

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com

+



مدابوک



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



## فهرست

تعداد تست

شماره صفحه

پایه دهم

۸۱.....	۸.....	فصل ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال
۱۴۳.....	۳۶.....	فصل ۲: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن
۱۰۹.....	۸۴.....	فصل ۳: چندضلعی‌ها
۱۰۹.....	۱۲۱.....	فصل ۴: تجسم فضایی

تعداد تست

شماره صفحه

پایه یازدهم

۲۵۳.....	۱۶۷.....	فصل ۱: دایره
۷۰.....	۲۵۴.....	فصل ۲: تبدیل‌های هندسی و کاربردها
۱۱۶.....	۲۸۸.....	فصل ۳: روابط طولی در مثلث

تعداد تست

شماره صفحه

پایه دوازدهم

۱۷۶.....	۳۲۶.....	فصل ۱: ماتریس و کاربردها
۱۸۲.....	۳۷۸.....	فصل ۲: آشنایی با مقاطع مخروطی
۱۷۷.....	۴۴۲.....	فصل ۳: بردارها
۳۸.....	۴۹۵.....	کنکورهای سراسری ۹۹



# پایه دهم





فصل ۲: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

نسبت و تناسب

**نسبت دو عدد:** دو عدد حقیقی  $a$  و  $b$  مفروض اند ( $b \neq 0$ )، عبارت  $\frac{a}{b}$  را نسبت این دو عدد گوییم.

**تناسب:** اگر دو نسبت، با هم برابر باشند، یک تناسب تشکیل می‌دهند، مانند  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ .

**خواص تناسب:** اعداد حقیقی  $a, b, c$  و  $d$  مفروض‌اند. در این صورت:

- ۱]  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$
- ۲]  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
- ۳]  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
- ۴]  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$  (ترکیب در صورت)
- ۵]  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$  (ترکیب در مخرج)
- ۶]  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$  (تفضیل در صورت)
- ۷]  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$  (تفضیل در مخرج)
- ۸]  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$
- ۹]  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \Rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f} = k$

(در عبارت‌های بالا، همه کسرها با معنا فرض شده‌اند.)

**تعریف:** دو عدد  $a$  و  $b$  مفروض‌اند. در این صورت:

الف) میانگین حسابی (واسطه حسابی)  $a$  و  $b$ ، عدد  $\frac{a+b}{2}$  است.

ب) میانگین هندسی (واسطه هندسی)  $a$  و  $b$  عددی مانند  $c$  است به طوری که  $\frac{c}{a} = \frac{b}{c}$  یا به عبارت دیگر،  $c^2 = ab$ .

**نتیجه:** اگر میانگین هندسی  $a$  و  $b$  باشد، آن‌گاه  $a, c$  و  $b$ ، سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی‌اند.

به عنوان مثال، میانگین حسابی دو عدد ۴ و ۱۶، برابر ۱۰ و میانگین هندسی آن‌ها، برابر  $\pm 8$  می‌باشد.

۱- اگر  $\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ ، حاصل  $\frac{a+b}{b-a}$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{5}{4}$
- ۲)  $\frac{3}{4}$
- ۳)  $\frac{7}{4}$
- ۴)  $\frac{11}{4}$

۲- اگر  $\frac{3a-b}{2a+b} = \frac{9}{11}$ ، حاصل  $\frac{a+2b}{3b-a}$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{5}{3}$
- ۲) ۲
- ۳)  $\frac{1}{3}$
- ۴) ۳

۳- اگر  $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ ، حاصل  $\frac{b}{3a-b+2c}$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{4}{13}$
- ۲)  $\frac{1}{7}$
- ۳)  $\frac{2}{9}$
- ۴)  $\frac{3}{11}$

۴- اگر  $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$ ، حاصل  $\frac{2a-b+3c}{3a+2b-c}$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{16}{7}$
- ۲)  $\frac{13}{8}$
- ۳)  $\frac{12}{5}$
- ۴)  $\frac{17}{3}$

۵- میانگین حسابی دو عدد  $a$  و  $b$  برابر ۱۵ و میانگین هندسی آن‌ها، برابر ۹ است. نسبت عدد بزرگ‌تر به کوچک‌تر، کدام است؟

- ۱) ۹
- ۲) ۶
- ۳) ۳
- ۴) ۴

۶- در چهارضلعی محدب ABCD، رابطه  $\frac{\widehat{A}}{4} = \frac{\widehat{B}}{3} = \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{11}$  بین زاویه‌ها برقرار است. زاویه حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویه مجاور A و B، چند

(تهرنی ۹۶ فارغ)

درجه است؟

- ۱) ۵۰
- ۲) ۶۰
- ۳) ۷۰
- ۴) ۷۵

۷- در چهارضلعی محدب ABCD، رابطه  $\frac{\widehat{A}}{3} = \frac{\widehat{B}}{4} = \frac{\widehat{C}}{5} = \frac{5\widehat{D}}{12}$  بین زاویه‌ها برقرار است. زاویه حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویه متقابل A و C، چند

(تهرنی ۹۶ داخل)

درجه است؟

- ۱) ۲۰
- ۲) ۲۵
- ۳) ۳۰
- ۴) ۳۵





$$A = \pi r^2$$



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



$$c^2 = a^2 + b^2$$



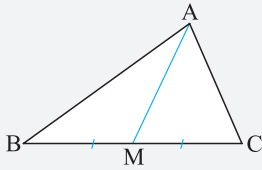
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



**نکاتی دربارهٔ مساحت مثلث**

۱- اگر قاعده و ارتفاع دو مثلث با هم برابر باشند، مساحت آن‌ها یکسان است.

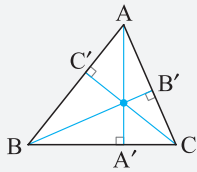
**نتیجه:** هر میانهٔ مثلث، آن را به دو مثلث هم‌ارز (هم‌مساحت) تقسیم می‌کند و برعکس.



$$M \text{ وسط } BC \text{ است} \Leftrightarrow S_{\Delta AMB} = S_{\Delta AMC}$$

۲- در هر مثلث داریم:

الف) حاصل ضرب طول هر ضلع در ارتفاع وارد بر آن ضلع، مقداری ثابت است (دو برابر مساحت مثلث است).



$$ah_a = bh_b = ch_c = 2S_{\Delta ABC}$$

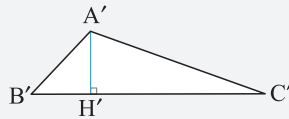
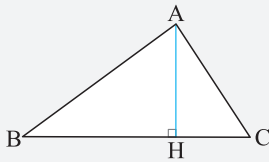
ب) نسبت هر دو ارتفاع، عکس نسبت اضلاع نظیر آن‌ها است.

$$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}, \frac{h_a}{h_c} = \frac{c}{a}, \frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b}$$

ج) ترتیب طول ارتفاع‌ها، عکس ترتیب طول اضلاع نظیر آن‌ها است.

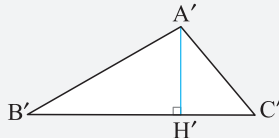
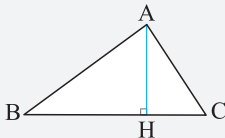
$$a \geq b \geq c \Leftrightarrow h_a \leq h_b \leq h_c$$

۳- اگر قاعده‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت ارتفاع‌های وارد بر آن قاعده‌ها.



$$BC = B'C' \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{AH}{A'H'}$$

۴- اگر ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع‌ها.

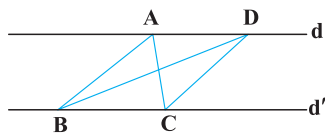


$$AH = A'H' \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{BC}{B'C'}$$

۸- در مثلث ABC که  $AB = 5$  و  $AC = 3$ ، طول ارتفاع وارد بر AC، ۶ واحد است. طول ارتفاع وارد بر AB، کدام است؟

- (۱) ۳/۶ (۲) ۳/۵ (۳) ۳/۷ (۴) ۳/۸

(مشابه تمرین کتاب درسی)



۹- در شکل زیر، اگر  $d \parallel d'$ ،  $BD = 4$  و  $S_{\Delta ABC} = 11$ ، فاصلهٔ نقطهٔ C از BD کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۵/۵ (۳) ۴/۵ (۴) ۴

۱۰- در مثلث ABC داریم  $AB = AC = 17$  و  $BC = 16$ . دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲۵ واحد، خطی را که از رأس A موازی BC رسم می‌شود، در نقطهٔ D قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ C از خط BD، کدام است؟

(ریاضی ۹۸ فارغ و مشابه تمرین کتاب درسی)

- (۱) ۷/۲ (۲) ۸/۴ (۳) ۹/۶ (۴) ۱۰/۲

۱۱- در مثلث ABC به اضلاع  $a = 4$ ،  $b = 6$ ،  $c = 8$ ، حاصل  $\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_c}{h_b}$  کدام است؟

- (۱) ۹/۴ (۲) ۴/۹ (۳) ۲ (۴) ۲/۳

۱۲- در مثلث ABC که  $AB = 4$ ،  $BC = 3$ ،  $AC = 6$ ، طول ارتفاع AH برابر  $\frac{1}{k}$  است. مجموع طول دو ارتفاع دیگر مثلث، کدام است؟

- (۱) ۴/۵k (۲) ۵/k (۳) ۵/۴k (۴) ۴/k



پاسخنامه تشریحی

روش اول: طبق ویژگی‌های تناسب، داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{3}{7} &\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{a+b}{b} = \frac{3+7}{7} = \frac{10}{7} \\ \frac{a}{b} = \frac{3}{7} &\xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}} \frac{a}{b-a} = \frac{3}{7-3} = \frac{3}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{a+b}{b}\right)\left(\frac{a}{b-a}\right) = \left(\frac{10}{7}\right)\left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow \left(\frac{a+b}{b-a}\right)\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{15}{14}$$

$$\xrightarrow{\frac{a}{b} = \frac{3}{7}} \left(\frac{a+b}{b-a}\right)\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{15}{14} \Rightarrow \frac{a+b}{b-a} = \frac{15}{14} \times \frac{7}{3} = \frac{5}{2}$$

روش دوم: با توجه به فرض، داریم:

$$a = \frac{3}{7}b \Rightarrow \frac{a+b}{b-a} = \frac{\frac{3}{7}b+b}{b-\frac{3}{7}b} = \frac{\frac{10}{7}b}{\frac{4}{7}b} = \frac{5}{2}$$

روش سوم: چون  $\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ ، فرض می‌کنیم  $a = 3k$  و  $b = 7k$ . حال داریم:

روش چهارم: با فرض  $a = 3$  و  $b = 7$ ، داریم:

روش اول: ابتدا به کمک فرض سؤال، رابطه‌ای بین مقادیر  $a$  و  $b$  یافته و سپس حاصل عبارت مورد نظر را می‌یابیم:

$$\frac{3a-b}{2a+b} = \frac{9}{11} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 33a - 11b = 18a + 9b \Rightarrow 15a = 20b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = 4k, b = 3k$$

$$\Rightarrow \frac{a+2b}{3b-a} = \frac{4k+6k}{9k-4k} = \frac{10k}{5k} = 2$$

روش دوم: ابتدا با فرض  $3a - b = 9$  و  $2a + b = 11$  مقادیر  $a$  و  $b$  را یافته و سپس حاصل عبارت  $\frac{a+2b}{3b-a}$  را محاسبه می‌کنیم.

روش اول: با فرض  $\frac{a}{3} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k$ ، داریم:

روش دوم: با استفاده از ویژگی‌های تناسب، داریم:

روش سوم: سه عدد  $a = 2$ ،  $b = 3$  و  $c = 4$  در تناسب داده شده صدق می‌کنند و داریم:

فرض کنیم  $\frac{a}{3} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = k$ . در این صورت،  $a = 2k$ ،  $b = 3k$ ،  $c = 5k$  و داریم:

۱ ۵

یادآوری: اگر مجموع دو عدد، برابر  $S$  و حاصل ضرب آن‌ها برابر  $P$  باشد، آن دو عدد، ریشه‌های معادله  $x^2 - Sx + P = 0$  می‌باشند.

دو عدد را  $a$  و  $b$  فرض می‌کنیم. طبق معلومات سؤال، داریم:

پس  $a$  و  $b$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 30x + 81 = 0$  می‌باشند و داریم:

$$x^2 - 30x + 81 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-27) = 0 \Rightarrow a = 3, b = 27 \Rightarrow \frac{b}{a} = 9$$

۳ ۶

روش اول:

نکته: در هر چهارضلعی محدب، زاویه بین نیمسازهای داخلی دو زاویه مجاور، برابر است با نصف مجموع دو زاویه دیگر.

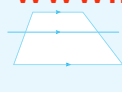
$$\hat{I}_1 = \frac{1}{2}(\hat{C} + \hat{D})$$



$$A = \pi r^2 h$$



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



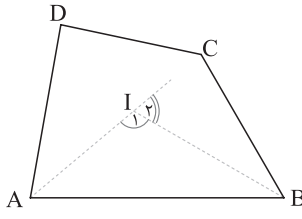
$$S = a^2 + b^2$$



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



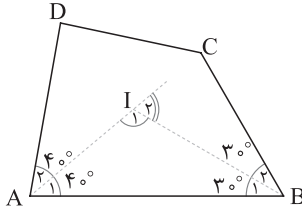
ابتدا اندازه زاویه‌های چهارضلعی را می‌یابیم:



$$\frac{\hat{A}}{4} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C} + \hat{D}}{11} = k \Rightarrow \hat{A} = 4k, \hat{B} = 3k, \hat{C} + \hat{D} = 11k \xrightarrow{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ} 18k = 360^\circ \Rightarrow k = 20^\circ (*)$$

حال فرض کنیم نقطه I، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های A و B است. طبق نکته فوق داریم:

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{2}(\hat{C} + \hat{D}) = \frac{1}{2}(11k) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2}(220^\circ) = 110^\circ \Rightarrow \hat{I}_2 = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$



**روش دوم:** ابتدا همانند روش اول، اندازه زاویه‌ها را می‌یابیم. در ادامه داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} = 4k = 80^\circ &\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 40^\circ \\ \hat{B} = 3k = 60^\circ &\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 30^\circ \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\hat{I}_2 = \hat{A}_1 + \hat{B}_1} \hat{I}_2 = 70^\circ$$

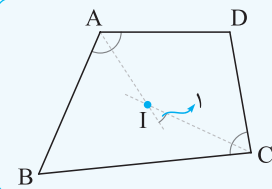
**تذکره:** با استفاده از ویژگی‌های تناسب هم می‌توانستیم اندازه زاویه‌های چهارضلعی را بیابیم:

$$\frac{\hat{A}}{4} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C} + \hat{D}}{11} = \frac{360^\circ}{4 + 3 + 11} = 20^\circ \Rightarrow \hat{A} = 80^\circ, \hat{B} = 60^\circ, \hat{C} + \hat{D} = 220^\circ$$

۱ ۷

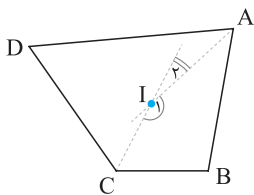
**روش اول:**

**نکته:** در هر چهارضلعی محدب، زاویه بین نیمسازهای داخلی دو زاویه مقابل، برابر است با نصف تفاضل دو زاویه دیگر.



$$\hat{I}_1 = \frac{1}{2} |\hat{D} - \hat{B}|$$

ابتدا به کمک ویژگی‌های تناسب، اندازه زاویه‌های چهارضلعی را می‌یابیم:

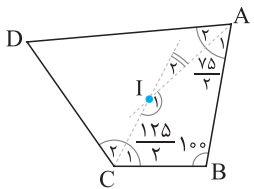


$$\frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{\hat{D}}{12} = \frac{360^\circ}{\frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}}{3 + 4 + 5 + 12}} = 25^\circ \Rightarrow \hat{A} = 75^\circ, \hat{B} = 100^\circ, \hat{C} = 125^\circ, \hat{D} = 60^\circ$$

حال فرض کنیم نیمسازهای زاویه‌های A و C در نقطه I متقاطع‌اند. طبق نکته فوق، داریم:

$$\hat{I}_2 = \frac{1}{2} |\hat{B} - \hat{D}| = \frac{1}{2} |100^\circ - 60^\circ| = 20^\circ$$

**روش دوم:** ابتدا همانند روش اول، اندازه زاویه‌های چهارضلعی را می‌یابیم. حال در چهارضلعی ABCI داریم:

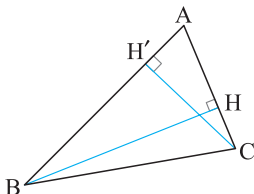


$$\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C}_1 + \hat{I}_1 = 360^\circ \Rightarrow \frac{75^\circ}{2} + 100^\circ + \frac{125^\circ}{2} + \hat{I}_1 = 360^\circ \Rightarrow \hat{I}_1 = 160^\circ \Rightarrow \hat{I}_2 = 180^\circ - \hat{I}_1 = 20^\circ$$

۱ ۸ می‌دانیم در هر مثلث، حاصل ضرب طول هر ضلع در ارتفاع وارد بر آن ضلع، مقداری ثابت است، بنابراین

داریم:

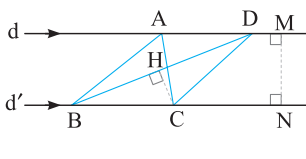
$$AB \times CH' = AC \times BH \xrightarrow{\text{فرض سؤال}} 5 \times CH' = 3 \times 6 \Rightarrow CH' = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$$



۲ ۹ اگر BC را قاعده مثلث‌های ABC و DBC فرض کنیم، طول ارتفاع وارد بر قاعده هر دو مثلث برابر با طول

MN است. پس مساحت دو مثلث، یکسان است و  $S_{\triangle DBC} = S_{\triangle ABC} = 11$ . حال اگر BD را قاعده مثلث DBC فرض

کنیم، داریم:



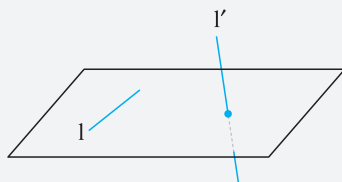
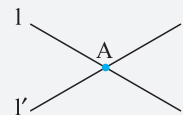
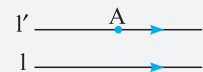
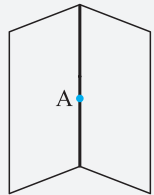
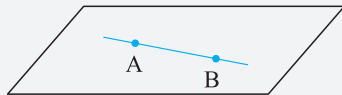
$$S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} BD \times CH \Rightarrow 11 = \frac{1}{2} (4) (CH) \Rightarrow 11 = 2CH \Rightarrow CH = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$$





هندسه در فضا

اصول هندسه فضایی



۱ از هر دو نقطه متمایز در فضا، یک و تنها یک خط می‌گذرد.

۲ از هر سه نقطه متمایز در فضا که بر یک خط قرار ندارند، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.

۳ در هر صفحه، حداقل سه نقطه وجود دارند که بر یک خط قرار ندارند.

۴ در فضا، حداقل چهار نقطه وجود دارند که در یک صفحه قرار ندارند.

۵ اگر دو نقطه متمایز از خطی در یک صفحه قرار داشته باشند، آن خط به تمامی در آن صفحه قرار می‌گیرد.

۶ اگر دو صفحه متمایز، یک نقطه مشترک داشته باشند، در یک خط مشترک اند.

۷ اصل توازی اقلیدس: از هر نقطه خارج یک خط در فضا، یک و تنها یک خط به موازات آن می‌گذرد.

وضعیت دو خط نسبت به هم در فضا

۱ متقاطع: دو خط که در یک و تنها یک نقطه، مشترک باشند را متقاطع گوییم.

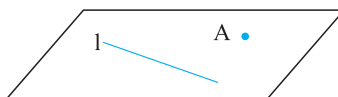
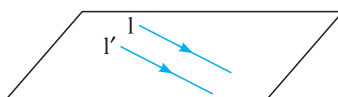
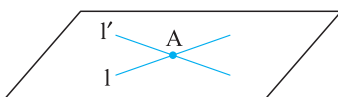
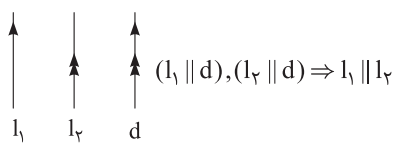
۲ موازی: دو خط که در یک صفحه بوده و یک دیگر را قطع نکنند، موازی گوییم.

۳ متناظر: دو خط که در یک صفحه قرار نمی‌گیرند را متناظر گوییم.

تذکر

دو خط که بر هم منطبق باشند را یک خط در نظر می‌گیریم.

نکات

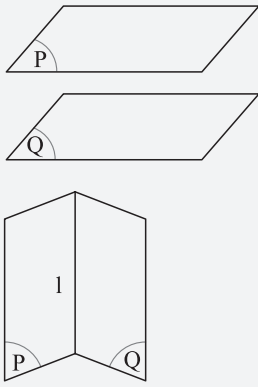


۱ دو خط موازی با یک خط، با هم موازی اند.

۲ از دو خط متقاطع در فضا، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.

۳ از دو خط موازی در فضا، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.

۴ از یک خط و یک نقطه خارج آن خط در فضا، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.

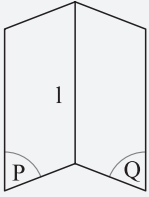


### وضعیت دو صفحه نسبت به هم در فضا

۱ موازی: دو صفحه که هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند را موازی گوییم.

۲ متقاطع: دو صفحه که فقط در یک خط مشترک باشند را متقاطع گوییم.

فصل مشترک دو صفحه متقاطع: خطی که اشتراک دو صفحه متقاطع است را فصل مشترک آن‌ها گوییم.



### تذکر

اگر دو صفحه بر هم منطبق باشند، آن‌ها را یک صفحه در نظر می‌گیریم.

### وضعیت خط و صفحه در فضا

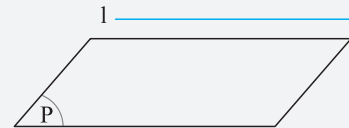
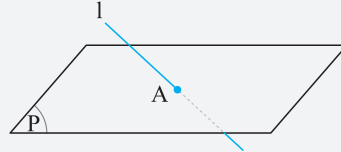
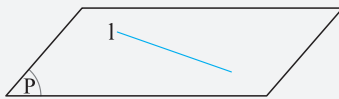
۱ موازی: اگر خط و صفحه، هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند، آن‌ها را موازی گوییم.

۲ متقاطع: اگر خط و صفحه، یک و تنها

۳ منطبق: اگر خط و صفحه، بیش از یک

نقطه مشترک داشته باشند، گوییم خط بر صفحه منطبق است.

یک نقطه مشترک داشته باشند، آن‌ها را متقاطع گوییم.



۱- از سه نقطه متمایز A، B و C در فضا، چند صفحه می‌گذرد؟

- (۱) یک یا دو (۲) یک یا بی‌شمار (۳) یک، دو یا بی‌شمار (۴) صفر، یک یا بی‌شمار

۲- از چهار نقطه متمایز A، B، C و D در فضا، چند صفحه می‌گذرد؟

- (۱) صفر یا بی‌شمار (۲) صفر، یک یا دو (۳) صفر، یک یا سه (۴) صفر، یک یا بی‌شمار

۳- در یک مکعب مستطیل، با امتداد دادن تمام یال‌ها، هر یال با چند یال دیگر متنافر است؟

(ریاضی ۹۶ فارغ)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴- در فضا، کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند.

(۲) اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند.

(۳) اگر دو صفحه در سه نقطه مشترک باشند، متقاطع یا منطبق اند.

(۴) دو خط متنافر I و I' در فضا مفروض‌اند. چند خط وجود دارد که با هر دو خط I و I' موازی باشد؟

- (۱) یک (۲) دو (۳) صفر (۴) بی‌شمار

۵- چند مورد از گزاره‌های زیر، درست است؟

الف) اگر دو صفحه در یک نقطه مشترک باشند، با هم متقاطع‌اند.

ب) اگر صفحه‌ای یکی از دو خط متنافر را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند.

ج) اگر خطی با صفحه‌ای متقاطع باشد، با خطوط آن صفحه، متقاطع یا متنافر است.

- (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) صفر

۶- کدام یک از گزینه‌های زیر، درست نیست؟

(۱) اگر دو صفحه با هم موازی باشند، هر خط از یکی از این صفحات، با صفحه دیگر موازی است.

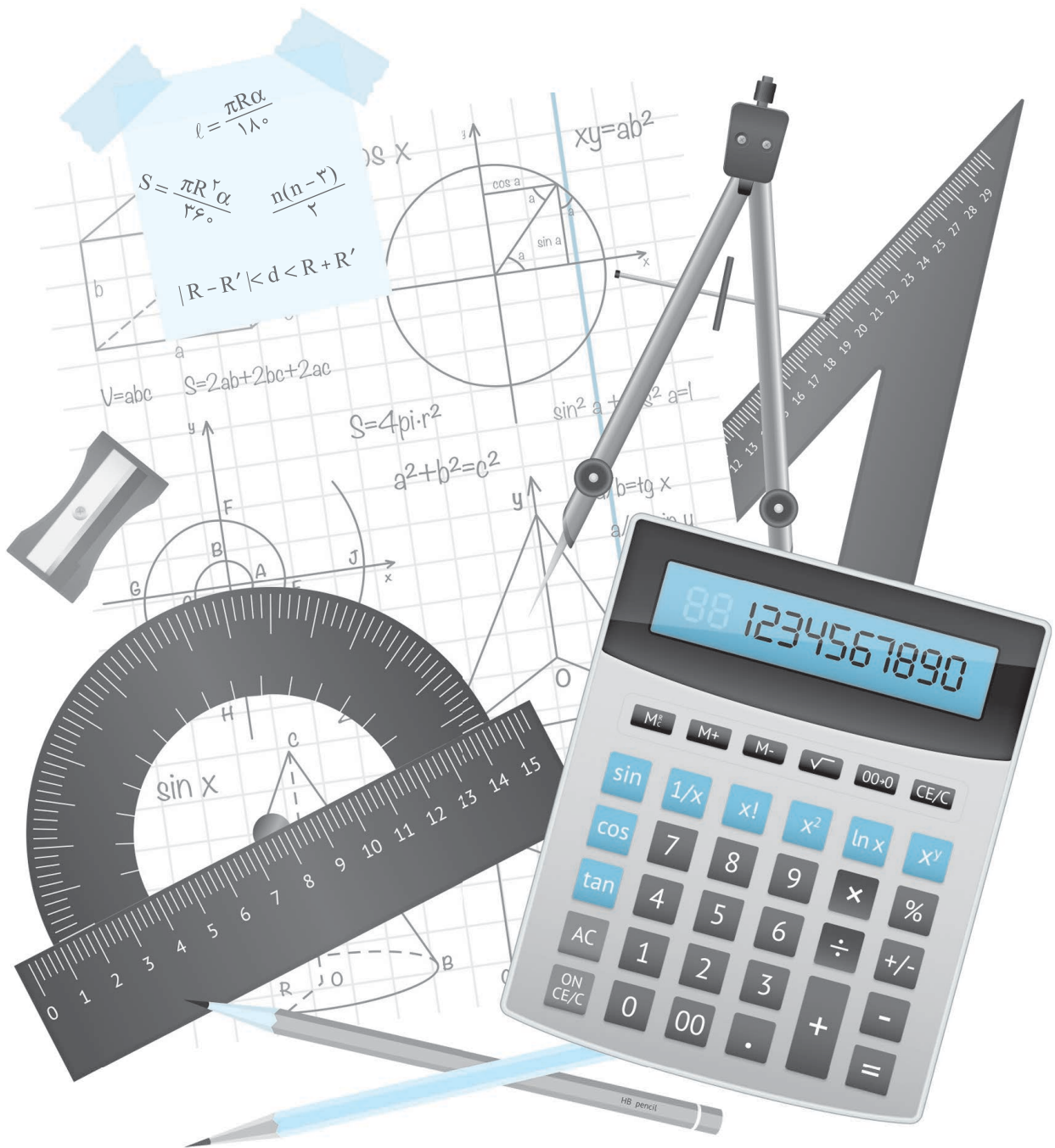
(۲) اگر هر خط از یک صفحه با صفحه دیگر موازی باشد، آن دو صفحه، موازی‌اند.

(۳) اگر دو خط در دو صفحه موازی قرار داشته باشند، موازی‌اند.

(۴) اگر صفحه‌ای دو صفحه موازی را قطع کند، فصل مشترک‌های صفحات، با هم موازی‌اند.



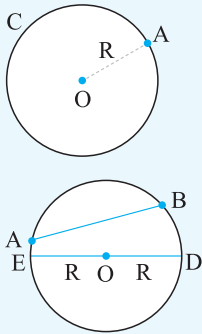
# پایه یازدهم







مشاهیم اولیه در دایره



**دایره:** مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت (مرکز)، به فاصله‌ای ثابت قرار دارند.

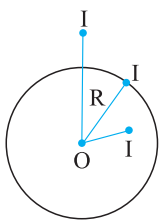
**شعاع دایره:** پاره خطی است که مرکز دایره را به یک نقطه از محیط آن وصل می‌کند.

**قرار داد:** دایره C به مرکز O و شعاع R را با نماد  $C(O, R)$  نشان می‌دهیم.

**وتر:** پاره خطی است که دو نقطه از محیط دایره را به هم وصل می‌کند.

**قطر:** وتری است که از مرکز دایره می‌گذرد.

نکات



هر دایره، صفحه را به سه بخش افراز می‌کند:

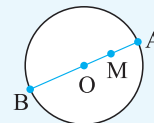
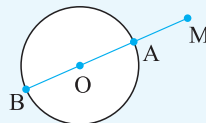
۱. درون دایره: مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آن‌ها تا مرکز دایره، کم‌تر از شعاع دایره است.

۲. روی دایره: مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آن‌ها تا مرکز دایره، برابر با شعاع دایره است.

۳. بیرون دایره: مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آن‌ها تا مرکز دایره، بیشتر از شعاع دایره است.

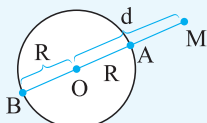
نزدیک‌ترین و دورترین نقاط یک دایره از یک نقطه

نقطه M و دایره  $C(O, R)$  مفروض اند. نقاط برخورد خط گذرنده از M و O با دایره، نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایره نسبت به نقطه M می‌باشند.



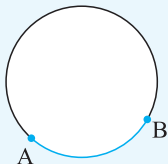
**نتیجه:** نقطه M به فاصله d از مرکز دایره  $C(O, R)$  مفروض است. اگر امتداد OM، دایره را در A و B قطع کند، طول پاره‌های MA و MB، کم‌ترین

و بیشترین فاصله نقطه M از دایره می‌باشند.



$$\text{کم‌ترین فاصله } M \text{ از دایره} = MA = |R - d|$$

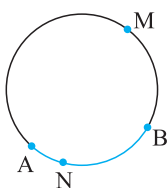
$$\text{بیشترین فاصله } M \text{ از دایره} = MB = R + d$$



**کمان:** اگر دو نقطه A و B روی یک دایره باشند، دایره را به دو بخش تقسیم می‌کنند. هر یک از این بخش‌ها را کمان

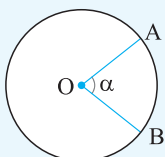
AB گوئیم و با نماد  $\widehat{AB}$  نشان می‌دهیم.

تذکر

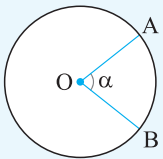


می‌توانیم برای جلوگیری از بروز خطا، کمان را با سه حرف نشان دهیم. به عنوان مثال در شکل مقابل، کمان‌های

$\widehat{AMB}$  و  $\widehat{ANB}$  توسط نقاط A و B ایجاد شده‌اند.



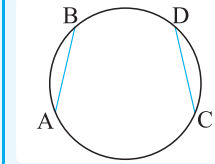
**زاویه مرکزی:** زاویه‌ای است که رأس آن، مرکز دایره باشد.



**اندازه کمان:** اندازه یک کمان را همان اندازه زاویه مرکزی روبه رو به آن کمان تعریف می کنیم.

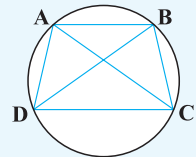
$$\widehat{O} = \alpha \Rightarrow \widehat{AB} = \alpha$$

**نکته**



در یک دایره، دو کمان با هم برابرند اگر و تنها اگر وترهای نظیر آن ها برابر باشند.

$$\widehat{AB} = \widehat{CD} \Leftrightarrow AB = CD$$

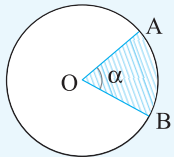


**؟** در شکل روبه رو، اگر  $AC = BD$ ، ثابت کنید  $AD = BC$ .

**☰** طبق نکته قبل، داریم:

$$AC = BD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{AB} + \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD} \Rightarrow BC = AD$$

**تمرین:** درستی عکس رابطه فوق را اثبات کنید.



**قطاع:** ناحیه ای از درون و روی دایره است که به شعاع آن، محدود است.

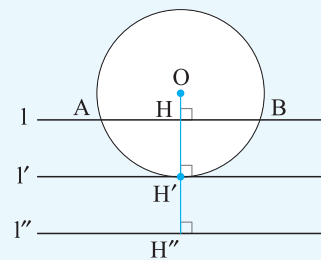
**قرارداد:** اگر زاویه مرکزی ایجاد شده توسط شعاع های یک قطاع،  $\alpha$  درجه باشد، آن قطاع را «قطاع  $\alpha$  درجه» گوئیم.

**وضعیت یک خط و یک دایره نسبت به هم**

**۱** خط و دایره، دو نقطه برخورد دارند (مقاطع اند) هرگاه فاصله مرکز دایره تا خط، کم تر از شعاع دایره باشد.

**۲** خط و دایره، فقط یک نقطه برخورد دارند (مماس اند) هرگاه فاصله مرکز دایره تا خط، برابر با شعاع دایره باشد.

**۳** خط و دایره، هیچ نقطه برخوردی ندارند هرگاه فاصله مرکز دایره تا خط، بیشتر از شعاع دایره باشد.



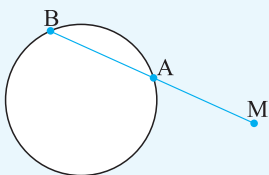
(خط ۱ با دایره متقاطع باشد.)  $(OH < R) \Leftrightarrow$

(خط ۱' بر دایره مماس باشد.)  $(OH' = R) \Leftrightarrow$

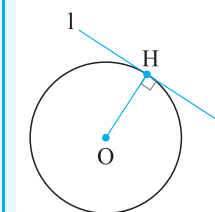
(خط ۱''، دایره را قطع نکند.)  $(OH'' > R) \Leftrightarrow$

**خط قاطع دایره:** خطی است که دایره را در دو نقطه قطع می کند.

**قرارداد:** اگر از نقطه M (غیر واقع بر دایره) قاطعی رسم کنیم تا دایره را در دو نقطه A و B قطع کند، پاره خط های MA و MB را دو قطعه قاطع گوئیم.



**نکته**



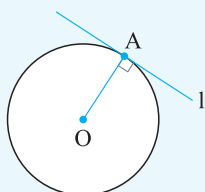
یک خط بر یک دایره مماس است اگر و تنها اگر در نقطه ای از دایره، بر شعاع گذرنده از آن نقطه، عمود باشد.

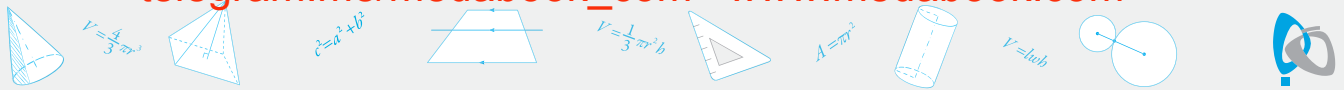
$$(l \perp OH) \Leftrightarrow (\text{خط } l \text{ بر دایره مماس است.})$$

**نتایج:** ۱ از هر نقطه واقع بر دایره، یک و فقط یک خط مماس بر دایره می گذرد.

**۲ روش رسم خطی مماس بر دایره از نقطه ای واقع بر دایره:** نقطه A روی دایره C(O, R) مفروض

است. شعاع OA را رسم کرده و از نقطه A خط l را بر OA عمود می کنیم. طبق نکته قبل، این خط بر دایره مماس است.

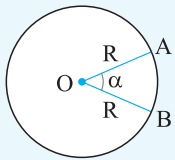




**طول کمان - مساحت قطاع و قطعۀ دایره**

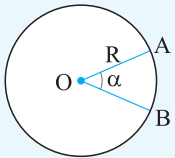
**طول کمان:** طول یک کمان برابر است با طول بخشی از محیط دایره که به دو سر آن کمان محدود است.

**نتایج:** ۱] در دایره  $C(O, R)$ ، اگر اندازه کمان  $AB$  برابر  $\alpha$  درجه و طول آن  $L$  واحد باشد، آن‌گاه:



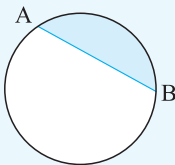
$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{L}{\text{محیط دایره}} \xrightarrow{\text{محیط دایره} = 2\pi R} L = \left(\frac{\alpha}{360^\circ}\right)(2\pi R) = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$$

۲] اگر  $AOB$  یک قطاع  $\alpha$  درجه از دایره  $C(O, R)$  باشد، آن‌گاه:



$$\frac{S_{\text{قطاع}}}{S_{\text{دایره}}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \xrightarrow{S_{\text{دایره}} = \pi R^2} S_{\text{قطاع}} = \left(\frac{\alpha}{360^\circ}\right)(\pi R^2) = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

**قطعۀ دایره:** ناحیه‌ای از درون و روی دایره است که به دایره و یک وتر از آن، محدود است.



۲۶- طول کمان  $60^\circ$  از دایره  $C(O, 12)$ ، کدام است؟

- ۱)  $12\pi$       ۲)  $6\pi$       ۳)  $4\pi$       ۴)  $8\pi$

۲۷- طول کمان  $45^\circ$  از دایره  $C(O, R)$  با طول کمان  $30^\circ$  از دایره  $C'(O', R')$  برابر است. مساحت دایره  $C$ ، چند برابر مساحت دایره  $C'$  است؟

- ۱)  $\frac{1}{4}$       ۲)  $\frac{5}{16}$       ۳)  $\frac{2}{3}$       ۴)  $\frac{4}{9}$

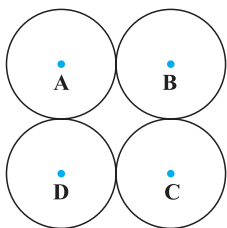
۲۸- در دایره  $C(O, 9)$ ، محیط و مساحت قطاع  $80^\circ$ ، به ترتیب، کدام است؟

- ۱)  $18\pi, 18 + 4\pi$       ۲)  $20\pi, 20 + 6\pi$   
 ۳)  $12\pi, 18 + 4\pi$       ۴)  $18\pi, 20 + 6\pi$

۲۹- اگر مساحت یک قطاع از دایره  $C(O, 10)$  برابر  $20\pi$  باشد، طول کمان این قطاع، کدام است؟

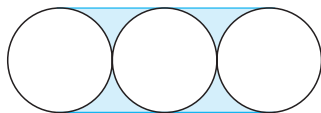
- ۱)  $\pi$       ۲)  $2\pi$       ۳)  $3\pi$       ۴)  $4\pi$

۳۰- در شکل زیر، شعاع هر یک از دایره‌ها ۵ واحد است و مرکزهای آن‌ها، یک مربع تشکیل می‌دهند. اگر  $\pi = 3$ ، مساحت ناحیه محدود بین دایره‌ها، کدام است؟



- ۱) ۲۰      ۲) ۲۵      ۳) ۲۸      ۴) ۳۲

۳۱- مطابق شکل، سه دایره به شعاع  $R$ ، بر هم مماس‌اند و مرکزهای آن‌ها، روی یک خط قرار دارند. مساحت ناحیه رنگی، چند برابر  $R^2$  است؟

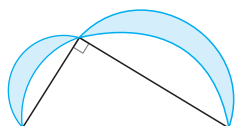


- ۱)  $8 - 2\pi$       ۲)  $4 - \pi$   
 ۳)  $2\pi - 6$       ۴)  $\pi - 3$

۳۲- سه دایره به شعاع  $R$ ، دوه‌دو مماس خارج‌اند. مساحت ناحیه محصور بین سه دایره، چند برابر  $R^2$  است؟

- ۱)  $\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}$       ۲)  $\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}$       ۳)  $\sqrt{5} - \frac{\pi}{3}$       ۴)  $\sqrt{6} + \frac{\pi}{3}$

۳۳- در مثلث قائم‌الزاویه روبه‌رو، طول اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. نیم‌دایره‌ها به قطر اضلاع رسم شده‌اند. مجموع



مساحت‌های دو ناحیه سایه‌زده، کدام است؟

- ۱)  $2\pi$       ۲) ۶      ۳) ۷      ۴)  $3\pi$





$$A = \pi r^2$$



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



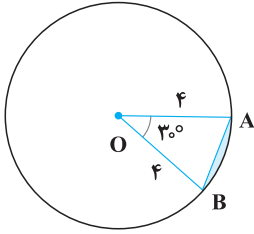
$$c^2 = a^2 + b^2$$



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



(مشابه تمرین کتاب درسی)



۳۴- در دایره روبرو، مساحت ناحیه رنگی، کدام است؟

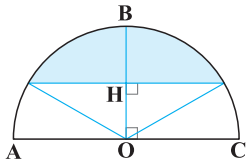
(۱)  $\frac{2\pi}{3} - 1$

(۲)  $\frac{4\pi}{3} - 2$

(۳)  $\frac{2\pi}{3} - 2$

(۴)  $\frac{4\pi}{3} - 4$

۳۵- در شکل مقابل، نقطه O مرکز نیم دایره به شعاع ۶ و نقطه H وسط OB است. مساحت ناحیه رنگی، کدام است؟



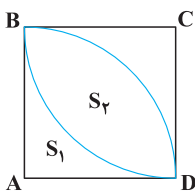
(۱)  $2(4\pi + \sqrt{3})$

(۲)  $3(3\pi + \sqrt{2})$

(۳)  $2(5\pi - \sqrt{2})$

(۴)  $3(4\pi - 3\sqrt{3})$

۳۶- در مربع مقابل، دو کمان به مرکزهای A و C و به شعاعی برابر با طول ضلع مربع، رسم شده‌اند. نسبت  $S_1$  به  $S_2$  کدام است؟



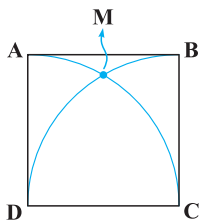
(۲)  $\frac{2\pi - 3}{3\pi + 1}$

(۴)  $\frac{3\pi - 5}{2\pi - 1}$

(۱)  $\frac{4 - \pi}{2\pi - 4}$

(۳)  $\frac{5 - \pi}{2\pi - 3}$

۳۷- در مربع مقابل، به مرکزهای C و D و شعاعی برابر با طول ضلع مربع، دو کمان زده‌ایم. اگر طول ضلع مربع ۱ واحد باشد، مساحت ناحیه MCD، کدام است؟



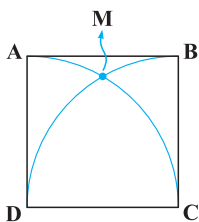
(۲)  $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$

(۴)  $\frac{3\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}$

(۱)  $\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{5}$

(۳)  $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

۳۸- در مربع مقابل، به مرکزهای C و D و شعاعی برابر با طول ضلع مربع، دو کمان زده‌ایم. اگر طول ضلع مربع ۱ واحد باشد و  $\pi = 3$ ، نسبت مساحت ناحیه MAB به ناحیه MAD، کدام است؟



(۲)  $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

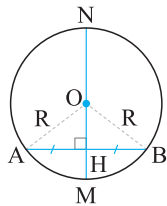
(۴)  $\frac{2\sqrt{3} - 1}{3}$

(۱)  $\frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$

(۳)  $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$

نکاتی درباره وترها و خطوط مماس بر دایره

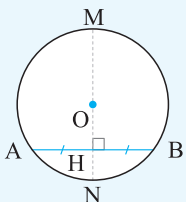
نکته



$$MN \perp AB \begin{cases} AH = HB \\ \widehat{AM} = \widehat{MB} \\ \widehat{AN} = \widehat{NB} \end{cases}$$

در دایره، قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند.

**نتیجه:** اگر AB وتر دلخواه از دایره (O, R) و نقاط H، M و N به ترتیب وسط AB و کمان‌های نظیرش باشند، چهار نقطه M، H، O و N روی یک خط قرار دارند، پس در هر دایره:



- ۱- خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره وصل کند، بر آن وتر عمود است.
- ۲- خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر وصل کند، بر آن وتر عمود است.
- ۳- خطی که وسط یک وتر را به وسط کمان نظیر آن وصل کند، از مرکز دایره می‌گذرد.
- ۴- عمود منصف هر وتر، از مرکز دایره می‌گذرد.



$$A = \pi r^2 h$$



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



$$c^2 = a^2 + b^2$$



$$V = \frac{1}{3} a^2 h$$



۲۷ ۴ طول کمان اول را 1 و طول کمان دوم را 1' می‌نامیم. طبق فرض، داریم:

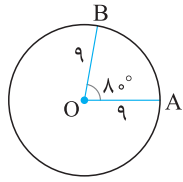
$$l = \left(\frac{45^\circ}{36^\circ}\right)(2\pi R) = \frac{\pi R}{2}$$

$$l' = \left(\frac{30^\circ}{36^\circ}\right)(2\pi R') = \frac{\pi R'}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} l=l' \Rightarrow \frac{\pi R}{2} &= \frac{\pi R'}{3} \Rightarrow 3R = 2R' \Rightarrow R = \frac{2}{3}R' \quad (*) \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\text{مساحت دایره } C}{\text{مساحت دایره } C'} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \frac{R^2}{R'^2} \stackrel{(*)}{=} \frac{\frac{4}{9}R'^2}{R'^2} = \frac{4}{9}$$

۲۸ ۱ طبق مطالب درسنامه، داریم:



$$\text{طول کمان } AB = \left(\frac{80^\circ}{36^\circ}\right)(\text{محیط دایره}) = \frac{2}{9}(18\pi) = 4\pi$$

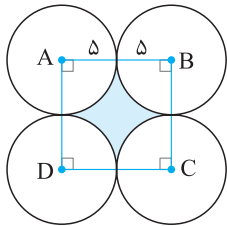
$$\text{OAB محیط قطاع} = OA + OB + (\text{طول کمان } AB) = 9 + 9 + 4\pi = 18 + 4\pi$$

$$\text{OAB مساحت قطاع} = \left(\frac{80^\circ}{36^\circ}\right)(\text{مساحت دایره}) = \frac{2}{9}(81\pi) = 18\pi$$

۲۹ ۴ زاویه قطاع را  $\alpha$  درجه فرض می‌کنیم. طبق مطالب درسنامه، داریم:

$$S_{\text{قطاع}} = \left(\frac{\alpha}{36^\circ}\right)(S_{\text{دایره}}) \Rightarrow 20\pi = \left(\frac{\alpha}{36^\circ}\right)(100\pi) \xrightarrow{\div 20\pi} 1 = \frac{5\alpha}{36^\circ} \Rightarrow 5\alpha = 36^\circ \Rightarrow \alpha = 7.2^\circ$$

$$\Rightarrow \text{طول کمان } 7.2^\circ = \left(\frac{7.2^\circ}{36^\circ}\right)(\text{محیط دایره}) = \left(\frac{1}{5}\right)(20\pi) = 4\pi$$

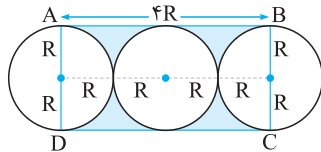


۳۰ ۲ مطابق شکل، چون هر دو دایره مجاور، مماس خارج‌اند، طول ضلع مربع، 10 واحد است و چهار ربع دایره به شعاع 5، درون مربع قرار دارند، بنابراین:

$$\text{مساحت ناحیه رنگی} = S_{ABCD} - (\text{مساحت چهار ربع دایره به شعاع 5})$$

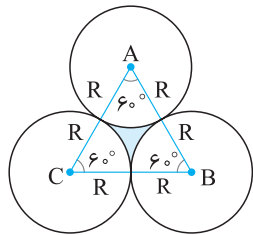
$$= S_{ABCD} - (\text{مساحت یک دایره به شعاع 5}) = 100 - 25\pi \stackrel{\pi=3}{=} 100 - 75 = 25$$

۳۱ ۱ مطابق شکل، داریم:



$$S_{\text{رنگی}} = S_{ABCD} - [(\text{مساحت یک دایره}) + 2(\text{مساحت نیم دایره})] = (4R)(2R) - (\pi R^2 + \pi R^2)$$

$$= 8R^2 - 2\pi R^2 = (8 - 2\pi)R^2$$



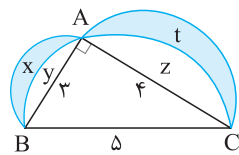
۳۲ ۲ چون دایره‌ها مماس خارج‌اند،  $AB = BC = CA = 2R$  و مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، بنابراین:

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\Delta ABC} - 3(\text{مساحت قطاع } 60^\circ \text{ به شعاع } R) = \frac{(2R)^2 \sqrt{3}}{4} - 3\left(\frac{1}{6}\pi R^2\right)$$

$$= R^2 \sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{2} = R^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

۳۳ ۲ روش اول: اولاً طبق قضیه فیثاغورس،  $BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ . ضمناً مساحت مثلث ABC برابر است با

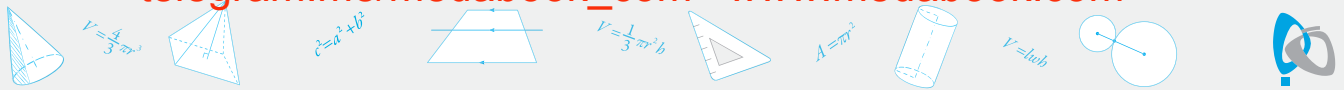
$$= \frac{1}{2}(3 \times 4) = 6$$



$$BC \text{ مساحت نیم دایره به قطر } BC = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow S_{\Delta ABC} + y + z = \frac{25\pi}{8} \Rightarrow y + z = \frac{25\pi}{8} - 6 \quad (*)$$

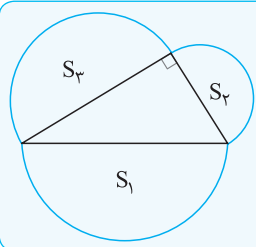
$$\left. \begin{aligned} AB \text{ مساحت نیم دایره به قطر } AB &= \frac{1}{2} \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow x + y = \frac{9\pi}{8} \\ AC \text{ مساحت نیم دایره به قطر } AC &= \frac{1}{2} \pi (2)^2 \Rightarrow z + t = 2\pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow x + y + z + t = \frac{9\pi}{8} + 2\pi$$

$$\Rightarrow (x + t) + (y + z) = \frac{25\pi}{8} \stackrel{(*)}{=} (x + t) + \left(\frac{25\pi}{8} - 6\right) = \frac{25\pi}{8} \Rightarrow x + t = 6$$



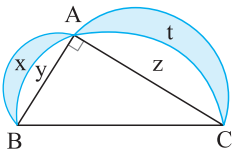
روش دوم:

**نکته:** اگر روی اضلاع یک مثلث قائم الزاویه، سه شکل متشابه بسازیم، مساحت شکل بزرگتر، برابر است با مجموع مساحت های دو شکل دیگر.



$$S_1 = S_2 + S_3$$

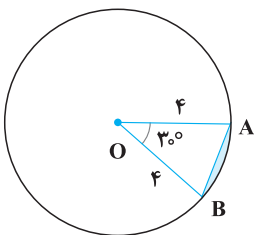
طبق نکته فوق، داریم:



مساحت نیم دایره به قطر BC = (مساحت نیم دایره به قطر AB) + (مساحت نیم دایره به قطر AC)

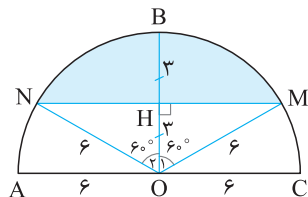
$$\Rightarrow y + S_{\Delta_{ABC}} + z = (x+y) + (z+t) \xrightarrow{S_{\Delta_{ABC}} = \epsilon} y + \epsilon + z = x + y + z + t \Rightarrow \epsilon = x + t$$

۳۴ | ۴ می دانیم مساحت هر مثلث، برابر است با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آن ها. حال داریم:



$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{قطاع OAB}} - S_{\Delta_{OAB}} = \left(\frac{30^\circ}{360^\circ}\right)(16\pi) - \frac{1}{2}(\epsilon)(\epsilon)(\sin 30^\circ) = \left(\frac{1}{12}\right)(16\pi) - \frac{1}{2}(\epsilon)(\epsilon)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \frac{\epsilon^2}{4}$$

۳۵ | ۴ طبق فرض سؤال،  $OH = HB = 3$  و  $OM = 6$ ، پس در مثلث قائم الزاویه OHM داریم:



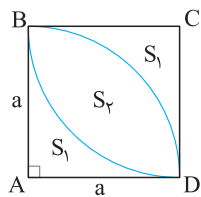
$$\cos \hat{O}_1 = \frac{OH}{OM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{O}_1 = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{O}_2 = 60^\circ \Rightarrow \text{به روش مشابه}$$

در نتیجه، باید مساحت قطعه دایره روبه رو به کمان  $12^\circ$  را بیابیم. حال داریم:

$$S_{\text{رنگی}} = (12^\circ \text{ قطاع}) - S_{\Delta_{OMN}} = \left(\frac{12}{360}\pi(6)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(\epsilon)(\epsilon)(\sin 12^\circ)\right) = 12\pi - 9\sqrt{3} = 3(4\pi - 3\sqrt{3})$$

۳۶ | ۱ طول ضلع مربع را  $a$  فرض می کنیم. با توجه به شکل، داریم:



$$\begin{cases} 2S_1 + S_2 = S_{ABCD} \\ S_1 + S_2 = S_{\text{ربع دایره}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2S_1 + S_2 = a^2 \\ S_1 + S_2 = \frac{\pi a^2}{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله دوم را از معادله اول کم می کنیم.}} S_1 = a^2 - \frac{\pi a^2}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله دوم}} a^2 - \frac{\pi a^2}{4} + S_2 = \frac{\pi a^2}{4} \Rightarrow S_2 = \frac{\pi a^2}{2} - a^2$$

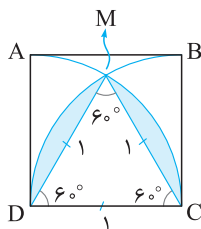
$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{a^2 - \frac{\pi a^2}{4}}{\frac{\pi a^2}{2} - a^2} = \frac{a^2(1 - \frac{\pi}{4})}{a^2(\frac{\pi}{2} - 1)} = \frac{4 - \pi}{\pi - 2} = \frac{4 - \pi}{2\pi - 4}$$

۳۷ | ۳ اولاً چون شعاع های دایره ها با طول ضلع مربع برابرند، مثلث MCD متساوی الاضلاع است و

$$S_{\Delta_{MCD}} = \frac{(1)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ حال داریم:}$$

$$S_{\text{رنگی}} = (مساحت قطاع 60^\circ) - S_{\Delta_{MCD}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\text{مساحت ناحیه MCD}} = S_{\Delta_{MCD}} + 2S_{\text{رنگی}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$



# پایه دوازدهم





فصل ۱: ماتریس و کاربردها

آشنایی با ماتریس

**ماتریس:** هر جدول مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون را ماتریس گوئیم. ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A, B, C و ... نام‌گذاری می‌کنیم، مانند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

**مرتبه ماتریس:** اگر ماتریسی، m سطر و n ستون داشته باشد، آن را از مرتبه n × m گوئیم. به عنوان مثال، در ماتریس‌های بالا، A ماتریسی ۲ × ۲، B ماتریسی ۱ × ۳ و C ماتریسی ۳ × ۱ است. (مرتبه ماتریس را کنار نام آن هم می‌نویسند: A<sub>۲×۲</sub>، B<sub>۱×۳</sub> و C<sub>۳×۱</sub>)

**درایه:** هر یک از اعداد داخل ماتریس را یک درایه آن ماتریس گوئیم.

**قرارداد:** اگر A ماتریسی m × n باشد، درایه واقع در سطر i ام و ستون j ام آن را با نماد a<sub>ij</sub> و ماتریس A را به صورت A = [a<sub>ij</sub>]<sub>m×n</sub> نشان می‌دهیم.

تذکر

۱) a<sub>ij</sub> را درایه عمومی ماتریس A گوئیم.

۲) اگر A = [a]<sub>۱×۱</sub>، آن‌گاه به طور خلاصه می‌نویسیم A = a. به عنوان مثال: A = [۷] = ۷.

ماتریس A = [2i - j]<sub>۲×۳</sub> را با درایه‌های مشخص کنید.

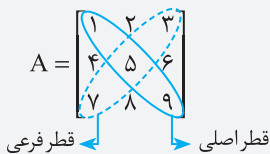
با توجه به فرض، ماتریس A دو سطر و سه ستون دارد، پس به فرم  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$  می‌باشد و چون  $a_{ij} = 2i - j$ ، داریم:

$$\left. \begin{matrix} a_{11} = 2(1) - 1 = 1, a_{12} = 2(1) - 2 = 0, a_{13} = 2(1) - 3 = -1 \\ a_{21} = 2(2) - 1 = 3, a_{22} = 2(2) - 2 = 2, a_{23} = 2(2) - 3 = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**ماتریس مربعی:** ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌های آن، یکسان باشد، مانند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}, B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

**قرارداد:** در ماتریس مربعی A = [a<sub>ij</sub>]<sub>n×n</sub>، درایه‌های a<sub>۱۱</sub>, a<sub>۲۲</sub>, ..., a<sub>nn</sub> را درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن گوئیم.



$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$$

**ماتریس سطری:** ماتریسی است که فقط یک سطر داشته باشد (از مرتبه ۱ × n باشد)، مانند:

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

**ماتریس ستونی:** ماتریسی است که فقط یک ستون داشته باشد (از مرتبه m × ۱ باشد)، مانند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

دقت کنید که درایه‌های واقع بر قطر اصلی ممکن است صفر باشند یا نباشند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**ماتریس اسکالر:** ماتریسی قطری است که درایه‌های قطر اصلی آن، با هم برابرند، مانند:

**ماتریس همانی (واحد):** ماتریسی اسکالر است که همه درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن، ۱ باشند.

**قرارداد:** ماتریس همانی n × n را با نماد I<sub>n</sub> نشان می‌دهیم، به عنوان مثال:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**ماتریس صفر:** ماتریسی است که همه درایه‌های آن، صفر باشند.

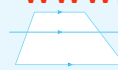




$$A = \pi r^2$$



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



$$c^2 = a^2 + b^2$$



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



**قرارداد:** ماتریس صفر از مرتبه  $m \times n$  را با نماد  $\bar{O}_{m \times n}$  نشان می‌دهیم، به عنوان مثال:

$$\bar{O}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{O}_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{O}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**ماتریس بالامثلثی:** ماتریسی مربعی است که همه درایه‌های زیر قطر اصلی آن، صفر باشند، مانند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(دقت کنید که درایه‌های بالای قطر اصلی و روی آن، ممکن است صفر باشند یا نباشند.)

**ماتریس پایین مثلثی:** ماتریسی مربعی است که همه درایه‌های بالای قطر اصلی آن، صفر باشند، مانند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(دقت کنید که درایه‌های زیر قطر اصلی و روی آن، ممکن است صفر باشند یا نباشند.)

**نتایج:** ۱) ماتریس همانی، هم بالامثلثی است و هم پایین مثلثی.

۲) ماتریس‌های صفر مربعی، هم بالامثلثی‌اند و هم پایین مثلثی.

۳) اگر ماتریسی، هم بالامثلثی و هم پایین مثلثی باشد، قطری است.

**دو ماتریس مساوی:** دو ماتریس را مساوی گوئیم هرگاه اولاً هم مرتبه باشند، ثانیاً درایه‌های آن‌ها، نظیریه نظیر با هم برابر باشند.

**جمع دو ماتریس:** اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  دو ماتریس هم مرتبه باشند، مجموع آن‌ها ماتریسی از همان مرتبه است که هر درایه آن، برابر است با مجموع درایه‌های نظیرش در  $A$  و  $B$ .

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n}, A + B = C \Rightarrow C = [c_{ij}]_{m \times n}, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} + \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 11 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

**ضرب عدد در ماتریس:** حاصل ضرب عدد حقیقی  $r$  در ماتریس  $A_{m \times n}$ ، ماتریسی هم مرتبه با  $A$  است که هر درایه آن،  $r$  برابر درایه نظیرش در ماتریس  $A$  است.

$$r \in \mathbb{R}, A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow rA = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$

**نتیجه:** هر ماتریس اسکالر، ضربی از ماتریس همانی هم مرتبه با آن است، به عنوان مثال:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \lambda I_3$$

**قرینه یک ماتریس:** به ازای هر ماتریس  $A$ ، ماتریس  $(-1)A$  را قرینه ماتریس  $A$  گوئیم و با نماد  $-A$  نشان می‌دهیم، به عنوان مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

**تفاضل دو ماتریس:** اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس هم مرتبه باشند،  $A - B$  را به صورت  $A + (-B)$  تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر، درایه‌های ماتریس  $A - B$  از تفریق درایه‌های نظیرشان در  $A$  و  $B$  به دست می‌آیند. به عنوان مثال:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

**ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها:** اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  سه ماتریس هم مرتبه باشند، آن‌گاه:

۳)  $A + B = B + A$  (خاصیت جابه‌جایی دارد)

۴)  $A + (B + C) = (A + B) + C$  (خاصیت شرکت‌پذیری دارد)

۵)  $A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$  (عضو خنثی دارد (ماتریس صفر))

۶)  $A + (-A) = (-A) + A = \bar{O}$  (عضو قرینه دارد ( $-A$ ))



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



$$V = \frac{1}{3} B h$$



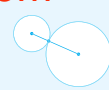
$$A = \frac{a+b}{2} h$$



$$A = \frac{1}{2} a b$$



$$V = \pi r^2 h$$



۳۵- اگر  $A - B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$  و  $AB + BA = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$ ، حاصل  $A^2 + B^2$ ، کدام است؟

(۱)  $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 13 \end{bmatrix}$

۳۶- اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & x \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & y \end{bmatrix}$  و  $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ ، حاصل  $xy$ ، کدام است؟

(۱)  $-15$  (۲)  $18$  (۳)  $-20$  (۴)  $16$

۳۷- اگر  $A$  ماتریسی مربعی باشد و  $A^2 + I = -A$ ، ماتریس  $A^{58}$  برابر با کدام ماتریس است؟

(۱)  $I$  (۲)  $A$  (۳)  $A^2$  (۴)  $O$

۳۸- اگر  $A$  یک ماتریس مربعی غیرهمانی باشد و  $A^3 + A = A^2 + I$ ، حاصل  $A^{102}$  کدام است؟

(۱)  $I$  (۲)  $A$  (۳)  $A^2$  (۴)  $A^3$

۳۹- اگر  $A$  ماتریسی مربعی باشد و  $2A^2 - I = A$ ، حاصل  $(A - 2I)^3$  کدام است؟

(۱)  $\frac{27}{5}A + \frac{31}{5}I$  (۲)  $\frac{39}{4}A - \frac{43}{4}I$  (۳)  $\frac{41}{3}A - \frac{31}{3}I$  (۴)  $\frac{37}{6}A + \frac{41}{6}I$

۴۰- اگر  $A$  ماتریسی مربعی،  $A^2 = O$  و  $n$  عددی طبیعی بزرگ‌تر از ۲ باشد، حاصل  $(A + I)^n$  کدام است؟

(۱)  $I$  (۲)  $A + I$  (۳)  $A + nI$  (۴)  $I + nA$

۴۱- اگر  $A$  ماتریسی مربعی،  $A^2 = A$  و  $n$  عددی طبیعی باشد، حاصل  $(A + I)^n$  کدام است؟

(۱)  $I$  (۲)  $A + I$  (۳)  $(2^n - 1)A$  (۴)  $(2^n - 1)A + I$

(مشابه ریاضی ۹۲ فارغ)

۴۲- اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس  $A^4$ ، کدام است؟

(۱)  $-1$  (۲)  $1$  (۳)  $-3$  (۴)  $3$

۴۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ، حاصل  $A^7 - A^4$ ، کدام است؟

(۱)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

۴۴- اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس  $A^8$ ، کدام است؟

(۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $-2$  (۴)  $-1$

۴۵- اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، حاصل  $A^{1399} - A^{1398}$ ، کدام است؟

(۱)  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

۴۶- اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس  $A^5$ ، کدام است؟

(۱)  $35$  (۲)  $-35$  (۳)  $36$  (۴)  $-36$

۴۷- اگر  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس  $A^{1398}$ ، کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $1$  (۳)  $3$  (۴)  $6$

۴۸- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس  $A^{25}$ ، کدام است؟

(۱)  $3^{23}$  (۲)  $3^{26}$  (۳)  $3^{24}$  (۴)  $3^{25}$





$$c^2 = a^2 + b^2$$



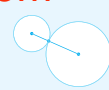
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



$$A = \pi r^2$$



$$V = \pi r^2 h$$



گزاره (ب): چون  $AB = -BA$ ، داریم:

$$AB^T = (AB)B = (-BA)B = -B(AB) = -B(-BA) = B(BA) = (BB)A = B^T A \Rightarrow \text{این گزاره، غلط است.}$$

گزاره (ج): چون  $AB = A$ ، داریم:

$$AB = A \Rightarrow (AB)B = AB \Rightarrow A(\underbrace{BB}_{B^T}) = \underbrace{AB}_A \Rightarrow AB^T = A \Rightarrow (AB^T)B = AB$$

$$\Rightarrow A(B^T B) = \underbrace{AB}_A \Rightarrow AB^T = A \xrightarrow{B^T = \bar{O}} A = \bar{O} \Rightarrow \text{این گزاره، درست است.}$$

**نتیجه:** فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی هم مرتبه اند، در این صورت:

۱. اگر  $AB = BA$ ، آن گاه به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $AB^n = B^n A$ .

۲. اگر  $AB = -BA$ ، آن گاه به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $AB^n = (-1)^n B^n A$ .

۳۳ ۲. ماتریس  $B$  را یک بار از سمت راست و بار دیگر، از سمت چپ در رابطه  $AB - BA = I$  ضرب می کنیم:

$$\begin{cases} (AB - BA)B = IB \\ B(AB - BA) = BI \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB^T - BAB = B \\ BAB - B^T A = B \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} AB^T - B^T A = 2B$$

۳۴ ۲. با توجه به فرض، داریم:  $A - B = C \Rightarrow (A - B)^T = C^T \Rightarrow (A - B)(A - B) = C^T \Rightarrow A^T + B^T - AB - BA = C^T$

۳۵ ۴. از مطالب درسنامه، می دانیم:  $(A - B)^T = (A - B)(A - B) = A^T - AB - BA + B^T \Rightarrow (A - B)^T = A^T - (AB + BA) + B^T$

حال با جای گذاری ماتریس های  $A - B$  و  $AB + BA$  در رابطه فوق، داریم:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = A^T - \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} + B^T \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = A^T - \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} + B^T \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} = A^T + B^T \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 13 \end{bmatrix} = A^T + B^T$$

۳۶ ۱. طبق فرض، داریم:

$$(A + B)(A - B) = A^T - B^T \Rightarrow A^T - AB + BA - B^T = A^T - B^T \Rightarrow AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & x \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & x \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6+x & 15+xy \\ 0 & -5+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2x+10 \\ 3-y & x+2y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6+x=1 \\ 3-y=0 \end{cases} \Rightarrow x=-5, y=3 \Rightarrow xy=-15$$

۳۷ ۲. با توجه به فرض، داریم:

$$A^T + A + I = \bar{O} \xrightarrow{\text{طرفین را در } (A-I) \text{ ضرب می کنیم}} (A-I)(A^T + A + I) = (A-I) \times \bar{O} \Rightarrow A^T - I = \bar{O} \Rightarrow A^T = I \quad (*)$$

$$A^{58} = (A^T)^{19} A = I^{19} A = IA = A$$

۳۸ ۳. با توجه به فرض، داریم:

$$A^T - A^T + A - I = \bar{O} \xrightarrow{\text{طرفین را در } (A+I) \text{ ضرب می کنیم}} (A+I)(A^T - A^T + A - I) = (A+I) \times \bar{O} \Rightarrow A^T - I = \bar{O} \Rightarrow A^T = I \quad (**)$$

$$A^{102} = (A^T)^{25} A^2 \xrightarrow{(**)} I^{25} A^2 = IA^2 = A^2$$

**تمرین:** اگر  $A^T - A + I = \bar{O}$ ، حاصل  $A^{58}$  را بیابید. (پاسخ:  $-A$ )

۳۹ ۲. **روش اول:** اولاً طبق اتحادهای ماتریسی، داریم:

$$(A - 2I)^T = A^T - 6A^T + 12A - 8I \quad (**)$$

حال به کمک فرض سؤال، ماتریس های  $A^T$  و  $A^2$  را بر حسب ماتریس  $A$  یافته و در رابطه (\*) جای گذاری می کنیم:

$$2A^T - I = A \Rightarrow 2A^T = A + I \Rightarrow A^T = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I \quad (***)$$

$$A^T = AA^T \xrightarrow{(***)} A\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I\right) = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A \xrightarrow{(***)} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I\right) + \frac{1}{2}A = \frac{3}{4}A + \frac{1}{4}I \quad (***)$$

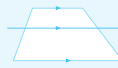
$$(**), (***), (***) \Rightarrow (A - 2I)^T = \left(\frac{3}{4}A + \frac{1}{4}I\right) - 6\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I\right) + 12A - 8I = \frac{3}{4}A + \frac{1}{4}I - 3A - 3I + 12A - 8I = \frac{39}{4}A - \frac{43}{4}I$$



$$A = \pi r^2 h$$



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



$$c^2 = a^2 + b^2$$



$$V = \frac{1}{3} A h$$



**روش دوم:** با توجه به فرض، داریم:

$$2A^2 - I = A \Rightarrow 2A^2 = A + I \Rightarrow A^2 = \frac{1}{2}(A + I) \quad (*)$$

$$(A - 2I)^2 = A^2 - 4A + 4I \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2}(A + I) - 4A + 4I = -\frac{7}{2}A + \frac{9}{2}I \quad (**)$$

$$(A - 2I)^3 = (A - 2I)^2(A - 2I) \stackrel{(**)}{=} (-\frac{7}{2}A + \frac{9}{2}I)(A - 2I) = -\frac{7}{2}A^2 + 7A + \frac{9}{2}A - 9I = -\frac{7}{2}A^2 + \frac{23}{2}A - 9I$$

$$\stackrel{(*)}{=} -\frac{7}{2}(\frac{1}{2}(A + I)) + \frac{23}{2}A - 9I = \frac{39}{4}A - \frac{43}{4}I$$

**تمرین:** اگر  $A^3 + A^2 + A + I = \bar{O}$ ، ماتریس  $A^{102}$  را بیابید. (پاسخ:  $A^2$ )

**روش اول:** ۴۰

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \dots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

**یادآوری:**

اولاً چون  $A^2 = \bar{O}$ ، به ازای هر عدد طبیعی  $n \geq 2$ ،  $A^n = \bar{O}$ . حال طبق یادآوری فوق، داریم:

$$(A + I)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-2}A^2 + \binom{n}{n-1}A + I = nA + I$$

**روش دوم:** اولاً چون  $A^2 = \bar{O}$ ، توان‌های بالاتر ماتریس  $A$  هم برابر ماتریس صفرند. حال به ازای  $n = 3$ ، داریم:

$$(A + I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I \stackrel{A^2 = \bar{O}}{=} 3A + I$$

پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) رد می‌شوند و گزینه (۴) صحیح است.

**روش اول:** ۴۱

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

**یادآوری:**

چون  $A^2 = A$ ، به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $A^n = A$  و در نتیجه:

$$(A + I)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1}A + I \stackrel{A^2 = A}{=} \binom{n}{0}A + \binom{n}{1}A + \dots + \binom{n}{n-1}A + I$$

$$= \left( \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} \right) A + I = (2^n - 1)A + I$$

$$(A + I)^2 = \underbrace{A}_{A} + 2A + I = 3A + I = (2^2 - 1)A + I$$

**روش دوم:** با فرض  $n = 2$ ، داریم:

پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) رد می‌شوند و گزینه (۴) صحیح است.

**۴۲**

**تذکر:** برای یافتن توان‌های بزرگ یک ماتریس، ابتدا توان‌های کوچک آن را یافته و سپس به کمک آن‌ها، توان‌های بزرگ ماتریس را محاسبه کرده یا حدس می‌زنیم.

ابتدا ماتریس  $A^2$  و سپس ماتریس  $A^4$  را می‌یابیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^4 = A^2 A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$  مجموع درایه‌های قطر اصلی = ۳

**۴۳** با توجه به فرض، داریم:

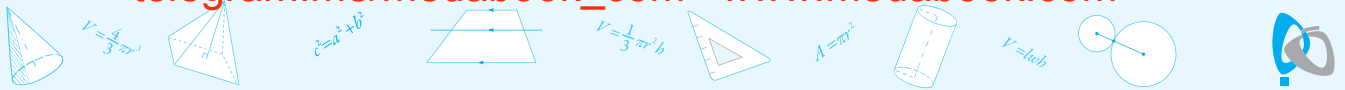
$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad (*)$$

$$\left. \begin{aligned} A^4 &= (A^2)^2 A \stackrel{(*)}{=} I^2 A = A \\ A^6 &= (A^2)^3 \stackrel{(*)}{=} I^3 = I \end{aligned} \right\} \Rightarrow A^4 - A^6 = A - I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

# کنکورهای سراسری ۹۹







سؤالات سراسری داخل ۹۹

۱- یک دوزنقه متساوی الساقین با قاعده‌هایی به اندازه ۹ و ۱۶ واحد، بر دایره‌ای محیط شده است. فاصله نزدیک‌ترین نقاط دایره، تا یک رأس قاعده کوچک دوزنقه، کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\sqrt{3}$  (۳) ۲ (۴)  $\frac{5}{3}$

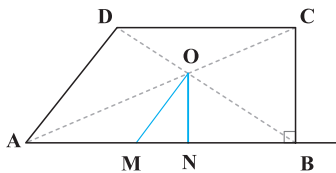
۲- پاره خط AB به اندازه ۸ واحد در صفحه مختصات، مفروض است. چهار دایره با مراکز A و B و شعاع‌های ۳ و ۷ واحد رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی دایره‌های کوچک با دایره‌های بزرگ، دقیقاً رأس‌های کدام چهارضلعی هستند؟

- (۱) لوزی (۲) متوازی‌الاضلاع (۳) مستطیل (۴) دوزنقه متساوی الساقین

۳- مطابق شکل زیر، از محل تلاقی قطرهای دوزنقه قائم‌الزاویه ABCD ( $\hat{B} = 90^\circ$ )، پاره‌های OM و ON به ترتیب موازی با AD و BC رسم شده‌اند.

نسبت  $\frac{AM}{BN}$ ، کدام است؟

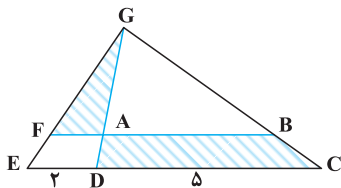
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) کوچک‌تر از ۱ (۴) بزرگ‌تر از ۱ و کوچک‌تر از ۲



۴- اندازه قاعده‌های دوزنقه‌ای ۵ و ۹ واحد است. پاره خطی موازی قاعده‌های دوزنقه چنان رسم می‌کنیم که دوزنقه را به دو قسمت با مساحت مساوی، تقسیم کند. اندازه پاره خط، کدام است؟

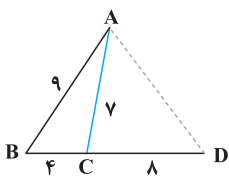
- (۱) ۷ (۲)  $\sqrt{53}$  (۳)  $4\sqrt{3}$  (۴)  $\sqrt{57}$

۵- در شکل زیر،  $DG = 3DA$  و اندازه پاره‌های DE و DC به ترتیب، ۲ و ۵ واحد است. مساحت مثلث AFG چند درصد مساحت دوزنقه ABCD است؟



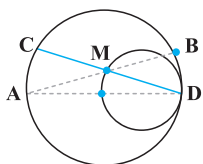
- (۱) ۴۰ (۲) ۳۶ (۳) ۳۲ (۴) ۲۴

۶- در شکل روبه‌رو، اندازه پاره خط AD، کدام است؟



- (۱) ۹ (۲)  $3\sqrt{10}$  (۳) ۱۰ (۴)  $6\sqrt{3}$

۷- در شکل زیر، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و اندازه کمان AC برابر  $\frac{4\pi}{3}$  است. حاصل  $MA \times MB$ ، کدام است؟



- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۸- چهار نقطه  $A(1, 10)$ ،  $B(9, -9)$ ،  $M(a, 4)$  و  $N(a, 0)$  را در صفحه مختصات، در نظر بگیرید. کمترین اندازه خط شکسته AMNB، کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۰ (۳) ۱۹ (۴) ۱۸

۹- حجم جسم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه ABC با ضلع‌های قائم AB و AC، به ترتیب با اندازه‌های ۵ و  $2\sqrt{6}$  واحد، حول خط گذرا از رأس C و موازی ضلع AB، کدام است؟

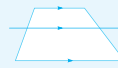
- (۱)  $60\pi$  (۲)  $70\pi$  (۳)  $75\pi$  (۴)  $80\pi$



$$A = \pi r^2 h$$



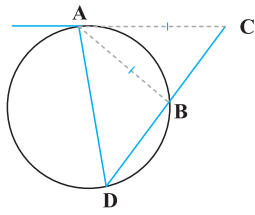
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



$$c^2 = a^2 + b^2$$

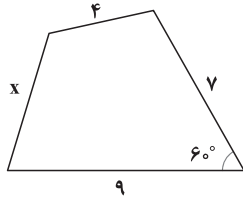


$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



۱۰- در شکل زیر، اندازه قطعه مماس AC، برابر وتر AB است. الزاماً کدام برابری درست است؟

- BC = BA (۱)
- BD = AC (۲)
- BC = BD (۳)
- DA = DC (۴)



۱۱- چهارضلعی زیر، قابل محاط در یک دایره است.  $(x+2)$  کدام است؟

- $\sqrt{51}$  (۱)
- $\sqrt{55}$  (۲)
- $\sqrt{57}$  (۳)
- $\sqrt{59}$  (۴)

۱۲- کوچکترین دایره گذرا بر دو نقطه  $A(2,5)$  و  $B(-4,1)$ ، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- ۳, -۲ (۴)
- ۲, -۱ (۳)
- ۰, -۳ (۲)
- ۱, -۳ (۱)

۱۳- از بین دایره‌های گذرا از نقطه  $A(1,-4)$  و مماس بر خط‌های  $4x+3y=0$  و محور yها، بزرگترین شعاع دایره، کدام است؟

- $\frac{22}{9}$  (۴)
- $\frac{7}{3}$  (۳)
- $\frac{17}{9}$  (۲)
- $\frac{5}{3}$  (۱)

۱۴- در یک بیضی به قطرهای ۸ و  $2\sqrt{7}$  واحد و کانون‌های F و F'، دایره‌ای به قطر F'F بیضی را در نقطه M، قطع می‌کند. فاصله نقطه M تا نزدیک‌ترین کانون، کدام است؟

- ۳ (۴)
- $4-\sqrt{2}$  (۳)
- $2/5$  (۲)
- $4-2\sqrt{2}$  (۱)

۱۵- اگر نقطه  $F(-2, 25)$  کانون سهمی  $y^2 + ay + bx + 1 = 0$  باشد، کوچکترین مقدار b، کدام است؟

- ۲ (۴)
- ۲ (۳)
- ۳ (۲)
- ۴ (۱)

۱۶- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس  $A^3$ ، کدام است؟

- $[30 \ 6 \ 64]$  (۱)
- $[30 \ 6 \ 78]$  (۲)
- $[24 \ 8 \ 86]$  (۳)
- $[30 \ 6 \ 86]$  (۴)

۱۷- از رابطه ماتریسی  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ ، ماتریس X، کدام است؟

- $\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$  (۱)
- $\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$  (۲)
- $\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$  (۳)
- $\begin{bmatrix} -9 & -7 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$  (۴)

۱۸- جواب‌های معادله  $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 3 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0$ ، کدام است؟

- ۱, -۴ (۱)
- ۱, ۴ (۲)
- ۱, ۵ (۳)
- ۲, ۵ (۴)

۱۹- اندازه اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای، به صورت  $x+1$ ,  $2x+1$ , و  $2x+3$  است. مساحت مثلث، کدام است؟

- ۶۰ (۱)
- ۵۶ (۲)
- ۴۵ (۳)
- ۳۹ (۴)