهٔ نقطهٔ P تا مرکز دایره کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲۱}$
۲) $۲\sqrt{۱۴}$
۳) $۴\sqrt{۷}$
۴) $۳\sqrt{۷}$

۵۲☆. دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۱۲ واحد مماس درونی‌اند. اندازهٔ بزرگ‌ترین قطعهٔ مماس که یک سر آن بر روی دایرهٔ بزرگ‌تر و سر دیگر آن (نقطهٔ تماس) بر روی دایرهٔ کوچک‌تر باشد، برابر کدام است؟

۱) ۹ ۲) $۸\sqrt{۲}$ ۳) ۱۲ ۴) $۸\sqrt{۳}$

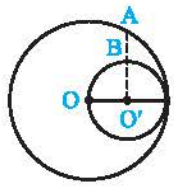


۵۳☆. در شکل مقابل MD بر دایره مماس است و وتر CD وتر AB را به نسبت ۳ به ۱ قطع کرده است $\left(\frac{AE}{BE}=3\right)$. با توجه به اندازهٔ پاره‌خط‌های داده‌شده، طول پاره‌خط DE کدام است؟

(CE = ۶ ، MB = ۹ ، MD = ۱۵)

۱) ۸ ۲) ۹

۳) ۱۰ ۴) ۱۱



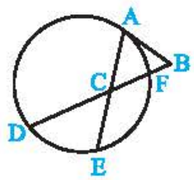
۵۴☆. در شکل روبه‌رو، O مرکز دایرهٔ بزرگ، O′ مرکز دایرهٔ کوچک، امتداد AB عمود بر OO′ و طول AB برابر $3(\sqrt{3}-3)$ سانتی‌متر است. شعاع دایرهٔ بزرگ چند سانتی‌متر است؟

۱) $3\sqrt{5}$ ۲) $3\sqrt{6}$

۳) $5\sqrt{3}$ ۴) $6\sqrt{3}$

۵۵☆. نقطهٔ C بر روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین وتر از دایره، که از نقطهٔ C می‌گذرد، کدام است؟

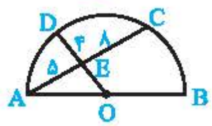
۱) ۸ ۲) $5\sqrt{3}$ ۳) $6\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{5}$



۵۶☆. در شکل مقابل، AB در نقطهٔ A بر دایره مماس است و مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. اگر BF = ۱ و DF = ۸ آن‌گاه اندازهٔ CE کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵

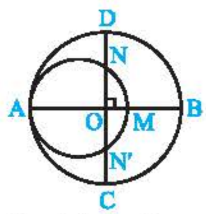
۳) ۴/۵ ۴) ۳/۵



۵۷☆. در شکل روبه‌رو، O مرکز نیم‌دایره، AE = ۵ ، CE = ۸ و DE = ۴ است. اندازهٔ OE کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۷

۳) ۵ ۴) ۶



۵۸☆. در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایرهٔ بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر MB = ۱۶ و ND = ۱۰ باشد، مساحت بین دو دایره کدام است؟ (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

۱) 324π ۲) 625π

۳) 576π ۴) 336π

۵۹☆. در یک دایره نقطهٔ M روی وتر AB چنان قرار دارد که MA = ۱۲ و MB = ۳ . طول کوتاه‌ترین وتری که در نقطهٔ M رسم می‌شود، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۱۲

۶۰. در مثلث به اضلاع ۶، ۵ و ۵، دایرهٔ محیطی آن را رسم می‌کنیم. فاصلهٔ بزرگ‌ترین ضلع از وسط کمان نظیر آن کدام است؟

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۲/۷۵ ۴) ۲

۶۱☆. از یک نقطه خارج یک دایره، یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده‌ایم. طول مماس ۱۶ و طول بزرگ‌ترین قطعهٔ قاطع ۳۲ است. اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط قاطع ۵ باشد، شعاع دایره کدام است؟

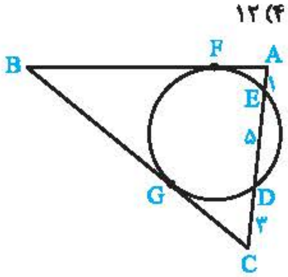
۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۶۲☆. از نقطهٔ M خارج یک دایره، یک مماس و یک قاطع بر آن رسم شده است. اگر طول مماس ۸ و فاصلهٔ نقاط تقاطع قاطع با دایره تا نقطهٔ تماس به ترتیب ۴ و ۶ باشد، آن‌گاه فاصلهٔ M تا نزدیک‌ترین نقطهٔ تقاطع کدام است؟

۱) $\frac{22}{3}$ ۲) $\frac{20}{3}$ ۳) $\frac{16}{3}$ ۴) $\frac{14}{3}$

۶۳. اندازهٔ اضلاع مثلث ABC برابر AB = ۸ ، AC = ۶ و BC = ۷ است. مماس بر دایرهٔ محیطی مثلث در نقطهٔ A امتداد ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اندازهٔ AD کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

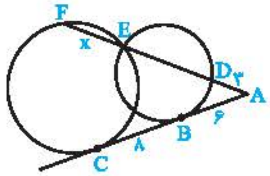


۶۴☆. مطابق شکل یک دایره بر اضلاع AB و BC در نقاط F و G مماس است. اگر دایره ضلع AC را قطع کند و سه پاره‌خط به طول‌های ۱، ۵ و ۳ روی آن ایجاد کند، آن‌گاه | BC − AB | کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{6}$

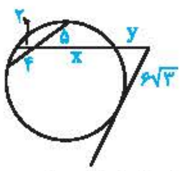
۳) $6-\sqrt{6}$ ۴) $3-\sqrt{3}$

۶۵☆. در شکل مقابل، خط شامل BC بر دو دایره مماس است و قاطع گذرنده از نقطهٔ E آن را در نقطهٔ A قطع کرده است. اگر $AB = 6$ ، $BC = 8$ و $AD = 3$ ، آن‌گاه اندازهٔ وتر EF کدام است؟



۱) $\frac{11}{3}$
۲) ۴
۳) $\frac{13}{3}$
۴) ۵

۶۶☆. در شکل مقابل y کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۵)

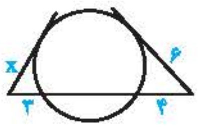


۱) ۶
۲) ۷/۵
۳) ۸
۴) ۹

۶۷☆. در دایره‌ای به قطر ۱۲ واحد، فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB برابر ۲ واحد است. نقطهٔ C در امتداد AB به فاصلهٔ $CB = 2\sqrt{2}$ انتخاب شده است، طول قطعهٔ مماسی که از C بر دایره رسم می‌شود، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

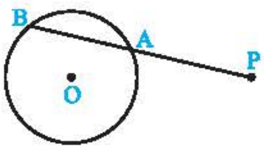
۱) $2\sqrt{10}$
۲) $3\sqrt{5}$
۳) ۷
۴) $5\sqrt{2}$

۶۸☆. در شکل مقابل اندازهٔ x چند واحد است؟ (سراسری ریاضی- ۹۱)



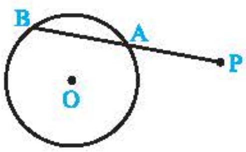
۱) $3\sqrt{2}$
۲) $2\sqrt{5}$
۳) $2\sqrt{6}$
۴) ۵

۶۹. نزدیک‌ترین نقطه از دایرهٔ به شعاع ۵ واحد تا نقطهٔ مفروض P برابر ۸ واحد است. قاطع PAB نسبت به دایره طوری رسم شده است که $PA - AB = 2$ ، اندازهٔ AB چقدر است؟ (سراسری ریاضی- ۹۰)



۱) ۹
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۵

۷۰. فاصلهٔ نقطهٔ P تا دورترین نقاط یک دایره سه برابر شعاع دایره است. از این نقطه، قاطع PAB نسبت به دایره رسم شده است. اگر کمان AB برابر ۶۰ درجه باشد، اندازهٔ PA چند برابر شعاع است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۰)

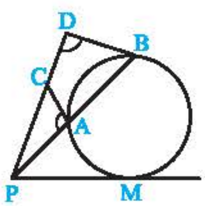


۱) $\frac{1}{2}(\sqrt{11} - 1)$
۲) $\frac{1}{2}(\sqrt{13} - 1)$
۳) $\sqrt{11} - 2$
۴) $\sqrt{13} - 2$

۷۱. دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۱۰/۵ واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایرهٔ کوچک‌تر، مماس بر دایرهٔ بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعهٔ مماس چقدر است؟ (سراسری ریاضی- ۹۲)

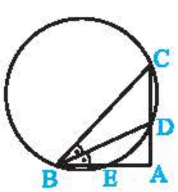
۱) ۸
۲) $4\sqrt{5}$
۳) $4\sqrt{6}$
۴) ۱۰

۷۲☆. در شکل مقابل، $P\hat{A}C = P\hat{D}B$ ، $PC = 9$ و $CD = 7$ ، اندازهٔ مماس PM چقدر است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۵)



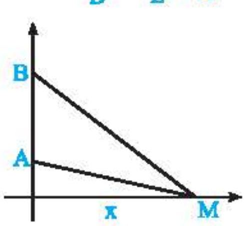
۱) ۸
۲) $6\sqrt{2}$
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۷۳☆. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC\,(\hat{A} = 90^\circ)$ مطابق شکل BD نیمساز زاویهٔ B است. دایرهٔ محیطی مثلث BCD ضلع AB را در E قطع می‌کند. اگر $AC = 6$ و $AE = 1$ باشد، آن‌گاه طول ضلع AB کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۹)



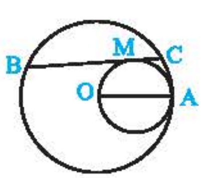
۱) ۱۷/۵
۲) ۱۷
۳) ۱۶/۵
۴) ۱۶

۷۴☆. دو نقطهٔ A و B به بلندی‌های ۵ و ۸ بر روی محور قائم قرار دارند. نقطهٔ M بر روی محور افقی، با کدام فاصله از پای قائم اختیار شود، تا زاویهٔ AMB بیش‌ترین مقدار ممکن باشد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۰)



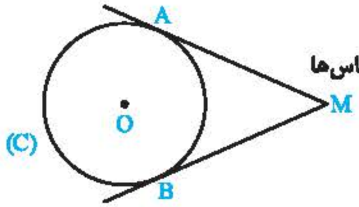
۱) $3\sqrt{2}$
۲) ۶
۳) $2\sqrt{10}$
۴) ۷

۷۵☆. در دایره‌ای به شعاع OA، وتر BC مماس بر دایره‌ای به قطر OA رسم شده است. مقدار $MB \times MC$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۴)



۱) MO^2
۲) MA^2
۳) OA^2
۴) MA.MO

مماس‌های رسم‌شده از یک نقطهٔ خارج دایره بر آن



☆۷۶. در شکل مقابل از نقطهٔ M دو مماس MA و MB بر دایرهٔ $C(O,6)$ رسم شده است. اگر طول مماس‌ها برابر ۸ باشد، دورترین فاصلهٔ نقطهٔ M تا نقاط دایره کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴
۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۷۷. از نقطهٔ A دو مماس به طول ۱ بر دایره‌ای به مرکز O رسم می‌شود که زاویهٔ بین آن‌ها °۱۲۰ است. کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A تا نقاط دایره کدام است؟

۱) $2-\sqrt{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\sqrt{3}-1$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۷۸. از نقطهٔ M خارج دایره به شعاع $2\sqrt{3}$ دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم. اگر فاصلهٔ این نقطه تا مرکز دایره ۶ باشد، آن‌گاه فاصلهٔ نقاط تماس کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $3\sqrt{3}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{6}$

☆۷۹. از نقطهٔ M واقع در خارج دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده است. اگر فاصلهٔ نقطهٔ M تا نزدیک‌ترین نقاط دایره $4(\sqrt{2}-1)$ باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۸)

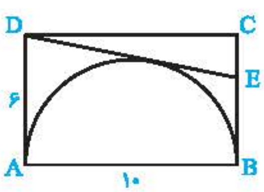
۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{10}$ ۴) $3\sqrt{2}$

☆۸۰. در مثلث ABC $(AB=AC)$، دایره‌ای در B و C بر ساق‌ها مماس است. اگر $BC=6$ و ارتفاع $AH=4$ باشد، شعاع این دایره کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)

۱) ۳/۲۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۳/۷۵ ۴) ۴/۵

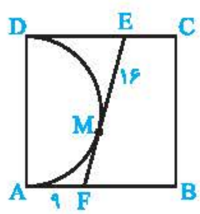
☆۸۱. از نقطهٔ A خارج دایره به شعاع ۱ دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم. اگر زاویهٔ بین دو مماس °۶۰ باشد، آن‌گاه مساحت ناحیهٔ بین دایره و مماس‌ها کدام است؟

۱) $2-\frac{\pi}{6}$ ۲) $2-\frac{\pi}{3}$ ۳) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$ ۴) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$



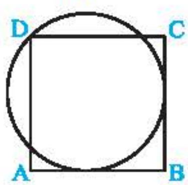
☆۸۲. در مستطیل ABCD مطابق شکل، نیم‌دایره‌ای به قطر AB رسم شده است. نقطهٔ E روی ضلع BC چنان است که DE بر نیم‌دایره مماس است. طول پاره‌خط CE کدام است؟

۱) $\frac{9}{5}$ ۲) $\frac{8}{3}$
۳) $\frac{13}{5}$ ۴) $\frac{11}{6}$



☆۸۳. مطابق شکل، چهارضلعی ABCD مربع و EF در نقطهٔ M بر نیم‌دایره به قطر AD مماس است. اگر $ME=16$ و $AF=9$، آن‌گاه مساحت مربع کدام است؟

۱) ۴۸۴ ۲) ۶۲۵
۳) ۵۲۹ ۴) ۵۷۶



☆۸۴. در شکل مقابل، ABCD مستطیل است و دایره‌ای از رأس D می‌گذرد و بر دو ضلع AB و BC مماس است. اگر $AB=16$ و $BC=18$ باشد، آن‌گاه شعاع دایره کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹
۳) ۱۰ ۴) ۱۱

مماس مشترک‌های داخلی و خارجی

☆۸۵. طول خط‌المرکزین دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳، برابر $\sqrt{5}$ است. چند خط می‌توان رسم کرد که بر هر دو دایره مماس باشد؟

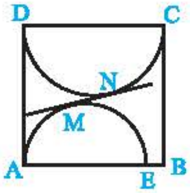
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

☆۸۶. دو دایرهٔ مماس خارج به شعاع‌های $R_1=8$ و $R_2=2$ مفروض‌اند. اگر TT' مماس مشترک خارجی و O و O' مراکز دو دایره باشند، مساحت چهارضلعی $OO'T'T$ چقدر است؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۰ ۳) ۳۰ ۴) ۲۰

☆۸۷. دو دایره مماس خارج‌اند. اگر یک زاویهٔ چهارضلعی حاصل از وصل مراکز دو دایره و نقاط تماس مماس مشترک خارجی دو دایره برابر °۶۰ باشد، آن‌گاه نسبت شعاع‌های دو دایره کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳



۸۸☆. در شکل مقابل مربع به ضلع ۱۴ مفروض است و نیم‌دایره‌ها به قطر CD و به قطر ۱۲ = AE می‌باشند. اندازهٔ طول مماس مشترک دو نیم‌دایره کدام است؟

۱) $2\sqrt{7}$ ۲) $4\sqrt{2}$
۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{30}$

۸۹☆. در دو دایره به شعاع‌های R_1 و R_2 و طول خط‌المرکزین d، روابط $3R_1+4R_2=4d$ و $R_1+2R_2=\frac{11d}{6}$ برقرار است. چند خط وجود دارد که بر هر دو دایره مماس است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۲

۹۰☆. طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس، $\sqrt{2}$ برابر شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر است. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر چند برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۱/۵ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

۹۱☆. اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ واحد است، خط‌المرکزین این دو دایره چند واحد است؟

۱) $12\sqrt{2}$ ۲) $7\sqrt{6}$ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸ (سراسری ریاضی - ۹۱)

۹۲☆. زاویهٔ بین خط‌المرکزین و مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۷/۵ و ۳۰ سانتی‌متر، ۳۰ درجه است. طول خط‌المرکزین دو دایره چند سانتی‌متر است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۴)

۱) ۴۲/۵ ۲) ۴۵ ۳) ۴۷/۵ ۴) ۵۰

۹۳. شعاع دو دایرهٔ خارج هم به ترتیب ۲۲/۵ و ۷/۵ سانتی‌متر است. اگر زاویهٔ بین مماس مشترک داخلی و خط‌المرکزین دو دایره ۳۰ درجه باشد، طول خط‌المرکزین دو دایره چند سانتی‌متر است؟ (سراسری ریاضی - ۸۴)

۱) ۵۵ ۲) ۵۷/۵ ۳) ۶۰ ۴) ۶۲/۵

۹۴. طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۱ و ۳ سانتی‌متر برابر $3\sqrt{33}$ سانتی‌متر است. کم‌ترین فاصلهٔ نقاط این دو دایره از یکدیگر چند سانتی‌متر است؟ (سراسری ریاضی - ۸۲)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹۵. دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ واحد مماس داخلی هستند. چند وتر به طول $4\sqrt{6}$ در دایرهٔ بزرگ‌تر می‌توان رسم کرد که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۶☆. در دو دایرهٔ متقاطع به مراکز O و O' و شعاع‌های ۳ و ۴ واحد، فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی دو دایره از وسط OO' برابر $\frac{OO'}{2}$ می‌باشد. اندازهٔ مماس مشترک محدود به دو نقطهٔ تماس این دو دایره چند واحد است؟ (سراسری ریاضی - ۹۰)

۱) ۵ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $2\sqrt{6}$ ۴) ۴

۹۷☆. دو دایرهٔ $C(O،9)$ و $C'(O'،3)$ متقاطع‌اند. اگر مساحت چهارضلعی حاصل از وصل نقاط تماس مماس مشترک خارجی و مراکز دایره‌ها برابر ۴۸ باشد، طول قسمتی از خط‌المرکزین که بین دو دایره قرار می‌گیرد، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۹۸★. دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۷ مماس داخل‌اند. چند وتر به طول $4\sqrt{10}$ در دایرهٔ بزرگ‌تر می‌توان رسم کرد که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

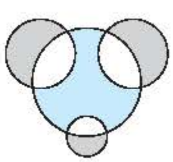
۹۹★. دو دایره به شعاع‌های ۷ و ۱۳ مماس خارج‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ تماس دو دایره از مماس مشترک خارجی دو دایره کدام است؟

۱) ۸/۶ ۲) ۹/۱ ۳) ۹/۶ ۴) ۱۰/۸

۱۰۰☆. دو دایرهٔ نامساوی به مرکزهای O و O' مماس خارج‌اند. دایره‌ای به قطر OO'، با مماس مشترک خارجی این دو دایره، کدام وضعیت را دارد؟

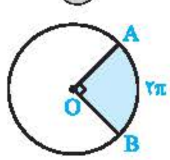
۱) متقاطع ۲) مماس ۳) متخارج ۴) نامشخص (سراسری ریاضی - ۹۴)

طول کمان، مساحت قطاع



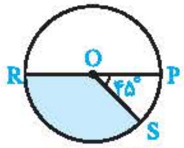
۱۰۱. در شکل مقابل قطرهای دو دایرهٔ مساوی برابر ۴ و قطر دایرهٔ کوچک ۲ است. اگر مجموع مساحت نواحی طوسی با مساحت ناحیهٔ رنگی برابر باشد، آن‌گاه قطر دایرهٔ بزرگ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳
۳) ۶ ۴) ۸



۱۰۲☆. در شکل مقابل، طول کمان AB برابر 2π است. مساحت قطاع AOB کدام است؟

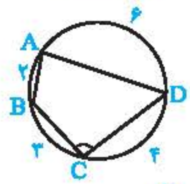
۱) 4π ۲) 16π
۳) 6π ۴) 24π



☆۱۰۳. مساحت ناحیهٔ رنگی در دایرهٔ مقابل که اندازهٔ قطرش ۸ = RP است، کدام است؟

۱) $1/5\pi$ ۲) 6π

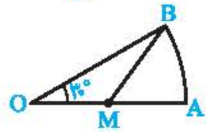
۳) 4π ۴) 3π



☆۱۰۴. در چهارضلعی محاطی ABCD مطابق شکل طول کمان‌ها بر حسب سانتی‌متر نوشته شده است. اندازهٔ زاویهٔ C چند درجه است؟

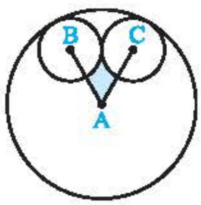
۱) ۹۸ ۲) ۸۴

۳) ۹۰ ۴) ۹۶



☆۱۰۵. در شکل مقابل OAB قطاعی از یک دایره با زاویهٔ مرکزی °۳۰ است. اگر M وسط OA باشد، نسبت مساحت مثلث OMB به مساحت قطاع AOB کدام است؟

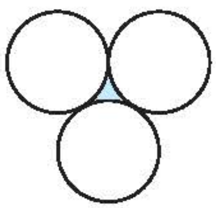
۱) $\frac{2}{\sqrt{3}\pi}$ ۲) $\frac{2}{3\pi}$ ۳) $\frac{3}{2\pi}$ ۴) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$



۱۰۶. سه دایره مطابق شکل دوبه‌دو بر هم مماس هستند و B ،A و C مرکز دایره‌ها می‌باشند. اگر شعاع دایرهٔ بزرگ ۳ و شعاع‌های دایره‌های کوچک برابر ۱ باشند، آن‌گاه مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟

۱) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ ۲) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$

۳) $2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ ۴) $2\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$



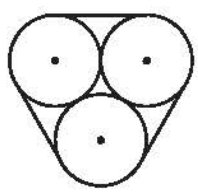
☆۱۰۷. در شکل مقابل سه دایره به شعاع‌های مساوی، دوبه‌دو بر هم مماس‌اند. اگر محیط هر دایره ۳۶ باشد، محیط ناحیهٔ رنگی کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۶

۳) ۳۶ ۴) ۱۲

☆۱۰۸. در پرسش قبل، اگر شعاع دایره‌ها برابر یک باشد، مساحت ناحیهٔ بین آن‌ها کدام است؟

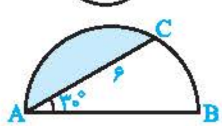
۱) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$ ۳) $\pi-\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}-\pi$



☆۱۰۹. سه دایره مطابق شکل با یک طناب بسته شده‌اند. اگر شعاع دایره‌ها یک باشد، طول طناب کدام است؟

۱) $2\pi+2$ ۲) $3\pi+4$

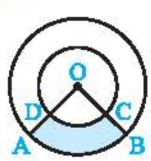
۳) $6+2\pi$ ۴) $6\pi+2$



۱۱۰. در شکل مقابل، نیم‌دایره به قطر AB می‌باشد. مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟

۱) $2\pi-2\sqrt{3}$ ۲) $3\pi-2\sqrt{3}$

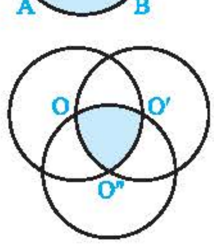
۳) $4\pi-3\sqrt{3}$ ۴) $3\pi-3\sqrt{3}$



۱۱۱. دو دایره به مرکز O مطابق شکل چنان‌اند که ۳BC = ۲OC. اگر مساحت ناحیهٔ رنگی ۳۲ سانتی‌متر مربع باشد، مساحت قطاع OCD چند سانتی‌متر مربع است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۰

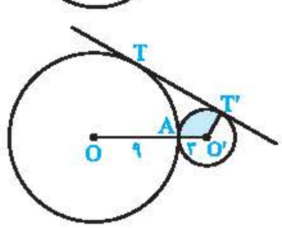
۳) ۱۸ ۴) ۱۶



☆۱۱۲. در شکل مقابل سه دایرهٔ مساوی به شعاع واحد از مرکز یکدیگر می‌گذرند، مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟

۱) $\pi-\sqrt{3}$ ۲) $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳) $\frac{\pi-\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$



۱۱۳. در شکل مقابل مساحت ناحیهٔ رنگی چند برابر π است؟

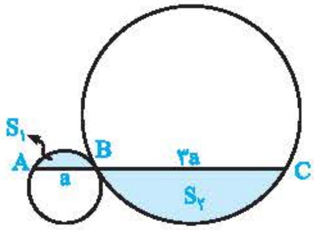
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۶

۱۱۴. در شکل مقابل دو دایره مماس خارج هستند. اگر $S_۱ + S_۲ = ۴۰\pi$ آن‌گاه $S_۱$ کدام است؟



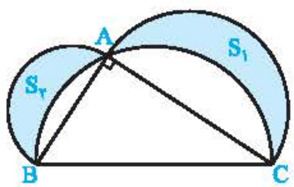
۱) ۵π

۲) ۴π

۳) ۶π

۴) ۸π

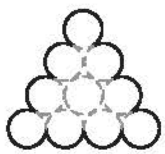
☆۱۱۵. در شکل روبه‌رو، ABC مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع $AB = ۵$ و $AC = ۱۲$ است. سه نیم‌دایره به قطرهای BC ،AC و AB رسم شده‌اند. حاصل $S_۱ + S_۲$ کدام است؟ (مشابه سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۳)



۱) ۶۰ ۲) ۳۰

۳) ۲۰π ۴) ۱۰π

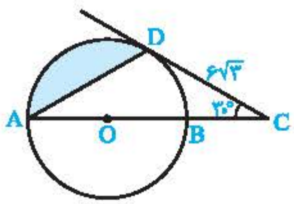
☆۱۱۶. در شکل روبه‌رو، ۱۰ دایره به شعاع یک، مماس بر هم قرار گرفته‌اند. محیط شکل بدون احتساب کمان‌های نقطه‌چین کدام است؟



۱) ۸π ۲) ۹π

۳) ۱۰π ۴) ۱۱π

☆۱۱۷. مساحت ناحیهٔ رنگی در شکل مقابل کدام است؟



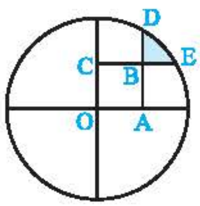
۱) $۱۲\pi - ۱۸$

۲) $۶\pi - ۱۲\sqrt{۳}$

۳) $۱۸\pi - ۶\sqrt{۳}$

۴) $۱۲\pi - ۹\sqrt{۳}$

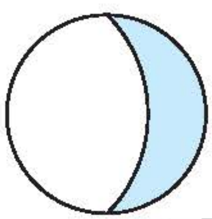
☆۱۱۸. دایرهٔ روبه‌رو، به شعاع ۲ و مربع OABC به ضلع واحد است. امتداد AB و BC به ترتیب دایره را در نقاط D و E قطع می‌کنند. مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{۳} + ۱ - \sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}(۲ - \sqrt{۳})$

۳) $\pi(۲ - \sqrt{۳})$ ۴) $\frac{\pi}{۳} - ۱ + \sqrt{۳}$

☆۱۱۹. در شکل مقابل کمانی از یک دایرهٔ دیگر رسم شده است که مرکز آن روی دایره مفروض است و از دو سر قطری از آن می‌گذرد. نسبت مساحت غیررنگی به مساحت رنگی کدام است؟



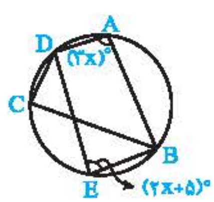
۱) $\pi - ۱$ ۲) π

۳) $\sqrt{۲}\pi - ۱$ ۴) $\pi - \sqrt{۲}$

قسمت سوم: چندضلعی‌های محاطی و محیطی

چهارضلعی‌های محاطی

☆۱۲۰. در دایرهٔ مقابل، $\hat{A} = (۳x)^\circ$ و $\hat{E} = (۲x + ۵)^\circ$. اندازهٔ $D\hat{C}B$ چند درجه است؟



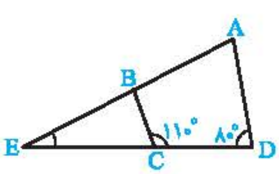
۱) ۵۵

۲) ۶۰

۳) ۷۵

۴) ۷۰

☆۱۲۱. در شکل مقابل چهارضلعی ABCD محاطی است و اندازهٔ دو زاویهٔ آن داده شده است. زاویهٔ برخورد امتداد ضلع‌های AB و CD چند درجه است؟



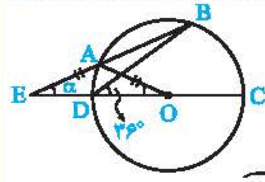
۱) ۳۰ ۲) ۲۰

۳) ۲۵ ۴) ۴۰

☆۱۲۲. در چهارضلعی محاطی ABCD، $A\hat{B}D = A\hat{D}B = C\hat{A}D$ و $B\hat{A}C = ۳۰^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ ACD چند درجه است؟

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰

۴۷ (۱) (۲) (۳) (۴)



بنابه فرض $AE = AO$

پس $A\hat{O}E = \hat{E} = \alpha$

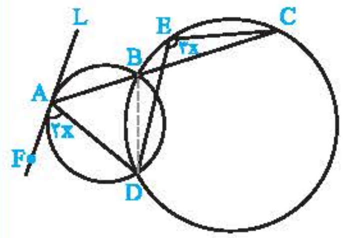
چون $A\hat{O}D$ زاویهٔ مرکزی است، لذا $\widehat{AD} = \alpha$. داریم:

$$\hat{E} = \frac{\widehat{BC}-\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\widehat{BC}-\alpha}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 3\alpha$$

محاطی $B\hat{D}C = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow 36^\circ = \frac{3\alpha}{2}$

$\Rightarrow 3\alpha = 72^\circ \Rightarrow \alpha = 24^\circ$

۴۸ (۱) (۲) (۳) (۴)



BD وتر مشترک دو دایره را رسم می‌کنیم. در دایرهٔ بزرگ دو زاویهٔ DBC و DEC محاطی و روبه‌رو به کمان CD هستند، پس $D\hat{B}C = D\hat{E}C = 3x$

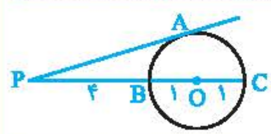
از طرفی در دایرهٔ کوچک، زاویهٔ ABD محاطی و روبه‌رو به کمان AD است، همچنین زاویهٔ DAF ظلی روبه‌رو به کمان AD می‌باشد، پس این دو زاویه برابرند $A\hat{B}D = D\hat{A}F = 2x$ و نهایتاً داریم:

$A\hat{B}D + D\hat{B}C = 180^\circ \Rightarrow 2x + 3x = 180^\circ$

$\Rightarrow 5x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$

$D\hat{E}C = 3x = 3\times 36^\circ = 108^\circ$

۴۹ (۱) (۲) (۳) (۴)



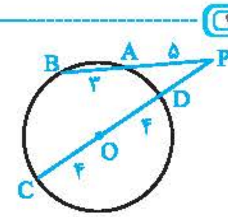
$PA^2 = PB.PC$

$\Rightarrow PA^2 = 4\times 6 \Rightarrow PA = 2\sqrt{6}$

۵۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

$PT^2 = PA.PB = 4\times(4+6+6) = 4\times 16 \Rightarrow PT = 2\times 4 = 8$

۵۱ (۱) (۲) (۳) (۴)



$PA.PB = PD.PC \Rightarrow 5\times(5+3) = PD.(PD+8)$

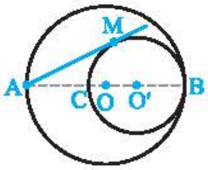
$\Rightarrow PD^2 + 8PD - 40 = 0 \Rightarrow PD = -4 \pm \sqrt{16+40}$

$\xrightarrow{PD>0} PD = -4+\sqrt{56} = -4+2\sqrt{14}$

$PO = PD + OD = -4+2\sqrt{14}+4 = 2\sqrt{14}$

۵۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنابه فرض دو دایره مماس داخل‌اند و $O'B = O'C = 9$ و $OA = OB = 12$. دورترین نقطهٔ دایرهٔ بزرگ از نقاط دایرهٔ کوچک نقطهٔ A است. بزرگ‌ترین مماس از این نقطه بر دایرهٔ کوچک رسم می‌شود و داریم:

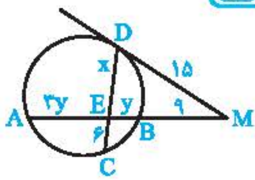


$AM^2 = AC.AB = (AB-BC).AB$

$\Rightarrow AM^2 = (24-18)\times 24$

$= 6\times 24 = 6^2\times 4 \Rightarrow AM = 6\times 2 = 12$

۵۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

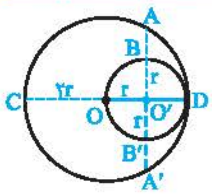


$MD^2 = MB\times MA \Rightarrow 15^2 = 9\times(9+y+3y)$

$\Rightarrow 4y+9 = \frac{225}{9} = 25 \Rightarrow y = \frac{16}{4} = 4$

$DE\times CE = BE\times AE \Rightarrow x\times 6 = 4\times 3\times 4 \Rightarrow x = \frac{48}{6} = 8$

۵۴ (۱) (۲) (۳) (۴)



بنابه فرض $AB = 3(3-\sqrt{3})$ داریم:

$O'A\times O'A' = O'C\times O'D$

$\Rightarrow O'A^2 = 3r\times r$

$\Rightarrow (O'B+AB)^2 = 3r^2 \Rightarrow r+3(3-\sqrt{3}) = \sqrt{3}r$

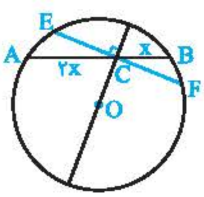
$\Rightarrow r(\sqrt{3}-1) = 3(3-\sqrt{3}) \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1} = 3\sqrt{3}$

شعاع دایرهٔ بزرگ $= 2r = 6\sqrt{3}$

۵۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنابه فرض نقطهٔ C وتر $AB = 9$ را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است، پس $BC = x$ و $AC = 2x$ و در نتیجه:

$AB = 9 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow BC = 3 \quad , \quad AC = 6$

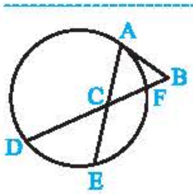


کوتاه‌ترین وتری که از نقطهٔ C رسم می‌شود، وتری است که بر قطر گذرنده از نقطهٔ C عمود است، یعنی وتر EF. داریم:

$CE.CF = AC.BC \Rightarrow CE^2 = CF^2 = 6\times 3 = 18$

$\Rightarrow CE = CF = 3\sqrt{2} \;,\; EF = 2CE = 2CF = 6\sqrt{2}$

۵۶ (۱) (۲) (۳) (۴)



بنابه فرض $BF = 1$ و $DF = 8$ است، پس می‌توان طول مماس AB را حساب کرد.

$AB^2 = BF\times BD = 1\times 9 \Rightarrow AB = 3$

چون مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، پس نتیجه می‌شود $AC = BC = 3$. لذا داریم:

$CF = BC - BF = 3-1 = 2 \;,\; CD = DF - CF = 8-2 = 6$

و نهایتاً بنابه رابطهٔ طولی وترهای متقاطع داریم:

$AC\times CE = CD\times CF \Rightarrow 3\times CE = 6\times 2 \Rightarrow CE = \frac{12}{3} = 4$

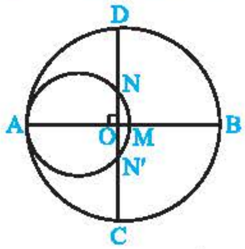
۵۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

مطابق شکل اگر شعاع دایره را r فرض کنیم، $OE = r - ۴$ می‌شود و داریم:

$$EF.DE = AE.CE$$
$$\Rightarrow ۴(r - ۴ + r) = ۵ \times ۸$$
$$\Rightarrow ۲r - ۴ = ۱۰ \Rightarrow r = ۷$$
$$OE = r - ۴ = ۷ - ۴ = ۳$$

۵۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

شعاع دایرهٔ بزرگ را R فرض می‌کنیم. داریم:



$$ON = ON' = R - ۱۰$$
$$OM = R - ۱۶$$
$$OA = R$$

بنابه رابطهٔ طولی وترهای متقاطع در دایرهٔ کوچک داریم:

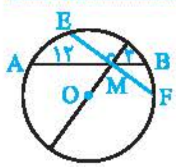
$$OA \times OM = ON \times ON' \Rightarrow R(R - ۱۶) = (R - ۱۰)(R - ۱۰)$$
$$\Rightarrow R^۲ - ۱۶R = R^۲ - ۲۰R + ۱۰۰ \Rightarrow ۴R = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۲۵$$

قطر دایرهٔ کوچک $AM = ۲r$ است. پس می‌توان نوشت:

$$AM = AB - BM \Rightarrow ۲r = ۲R - ۱۶$$
$$= ۲ \times ۲۵ - ۱۶ = ۵۰ - ۱۶ = ۳۴ \Rightarrow r = ۱۷$$

مساحت ناحیهٔ بین دو دایره $= \pi R^۲ - \pi r^۲ = \pi(۲۵^۲ - ۱۷^۲)$
$$= \pi(۶۲۵ - ۲۸۹) = ۳۳۶\pi$$

۵۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

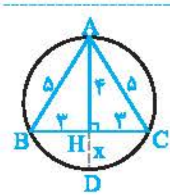


کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M وتری است که بر قطر شامل OM در نقطهٔ M عمود است، یعنی وتر EF.

بنابه رابطهٔ طولی وترهای متقاطع داریم:

$$MA.MB = ME.MF \Rightarrow ۱۲ \times ۳ = ME \times ME \Rightarrow ME^۲ = ۳۶$$
$$\Rightarrow ME = ۶ \Rightarrow EF = ۲ME = ۱۲$$

۶۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

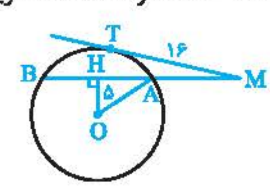


مثلث ABC متساوی‌الساقین است، ارتفاع AH میانه، نیمساز و عمودمنصف است؛ امتداد آن از وسط کمان نظیر BC می‌گذرد و داریم:

$$AH \times DH = BH \times CH \Rightarrow x = \frac{۳ \times ۳}{۴} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

۶۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

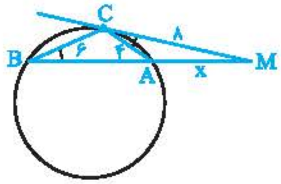
بنابه فرض $MT = ۱۶$، $MB = ۳۲$ و $OH = ۵$. داریم:



$$MT^۲ = MA.MB \Rightarrow ۱۶^۲ = MA \times ۳۲ \Rightarrow MA = ۸$$
$$AB = MB - MA = ۳۲ - ۸ = ۲۴ \Rightarrow AH = BH = ۱۲$$
$$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ = ۵^۲ + ۱۲^۲ = ۱۳^۲ \Rightarrow OA = ۱۳$$

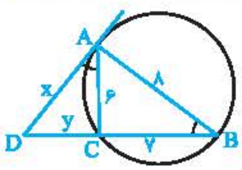
۶۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

دو مثلث MAC و MCB به حالت (زز) متشابه‌اند، در نتیجه:



$$\frac{MC}{MB} = \frac{AC}{BC} = \frac{MA}{MC} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۸}{MB} = \frac{۴}{۶} \Rightarrow MB = \frac{۴۸}{۴} = ۱۲ \\ MC^۲ = MA.MB \end{cases}$$
$$۱۲ \times x = ۸^۲ \Rightarrow x = \frac{۶۴}{۱۲} = \frac{۱۶}{۳}$$

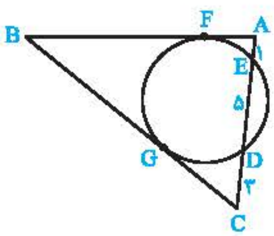
۶۳ (۱) (۲) (۳) (۴)



$$\overset{\Delta}{ADC} \sim \overset{\Delta}{BDA} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AD}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{y + ۷} = \frac{۶}{۸} = \frac{y}{x}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۴y \\ ۴x = ۳y + ۲۱ \end{cases} \Rightarrow ۱۶x = ۹x + ۸۴ \Rightarrow x = \frac{۸۴}{۷} = ۱۲$$

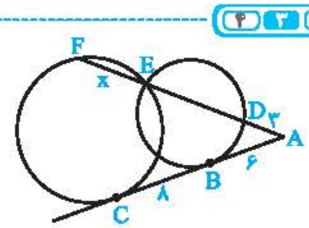
۶۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

طول دو مماس BF و BG برابرند $(BF = BG)$ و داریم:



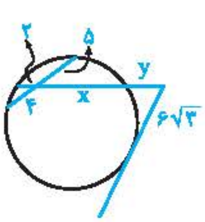
$$AF^۲ = AE.AD$$
$$\Rightarrow AF^۲ = ۱ \times ۶ \Rightarrow AF = \sqrt{۶}$$
$$CG^۲ = CD.CE = ۳ \times ۸$$
$$\Rightarrow CG = ۲\sqrt{۶}$$
$$|BC - AB| = |BG + CG - BF - AF| = |CG - AF|$$
$$= |۲\sqrt{۶} - \sqrt{۶}| = \sqrt{۶}$$

۶۵ (۱) (۲) (۳) (۴)



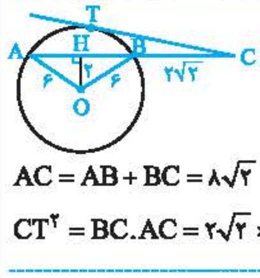
$$AB^۲ = AD.AE \Rightarrow ۳۶ = ۳ \times AE \Rightarrow AE = ۱۲$$
$$AC^۲ = AE.AF \Rightarrow (۶ + ۸)^۲ = ۱۲ \times (۱۲ + x) \Rightarrow ۱۲ + x = \frac{۱۹۶}{۱۲}$$
$$\Rightarrow x = \frac{۴۹}{۳} - ۱۲ = \frac{۴۹ - ۳۶}{۳} = \frac{۱۳}{۳}$$

۶۶ (۱) (۲) (۳) (۴)



$$۲ \times x = ۵ \times ۴ \Rightarrow x = ۱۰$$
$$(۶\sqrt{۳})^۲ = y(y + x + ۲)$$
$$\Rightarrow ۱۰۸ = y(y + ۱۲)$$
$$\Rightarrow y^۲ + ۱۲y - ۱۰۸ = ۰$$
$$\Rightarrow (y + ۱۸)(y - ۶) = ۰ \Rightarrow y = ۶$$

۶۷ ۱ ۲ ۳ ۴



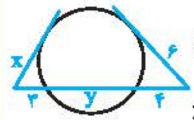
$AH^2 = BH^2 = OA^2 - OH^2$

$= 6^2 - 2^2 = 32 \Rightarrow AH = BH = 4\sqrt{2}$

$AC = AB + BC = 8\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

$CT^2 = BC.AC = 2\sqrt{2} \times 10\sqrt{2} = 40 \Rightarrow CT = 2\sqrt{10}$

۶۸ ۱ ۲ ۳ ۴

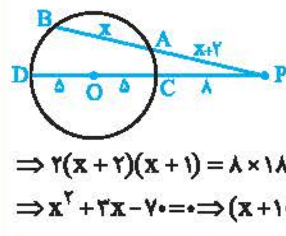


$6^2 = 4(4+y) \Rightarrow 4+y = \frac{36}{4} = 9 \Rightarrow y = 5$

$x^2 = 3(3+y) = 3(3+5) = 24 \Rightarrow x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

۶۹ ۱ ۲ ۳ ۴

نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره تا نقطهٔ P، تقاطع خط شامل OP با دایره است، یعنی PC. بنابه فرض $PC = 8$، $OC = OD = 5$ و $PA = 2 + AB$ داریم:



$PA.PB = PC.PD$

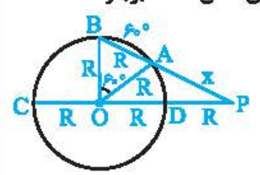
$\Rightarrow (x+2)(x+2+x) = 8(8+10)$

$\Rightarrow 2(x+2)(x+1) = 8 \times 18 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 72$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 70 = 0 \Rightarrow (x+10)(x-7) = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow AB = 7$

۷۰ ۱ ۲ ۳ ۴

فاصلهٔ نقطهٔ P تا دورترین نقاط دایره، PC می‌باشد. بنابه فرض $PC = 3R$، در نتیجه $PD = R$. چون کمان AB برابر $60°$ است.

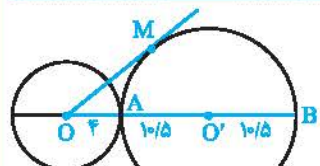


پس زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B = 60°$ است و مثلث AOB متساوی‌الاضلاع می‌شود لذا $AB = R$ و داریم:

$PA.PB = PD.PC \Rightarrow x(x+R) = R \times 3R \Rightarrow x^2 + Rx - 3R^2 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 12R^2}}{2} \xrightarrow{x>0} x = \frac{\sqrt{13}R - R}{2} = \frac{\sqrt{13} - 1}{2}R$

۷۱ ۱ ۲ ۳ ۴



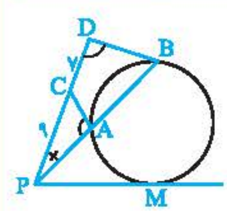
$OM^2 = OA.OB$

$= 4(4 + 10.5 + 10.5)$

$\Rightarrow OM^2 = 4 \times 25 = 100$

$\Rightarrow OM = 10$

۷۲ ۱ ۲ ۳ ۴



$(\hat{P} = \hat{P} \quad , \quad P\hat{A}C = P\hat{D}B)$

$\Rightarrow \overset{\Delta}{APC} \sim \overset{\Delta}{DPB}$

$\Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{PA}{PD}$

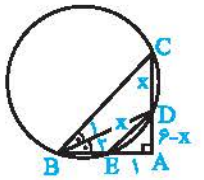
$\Rightarrow PA.PB = PC.PD$

از طرفی بنابه رابطهٔ طولی مماس و قاطع داریم $PM^2 = PA.PB$ پس:

$PM^2 = PC.PD = 9 \times (9+7) = 9 \times 16 \Rightarrow PM = 3 \times 4 = 12$

۷۳ ۱ ۲ ۳ ۴

دو زاویهٔ $\hat{B}_1$ و $\hat{B}_2$ در دایره محاطی هستند و چون BD نیمساز است داریم:



$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{DE}}{2}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE}$

$\Rightarrow CD = DE$

با فرض $CD = x$ داریم $DE = x$ و $AD = AC - CD = 6 - x$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADE بنابه قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$DE^2 = AD^2 + AE^2 \Rightarrow x^2 = (6-x)^2 + 1^2$

$\Rightarrow x^2 = 36 - 12x + x^2 + 1 \Rightarrow 12x = 37 \Rightarrow x = \frac{37}{12}$

و نهایتاً بنابه رابطهٔ طولی امتداد وترهای متقاطع در دایره داریم:

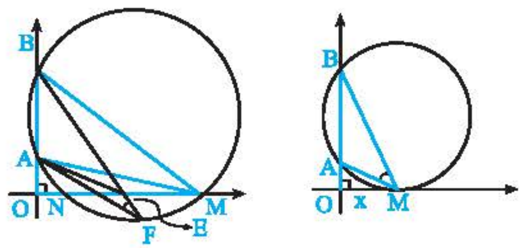
$AD \times AC = AE \times AB \Rightarrow (6-x) \times 6 = 1 \times AB$

$\Rightarrow AB = 36 - 6x \Rightarrow AB = 36 - 6 \times \frac{37}{12} = 36 - \frac{37}{2}$

$= \frac{72 - 37}{2} = \frac{35}{2} = 17.5$

۷۴ ۱ ۲ ۳ ۴

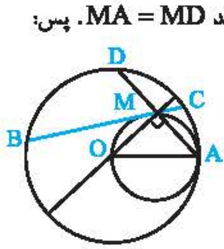
نقطهٔ دلخواه M را روی محور افقی در نظر می‌گیریم. دایرهٔ گذرنده از نقاط M، A و B را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی دیگر آن با محور افقی را N می‌نامیم. هر نقطه مانند E روی پاره‌خط MN داخل دایره، رأس زاویه‌ای است که از زاویهٔ AMB بزرگ‌تر است. زیرا دو زاویهٔ محاطی M و F برابرند و بنابه زاویهٔ خارجی، زاویهٔ AEB بزرگ‌تر از زاویهٔ F است. بنابراین زاویهٔ AMB وقتی ماکزیمم است که دایرهٔ گذرنده از نقاط A و B بر محور افقی مماس باشد و بنابه رابطهٔ طولی مماس و قطعات قاطع داریم:



$OM^2 = OA \times OB \Rightarrow x^2 = 5 \times 8 = 4 \times 10 \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$

۷۵ ۱ ۲ ۳ ۴

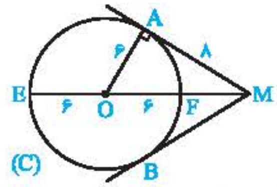
$O\hat{M}A$ روبه‌رو به قطر است، پس قائمه است ($O\hat{M}A = 90°$). بنابه رابطهٔ طولی وترهای متقاطع در دایرهٔ بزرگ داریم $MB \times MC = MA \times MD$ از طرفی قطر شامل OM عمود بر وتر AD در دایرهٔ بزرگ، وتر AD را نصف می‌کند $MA = MD$. پس:



$MB \times MC = MA \times MA = MA^2$

۷۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

جهت یافتن دورترین نقاط دایره از نقطهٔ M، نقطهٔ M را به O مرکز دایره وصل می‌کنیم و نقاط تقاطع خط OM با دایره را پیدا می‌کنیم. مطابق شکل، ME جواب است. برای یافتن طول آن، طول OM را به کمک قضیهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم:



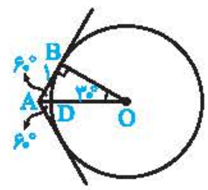
$$OM^۲=OA^۲+MA^۲=۶^۲+۸^۲=۱۰۰$$

$$\Rightarrow OM=۱۰$$

$$ME=OM+OE=۱۰+۶=۱۶$$

۷۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

می‌خواهیم طول پاره‌خط AD را به‌دست آوریم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABO اندازهٔ زوایای حاده ۳۰° و ۶۰° است. پس داریم:



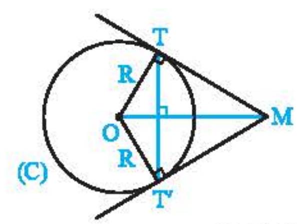
$$AB=\frac{OA}{۲}\Rightarrow OA=۲AB=۲\times۱=۲$$

$$OB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OA=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۲=\sqrt{۳}\Rightarrow OD=OB=\sqrt{۳}$$

$$AD=OA-OD=۲-\sqrt{۳}$$

۷۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

مطابق شکل از نقطهٔ M دو مماس MT و MT′ بر دایرهٔ C(O،R) رسم شده‌اند. می‌دانیم OM عمودمنصف TT′ است. با فرض $OM=۶$ و $R=۲\sqrt{۳}$ می‌خواهیم طول پاره‌خط TT′ را به‌دست آوریم. چون قطرهای چهارضلعی MTOT′ بر هم عمودند، پس مساحت آن برابر $\frac{OM\times TT'}{۲}$ است. از طرفی مساحت همین چهارضلعی برابر $۲S(OTM)=OT\times MT$ است، پس می‌توان نوشت:



$$\frac{OM\times TT'}{۲}=OT\times MT\Rightarrow TT'=\frac{۲OT\times MT}{OM}$$

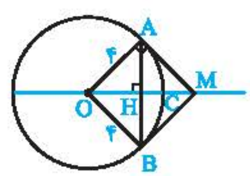
$$=\frac{۲\times۲\sqrt{۳}\times\sqrt{OM^۲-OT^۲}}{۶}=\frac{۲\sqrt{۳}\times\sqrt{۶^۲-(۲\sqrt{۳})^۲}}{۳}$$

$$\Rightarrow TT'=\frac{۲\sqrt{۳}\times\sqrt{۳۶-۱۲}}{۳}=\frac{۲\sqrt{۳}\times\sqrt{۲۴}}{۳}$$

$$=\frac{۲\sqrt{۳}\times۲\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}}{۳}=۴\sqrt{۲}$$

۷۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

روش اول: فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقاط دایره تا نقطهٔ M برابر MC است. بنابه فرض $MC=۴(\sqrt{۲}-۱)$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAM داریم:



$$OA^۲=OH.OM\Rightarrow ۴^۲=OH(OC+MC)$$

$$\Rightarrow ۱۶=OH(۴+۴\sqrt{۲}-۴)\Rightarrow OH=\frac{۱۶}{۴\sqrt{۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

روش دوم: در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AMO و BMO بنابه قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$MA^۲=MB^۲=OM^۲-OA^۲=(۴+۴\sqrt{۲}-۴)^۲-۴^۲$$

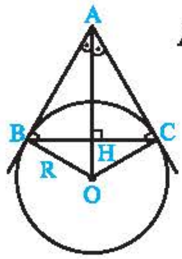
$$=۳۲-۱۶=۱۶\Rightarrow MA=MB=۴$$

بنابراین چهارضلعی AMBO مربع است، در نتیجه:

$$OH=\frac{OM}{۲}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}$$

۸۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنابه فرض، دایره به مرکز O و شعاع R در نقاط B و C بر ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین ABC مماس است. پس OA عمودمنصف BC می‌باشد. بنابه فرض $AH=۴$ و $BC=۶$، در نتیجه $BH=CH=۳$ و



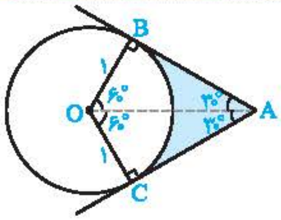
$$AB=AC=\sqrt{AH^۲+CH^۲}=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=۵$$

$$\overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{AOB}\Rightarrow\frac{AH}{AB}=\frac{BH}{OB}$$

$$\Rightarrow\frac{۴}{۵}=\frac{۳}{R}\Rightarrow R=\frac{۱۵}{۴}=۳/۷۵$$

۸۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

در چهارضلعی ABOC جمع زوایا ۳۶۰° است. پس با فرض $\widehat{A}=۶۰^\circ$ داریم $B\widehat{O}C=۱۲۰^\circ$ و OA نیمساز این دو زاویه است. داریم:



$$OB=\frac{OA}{۲}\Rightarrow ۱=\frac{OA}{۲}\Rightarrow OA=۲$$

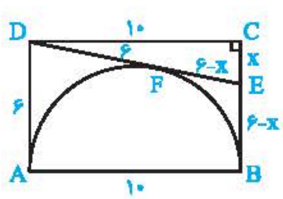
$$AB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OA=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۲=\sqrt{۳}$$

$$S(ABOC)=۲S(ABO)=۲\times\frac{۱}{۲}OB\times AB=۱\times\sqrt{۳}=\sqrt{۳}$$

مساحت قطاع BOC برابر است با $\frac{\pi\times۱^۲\times۱۲۰}{۳۶۰}=\frac{\pi}{۳}$، در نتیجه مساحت ناحیهٔ رنگی برابر $\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۳}$ می‌باشد.

۸۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

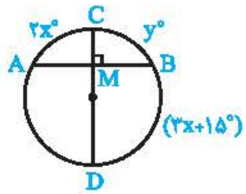
فرض کنیم CE=x، در این صورت BE=BC−x=۶−x و با توجه به خاصیت مماس‌های مرسوم بر دایره نتیجه می‌شود EF=BE=۶−x و DF=AD=۶. حال قضیهٔ فیثاغورس را در مثلث قائم‌الزاویهٔ DEC می‌نویسیم:



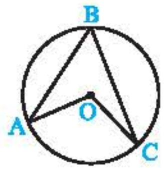
$$DE^۲=CD^۲+CE^۲\Rightarrow(۶+۶-x)^۲=۱۰^۲+x^۲$$

$$\Rightarrow ۱۴۴+x^۲-۲۴x=۱۰۰+x^۲\Rightarrow x=\frac{۴۴}{۲۴}=\frac{۱۱}{۶}$$

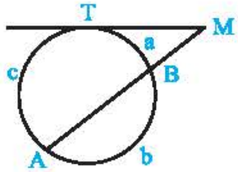
۲۶. در شکل مقابل، قطر CD در نقطهٔ M بر وتر AB عمود است. اگر $\widehat{AC}=2x^\circ$ و $\widehat{BC}=y^\circ$ و $\widehat{BD}=(3x+15)^\circ$ آن‌گاه x و y را محاسبه کنید. (نهایی- شهریور ۹۵)



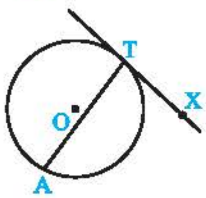
۲۷. در دایرهٔ به مرکز O، اگر $A\hat{O}C=(3\alpha+12)^\circ$ و $A\hat{B}C=(\alpha+16)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOC و زاویهٔ محاطی ABC را محاسبه کنید. (نهایی- خرداد ۹۵)



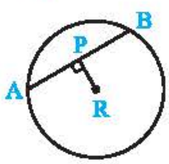
۲۸. خط مماس بر دایره در نقطهٔ T و امتداد وتر AB، در نقطهٔ M متقاطع‌اند. با فرض $\widehat{TB}=a$، $\widehat{BA}=b$، $\widehat{AT}=c$ و $\frac{a}{1}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$ اندازهٔ زاویهٔ M را تعیین کنید. (نهایی- خرداد ۹۴)



۲۹. اگر اندازهٔ زاویهٔ ظلی ATX مساوی $(2\alpha-6)^\circ$ و اندازهٔ کمان $\widehat{AT}$ برابر $(3\alpha+33)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازهٔ زاویهٔ ATX را بیابید. (نهایی- شهریور ۹۴)



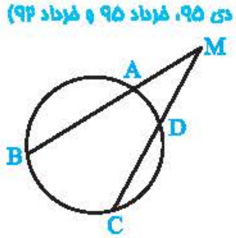
۳۰. با توجه به شکل روبه‌رو، اگر طول شعاع ۱۰ و $PR=6$، آن‌گاه طول AP و AB را به‌دست آورید. (R مرکز دایره است.) (نهایی- دی ۹۳)



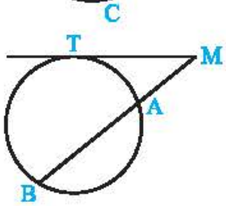
قسمت دوم: رابطه‌های طولی در دایره

۳۱. ثابت کنید هرگاه وترهای AB و CD در نقطهٔ M متقاطع باشند، آن‌گاه $MA.MB=MD.MC$ (نهایی- دی ۹۵، خرداد ۹۵ و خرداد ۹۲)

۳۲. ثابت کنید اگر امتداد دو وتر AB و CD مطابق شکل در نقطهٔ M متقاطع باشند، آن‌گاه $MA.MB=MD.MC$ (نهایی- خرداد ۹۴)



۳۳. ثابت کنید اگر مطابق شکل از نقطهٔ M یک خط مماس و یک قاطع بر دایرهٔ مفروض رسم کنیم، آن‌گاه $MT^2=MA\times MB$ (نهایی- دی ۹۱ و خرداد ۹۳)

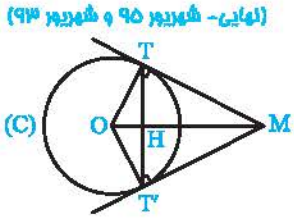


۳۴. ثابت کنید اندازهٔ دو مماسی که از یک نقطه خارج دایره بر آن رسم می‌شود، با هم برابر است. (نهایی- شهریور ۹۵ و شهریور ۹۳)

۳۵. در شکل مقابل از نقطهٔ M دو مماس MT و MT′ بر دایرهٔ C(O،R) رسم شده است.

آ) ثابت کنید OM نیمساز زوایای TMT′ و TOT′ است.

ب) ثابت کنید OM عمودمنصف TT′ است.



۳۶. ثابت کنید طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس خارج، دو برابر واسطهٔ هندسی شعاع‌های دو دایره است.

۳۷. ثابت کنید خط‌المرکزین دو دایرهٔ متقاطع، عمودمنصف وتر مشترک آن‌هاست.

۳۸. دایرهٔ C(O،R) و نقطهٔ M در خارج این دایره داده شده‌اند. از نقطهٔ M بر این دایره دو مماس رسم کنید (مراحل رسم را توضیح دهید). (نهایی- خرداد ۹۴)