
خرید کتاب های کنکور
با تخفیف ویژه
و
ارسال رایگان
Medabook.com
مدابوک
یک جلسه تماس تلفنی رایگان
با مشاوران رتبه برتر
برای انتخاب بهترین منابع
دبیرستان و کنکور
۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰

بسم الله الرحمن الرحیم

GEOMETRY

10+11

Password ن وَ القَلَمِ وَمَا یَسطُرُون

www.gaj.ir

Other user

ENG

IR-MCI LTE 00:00 AM 100 %

Search

CONTENTS

IR-MCI LTE 00:01 AM 100 %

Tweet

Rene Descartes
@Rene 1596

من فکر می‌کنم، پس هستم

I think therefor I am.

درس اول : .... ترسیم‌های هندسی

درس دوم : .... استدلال

Translate Tweet

07:30 . 5/31/20

View Tweet activity

رنه دکارت ریاضیدان و فیلسوف فرانسوی پدر فلسفهٔ مدرن و هندسهٔ تحلیلی کسی که فلسفه را از خواب سنگین قرون وسطی بیدار کرد.

5,337 7,412 7,120,910,208

CHAPTER 1

Geometric Drawings

Add another Tweet

Rene Descartes

1596-1650

Geometric Drawings

CHAPTER 1

درس اول ترسیم‌های هندسی

مکان هندسی

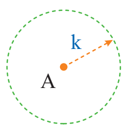
در این درس با انواع ترسیم‌های هندسی سروکار داریم و منظور از ترسیم‌های هندسی رسم سه دستهٔ مهم از اشکال هندسه است:

1. اشکالی مانند پاره‌خط، نیم‌خط و خط راست
2. اشکالی مانند دایره یا کمانی از یک دایره
3. اشکالی مانند مثلث، چهارضلعی و ... که با ترکیبی از دو ترسیم قبلی حاصل می‌شوند.

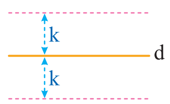
برای رسم این اشکال از دو وسیلهٔ مهم به نام خطکش و پرگار استفاده می‌شود که خطکش فقط برای ترسیم خط راست مورد استفاده قرار می‌گیرد [نه برای اندازه‌گیری] و پرگار وسیله‌ای است که با آن می‌توان دایره یا کمانی از دایره را رسم کرد و دهانهٔ آن به اندازهٔ دلخواه باز می‌شود.

بسیاری از اشکالی که رسم می‌کنیم مجموعهٔ نقاطی هستند که ویژگی مشترکی دارند، این مجموعهٔ نقاط را مکان هندسی می‌نامیم. [گاهی به آن، مکان نقطه نیز گفته می‌شود]. از طرفی مهم‌ترین اشکال هندسی نقطه، خط و صفحه هستند، بنابراین مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه و یک خط به فاصلهٔ ثابتی هستند، اهمیت ویژه‌ای دارد:

1. مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ k واحد از نقطهٔ A قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع k است.

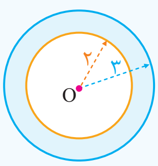


2. مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ k واحد از خط d قرار دارند، دو خط به موازات خط d و به فاصلهٔ k واحد از آن هستند.



Test همهٔ نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ ثابت O در این صفحه بیشتر از ۲ و کمتر از ۳ واحد است، تشکیل یک شکل هندسی می‌دهند. مساحت این شکل چقدر است؟

۱) ۵π ۲) ۹π ۳) ۴π ۴) ۷π



۱ نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از O بیشتر از ۲ واحد باشد، بیرون دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ واحد هستند، همچنین نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از O کمتر از ۳ واحد باشد، داخل دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ واحد قرار می‌گیرند. پس شکل هندسی مورد نظر ناحیهٔ بین دو دایره (قسمت رنگی) است و مساحت آن برابر است با:

مساحت ناحیهٔ رنگی = مساحت دایره بزرگ ـ مساحت دایره کوچک $=\pi(۳)^۲-\pi(۲)^۲=۹\pi-۴\pi=۵\pi$

۱. خط d در صفحه مفروض است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از خط d برابر ۳ واحد باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بیشمار

۲. سکه‌ای به شعاع ۲ را روی یک صفحهٔ مستطیلی به اضلاع ۶ و ۸ پرتاب می‌کنیم. در صورتی‌که مرکز سکه داخل مستطیل باشد، مساحت محدود به مکان هندسی مرکز سکه برای این‌که سکه کاملاً داخل مستطیل قرار بگیرد، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

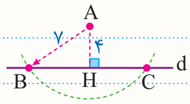
۳. مربع ABCD به ضلع ۲ مفروض است، مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن از تمام رئوس بزرگ‌تر از ۱ است، دارای کدام مساحت است؟

۱) π ۲) $۴-\pi$ ۳) $۴-\frac{\pi}{۲}$ ۴) $۴-۲\pi$

در برخی از سؤالات هندسه از ما می‌پرسند «چند نقطه روی یک شکل وجود دارد که دارای ویژگی به‌خصوصی باشد» در این موارد ابتدا مکان هندسی نقاطی که آن ویژگی به‌خصوص دارند را پیدا می‌کنیم و سپس به بررسی تعداد نقاط تقاطع آن مکان هندسی و شکل گفته شده می‌پردازیم.

نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ واحد از خط d واقع است. چند نقطه روی خط d به فاصلهٔ ۷ واحد از نقطهٔ A وجود دارد؟

نقاطی که به فاصلهٔ ۷ واحد از نقطهٔ A قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۷ قرار دارند و چون $۷>۴$ است، پس این دایره [به عنوان یک مکان هندسی] خط d را در ۲ نقطه قطع می‌کند و همین نقاط، جواب‌های مورد نظر هستند.



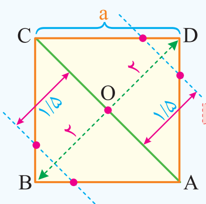
Test **در مربع ABCD به ضلع $۲\sqrt{۲}$، چند نقطه روی محیط مربع وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از قطر AC برابر ۱/۵ واحد باشد؟**

۱) هیچ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بیشمار

۳ نقاطی که به فاصلهٔ ۱/۵ واحد از قطر AC قرار دارند، روی دو خط به موازات AC و به فاصلهٔ ۱/۵ واحد از آن واقع‌اند. حال باید بررسی کنیم که آیا این دو خط نقطهٔ تقاطعی با اضلاع مربع دارند یا نه؟

این نقاط در صورت وجود جواب‌های تست هستند:

$$a=۲\sqrt{۲}\Rightarrow BD=a\sqrt{۲}=\sqrt{۲}\times(۲\sqrt{۲})=۴\Rightarrow OB=OD=۲$$

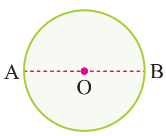


چون $۱/۵<OD$، پس این دو خط، اضلاع مربع را در ۴ نقطه قطع می‌کنند.

۴. در لوزی به اقطار ۶ و ۸ چند نقطه روی محیط لوزی وجود دارد که به فاصلهٔ ۲/۵ واحد از مرکز لوزی باشد؟

۱) هیچ ۲) ۴
۳) ۸ ۴) بیشمار

۵. در دایرهٔ $C(O,R)$ اگر اندازهٔ قطر AB برابر ۸ باشد، چند نقطه روی محیط دایره به فاصلهٔ ۵ واحد از قطر AB وجود دارد؟

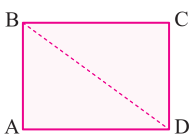


۱) هیچ ۲) ۲
۳) ۴ ۴) بیشمار

۶. در مثلث ABC اگر $BC=۸$ و مساحت مثلث ۳۶ باشد، چند نقطه روی دو ضلع دیگر مثلث وجود دارد که فاصلهٔ آن ها از قاعدهٔ BC برابر ۶ باشد؟

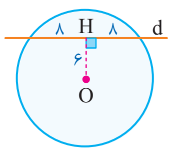
۱) ۱ ۲) هیچ
۳) ۲ ۴) ۱ یا ۲

۷. در مستطیل ABCD به اضلاع $AB=۳$ و $BC=۴$ چند نقطه روی اضلاع مستطیل وجود دارد که فاصلهٔ آنها از قطر BD برابر ۲/۴ باشد؟



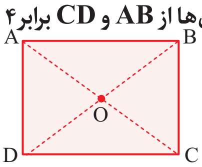
۱) هیچ ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۴

۸. در شکل زیر فاصلهٔ مرکز دایره از خط d برابر ۶ است، چند نقطه روی محیط دایره به فاصلهٔ ۱۰ واحد از خط d وجود دارد؟



۱) ۲ ۲) ۱
۳) ۳ ۴) ۴

۹. مستطیل ABCD به اضلاع $AB=۸$ و $AD=۶$ مفروض است. چند نقطه روی قطرهای مستطیل وجود دارد که اختلاف فاصلهٔ آن‌ها از AB و CD برابر ۴ واحد باشد؟

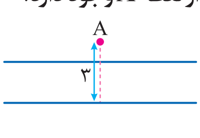


۱) هیچ ۲) ۲
۳) ۴ ۴) بیشمار

۱۰. نقطهٔ A به فاصلهٔ ۵ واحد از خط d واقع است. چند نقطه روی خط d به فاصلهٔ ۶/۵ واحد از نقطهٔ A وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) هیچ ۴) ۴

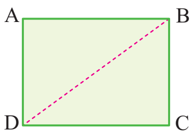
۱۱. سه خط موازی با فاصلهٔ ۲ واحد از هم واقع‌اند. اگر فاصلهٔ نقطهٔ A از خط وسط برابر ۳ واحد باشد، چند نقطه روی این خطوط به فاصلهٔ ۵ واحد از نقطهٔ A وجود دارد؟



۱) ۳
۲) ۲
۳) ۶
۴) ۵

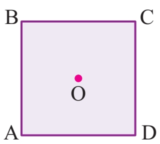
۱۲. در مثلث ABC اگر $BC=6$ و مساحت برابر ۱۲ باشد. چند نقطه روی قاعدهٔ BC به فاصلهٔ ۳ واحد از رأس A وجود دارد؟

۱) هیچ ۲) یک
۳) دو ۴) چهار



۱۳. در مستطیل ABCD به اضلاع ۳ و ۴ چند نقطه روی قطر BD وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از رأس A کمتر از ۲/۵ باشد؟

۱) هیچ ۲) یک
۳) دو ۴) بیشمار



۱۴. در مربع ABCD به ضلع ۴ چند نقطه روی محیط آن یافت می‌شود که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز مربع $\sqrt{2}$ واحد باشد؟

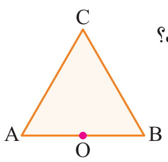
۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۸ ۴) هیچ

۱۵. در مربع ABCD به ضلع ۸ چند نقطه روی محیط آن یافت می‌شود که به فاصلهٔ ۵ واحد از مرکز مربع باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴
۳) هیچ ۴) ۸

۱۶. در مستطیل ABCD به اضلاع ۶ و ۸ چند نقطه روی اضلاع وجود دارد که به فاصلهٔ ۴ واحد از محل تلاقی قطرهای مستطیل باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸



۱۷. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۴ واحد چند نقطه روی محیط مثلث وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از وسط ضلع AB برابر ۲ باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۶

۱۸. در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC اندازهٔ ضلع قائم $2\sqrt{2}$ است. چند نقطه روی محیط مثلث وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از وسط وتر مثلث برابر ۲ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

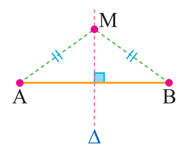
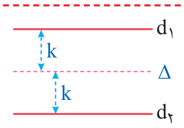
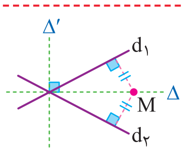
۱۹. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD به مساحت ۹۰ و اندازهٔ قاعده‌ها ۱۸ و ۱۲ است چند نقطه روی قاعده‌های ذوزنقه یافت می‌شود که به فاصلهٔ ۳ واحد از محل تلاقی قطرهای ذوزنقه باشد؟

۱) هیچ ۲) ۳
۳) ۲ ۴) ۴

I ♥ gaj

مکان‌های هم فاصله از دو چیز

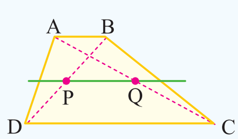
یکی از مهم‌ترین مکان‌های هندسی در صفحه، مکان هندسی نقاط هم فاصله از دو چیز است که مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:

۱ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله هستند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.	
۲ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی d_1 و d_2 به یک فاصله هستند، خطی موازی آن دو خط و بین آن‌هاست.	
۳ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d_1 و d_2 به یک فاصله هستند، نیمسازهای آن دو خط متقاطع است [این نیمسازها همواره برهم عمودند].	

Test چند نقطه روی قطرهای ذوزنقهٔ ABCD وجود دارد که فاصلهٔ آن از دو قاعده یکسان باشد؟

۱) نامشخص ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بیشمار

۲ نقاطی که به فاصلهٔ یکسان از دو قاعدهٔ ذوزنقه قرار دارند، روی خطی موازی دو قاعده هستند که فاصلهٔ آن از هرکدام از قاعده‌ها نصف ارتفاع ذوزنقه است. این خط قطعاً قطرهای ذوزنقه را در دو نقطهٔ P و Q قطع می‌کند. [این خط را خط میانگین ذوزنقه می‌نامند].



۲۰. چند نقطه روی محیط یک مستطیل وجود دارد، که از قطرهای آن به یک فاصله باشد؟

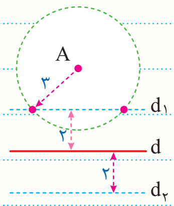
۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۴ ۴) بیشمار

اشتراک دو مکان هندسی

در بعضی سؤال‌ها از ما می‌پرسند «چند نقطه وجود دارد که هم این ویژگی را داشته باشد و هم آن ویژگی را»، در این موارد ابتدا مکان هندسی نقاطی که این ویژگی و نیز مکان هندسی نقاطی که آن ویژگی را دارند پیدا می‌کنیم، سپس به بررسی تعداد نقاط اشتراک (تقاطع) این دو مکان هندسی می‌پردازیم.

نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ واحد از خط d واقع است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۳ واحد از نقطهٔ A و به فاصلهٔ ۲ واحد از خط d باشد؟

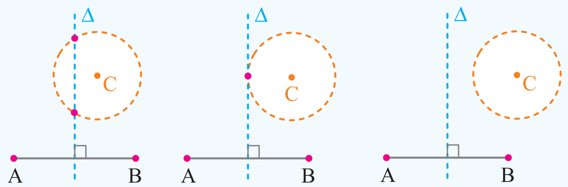
نقاطی که به فاصلهٔ ۳ واحد از نقطهٔ A قرار دارند، روی دایره‌ای به شعاع ۳ و به مرکز A واقع‌اند [این ویژگی]. همچنین نقاطی که به فاصلهٔ ۲ واحد از خط d قرار دارند، روی دو خط به موازات d و به فاصلهٔ ۲ واحد از آن قرار دارند [آن ویژگی]. حال باید تعداد نقاط اشتراک این دو مکان هندسی را بررسی کنیم. همان‌طور که در شکل مشخص است این دو مکان هندسی همدیگر را در ۲ نقطه قطع می‌کنند، بنابراین ۲ نقطه با شرایط گفته‌شده وجود دارد.



Test نقاط A , B , C در صفحه مفروض‌اند. چند نقطه وجود دارد که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد؟

۱) حداکثر یک نقطه ۲) حداکثر ۲ نقطه
۳) دقیقاً ۲ نقطه ۴) هیچ‌نقطه‌ای وجود ندارد.

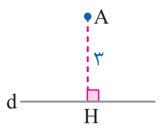
۲ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB است. مکان هندسی نقاطی که از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر هستند، دایره‌ای به مرکز C و به شعاع ۳ است. نقاط تلاقی عمود منصف AB با این دایره، جواب این مسئله است. با توجه به شکل‌های مقابل مسئله دو جواب یا یک جواب یا بدون جواب است. پس حداکثر ۲ نقطه وجود دارد.
(Δ عمود منصف پاره‌خط AB است.)



۲۱. چند نقطه در صفحه ذوزنقهٔ ABCD وجود دارد که از دو رأس مقابل A و C و همچنین از دو قاعده به یک فاصله باشد؟

۱) هیچ ۲) دقیقاً یک
۳) حداکثر دو ۴) نامشخص

۲۲. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر و از d به فاصلهٔ ۱/۵ سانتی‌متر باشد؟



۱) هیچ ۲) یک
۳) دو ۴) بیشمار

۲۳. نقاط A , B , C , D رئوس ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD به قاعده‌های AB و CD هستند، چند نقطه در صفحه می‌توان یافت که از نقاط B و A و همچنین از نقاط D و C به یک فاصله باشند؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بیشمار

۲۴. نقاط A , B , C در صفحه مفروض‌اند، تعداد نقاط هم فاصله از B و A که به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از C باشد، کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) چهار

۲۵. دو نقطهٔ A و B و خط d که شامل هیچ‌یک از نقاط نیست در صفحه مفروض‌اند، تعداد نقاطی از صفحه که از A و B به یک فاصله و از d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد، کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) هیچ ۲) بیشمار ۳) دو ۴) یک

۲۶. دو خط متقاطع d_1 و d_2 و نقطهٔ A در صفحهٔ آن‌ها مفروض است، حداکثر چند نقطه در صفحه یافت می‌شود که از d_1 و d_2 به یک فاصله و از A به فاصلهٔ ۲ باشد؟

۱) یک ۲) دو ۳) چهار ۴) هشت

۲۷. دو خط d_1 و d_2 در نقطهٔ A متقاطع‌اند، چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصلهٔ ۳ و از d_1 و d_2 به یک فاصله باشد؟

۱) دو ۲) چهار ۳) بیشمار ۴) هیچ

۲۸. در چهارضلعی ABCD اضلاع AB و CD غیرموازی‌اند، چند نقطه در صفحه یافت می‌شود که از رئوس B و A و همچنین از رئوس D و C به یک فاصله باشند؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بیشمار

۲۹. چند نقطه در صفحهٔ مختصات وجود دارد که از محور x ها و محور y ها هم فاصله بوده و در ضمن فاصلهٔ آن از دو نقطهٔ $A(۳,۰)$ و $B(۰,-۱)$ با هم برابر باشد؟

۱) یک ۲) هیچ ۳) دو ۴) بیشمار

۳۰. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از محور x ها و محور y ها هم فاصله بوده و به فاصلهٔ ۲ واحد از محور x ها باشند؟

۱) دو ۲) چهار

۳) هیچ ۴) بیشمار

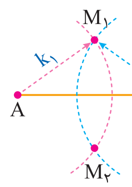
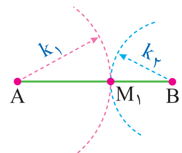
۳۱. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقاط $A(3,0)$ و $B(0,-1)$ به یک فاصله بوده و فاصلهٔ آن‌ها از نیمساز ربع اول و سوم برابر ۲ باشد؟

۱) یک ۲) دو

۳) هیچ ۴) چهار

اشتراک دو مکان هندسی مشهور

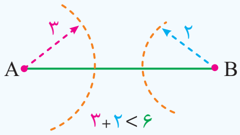
یکی از مشهورترین حالاتی که مربوط به تقاطع دو مکان هندسی است، حالتی است که پرسیده می‌شود «چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ k_1 از نقطهٔ A و به فاصلهٔ k_2 از نقطهٔ B باشد»، در این حالت باید وضعیت دایرهٔ به مرکز A و به شعاع k_1 و دایرهٔ به مرکز B و به شعاع k_2 را بررسی کنیم که سه حالت عمده رخ می‌دهد:

۱ اگر این دو دایره متقاطع باشند، دو نقطه با شرایط فوق وجود دارد. [نقاط M_1 و M_2]	
۲ اگر این دو دایره مماس باشند، فقط یک نقطه با شرایط فوق وجود دارد. [نقطهٔ M_1]	
۳ اگر این دو دایره همدیگر را قطع نکنند، هیچ نقطه‌ای با شرایط فوق وجود ندارد.	چون دو دایره همدیگر را قطع نکرده‌اند، نقطه‌ای دیده نمی‌شود.

Test دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۶ واحد از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۳ واحد از A و به فاصلهٔ ۲ واحد از B باشد؟

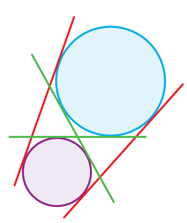
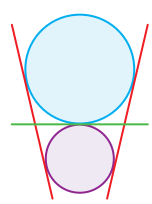
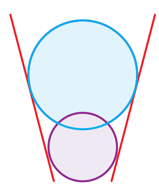
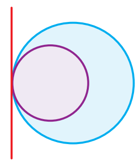
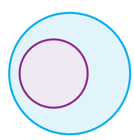
۱) یک ۲) دو

۳) چهار ۴) هیچ



۴ با توجه به این‌که فاصلهٔ A و B از هم ۶ واحد است، دایرهٔ به مرکز A و به شعاع ۳ و دایرهٔ به مرکز B و به شعاع ۲ همدیگر را قطع نمی‌کنند، پس گزینهٔ ۴ صحیح است.

برای تشخیص وضعیت دو دایره به شعاع‌های R_1 و R_2 و طول خط‌المرکزین d نسبت به هم، d را با R_1+R_2 و $|R_1-R_2|$ مقایسه می‌کنیم:

وضعیت	متخارج	مماس خارج	متقاطع	مماس داخل	متداخل
رابطه	$d>R_1+R_2$	$d=R_1+R_2$	$\|R_1-R_2\|<d<R_1+R_2$	$d=\|R_1-R_2\|$	$d<\|R_1-R_2\|$
شکل					

۳۲. دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۷/۵ واحد از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۵/۱ واحد از A و به فاصلهٔ ۲/۶ واحد از B باشد؟

۱) یک ۲) دو

۳) چهار ۴) هیچ

۳۳. مربع ABCD به ضلع ۴ مفروض است، چند نقطه در صفحهٔ مربع وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از رأس‌های متقابل A و C برابر ۲ باشد؟

۱) صفر ۲) ۲

۳) ۴ ۴) ۳

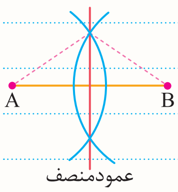
رسم عمود منصف و خط موازی و عمود

ترسیم‌های مورد بحث در کتاب درسی را می‌توان به ۴ دستهٔ عمده تقسیم کرد که هرکدام دارای نتایج خاص خود هستند:

انواع ترسیم‌ها

- رسم عمود منصف
- رسم نیمساز
- رسم مثلث
- رسم چهار ضلعی

اولین و مهم‌ترین ترسیم مورد بحث در کتاب درسی، رسم عمودمنصف است.

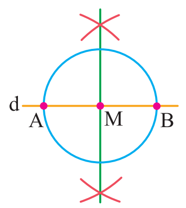


برای رسم خط عمودمنصف پاره‌خط AB، دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ مناسب (بیش از نصف طول AB) باز می‌کنیم و یک بار به مرکز A و یک بار به مرکز B کمان‌هایی رسم می‌کنیم. سپس به کمک خط‌کش خطی رسم می‌کنیم که از محل تقاطع دو کمان بگذرد، این خط همان عمودمنصف AB است [در این ترسیم ۲بار از پرگار و یک بار از خط کش استفاده می‌شود].

از رسم عمودمنصف، در سه ترسیم بسیار مهم دیگر نیز استفاده می‌شود:

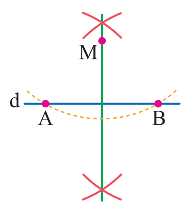
۱ برای رسم خط عمود بر خط d از نقطهٔ M واقع بر آن، ابتدا به کمک پرگار دو نقطه مانند A و B روی خط d طوری پیدا می‌کنیم که MA = MB. [یعنی به مرکز M و به شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در A و B قطع کند]، سپس عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم [در این ترسیم ۳ بار از پرگار و یک بار از خط‌کش استفاده می‌شود].

STOP از یک نقطه مانند A روی خط d فقط یک عمود می‌توان بر خط d رسم کرد.



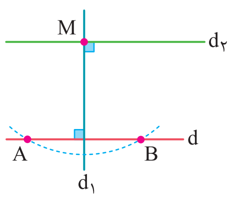
۲ برای رسم خط عمود بر خط d از نقطهٔ M غیر واقع بر خط d، ابتدا به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d طوری پیدا می‌کنیم که MA = MB باشد [برای این کار به مرکز M و شعاع دلخواه کمان می‌زنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند]، سپس عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. [در این ترسیم ۳ بار از پرگار و یک بار از خط‌کش استفاده می‌شود].

STOP از یک نقطه مانند A خارج خط d فقط یک عمود می‌توان بر خط d رسم کرد.



۳ برای رسم خط موازی خط d از نقطهٔ M خارج آن، ابتدا خط d_1 را به‌گونه‌ای رسم می‌کنیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد، سپس خط d_2 را به‌گونه‌ای رسم می‌کنیم که از M بگذرد و بر d_1 عمود باشد [در این ترسیم ۶ بار از پرگار و ۲ بار از خط‌کش استفاده می‌شود].

STOP دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.



Test در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۶ و ۲ عمود منصف وتر امتداد ضلع کوچک‌تر را در M قطع می‌کند. فاصلهٔ M از نزدیک‌ترین رأس مثلث کدام است؟

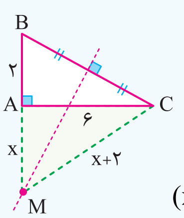
۱) ۷/۵ ۲) ۸

۳) $\sqrt{10}$ ۴) $\frac{25}{3}$

۲ می‌دانیم هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

بنابراین از نقطهٔ M به سر دیگر پاره خط یعنی C وصل می‌کنیم. در این صورت MB=MC=x+۲ خواهد بود.

حال در مثلث AMC به کمک فیثاغورس x به دست می‌آید:



$$(x+2)^2=x^2+6^2 \xrightarrow[6,8,10]{\text{حدس}} x=8$$

۳۴. پاره‌خط AB به طول ۸ واحد مفروض است. برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB طبق روش بیان شده در کتاب درسی نیاز به رسم چند کمان با مراکز مختلف است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

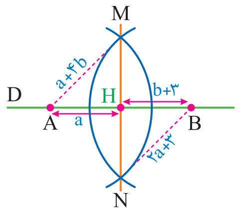
۳۵. پاره‌خط AB به طول ۱۰ مفروض است. در رسم عمودمنصف AB دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ $3a-1$ باز کرده‌ایم تا به مراکز A و B کمان‌هایی رسم کنیم. برای این‌که ترسیم به درستی انجام گیرد. حدود a کدام باید باشد؟

۱) $0<a<2$
۲) $\frac{1}{3}<a<2$
۳) $a>2$
۴) $a>\frac{11}{3}$

۳۶. اگر خط d و پاره‌خط AB غیرموازی و غیرعمود باشند، تعداد نقاط واقع بر d که از نقطه‌های A و B به یک فاصله باشند، کدام است؟

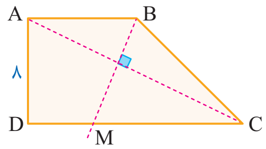
۱) دقیقاً دو نقطه
۲) حداقل دو نقطه
۳) دقیقاً یک نقطه
۴) بیشمار نقطه

۳۷. دو نقطهٔ A و B مطابق شکل روی خط D مفروض‌اند. شکل زیر ترسیم عمودمنصف پاره‌خط AB را نشان می‌دهد که در رسم آن، به مراکز A و B کمان‌هایی رسم شده، در صورتی که $AH=a$ و $BH=b+3$ باشد، فاصلهٔ دو نقطهٔ M و N از هم کدام است؟



۱) ۲۶
۲) ۱۲
۳) ۱۸
۴) ۲۴

۳۸. در ذوزنقهٔ ABCD مطابق شکل $CD=16$ و $AD=8$ است. عمودمنصف قطر AC قاعدهٔ CD را در M قطع می‌کند، فاصلهٔ M از رأس C کدام است؟



۱) ۱۰
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۷

۳۹. نقطهٔ M روی خط d قرار دارد، برای رسم خط عمود بر d و گذرا از M کدام روش درست است؟

۱) پیدا کردن دو نقطهٔ A و B با فاصلهٔ مساوی از M و سپس رسم عمودمنصف AB
۲) رسم دایره‌ای گذرا از M و مماس بر d و سپس رسم شعاع گذرا از M
۳) در نظر گرفتن دو نقطهٔ دلخواه مانند A و B و سپس رسم منصف AB
۴) از نقطهٔ دلخواه A روی خط d دایره‌ای به شعاع AM رسم کرده، سپس مماس بر دایره در M را رسم می‌کنیم.

۴۰. در رسم خط عمود بر خط d از نقطهٔ M خارج خط d طبق روش بیان شده در کتاب درسی اولین گام کدام است؟

۱) رسم دو خط غیرعمود بر خط d
۲) در نظر گرفتن دو نقطهٔ دلخواه روی خط d
۳) رسم دایره‌ای به مرکز M که خط را در دو نقطه قطع کند.
۴) پیدا کردن پای عمود روی خط d

۴۱. در رسم کدام‌یک از موارد زیر طبق روش‌های کتاب درسی نیاز به ترسیم کمان‌های بیشتری داریم؟

۱) رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای واقع بر آن
۲) رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن
۳) رسم خط موازی یک خط از نقطه‌ای خارج آن
۴) هر سه یکسان هستند.

۴۲. در ترسیم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج خط از کدام ترسیم استفاده می‌شود؟

۱) ترسیم خطی موازی یک خط
۲) ترسیم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای واقع بر آن
۳) ترسیم عمودمنصف یک پاره‌خط
۴) ترسیم خطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله است.

۴۳. در ترسیم ارتفاع AH از مثلث ABC طبق روش بیان شده در کتاب درسی کدام ترسیم در صورت نیاز متقدم بر سایرین است؟

۱) ترسیم عمودمنصف ضلع BC
۲) ترسیم کمانی به مرکز A و متقاطع با BC
۳) ترسیم خط گذرا از A و عمود بر BC
۴) رسم کمان‌هایی به مراکز B و C و به شعاع بزرگ‌تر از نصف BC

IR-MCI LTE 00:02 AM 100 %

Tweet

Edward Witten
@Edward 1951

دور از امنیّت محل سکونت‌تان، دنیا برای راحتی شما ساخته نشده است.

Away from the safety of your home ,the universe was not made for your convenience.

درس اول : .... نسبت و تناسب در هندسه

درس دوم : .... قضیهٔ تالس

درس سوم و چهارم : .... تشابه و کاربردها

Translate Tweet

07:30 . 5/31/20

View Tweet activity

یکی از ریاضیدانان بزرگ در مورد او می‌نویسد: اگر فکر می‌کنید بسیار باهوش هستید، ادوارد ویتن از شما باهوش‌تر است.

1,337 2,416 9,750,610,288

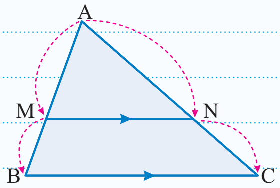
CHAPTER 2

Thales Theorem

Add another Tweet

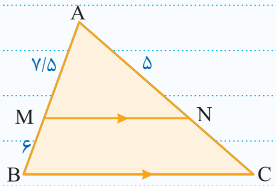
قضیهٔ تالس [جزء به جزء]

هرگاه در یک مثلث، خطی راست موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، ۴ پاره‌خط جدا می‌کند که اندازهٔ آن‌ها تشکیل یک تناسب می‌دهد [این قضیه را تالس جزء‌به‌جزء می‌نامند].



$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$

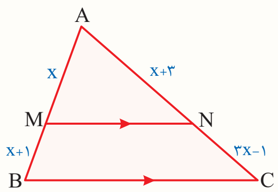
در شکل مقابل MN و BC موازی‌اند. طول پاره‌خط NC کدام است؟



$$\frac{۷/۵}{۶}=\frac{۵}{NC}\Rightarrow NC=\frac{۶\times ۵}{۷/۵}=۴$$

معمولاً در مواردی که اندازهٔ پاره‌خط MN نه داده شده بود و نه خواسته شده بود، بهتر است از تالس جزء‌به‌جزء استفاده کنیم.

Test در شکل مقابل MN موازی قاعدهٔ BC است، مقدار x کدام است؟



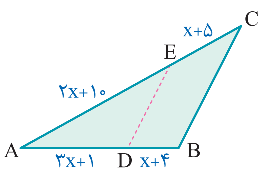
۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

۲ چون در این تست اندازهٔ پاره‌خط MN نه داده شده و نه خواسته شده، بهتر است از تالس جزء‌به‌جزء استفاده کنیم:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{x}{x+۱}=\frac{x+۳}{۳x-۱}\Rightarrow ۳x^۲-x=x^۲+۴x+۳ \Rightarrow ۲x^۲-۵x-۳=۰\Rightarrow(x-۳)(۲x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۳\\ x=-\frac{۱}{۲}\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۱۶۸. در شکل مقابل $DE \parallel BC$ است. مقدار x کدام است؟



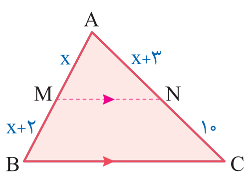
۱) ۵

۲) ۷

۳) ۳

۴) ۵−

۱۶۹. در شکل مقابل MN و BC موازی‌اند. بزرگ‌ترین مقدار x کدام است؟

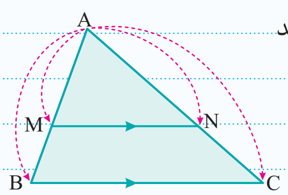


۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۱/۵

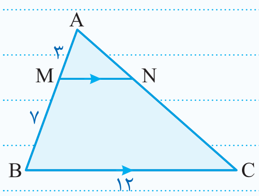
قضیهٔ تالس [جزء به کل]

اگر خطی دو ضلع از اضلاع مثلثی را قطع کند و با ضلع سوم موازی باشد، مثلثی را از مثلث اصلی جدا می‌کند که اندازهٔ ضلع‌های آن، با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب است این قضیه را [تالس جزء به کل] می‌نامند.



$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

در شکل زیر اندازهٔ پاره‌خط MN کدام است؟

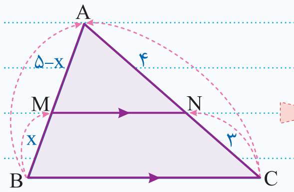


$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{۳}{۱۰}=\frac{MN}{۱۲}\Rightarrow MN=۳/۶$$

به‌طور کلی زمانی از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم که پاره‌خط NM داده یا خواسته شده باشد.

تالس جزء به کل را از سمت قاعده به‌سمت رأس‌ها نیز می‌توان نوشت، اما در این حالت MN را نمی‌توان در نسبت دخالت داد.

مقدار x در شکل مقابل کدام است؟



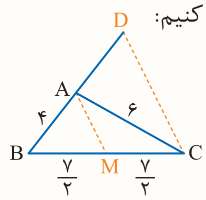
تالس جزء به کل را از قاعده به سمت رأس می‌نویسیم:

$$\frac{x}{x+(5-x)}=\frac{3}{3+4}\Rightarrow\frac{x}{5}=\frac{3}{7}\Rightarrow 7x=15\Rightarrow x=\frac{15}{7}$$

Test در مثلث ABC ، اضلاع AB=۴ و AC=۶ و BC=۷ است. از رأس C خطی موازی میانه AM رسم شده و امتداد BA را در نقطهٔ D قطع کرده است. اندازهٔ BD کدام است؟ (خارج ـ ۹۸)

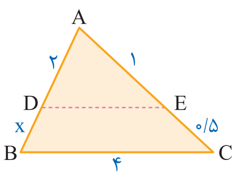
۱) ۷/۵ ۲) ۸ ۳) ۸/۵ ۴) ۹

۲ چون صحبت از دو خط موازی است به سراغ تالس می‌رویم و چون BD را می‌خواهد باید از تالس جزء به کل استفاده کنیم:



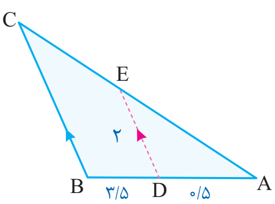
$$\frac{BA}{BD}=\frac{BM}{BC}\Rightarrow\frac{4}{BD}=\frac{\frac{7}{2}}{7}\Rightarrow BD=8$$

۱۷۰. در شکل مقابل $DE \parallel BC$ است. اندازهٔ پاره‌خط DE کدام است؟



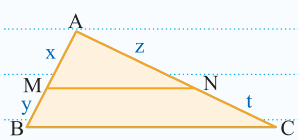
۱) $\frac{7}{3}$
۲) ۳
۳) ۱/۵
۴) $\frac{8}{3}$

۱۷۱. در شکل مقابل اندازهٔ BC کدام است؟



۱) ۱۶
۲) ۱۴
۳) ۱۲
۴) ۱۸

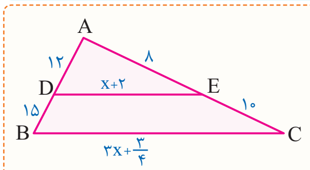
اگر خطی روی دو ضلع مثلثی چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناسب جدا کند، آنگاه با ضلع سوم مثلث موازی است. [عکس قضیهٔ تالس]



$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{z}{t}\Rightarrow MN\parallel BC}$$

در سؤال‌هایی که به‌کمک عکس تالس حل می‌شوند، معمولاً اشاره‌ای به خط موازی قاعده نمی‌شود و یا حتی گاهی اصلاً چنین خطی وجود ندارد؛ اما در این حالت طول هر ۴ قطعه روی ساق‌های مثلث معلوم است و اعداد طوری هستند که نسبت آن‌ها یک تناسب تشکیل می‌دهد.

Test با توجه به شکل مقابل، x کدام است؟

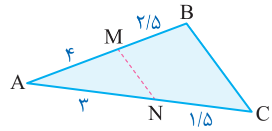


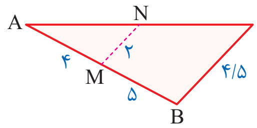
۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷/۵ ۴) ۶/۵

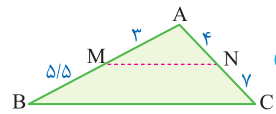
۱ در این مسئله، اشاره‌ای به موازی بودن DE و BC نشده است، پس ابتدا نسبت اندازه‌های پاره‌خط‌های ایجادشده بر اضلاع AB و AC را با هم مقایسه می‌کنیم:

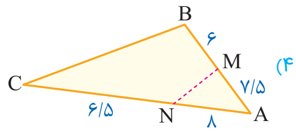
$$\frac{12}{15}=\frac{8}{10}\Rightarrow DE\parallel BC \quad \frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{12}{27}=\frac{x+2}{3x+\frac{3}{4}}\Rightarrow 36x+9=27x+54\Rightarrow 9x=45\Rightarrow x=5$$

۱۷۲. در کدام‌یک از شکل‌های زیر، پاره‌خط MN موازی قاعدهٔ BC است؟

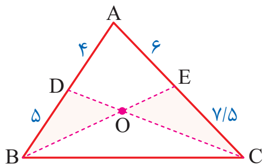
۱)


۲)


۳)


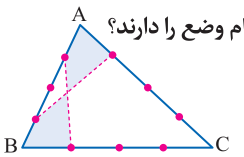
۴)


۱۷۳. در شکل زیر نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟



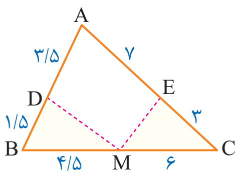
۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) ۱

۱۷۴. در شکل مقابل هرضلع مثلث ABC به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. دو چهارضلعی سایه زده شده نسبت به هم کدام وضع را دارند؟



۱) هم‌مساحت ۲) هم‌محیط ۳) هم‌نهشت ۴) متشابه

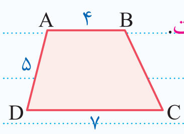
۱۷۵. در شکل داده شده مساحت مثلث BDM چند درصد مساحت مثلث EMC است؟



۱) ۵۰ ۲) ۷۵ ۳) ۶۰ ۴) ۴۸

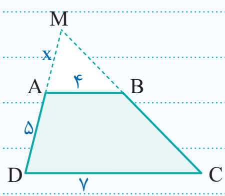
گاهی اوقات به‌جای این‌که به‌طور مستقیم بگویند دو خط d و d′ موازی‌اند، می‌گویند فلان چهارضلعی، ذوزنقه است.

در ذوزنقهٔ مقابل، اضلاع AD و BC را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. فاصلهٔ M از D چقدر است؟



چون AB||CD است می‌توانیم از تالس استفاده کنیم؛ از طرف دیگر چون AB جزء داده‌های مسئله است باید از تالس جزء به‌کل استفاده کنیم:

$$\frac{MA}{MD}=\frac{AB}{DC}\Rightarrow\frac{x}{x+5}=\frac{4}{7}\Rightarrow 7x=4x+20\Rightarrow 3x=20\Rightarrow x=\frac{20}{3}$$



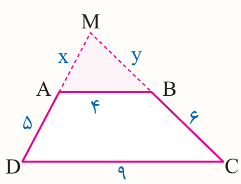
حال با معلوم شدن x فاصلهٔ M از D قابل محاسبه است:

$$MD=MA+AD=\frac{20}{3}+5=\frac{35}{3}$$

گاهی اوقات نه از کلمهٔ موازی استفاده می‌شود و نه نامی از ذوزنقه است، بلکه از عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب استفاده می‌کنند و به این وسیله، به بیان موازی بودن دو خط می‌پردازند.

Test در ذوزنقه‌ای اندازهٔ قاعده‌ها ۴ و ۹ و طول ساق‌ها ۶ و ۵ است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل می‌شود، کدام است؟

۱) ۱۱/۴ ۲) ۱۱/۶ ۳) ۱۲/۲ ۴) ۱۲/۸

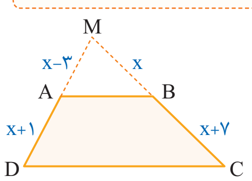


۴ چون AB جزء داده‌هاست باید به سراغ تالس جزء به کل برویم:

$$\overset{\Delta}{MDC}:AB\parallel DC\Rightarrow\frac{x}{x+5}=\frac{y}{y+6}=\frac{4}{9}\Rightarrow\frac{x}{5}=\frac{y}{6}=\frac{4}{5}\Rightarrow x=4\,,\ y=\frac{24}{5}=4/8$$

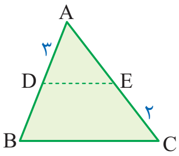
بنابراین محیط مثلث MAB برابر است با: $x+y+4=12/8$

۱۷۶. در ذوزنقهٔ ABCD امتداد ساق‌های آن در نقطهٔ M متقاطع‌اند. مقدار x کدام است؟



۱) ۵/۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۶/۵

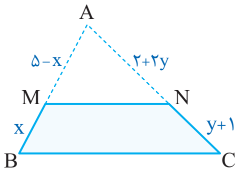
۱۷۷. در شکل زیر DECB ذوزنقه است و ساق BD یک واحد کوچکتر از AE است. اندازهٔ AC کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

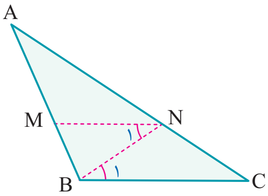
۱۷۸. در شکل مقابل MNCB ذوزنقه است. مقدار x کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$

۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

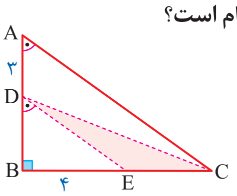
۱۷۹. در شکل مقابل $AM = ۳MB$ و $\widehat{N}_۱ = \widehat{B}_۱$ می‌باشد. حاصل $\frac{CN}{AC}$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

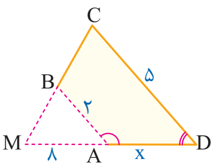
۱۸۰. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC مطابق شکل $\widehat{A} = \widehat{D}$ می‌باشد. اگر $AD = ۳$ و $BE = ۴$ باشد، مساحت قسمت رنگ شده کدام است؟



۱) ۶ ۲) ۸

۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۱۸۱. در چهارضلعی ABCD اگر زوایای $\widehat{A}$ و $\widehat{D}$ مکمل هم باشند و امتداد اضلاع BC و AD در نقطهٔ M به فاصلهٔ ۸ واحد از رأس A متقاطع باشند. اندازهٔ ضلع AD کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۱۸ ۴) ۱۲

تالس جزء به کل کاربردی

منظور از تالس کاربردی مجموعهٔ مسائلی است که طول سایه، بلندی یک درخت یا ارتفاع یک سازه و نظایر آن را از ما می‌خواهند و به‌طور مستقیم، صحبت از یک مثلث در هندسه نیست!

1 تیپ اول این مسائل حالتی است که اطلاعات داده‌شده و خواسته‌شده در مسئله، درون یک مثلث قائم‌الزاویه قرار دارد. در این حالت باید به پاره‌خطی که موازی ضلع عمودی قرار دارد توجه و با استفاده از تالس جزء به کل خواستهٔ مسئله را پیدا کنیم.

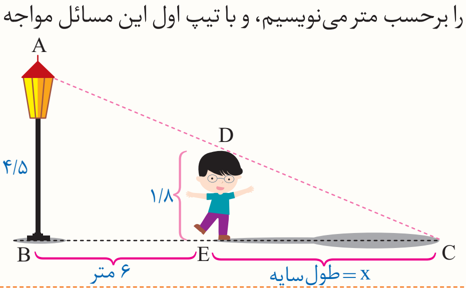
2 در تیپ دوم اطلاعات داده‌شده در مسئله روی اضلاع یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه قرار دارد که ساق قائم آن سطح زمین است. در این حالت با رسم یک خط به موازات ساق قائم، یک مثلث قائم‌الزاویه درون ذوزنقه ایجاد و اطلاعات مسئله را به این مثلث منتقل می‌کنیم و در انتها قضیهٔ تالس را روی این مثلث می‌نویسیم.

Test شخصی با قد ۱۸۰ سانتی‌متر در فاصلهٔ ۶ متری از تیر چراغ‌برق به ارتفاع ۴/۵ متر ایستاده است. طول سایهٔ این شخص روی زمین چند متر است؟

۱) ۳ ۲) ۴

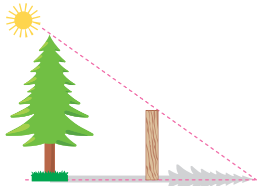
۳) ۳/۵ ۴) ۵/۵

۲ چون هیچ شکلی داده نشده است، باید شکل فرض خودمان را رسم کنیم. حال همهٔ اندازه‌ها را برحسب متر می‌نویسیم، و با تیپ اول این مسائل مواجه هستیم:



$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{BC} \Rightarrow \frac{۱/۸}{۴/۵} = \frac{x}{x+۶} \Rightarrow \frac{۲}{۵} = \frac{x}{x+۶} \xrightarrow{\text{تفضیل درمخرج}} \frac{۲}{۳} = \frac{x}{۶} \Rightarrow x = ۴$$

۱۸۲. در شکل زیر اگر نوک سایهٔ چوب ۱/۵ متری بر نوک سایهٔ درخت منطبق باشد و طول سایهٔ چوب و درخت ۶ و ۱۲۰ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟



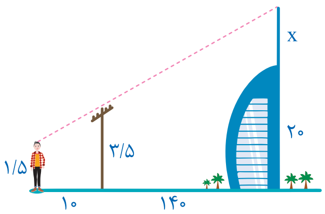
۱) ۳۶

۲) ۲۴

۳) ۳۰

۴) ۲۵

۱۸۳. در شکل زیر، دکلی روی یک ساختمان به ارتفاع ۲۰ متر نصب شده است. دید چشم ناظری با قد ۱/۵ متر از نوک دکل و تیرک ۳/۵ متری بین آن‌ها، در یک راستا است. ارتفاع دکل چقدر است؟



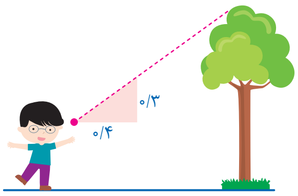
۱) ۱۱/۸

۲) ۱۲/۲

۳) ۱۲/۸

۴) ۱۱/۵

۱۸۴. شخصی برای پیدا کردن ارتفاع یک درخت، یک تکه مقوا به شکل زیر ساخت. اگر او در فاصلهٔ ۸/۸ متری از درخت بایستد، می‌تواند با نگاه کردن در امتداد وتر مثلث نوک درخت را ببیند، فاصلهٔ تقریبی چشم او از زمین ۱/۶ متر است. ارتفاع تقریبی درخت کدام است؟



۱) ۷/۸

۲) ۸

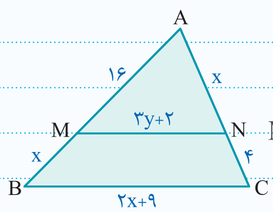
۳) ۸/۲

۴) ۸/۴

اگر در مسائل مربوط به تالس، هم اعداد روی ساق‌های مثلث و هم اعداد مربوط به قاعده‌ها [لااقل یکی از دو قاعده] مجهول بودند، اما برحسب یک متغیر نبودند مجبوریم دو بار از تالس استفاده کنیم. یک بار جزءبه‌جزء روی ساق‌ها و دیگری جزء به کل روی قاعده و خط موازی آن.

در شکل زیر MN موازی BC است. x و y را بیابید.

ابتدا مقدار x را به کمک تالس جزء به جزء به‌دست می‌آوریم:

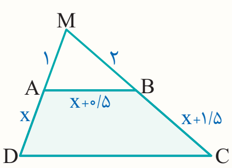


$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس جزءبه‌جزء}} \frac{۱۶}{x} = \frac{x}{۴} \Rightarrow x^۲ = ۶۴ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow \begin{cases} AB = ۱۶ + ۸ = ۲۴ \\ BC = (۲ \times ۸) + ۹ = ۲۵ \end{cases}$$

حال می‌توانیم y را به کمک تالس جزء به کل به‌دست آوریم:

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس جزءبه‌کل}} \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۱۶}{۲۴} = \frac{۳y+۲}{۲۵} \Rightarrow ۷۲y + ۴۸ = ۴۰۰ \Rightarrow y = \frac{۳۵۲}{۷۲} \Rightarrow y = \frac{۴۴}{۹}$$

Test **از امتداد ساق‌های ذوزنقه ABCD ، مثلثی با اضلاع ۱ و ۲ پدید آمده است. اندازهٔ قاعدهٔ بزرگ ذوزنقه چقدر است؟**



۱) ۷/۵

۲) ۸

۳) ۷

۴) ۶/۵

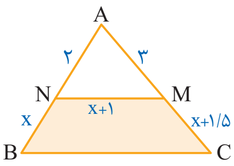
۱ ابتدا به کمک تالس جزءبه‌جزء، x را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{x} = \frac{۲}{x+۲} \Rightarrow x + ۲ = ۲x \Rightarrow x = ۲$$

حال با استفاده از تالس جزء به کل، ضلع DC را به‌دست می‌آوریم:

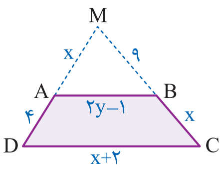
$$\frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{۱}{x+۱} = \frac{x+۰/۵}{DC} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{۲/۵}{DC} \Rightarrow DC = ۷/۵$$

۱۸۵. در شکل زیر NMCB ذوزنقه است. اندازه پاره‌خط BC کدام است؟



۱) ۸/۵
۲) ۷/۵
۳) ۹
۴) ۱۰

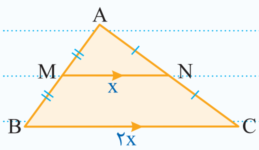
۱۸۶. در شکل زیر ذوزنقهٔ ABCD مفروض است و امتداد ساق‌های آن در M متقاطع‌اند. محیط ذوزنقه کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)



۱) ۲۰/۴
۲) ۲۰/۸
۳) ۲۲/۶
۴) ۲۲/۸

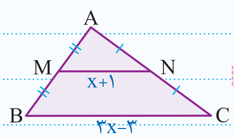
حالت خاص قضیهٔ تالس

پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند، طبق قضیهٔ تالس، نصف ضلع سوم و طبق عکس قضیهٔ تالس، موازی ضلع سوم است.



مطابق شکل، مقدار x کدام است؟

نقاط M و N وسط اضلاع AB و AC هستند، پس باید $x+1$ نصف $3x-3$ باشد، یعنی:

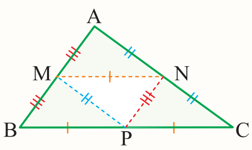


$$x+1=\frac{3x-3}{2}\Rightarrow 3x-3=2(x+1)\Rightarrow 3x-3=2x+2\Rightarrow x=5$$

Test اگر وسط‌های اضلاع مثلثی را به هم وصل کنیم، محیط هرکدام از ۴ مثلث به‌دست آمده چه کسری از محیط مثلث اصلی است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{4}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\frac{1}{6}$

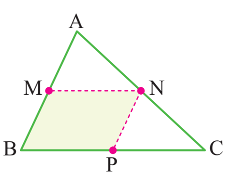
۱ اگر اضلاع مثلث را a , b , c فرض کنیم، در این صورت بنا بر حالت خاص قضیهٔ تالس $MN=\frac{a}{2}, MP=\frac{b}{2}, NP=\frac{c}{2}$ خواهد بود. بنابراین اضلاع هریک از ۴ مثلث‌کوچک $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ است و در نتیجه محیط هرکدام، نصف محیط مثلث اصلی خواهد شد.



۱۸۷. در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ اضلاع قائم ۱/۵ و ۲ می‌باشد. از رأس‌های مثلث خطی به موازات اضلاع می‌گذرانیم تا همدیگر را قطع کنند. محیط مثلث به دست آمده کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۲۴

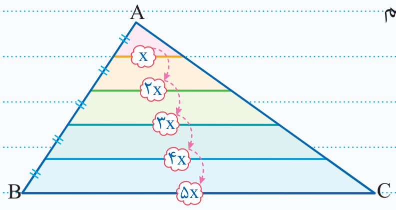
۱۸۸. در شکل داده شده نقطهٔ M وسط ضلع AB از مثلث ABC می‌باشد. اگر ضلع $AC=7$ و محیط متوازی‌الاضلاع MNPB برابر ۱۳ می‌باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟



۱) ۱۳/۵
۲) ۲۰
۳) ۲۸
۴) ۲۰/۵

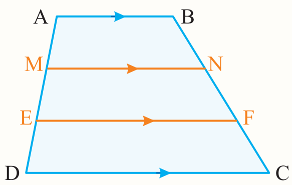
تعمیم حالت خاص تالس

اگر یک ضلع مثلث را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم و از هر یک، خطی موازی قاعده رسم کنیم تا ضلع مقابل را قطع کند، اندازهٔ پاره‌خط‌های تولیدشده تشکیل تصاعد عددی می‌دهند.



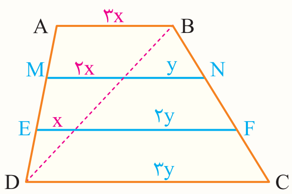
یکی از توصیه‌های همیشگی من به جوانان این است که در ذوزنقه‌ها، قطر را جدی بگیرید و هرگاه با چند خط، موازی با قاعده مواجه شدید از رسم قطر غافل نشوید.

Test در ذوزنقهٔ ABCD ساق AD را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم و از هر یک خطوطی موازی قاعده رسم کرده‌ایم. اگر قاعده‌های ذوزنقه ۵ و ۱۶ باشد، مجموع اندازهٔ پاره‌خط‌های MN و EF کدام است؟



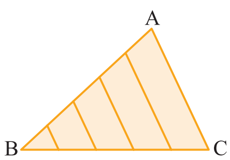
۱) ۱۵
۲) ۱۷
۳) ۲۴
۴) ۲۱

۴ ابتدا قطر DB را رسم می‌کنیم و با توجه به شکل داریم:



$$MN+EF=(۲x+y)+(x+۲y)=۳x+۳y=۵+۱۶=۲۱$$

۱۸۹. در شکل داده شده ضلع AB به ۵ قسمت مساوی تقسیم شده است و از هرکدام خطی به موازات قاعدهٔ AC رسم شده است. اگر $AC=۱۰$ باشد، مجموع طول ۴ پاره‌خط رسم شده کدام است؟ (مسابقات دبیرستانی آمریکا - ۱۹۵۷)

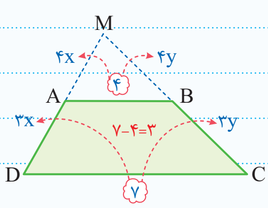


۱) ۱۵
۲) ۱۷
۳) ۱۸
۴) ۲۰

امتداد ساق‌های ذوزنقه و ارتباط آن با تالس

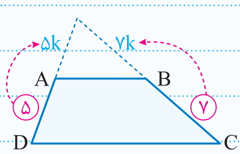
اگر اندازهٔ قاعده‌های ذوزنقه‌ای مشخص باشد و ساق‌ها را از یک طرف امتداد دهیم تا در یک نقطه، یکدیگر را قطع کنند، می‌توانیم اندازهٔ ساق‌ها و اندازهٔ امتداد ساق‌ها را برحسب قاعده‌ها پیدا کنیم.

فرض کنید اندازهٔ قاعده‌های یک ذوزنقه مطابق شکل مقابل ۴ و ۷ باشد. در این صورت طبق تالس ضریبی از تفاضل دو قاعده، به ساق‌ها و ضریبی از قاعدهٔ کوچک به امتداد ساق‌ها می‌رسد.



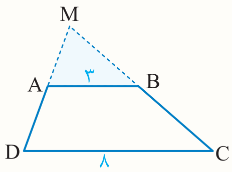
اگر اندازهٔ ساق‌های یک ذوزنقه معلوم باشد، اندازهٔ امتداد ساق‌های ذوزنقه را می‌توان برحسب آن‌ها بیان کرد؛ اما قاعده‌ها را نمی‌توان به آن‌ها مرتبط کرد.

فرض کنید اندازهٔ ساق‌های یک ذوزنقه ۵ و ۷ باشد. در این صورت طبق تالس، ضریبی از این اعداد به امتداد ساق‌ها می‌رسد.



... ادامه

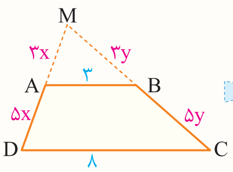
Test در شکل مقابل، محیط ذوزنقهٔ $ABCD$ برابر ۳۱ است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌های ذوزنقه روی قاعدهٔ کوچک آن تشکیل می‌شود، کدام است؟



۱) ۱۷ ۲) ۱۲

۳) ۱۶ ۴) ۱۵

۴ طبق تالس نسبت‌های ایجاد شده روی ساق‌ها و امتداد آن‌ها به‌صورت شکل زیر است، حال محیط ذوزنقه را برابر ۳۱ قرار می‌دهیم:

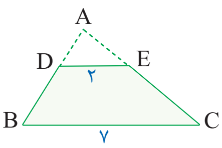


$$۵x+۳+۵y+۸=۳۱ \Rightarrow x+y=۴$$

بنابراین محیط مثلث MAB اکنون قابل محاسبه است:

$$\text{محیط مثلث } MAB = ۳x+۳y+۳=۳(x+y)+۳=(۳\times۴)+۳=۱۵$$

۱۹۰. در شکل مقابل پاره‌خط DE موازی قاعدهٔ BC است. اگر محیط مثلث کوچکتر از ۱۰ باشد. محیط مثلث ABC کدام است؟



۱) ۳۲

۲) ۳۰

۳) ۴۰

۴) ۳۵

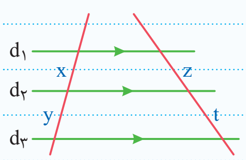
۱۹۱. در ذوزنقه‌ای امتداد ساق‌ها بر هم عمودند. اگر اندازهٔ ساق‌ها ۳ و ۴ و اندازهٔ قاعدهٔ کوچک ۷ باشد، اندازهٔ قاعدهٔ بزرگ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۹

۳) ۱۵ ۴) ۱۲

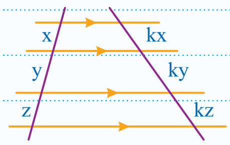
تالس در خطوط موازی و مورب

اگر دو خط مورّب، چند خط موازی را قطع کنند، با استفاده از قضیهٔ تالس می‌توان ثابت کرد که نسبت اندازهٔ پاره‌خط‌های پدید آمده روی خطوط مورّب یکسان است.

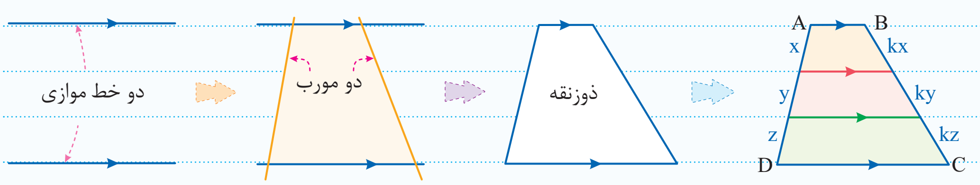


$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{z}{t}}$$

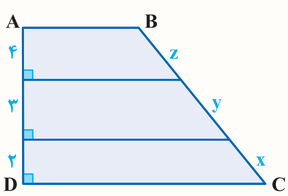
تعداد خطوط موازی می‌تواند بیشتر هم باشد. در این صورت نیز، باز هم اندازهٔ هر قطعه، متناسب با قطعهٔ روبه‌رویی خود خواهد بود.



STOP تمام نکات گفته‌شده برای خطوط موازی و مورب برای ذوزنقه نیز صادق است؛ چون ذوزنقه نیز دو خط موازی است که توسط دو خط مورب قطع شده است! بنابراین اگر خطوط موازی قاعده‌های یک ذوزنقه رسم شود، خواهیم داشت:



Test در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$ مطابق شکل، اندازهٔ ساق بزرگ ۱۲ است. مقدار $x+z$ کدام است؟



۱) ۸ ۲) ۱۰

۳) ۹ ۴) ۷

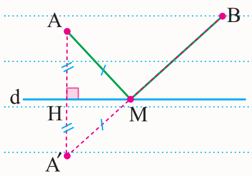
۱ طبق تالس در خطوط موازی و مورب داریم:

$$\begin{cases} z=۴k \\ y=۳k \\ x=۲k \end{cases} \Rightarrow ۴k+۳k+۲k=۱۲ \Rightarrow ۹k=۱۲ \Rightarrow k=\frac{۴}{۳} \Rightarrow x+z=۲k+۴k=۶k=۶\times\frac{۴}{۳}=۸$$

مسئله هرون [تیپ اول]

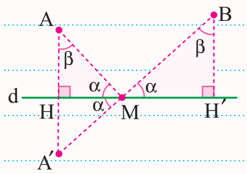
دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط d مفروض‌اند، اگر نقطهٔ M روی خط d بلغزد برای پیدا کردن کم‌ترین طول خط‌شکستهٔ AMB کافیست بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d یعنی A' را پیدا کنیم و از A' به B وصل کنیم تا خط d را در M قطع کند، در این صورت:

$$\mathrm{Min}(AMB)=|A'B|$$

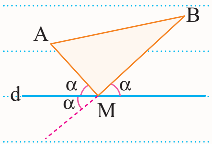


این مسئله به مسئلهٔ هرون مشهور است. در این تیپ از مسائل اگر طول پاره‌خط‌های AM یا BM را بخواهیم باید از تشابه دو مثلث AHM و BMH' استفاده کنیم.

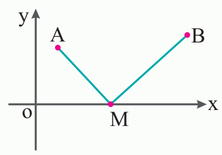
$$\frac{MB}{MA}=\frac{BH'}{AH}=\frac{MH'}{MH}$$



STOP در این حالت خط d نیمساز خارجی رأس M از مثلث ABM است و در ضمن زاویه‌های ساخته شده در طرفین نقطهٔ M نیز با هم برابرند.



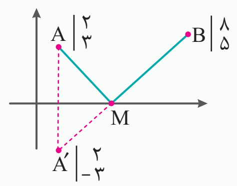
Test نقاط $A\Big|\begin{smallmatrix}۲\\۳\end{smallmatrix}$ و $B\Big|\begin{smallmatrix}۸\\۵\end{smallmatrix}$ مفروض‌اند، نقطهٔ M روی محور x ها می‌لغزد، کم‌ترین اندازهٔ خط شکستهٔ AMB کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۱۲

۳) ۸ ۴) ۱۰

۴ کافیست بازتاب نقطهٔ A نسبت به محور x ها یعنی A' را پیدا کنیم و اندازهٔ $A'B$ را به‌دست آوریم:



$$|A'B|=\sqrt{(۸-۲)^۲+(۵-(-۳))^۲}=۱۰$$

بازتاب یک نقطه نسبت به چهار خط مشهور صفحه

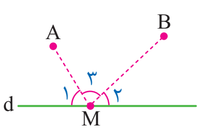
1 تصویر نقطهٔ $A(a,b)$ تحت بازتاب نسبت به محور xها نقطهٔ $A'(a,-b)$ است.

2 تصویر نقطهٔ $A(a,b)$ تحت بازتاب نسبت به محور yها نقطهٔ $A'(-a,b)$ است.

3 تصویر نقطهٔ $A(a,b)$ تحت بازتاب نسبت به خط $y=x$ [نیمساز ربع اول و سوم] نقطهٔ $A'(b,a)$ است.

4 تصویر نقطهٔ $A(a,b)$ تحت بازتاب نسبت به خط $y=-x$ [نیمساز ربع دوم و چهارم] نقطهٔ $A'(-b,-a)$ است.

۹۹۱. در شکل زیر اگر نقطهٔ M طوری روی خط d قرار گرفته باشد که، $MA+MB$ کم‌ترین مقدار ممکن باشد، کدام گزینه درست است؟



۱) $\widehat{M}_۱+\widehat{M}_۲=\widehat{M}_۳$

۲) $\widehat{M}_۳=۲\widehat{M}_۲$

۳) $\widehat{M}_۳=۲\widehat{M}_۱$

۴) $\widehat{M}_۱=\widehat{M}_۲$

۹۹۲. در صفحه خط d و دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط مفروض‌اند. برای یافتن نقطه‌ای بر روی خط d که مجموع فاصله‌های آن از دو نقطه A و B کم‌ترین مقدار را داشته باشند، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

۱) بازتاب ۲) تجانس

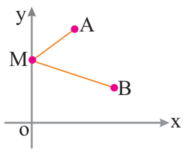
۳) دوران ۴) انتقال

۹۹۳. در شکل زیر برای رسم مثلث ABC که رأس C از آن روی خط Δ باشد و محیط مثلث حداقل مقدار ممکن باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

۱) بازتاب ۲) تجانس

۳) انتقال ۴) دوران

۹۹۴. نقاط $A\begin{vmatrix}1\\5\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}3\\2\end{vmatrix}$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض‌اند، نقطهٔ M روی محور yها می‌لغزد، کم‌ترین اندازهٔ خط شکستهٔ AMB کدام است؟ (مشابه داخل - ۹۸)



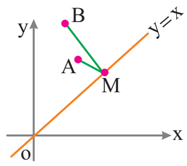
۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۸

۹۹۵. نقاط $A\begin{vmatrix}2\\4\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}1\\6\end{vmatrix}$ در صفحهٔ مختصات مفروض‌اند، نقطهٔ M روی نیمساز ناحیهٔ اول می‌لغزد، کمترین اندازهٔ خط شکسته AMB کدام است؟ (مشابه داخل - ۹۸)



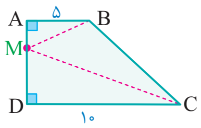
۱) ۴

۲) ۶

۳) ۵

۴) ۱۰

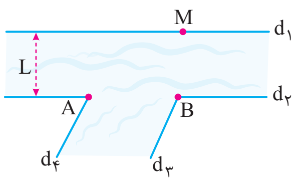
۹۹۶. در ذوزنقهٔ قائم شکل مقابل طول ساق قائم ۸ و قاعده‌ها ۵ و ۱۰ هستند. نقطهٔ M روی ساق قائم می‌لغزد، کم‌ترین طول خط شکستهٔ BMC کدام است؟



۱) ۱۷ ۲) ۱۶

۳) ۱۵ ۴) ۱۴

۹۹۷. می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها سه اسکله بسازیم، جای دو اسکلهٔ A و B مطابق شکل مشخص است، برای پیدا کردن جایگاه اسکلهٔ M که قایق‌ها هنگام طی مسیر MABM کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند، کدام تبدیل مناسب است؟



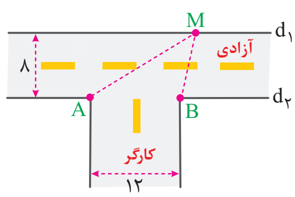
۱) انتقال به اندازهٔ بردار $\vec{L}$

۲) دوران 180° نقطهٔ A حول نقطهٔ B

۳) تجانس با نسبت ۱- نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ B

۴) بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d_1

۹۹۸. شکل زیر دو خیابان متقاطع آزادی و کارگر با عرض ۸ و ۱۲ را نشان می‌دهد، شخصی می‌خواهد از نقطهٔ A به سمت دیگر خیابان آزادی رفته و سپس به نقطهٔ B برود، طول کوتاه‌ترین مسیر طی شده، توسط شخص کدام است؟



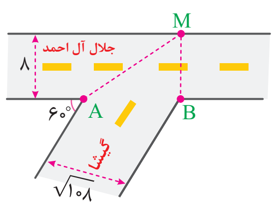
۱) ۱۰

۲) ۲۰

۳) ۱۵

۴) ۲۵

۹۹۹. مطابق شکل دو خیابان گیشا و اتوبان جلال آل‌احمد با زاویهٔ 60° همدیگر را قطع کرده‌اند، شخصی می‌خواهد از نقطهٔ A در انتهای خیابان گیشا به آن طرف اتوبان جلال آل‌احمد در نقطهٔ M رفته و سپس به نقطهٔ B در انتهای دیگر خیابان گیشا برود. اگر عرض اتوبان جلال آل‌احمد ۸ و عرض خیابان گیشا $\sqrt{108}$ باشد، کم‌ترین طول مسیری که این شخص می‌تواند طی کند، کدام است؟



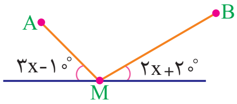
۱) ۲۰

۲) ۲۵

۳) ۱۵

۴) ۲۴

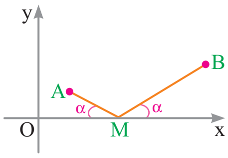
۱۰۰۰. دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط d مفروض‌اند، اگر نقطهٔ M طوری قرار گرفته باشد که خط شکسته AMB کم‌ترین طول را داشته باشد، زاویهٔ $\widehat{AMB}$ کدام است؟



۱) ۴۰° ۲) ۵۰°

۳) ۶۰° ۴) ۲۰°

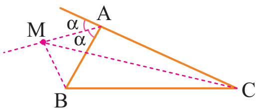
۱۰۰۱. اگر $A(۲,۱)$ و $B(۵,۳)$ و نقطهٔ M مطابق شکل روی محور xها قرار گرفته باشد، اندازهٔ خط شکسته AMB کدام است؟



۱) ۵ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۸

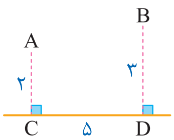
۱۰۰۲. در شکل مقابل، نقطهٔ M روی نیمساز خارجی $\hat{A}$ قرار دارد. نسبت $\dfrac{MB+MC}{AB+AC}$ چگونه است؟



۱) بزرگ‌تر از ۱ ۲) کوچک‌تر از ۱

۳) برابر با ۱ ۴) نامشخص

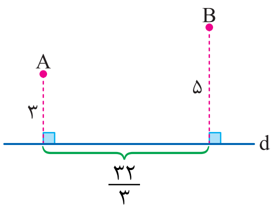
۱۰۰۳. در شکل زیر $CD=۵$, $AC=۲$, $BD=۳$. فرض کنیم نقطهٔ M روی خط d واقع است، کم‌ترین مقدار $AM+MB$ کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$

۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt{۵}$

۱۰۰۴. در شکل زیر نقطهٔ M را روی خط d طوری به‌دست می‌آوریم که $AM+BM$ کم‌ترین مقدار را داشته باشد. طول AM چقدر است؟



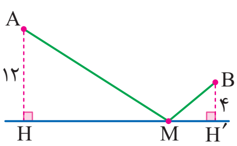
۱) ۷

۲) ۶

۳) ۴

۴) ۵

۱۰۰۵. در شکل مقابل، نقاط A و B ثابت هستند. اگر کم‌ترین مقدار $AM+MB$ برابر ۳۲ باشد، زاویهٔ $H\hat{A}M$ کدام است؟



۱) ۱۵°

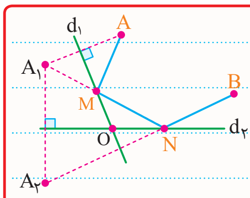
۲) ۳۰°

۳) ۴۵°

۴) ۶۰°

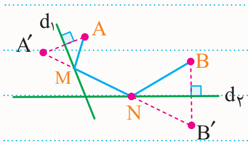
کاربرد مسئله هرون [تیپ دوم]

دو خط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ و نقاط ثابت A و B مطابق شکل مفروض‌اند، اگر نقطهٔ M روی خط $d_۱$ و نقطهٔ N روی خط $d_۲$ بلغزد، برای پیدا کردن کم‌ترین طول خط شکستهٔ AMNB کافیست قرینهٔ A را نسبت به $d_۱$ پیدا کرده و $A_۱$ بنامیم، حال اگر قرینهٔ $A_۱$ را نسبت به خط $d_۲$ پیدا کرده و $A_۲$ بنامیم، $A_۲B$ برابر با کم‌ترین طول خط شکستهٔ AMNB است.

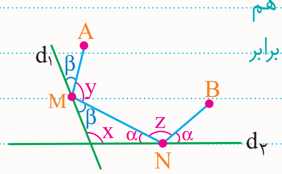


$$\boxed{Min(AMNB)=|A_۲B|}$$

STOP یک راه دیگر برای حل این مسئله این است که بازتاب A نسبت به $d_۱$ و بازتاب B نسبت به $d_۲$ یعنی نقاط A' و B' را پیدا کرده و از A' به B' وصل کنیم تا این دو خط را در M و N قطع کنند. در این صورت خط شکستهٔ AMNB کوتاه‌ترین طول را دارد و اندازهٔ آن با $|A'B'|$ برابر است.



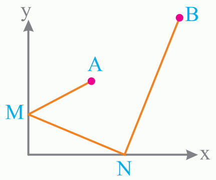
در هر یک از دو روش فوق وقتی AMNB کوتاه‌ترین طول را دارد، زاویه‌های طرفین M و زاویه‌های طرفین N باید با هم برابر باشد و برعکس [هرگاه این زاویه‌ها با هم برابر باشد، این کوتاه‌ترین طول است]. در ضمن در این حالت زاویهٔ دو خط $d_۱$ و $d_۲$ برابر با میانگین زوایای داخلی خط شکستهٔ AMNB است یعنی $x=\dfrac{y+z}{۲}$



STOP قضیهٔ فوق را برای بیش از دو خط $d_۱$ و $d_۲$ نیز می‌توان تعمیم داد.

ادامه ...

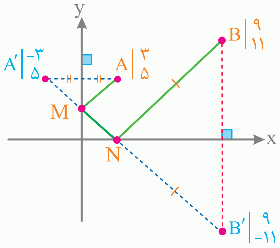
Test نقاط $A\left|\begin{matrix}3\\5\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}9\\11\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض‌اند، دو نقطهٔ M و N همواره روی دو محور می‌لغزند. کم‌ترین اندازه خط شکستهٔ AMNB، کدام است؟ (داخل ـ ۹۸)



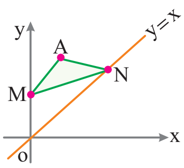
۱) ۱۸
۲) ۱۹
۳) ۲۰
۴) ۲۱

۳ اگر نقطهٔ A را نسبت به محور y و نقطهٔ B را نسبت به محور x قرینه کنیم و نقاط 'A و 'B را به هم وصل کنیم تا محور xها و yها را در N و M قطع کند، در این صورت خط شکستهٔ AMNB کم‌ترین اندازه را خواهد داشت چون برابر 'A'B است.

$$\text{Min}|AMNB| = |A'B'| = \sqrt{12^2+16^2} = 20$$

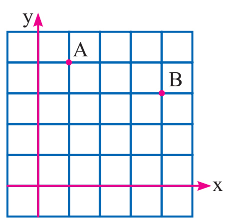


۱۰۰۶. نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right.$ مفروض است، نقطهٔ M روی محورyها و نقطهٔ N روی نیمساز ناحیهٔ اول می‌لغزند، کمترین محیط مثلث AMN کدام است؟ (مشابه داخل ـ ۹۸)



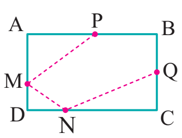
۱) $4\sqrt{2}$
۲) $2\sqrt{3}$
۳) $\sqrt{10}$
۴) $2\sqrt{5}$

۱۰۰۷. در شبکهٔ شطرنجی زیر دو نقطهٔ ثابت A و B مفروض‌اند. اندازهٔ کوتاه‌ترین مسیر حرکت از نقطهٔ A به طوری‌که پس از برخورد با محورهای x و y به نقطهٔ B برسیم، برابر کدام است؟ (مشابه داخل ـ ۹۸)



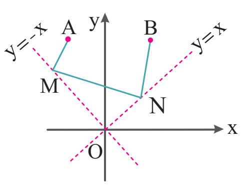
۱) $\sqrt{71}$
۲) $\sqrt{72}$
۳) $\sqrt{73}$
۴) $\sqrt{74}$

۱۰۰۸. مستطیل ABCD به اضلاع ۸ و ۶ مفروض است. اگر نقاط P و Q وسط اضلاع AB و BC باشند و نقاط M و N بر اضلاع AD و DC بلغزند، کم‌ترین طول خط شکستهٔ PMNQ کدام است؟ (مشابه داخل ـ ۹۸)



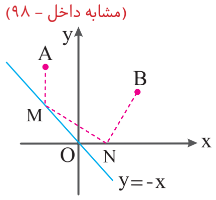
۱) ۱۶
۲) ۲۰
۳) ۱۸
۴) ۱۵

۱۰۰۹. نقاط $A\left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}7\\9\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ مختصات مفروض‌اند، نقطهٔ M روی نیمساز ناحیهٔ دوم و نقطهٔ N روی نیمساز ناحیهٔ اول در حال لغزش هستند، کم‌ترین طول خط شکستهٔ AMNB کدام است؟ (مشابه داخل ـ ۹۸)



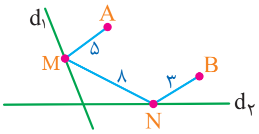
۱) ۲۰
۲) ۱۳
۳) ۱۰
۴) ۸

۱۰۱۰. نقاط $A\left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ مختصات مفروض‌اند، نقطهٔ M روی نیمساز ناحیهٔ دوم و نقطهٔ N روی قسمت مثبت محور xها می‌لغزند، کم‌ترین طول خط شکستهٔ AMNB کدام است؟ (مشابه داخل ـ ۹۸)



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۱۰

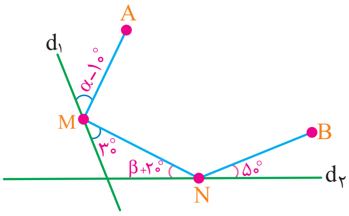
۱۰۱۱. نقاط ثابت A و B مفروض‌اند. نقطهٔ M روی خط d_1 و نقطهٔ N روی خط d_2 طوری می‌لغزد که خط شکسته $AMNB$ کمترین طول را دارد. اگر A' بازتاب A نسبت به d_1 و B' بازتاب B نسبت به خط d_2 باشد، اندازهٔ پاره‌خط $A'B'$ کدام است؟



۱) ۱۴ ۲) ۱۲

۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۰۱۲. نقاط A و B مطابق شکل مفروض‌اند، اگر نقاط M و N روی خطوط d_1 و d_2 بلغزد به‌طوری که خط شکسته $AMNB$ کم‌ترین طول را داشته باشد، زاویهٔ $\alpha+\beta$ کدام است؟

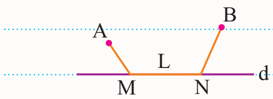


۱) 75° ۲) 70°

۳) 80° ۴) 85°

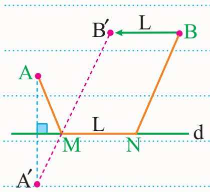
کاربرد مسئله هرون [تیپ سوم]

نقاط A و B در یک طرف خط d مفروض‌اند، نقاط M و N روی خط d به فاصلهٔ L از هم قرار دارند، برای پیدا کردن کوتاه‌ترین طول خط شکستهٔ $AMNB$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:



1 بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d یعنی A' را پیدا می‌کنیم.

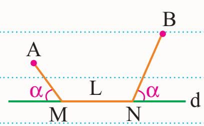
2 نقطهٔ B را به اندازهٔ بردار $\vec{L}$ به سمت A انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ B' به دست آید.



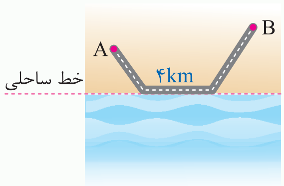
3 از A' به B' وصل می‌کنیم تا خط d را در M قطع کند با معلوم شدن M به اندازهٔ L به سمت راست می‌رویم و به نقطهٔ N می‌رسیم در این صورت حداقل طول خط شکستهٔ $AMNB$ برابر است با:

$$\text{Min}(AMNB)=|A'B'|+L$$

در این حالت زاویهٔ $\hat{M}$ و زاویهٔ $\hat{N}$ باید با هم برابر باشند.



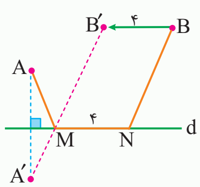
Test در شکل زیر قرار است جاده‌ای از A به B احداث شود به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده باید در کنار ساحل باشد. برای پیدا کردن موقعیت محدودهٔ جادهٔ ساحلی به طوری که کل جاده کوتاه‌ترین طول ممکن را داشته باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟



۱) بازتاب و دوران ۲) بازتاب و انتقال

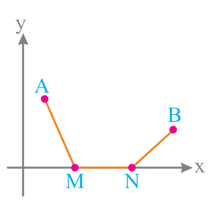
۳) انتقال و تجانس ۴) دوران و تجانس

۲ باید نقطهٔ B را به اندازهٔ ۴ واحد به سمت A انتقال دهیم و همچنین بازتاب A نسبت به خط ساحلی را پیدا کرده و از A' به B' وصل کنیم تا نقطهٔ M به دست آید اگر به اندازهٔ ۴ واحد از M به سمت راست حرکت کنیم به N می‌رسیم و از N به B وصل می‌کنیم، مسیر $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر است.



۱۰۱۳. نقاط $A\left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}8\\1\end{matrix}\right.$ در صفحه مختصات مفروض‌اند، اگر نقاط M و N با فاصله ۳ واحد روی محور xها قرار گرفته باشند، حداقل طول خط شکسته $AMNB$ کدام است؟

(مشابه داخل −۹۹)



۱) ۵

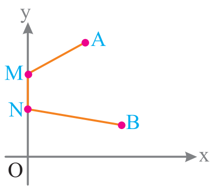
۲) ۶

۳) ۷

۴) ۸

۱۰۱۴. نقاط $A\left|\begin{matrix}۳\\۹\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۵\\۱\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ مختصات مفروض‌اند، اگر نقاط M و N با فاصلهٔ ۲ واحد روی محور yها قرار گرفته باشند، حداقل طول خط شکسته AMNB کدام است؟

(مشابه داخل - ۹۹)



۱) ۵

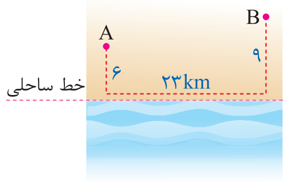
۲) ۱۲

۳) ۱۰

۴) ۸

۱۰۱۵. در شکل زیر قرار است جاده‌ای از A به B احداث شود به طوری که ۳ کیلومتر از آن باید در کنار ساحل باشد، با توجه به اندازه‌های داده شده طول کوتاه‌ترین مسیر از A به B چقدر خواهد بود؟

(مشابه داخل-۹۹)



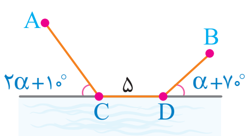
۱) ۲۸

۲) ۲۹

۳) ۳۲

۴) ۲۵

۱۰۱۶. دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه‌ای واقع‌اند، یک جاده از A به B ساخته شده که ۵ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه واقع شده است، اگر مسیر ACDB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد، زاویهٔ α چند درجه است؟



۱) ۵۰°

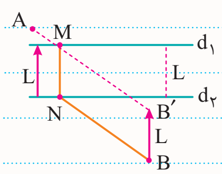
۲) ۶۰°

۳) ۴۰°

۴) ۳۰°

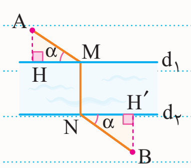
کاربرد مسئلهٔ هرون [تیپ چهارم]

دو خط $d_۱$ و $d_۲$ به فاصلهٔ L از هم قرار دارند، اگر نقاط A و B در طرفین $d_۱$ و $d_۲$ قرار گرفته باشند و پاره‌خط MN عمود بر هر دو خط $d_۱$ و $d_۲$ باشد، برای پیدا کردن کم‌ترین طول خط شکسته AMNB کافیست B را به اندازهٔ بردار L به موازات بردار L انتقال دهیم و از A به B′ وصل کنیم تا خط $d_۱$ را در M قطع کند، حال اگر از M عمودی بر $d_۲$ رسم کنیم تا آن را در N قطع کند، در این صورت AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است و اندازهٔ آن برابر است با:



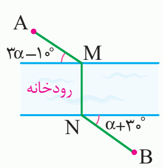
$$\mathrm{Min}(AMNB)=|AB'|+L$$

اگر AMNB کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطهٔ A و B باشد، زاویه‌های $\widehat{M}$ و $\widehat{N}$ با هم برابرند و مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ساخته شده در دو طرف خط‌های $d_۱$ و $d_۲$ متشابه‌اند.



$$\widehat{M}=\widehat{N}\Rightarrow \overset{\Delta}{AHM}\sim\overset{\Delta}{NBH'}$$

Test دو شهر A و B در دو طرف رودخانه قرار دارند، می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، اگر کوتاه‌ترین مسیر بین A و B باشد، α کدام است؟



۱) ۱۰°

۲) ۲۰°

۳) ۳۰°

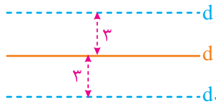
۴) ۲۵°

۲ باید زاویه‌های $\widehat{M}$ و $\widehat{N}$ با هم برابر باشند:

$$۳\alpha-۱۰^\circ=\alpha+۳۰^\circ\Rightarrow ۲\alpha=۴۰^\circ\Rightarrow \alpha=۲۰^\circ$$

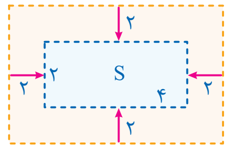
G ترسیم‌های هندسی و استدلال Drawings Geometric

1 ۴ نقاط مورد نظر روی خطوط $d_۱ , d_۲$ قرار دارند و از آن‌جایی که هر خط شامل بی‌شمار نقطه است، بنابراین گزینهٔ ۴ جواب است.



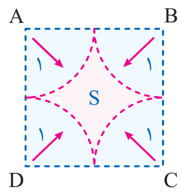
2 ۱ برای این‌که یک سکه کاملاً درون یک منحنی بسته قرار بگیرد باید فاصلهٔ مرکز سکه از تمام نقاط منحنی از شعاع سکه بزرگ‌تر باشد، بنابراین باید فاصلهٔ مرکز سکه از تمام اضلاع مستطیل بیشتر از ۲ باشد:

$S=۴\times۲=۸$



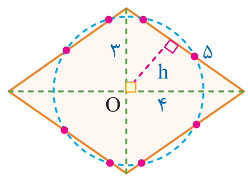
3 ۲ مکان هندسی نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از رأس A بزرگ‌تر از ۱ است، بیرون دایرهٔ به مرکز A و به شعاع ۱ است و به طریق مشابه در سایر رئوس نیز این داستان برقرار است. بنابراین مکان هندسی موردنظر مطابق شکل است و مساحت آن برابر است با:

$S=۲^۲-۴(\frac{۱}{۴}\pi\times۱^۲)=۴-\pi$



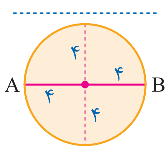
4 ۳ در این لوزی فاصلهٔ مرکز تا هرکدام از اضلاع را پیدا می‌کنیم:

$h\times۵=۳\times۴\Rightarrow h=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$



از آن‌جایی که $۳>۲/۵>۲/۴$ است، دایرهٔ به مرکز O و به شعاع ۲/۵ هر ضلع لوزی را در دو نقطه قطع می‌کند، یعنی کلاً ۸ نقطه وجود دارد.

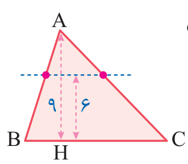
5 ۱ نقاطی که به فاصلهٔ ۵ واحد از قطر AB قرار دارند روی دو خط به موازات AB و به فاصلهٔ ۵ واحد از آن قرار دارند که این دو خط دایره را قطع نمی‌کنند.



6 ۳ ابتدا از روی قاعده و مساحت مثلث ارتفاع آن را به دست می‌آوریم:

$\underbrace{S}_{۳۶}=\frac{۱}{۲}AH\times\underbrace{BC}_{۸}\Rightarrow AH=۹$

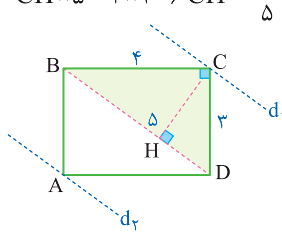
چون $۹>۶$ است، مطابق شکل دو نقطه وجود دارد.



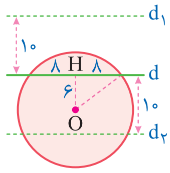
7 ۳ نقاطی که به فاصلهٔ ۲/۴ از قطر BD قرار دارند، روی دو خط به موازات BD و به فاصلهٔ ۲/۴ از آن قرار دارند. حال ارتفاع CH از مثلث BCD را پیدا می‌کنیم:

$CH\times۵=۳\times۴\Rightarrow CH=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$

چون $CH=۲/۴$ است، بنابراین دو خط $d_۱$ و $d_۲$ دقیقاً از نقاط A و C می‌گذرند، یعنی دو نقطه روی محیط مستطیل وجود دارد.



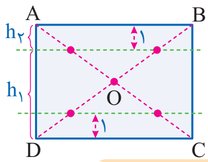
8 ۱ نقاطی که به فاصلهٔ ۱۰ واحد از خط d قرار دارند روی دو خط $d_۱$ و $d_۲$ به فاصلهٔ ۱۰ واحد از d واقع‌اند، حال به کمک فیثاغورس شعاع دایره هم ۱۰ به دست می‌آید؛ بنابراین یکی از این دو خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.



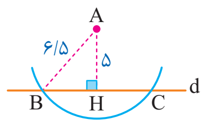
9 ۳ می‌دانیم هر نقطه درون مستطیل مجموع فاصله‌هایش از AB و CD برابر عرض مستطیل است. حال قرار است که اختلاف فاصله‌هایش نیز ۴ باشد، بنابراین:

$\begin{cases}h_۱+h_۲=۶\\h_۱-h_۲=۴\end{cases}\Rightarrow h_۱=۵ , h_۲=۱$

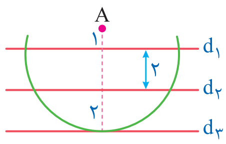
همان‌طور که می‌بینید دو خط با شرایط فوق وجود دارد که در مجموع ۴ نقطه قطرها را قطع می‌کنند.



10 ۲ نقاطی که به فاصلهٔ ۶/۵ از نقطهٔ A قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۶/۵ قرار دارند که چون $۶/۵>۵$ است این دایره خط d را در ۲ نقطه قطع می‌کند و همین نقاط جواب‌های تست هستند.



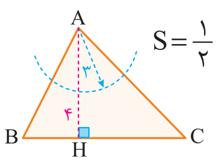
11 ۴ نقاطی که به فاصلهٔ ۵ واحد از A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۵ واحد قرار دارند که این دایره در ۵ نقطه با این خطوط برخورد می‌کند.



12 ۱ نقاطی که به فاصلهٔ ۳ واحد از رأس A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۳ واحد قرار دارند. حال برای این که ببینیم آیا این دایره قاعده BC را قطع می‌کند یا نه باید ارتفاع مثلث را بدانیم:

$S=\frac{۱}{۲}AH\times BC\Rightarrow ۱۲=\frac{۱}{۲}\times AH\times۶\Rightarrow AH=۴$

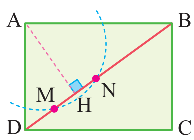
بنابراین دایرهٔ فوق قاعدهٔ BC را قطع نمی‌کند، یعنی هیچ نقطه‌ای وجود ندارد.



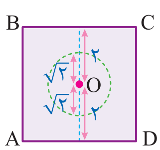
13 ۴ نقاطی که فاصلهٔ آن از نقطهٔ A کمتر از ۲/۵ است درون دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۲/۵ قرار دارند، حالا باید ببینیم که وضع این دایره نسبت به قطر BD چگونه است؟

$AH\times۵=۳\times۴\Rightarrow AH=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$

بنابراین این دایره قطر را در دو نقطهٔ M و N قطع می‌کند و تمام نقاط روی MN فاصلهٔ آن‌ها از A کمتر از ۲/۵ است، یعنی بی‌شمار نقطه وجود دارد.

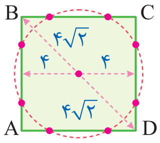


14 ۴ نقاطی که به فاصلهٔ $\sqrt{۲}$ واحد از مرکز مربع قرار دارند، روی دایرهٔ به مرکز O و به شعاع $\sqrt{۲}$ واحد قرار دارند. حال باید دید این دایره در چند نقطه محیط را قطع می‌کند که مطابق شکل مقابل این دایره هرگز با اضلاع مربع نقطهٔ تقاطعی ندارد.

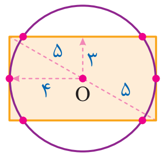


15 ۴ دایرهٔ به شعاع ۵ واحد و به مرکز مربع، محیط را در ۸ نقطه قطع می‌کند

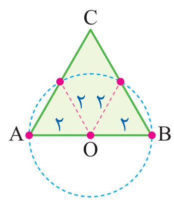
چون ۵ از نصف ضلع مربع بزرگ‌تر شده و از نصف قطر $۵/۶ = ۴\sqrt{۲} = \frac{۸\sqrt{۲}}{۲}$ کمتر است، یعنی $\frac{a}{۲} < R < \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ است.



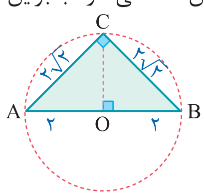
16 ۳ دایرهٔ به شعاع ۴ واحد و به مرکز نقطهٔ O برعرض‌های مستطیل مماس شده و طول‌های آن را در ۴ نقطه قطع می‌کند، پس در مجموع ۶ نقطه وجود دارد.



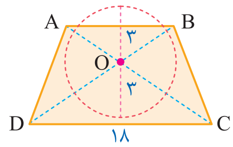
17 ۳ نقاطی که به فاصلهٔ ۲ واحد از نقطهٔ O وسط ضلع AB قرار دارند روی دایرهٔ به شعاع ۲ و به همان مرکز هستند که همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌کنید این دایره در ۴ نقطه محیط مثلث را لمس می‌کند.



18 ۳ دایرهٔ به شعاع ۲ و به مرکز وسط وتر از هر سه رأس مثلث می‌گذرد، بنابراین ۳ نقطه روی محیط و به فاصلهٔ ۲ واحد از وسط وتر وجود دارد. [وتر به کمک فیثاغورس به دست می‌آید و OC هم به کمک فیثاغورس در OAC به دست می‌آید.]



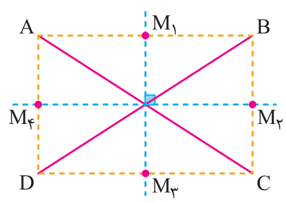
19 ۳ نقاط به فاصلهٔ ۳ واحد از نقطهٔ O روی دایره به شعاع ۳ واقع‌اند، حال باید ببینیم این دایره قاعده‌ها را در چند نقطه قطع می‌کند، بنابراین ارتفاع ذوزنقه را به دست می‌آوریم:



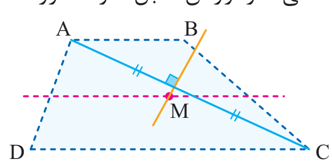
$$S=\frac{۱}{۲}(AB+CD)\times h \Rightarrow ۹۰=\frac{۱}{۲}(۱۸+۱۲)\times h \Rightarrow h=\frac{۱۸۰}{۳۰}=۶$$

بنابراین دایرهٔ به شعاع ۳ در دو نقطه قاعدهٔ کوچک را قطع می‌کند.

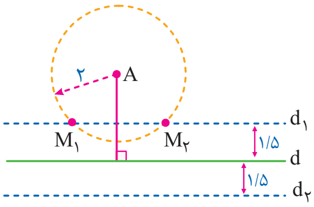
20 ۳ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو قطر مستطیل به یک فاصله هستند، محورهای تقارن مستطیل هستند، این خطوط محیط مستطیل را در ۴ نقطه قطع می‌کنند.



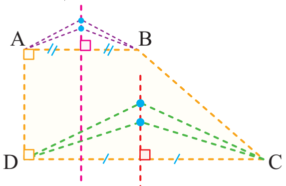
21 ۲ مکان هندسی نقاطی که از دو قاعده به یک فاصله است، خط میانگین ذوزنقه است، از طرفی مکان هندسی نقاطی که از دو رأس مقابل A و C ذوزنقه به یک فاصله است، عمودمنصف AC است، حال اشتراک این دو مکان هندسی همواره یک نقطه مانند M است.



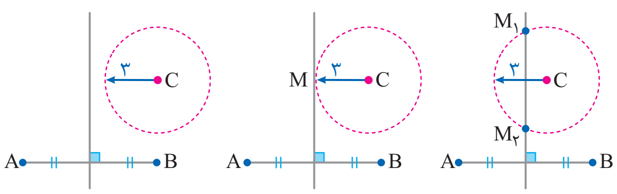
22 ۳ مکان هندسی نقاطی که از A به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر هستند، دایره‌ای به شعاع ۲ و به مرکز A است و همچنین مکان هندسی نقاطی که به فاصلهٔ ۱/۵ سانتی‌متر از d هستند دو خط به موازات d و در طرفین آن و به فاصلهٔ ۱/۵ سانتی‌متر از آن هستند، بنابراین تعداد نقاط تقاطع این دو مکان هندسی مطابق شکل برابر ۲ است.



23 ۱ عمودمنصف‌های قاعده‌های AB و CD همواره موازی هم هستند و نقطهٔ برخوردی ندارند، بنابراین هیچ نقطه‌ای وجود ندارد که هم از A , B و هم از C , D به یک فاصله باشد.

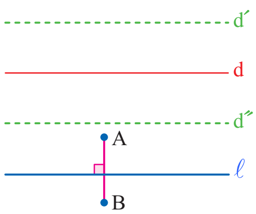


24 ۴ تعداد نقاط هم‌فاصله از A , B که به فاصلهٔ 3cm از C باشد، همواره یکی از سه عدد صفر، یک یا دو است و هرگز برابر ۴ نیست.

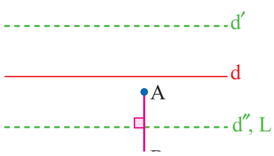


25 ۴ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمود منصف AB و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد، دو خط موازی d و به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از آن هستند، بنابراین نقطهٔ برخورد ℓ (عمود منصف AB) و دو خط موازی d' , d'' جواب مسئله است که سه حالت امکان‌پذیر است:

① بدون برخورد [هیچ جواب]



② بی‌شمار برخورد [بی‌شمار جواب]



③ ۲ برخورد [دو جواب]