آشنایی با نظریهٔ اعداد

فصل پنجم

استدلال ریاضی

A ۷۸۹- اگر مجموع ۵ عدد طبیعی، عددی فرد و حاصل‌ضرب آن‌ها عددی زوج باشد، چه تعداد از این اعداد می‌توانند فرد باشند؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

A ۷۹۰- اگر a، b و c سه عدد زوج متوالی باشند، عبارت $A = abc + a + b + c$ همواره بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

A ۷۹۱- اگر a و b دو عدد طبیعی متوالی باشند $(a < b)$ و حاصل عدد $۴ab + ۱$ برابر با مربع عددی طبیعی مانند c باشد، آن‌گاه c کدام است؟

۱) $\frac{a + ۴b}{۲}$ ۲) $\frac{۴a + b}{۲}$ ۳) $a + b$ ۴) $۲a - b$

A ۷۹۲- اگر a و b اعداد گویا بوده و $a(\sqrt{۲} - ۱) + b(۳ - ۲\sqrt{۲}) = ۴$ باشد، حاصل $۳a - b$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

B ۷۹۳- اگر a، b و c سه عدد صحیح دلخواه باشند، کدام‌یک از اعداد زیر همواره زوج است؟

۱) $abc + (a + ۱)(b + ۱)(c + ۱)$ ۲) $(a + ۱)(b + ۱)(c + ۱) + (a + ۲)(b + ۲)(c + ۲)$

۳) $(a + ۱)(b + ۲)(c + ۳) + (a + ۲)(b + ۱)(c + ۳)$ ۴) $(a + ۲)(b + ۴)(c + ۶) + (a - ۲)(b - ۴)(c - ۶)$

A ۷۹۴- اگر a و b اعدادی گنگ و c عددی گویا باشد، کدام‌یک از اعداد زیر، همواره عددی گنگ است؟

۱) $a + c$ ۲) $a - b$ ۳) $a^۲$ ۴) ac

A ۷۹۵- اگر a عددی گویا و b عددی گنگ باشد، چه تعداد از اعداد $a + b, a \times b, a + b^۲, b^a$ همواره گنگ هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

A ۷۹۶- اگر α عددی گنگ باشد، کدام عدد زیر، الزاماً عددی گنگ است؟

۱) $\alpha^۲ + ۳\alpha$ ۲) $(|\alpha| + ۲)^۲$ ۳) $\frac{۲\alpha - ۱}{\alpha + ۱}$ ۴) $\alpha - \frac{۲}{\alpha}$

A ۷۹۷- کدام عدد زیر، مثال نقض حکم «مجموع هر n عدد متوالی بر n بخش‌پذیر است.» می‌باشد؟

۱) ۳۹ ۲) ۴۲ ۳) ۴۵ ۴) ۴۹

A ۷۹۸- در کدام‌یک از گزینه‌های زیر، عبارت داده‌شده می‌تواند به ازای مقادیر مختلف طبیعی n، هم زوج و هم فرد باشد؟

۱) $۵n^۲ - ۳n + ۱۰$ ۲) $۴n^۲ - ۲n + ۷$ ۳) $۳n^۲ - ۵n + ۷$ ۴) $۶n^۲ - ۵n + ۱۰$

A ۷۹۹- اگر عبارت $n^۲ - ۴n + ۹$ مضرب ۵ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲n + ۱$ بر ۵ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

A ۸۰۰- به ازای چند عدد صحیح از مجموعهٔ $A = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۲۷\}$، عبارت $\frac{n^۲(n + ۱)^۲}{۴}$ زوج است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

A ۸۰۱- روش اثبات درستی یا نادرستی گزاره‌های «مجموع هر دو عدد گویا، همواره عددی گویا است.»، «مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، همواره عددی گنگ است» و «مجموع دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است.» به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

۱) برهان خلف ـ اثبات مستقیم ـ مثال نقض ۲) اثبات مستقیم ـ برهان خلف ـ مثال نقض

۳) برهان خلف ـ مثال نقض ـ اثبات مستقیم ۴) اثبات مستقیم ـ مثال نقض ـ برهان خلف

B ۸۰۲- فرض کنید $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ عددهایی صحیح $b_۱, b_۲, \ldots, b_n$ نیز همان اعداد با ترتیبی دیگر باشند. به ازای کدام‌یک از مقادیر زیر برای n، می‌توان مطمئن بود که عدد $(a_۱ - b_۱)(a_۲ - b_۲)\ldots(a_n - b_n)$، عددی زوج است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

B ۸۰۳- چه تعداد از گزاره‌های شرطی زیر صحیح است؟

الف) اگر $x^۲ - y^۲$ زوج باشد، $x^۲ - y^۲$ بر ۴ بخش‌پذیر است.

ب) اگر p عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $p^۲$ بر ۶ برابر با ۱ است.

پ) اگر a عددی اول باشد، $a + ۱$ عددی اول نمی‌باشد.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

A ۸۰۴- عکس کدام‌یک از عبارات شرطی زیر، صحیح نمی‌باشد؟

۱) اگر $A\cup C=B\cup C$ باشد، آن‌گاه $A=B$
۲) اگر $a>b$ باشد، آن‌گاه $a^3>b^3$
۳) اگر $xy>0$ باشد، آن‌گاه $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$
۴) اگر a و b دو عدد فرد باشند، a^2-b^2 بر ۸ بخش‌پذیر است.

A ۸۰۵- در کدام‌یک از گزینه‌های زیر، دو گزارهٔ داده‌شده هم‌ارز نمی‌باشند؟

۱) $a+\frac{1}{a}\leq -2$ و $a<0$
۲) $a<b$ و $a^3<b^3$
۳) نقطهٔ C روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد و فاصلهٔ نقطهٔ C از نقاط A و B یکسان باشد.
۴) ab فرد باشد و $a+b$ زوج باشد.

A ۸۰۶- برای اثبات .... گزارهٔ « $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ » با شرط .... از روش .... استفاده می‌کنیم.

۱) نادرستی ـ $xy>0$ ـ مثال نقض
۲) درستی ـ $xy>0$ ـ اثبات بازگشتی
۳) درستی ـ $x\geq 0, y\geq 0$ ـ اثبات بازگشتی
۴) درستی ـ $x\geq 0, y\geq 0$ ـ برهان خلف

A ۸۰۷- در اثبات نامساوی $\frac{a-b}{b}\leq\frac{4a-5b}{10a}$ به ازای اعداد حقیقی و مثبت a و b به کدام رابطهٔ بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(3a-2b)^2+(a-b)^2\geq 0$
۲) $(3a+2b)^2+(a-b)^2\geq 0$
۳) $(a-2b)^2+(2a-b)^2\geq 0$
۴) $(a+2b)^2+(3a-b)^2\geq 0$

A ۸۰۸- اگر x و y دو عدد مثبت باشند، در اثبات نامساوی $\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ به روش اثبات بازگشتی، به کدام رابطهٔ بدیهی زیر می‌رسیم؟

۱) $(x+y)(x-y)^2\geq 0$
۲) $(x-y)(x+y)^2\geq 0$
۳) $(x-y)^2\geq 0$
۴) $(x+y)^2\geq 0$

A ۸۰۹- در اثبات نامساوی $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$ به کدام رابطهٔ بدیهی زیر می‌رسیم؟

۱) $(ac-bd)^2\geq 0$
۲) $(a-c)^2+(b-d)^2\geq 0$
۳) $(ad-bc)^2\geq 0$
۴) $(a-d)^2+(b-c)^2\geq 0$

A ۸۱۰- در اثبات حکم $x^2+y^2+1\geq xy+x+y$، برای اعداد حقیقی x و y، به کدام عبارت بدیهی زیر می‌رسیم؟

۱) $(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\geq 0$
۲) $(x+y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\geq 0$
۳) $(x-y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2\geq 0$
۴) $(x+y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2\geq 0$

A ۸۱۱- در اثبات نامساوی $x^2+y^2+z^2\geq xy-xz+yz$، به کدام عبارت بدیهی زیر می‌رسیم؟

۱) $(x-y)^2+(x+z)^2+(y-z)^2\geq 0$
۲) $(x+y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\geq 0$
۳) $(x+y-z)^2\geq 0$
۴) $(x-\frac{y}{2})^2+(y-\frac{z}{2})^2+(z-\frac{x}{2})^2\geq 0$

B ۸۱۲- اگر عبارت $a^2+4b^2+3c^2+A\geq 2a+12b+6c$ همواره درست باشد، حداقل مقدار A کدام است؟

۱) ۱۳
۲) ۱۴
۳) ۱۵
۴) ۱۶

A ۸۱۳- هرگاه a و b دو عدد منفی و $A=\frac{5ab}{a^2+b^2}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $A\geq\frac{5}{2}$
۲) $A\leq\frac{5}{2}$
۳) $A\geq\frac{-5}{2}$
۴) $A\leq\frac{-5}{2}$

B ۸۱۴- اگر a، b و c هر سه مثبت باشند، حداقل مقدار عبارت $A=(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۲

B ۸۱۵- اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، حداقل مقدار عبارت $\frac{(2a^2+2b^2)(3a^4+3b^4)}{(ab)^3}$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۶
۳) ۲۰
۴) ۲۴

A ۸۱۶- برای اثبات .... حکم «اگر α و β دو عدد گنگ و $\alpha+\beta$ عددی گویا باشد، آن‌گاه $\alpha^2+3\alpha\beta+2\beta^2$ عددی گنگ است» از .... استفاده می‌کنیم. $(\alpha+\beta\neq 0)$

۱) درستی ـ برهان خلف
۲) نادرستی ـ مثال نقض
۳) درستی ـ اثبات بازگشتی
۴) درستی ـ اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها

بخش‌پذیری در اعداد صحیح

Ⓐ ۸۱۷- کدام‌یک از نتیجه‌گیری‌های زیر صحیح است؟

۱) $a \mid bc \Rightarrow a \mid b$　۲) $a \mid b^n \Rightarrow a \mid b$　۳) $a \mid b+c \Rightarrow a \mid b$　۴) $ac \mid b \Rightarrow a \mid b$

Ⓐ ۸۱۸- اگر a یک عدد صحیح باشد، به ازای کدام‌یک از مقادیر زیر برای a تابع $f(x)=\frac{7x+a}{x+3}$ دارای تعداد کم‌تری نقطه با طول و عرض صحیح است؟

۱) ۳　۲) ۴　۳) ۵　۴) ۶

Ⓑ ۸۱۹- باقی‌ماندهٔ تقسیم بزرگ‌ترین عدد طبیعی n بر ۴ که در رابطهٔ $n^2+1 \mid 6n+1$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۲　۴) ۳

Ⓐ ۸۲۰- تابع $y=\frac{x^3+12}{x+5}$ را در نظر بگیرید. به ازای کدام‌یک از مقادیر زیر برای x، این تابع شامل نقطه‌ای مانند (a,b) خواهد بود به طوری‌که هر دو مؤلفهٔ آن طبیعی باشند؟

۱) ۱۰۸　۲) ۱۰۹　۳) ۱۱۰　۴) ۱۱۱

Ⓐ ۸۲۱- منحنی $y=\frac{12}{x-2}$ از چند نقطه با مختصات صحیح در ربع سوم دستگاه مختصات می‌گذرد؟

۱) ۴　۲) ۵　۳) ۶　۴) ۸

Ⓐ ۸۲۲- کدام‌یک از نتیجه‌گیری‌های زیر نادرست است؟

۱) $a^7 \mid c^4 \Rightarrow a \mid c$　۲) $a \mid b, b \mid c \Rightarrow a \mid c$　۳) $ab \mid c \Rightarrow a \mid c$　۴) $a \mid bc \Rightarrow a \mid c$

Ⓐ ۸۲۳- اگر $b^3 \mid 112$ و $a^2 \mid 135$، کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲۹　۲) ۷۳　۳) ۵۳　۴) ۵۹

Ⓑ ۸۲۴- اگر $a \mid b+4$ و $a \mid c-3$، به ازای کدام‌یک از مقادیر زیر برای k، عبارت $bc+k$ همواره بر a بخش‌پذیر است؟

۱) ۶　۲) ۸　۳) ۱۲　۴) ۱۶

Ⓑ ۸۲۵- اگر $13 \mid 11x+7y$ و $13 \mid 10x+ky$ آن‌گاه، k کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۲　۲) ۴　۳) ۶　۴) ۸

Ⓐ ۸۲۶- اگر از روابط $d \mid ax+b$ و $d \mid a'x+b'$ بتوان نتیجه گرفت که $d=\pm 1$ است، کدام‌یک از روابط زیر درست است؟

۱) $ab-a'b'=\pm 1$　۲) $aa'-bb'=\pm 1$　۳) $ab'-ba'=\pm 1$　۴) $ab+a'b'=\pm 1$

Ⓐ ۸۲۷- اگر $a>1$ و از روابط $a \mid 9k+7$ و $a \mid 7k+b$، تنها یک مقدار ممکن برای a به دست آید، آن‌گاه مقدار b کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۷　۲) ۸　۳) ۹　۴) ۱۱

Ⓐ ۸۲۸- کدام‌یک از گزینه‌های زیر، درست است؟

۱) $4 \mid x-y \Rightarrow 16 \mid x^2-y^2$　۲) $3 \mid x-y \Rightarrow 9 \mid x^2-y^2$　۳) $2 \mid x-y \Rightarrow 4 \mid x^2-y^2$　۴) $3 \mid x+y \Rightarrow 9 \mid x^2-y^2$

Ⓐ ۸۲۹- اگر $x-y \mid 3x+11y$، در این صورت کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $x-y \mid 11x-3y$　۲) $x-y \mid 11x+3y$　۳) $x-y \mid 8x+8y$　۴) $x-y \mid 3x-11y$

Ⓑ ۸۳۰- مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی مضرب ۶ که مربع و مکعب آن به ترتیب بر ۴۲ و ۵۴۰ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۶

Ⓑ ۸۳۱- باقی‌ماندهٔ تقسیم $19^{66}+11^{66}$ بر ۲۴۱ کدام است؟

۱) ۱-　۲) صفر　۳) ۱　۴) ۶۶

Ⓑ ۸۳۲- باقی‌ماندهٔ تقسیم $2025^{88}-1843^{88}$ بر ۱۳ کدام است؟

۱) ۱　۲) صفر　۳) ۸　۴) ۵

Ⓐ ۸۳۳- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی n، 3^n-2^n بر ۶۵ بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۶　۲) ۱۸　۳) ۲۰　۴) ۲۲

A ۸۳۴- عدد $۲^{۳۶} - ۳^{۳۶}$ بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر نمی‌باشد؟

۱) ۱۹ ۲) ۳۵ ۳) ۴۲ ۴) ۶۵

A ۸۳۵- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی n، $۲۸ | ۳^n - ۱$ و $۳۹ | ۵^n - ۱$ درست است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

قضیهٔ تقسیم

A ۸۳۶- در یک تقسیم با عوامل طبیعی کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند نادرست باشد؟

۱) اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه بر n بخش‌پذیر باشند، آن‌گاه باقی‌مانده نیز بر n بخش‌پذیر است.

۲) اگر در یک تقسیم، مقسوم و خارج‌قسمت بر n بخش‌پذیر باشند، آن‌گاه باقی‌مانده نیز بر n بخش‌پذیر است.

۳) اگر در یک تقسیم، مقسوم‌علیه و باقی‌مانده بر n بخش‌پذیر باشند، آن‌گاه مقسوم نیز بر n بخش‌پذیر است.

۴) اگر در یک تقسیم، مقسوم‌علیه و خارج‌قسمت بر n بخش‌پذیر باشند، آن‌گاه مقسوم نیز بر n بخش‌پذیر است.

A ۸۳۷- اگر در یک تقسیم، تمامی عوامل، اعداد طبیعی بوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر با ۹۶ باشد، مقسوم کدام‌یک از اعداد زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱۹۰ ۲) ۱۹۴ ۳) ۱۹۸ ۴) ۲۰۲

A ۸۳۸- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ برابر با ۳ و ۵ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $m^2 - 2n$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

A ۸۳۹- در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b باقی‌مانده ۱۷ و خارج‌قسمت ۲۵ می‌باشد. اگر a مضرب ۶ باشد، رقم دهگان کوچک‌ترین عدد طبیعی a، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۹

B ۸۴۰- اگر در تقسیم عدد طبیعی a بر b، باقی‌مانده بیشترین مقدار خود را داشته باشد و $b | ۷ + a$، آن‌گاه چند مقدار برای b وجود دارد؟ $(b > ۱)$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۵

A ۸۴۱- در یک تقسیم، مقسوم ۸۰۰ واحد بیشتر از مقسوم‌علیه بوده و باقی‌مانده ۶۲ است. بیشترین مقدار ممکن برای خارج‌قسمت کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

A ۸۴۲- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد فرد a بر ۱۳ برابر با ۱۰ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۲۶ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱۰ ۳) ۱۳ ۴) ۲۳

B ۸۴۳- در یک تقسیم، مقسوم‌علیه برابر با ۴۴ و باقی‌مانده برابر با ۳۲ است. کوچک‌ترین عدد طبیعی که می‌توان به مقسوم اضافه کرد تا باقی‌مانده تغییر نکند، چند برابر بزرگ‌ترین عدد طبیعی است که می‌توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج‌قسمت تغییر نکند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

A ۸۴۴- بزرگ‌ترین عددی که در تقسیم بر ۴۷، باقی‌مانده‌اش از دو برابر مربع خارج‌قسمت ۳ واحد کم‌تر می‌باشد، کدام است؟

۱) ۱۹۴ ۲) ۲۰۵ ۳) ۲۱۷ ۴) ۲۳۱

B ۸۴۵- بزرگ‌ترین عدد طبیعی که در تقسیم بر ۴۱ دارای خارج‌قسمت و باقی‌ماندهٔ برابر است، چندبرابر کوچک‌ترین عدد طبیعی است که در تقسیم بر ۳۹، دارای خارج‌قسمت و باقی‌ماندهٔ برابر است؟

۱) ۳۹ ۲) ۴۰ ۳) ۴۱ ۴) ۴۲

A ۸۴۶- در یک تقسیم، باقی‌مانده ۶۰ و خارج‌قسمت ۷ می‌باشد. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم‌علیه اضافه کرد، تا با ثابت ماندن مقسوم، خارج‌قسمت تغییر نکند؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

A ۸۴۷- در یک تقسیم با عوامل طبیعی، خارج‌قسمت و باقی‌مانده مساوی‌اند. اگر ۳ واحد از مقسوم‌علیه کم شود، ۵ واحد به خارج‌قسمت اضافه شده و باقی‌مانده صفر می‌شود. حداقل مقدار ممکن برای مقسوم کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۲ ۳) ۳۷ ۴) ۴۰

A ۸۴۸- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷، باقی‌ماندهٔ تقسیم از مربع خارج‌قسمت آن، ۲ واحد کم‌تر است. بزرگ‌ترین مقدار a مضرب کدام است؟

ریاضی داخل ۸۴

۱) ۹ ۲) ۱۲

۳) ۱۴ ۴) ۱۶

B ۸۴۹- در تقسیم عدد ۱۶۵ بر عدد طبیعی b، خارج‌قسمت، مجذور باقی‌مانده است. چند عدد b می‌توان یافت؟ ریاضی داخل ۸۷

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

B ۸۵۰- در یک تقسیم، مقسوم‌علیه برابر با ۴۱ و باقی‌مانده ۱۷ می‌باشد. در صورت اضافه کردن کدام‌یک از اعداد زیر به مقسوم، مقدار باقی‌مانده کاهش می‌یابد؟

۱) ۸۳ ۲) ۹۳ ۳) ۱۰۳ ۴) ۱۱۳

A ۸۵۱- در تقسیم عدد a بر ۶۳ باقی‌مانده ۱۷ است. اگر ۶۰ واحد به a اضافه کنیم، باقی‌مانده و خارج‌قسمت به ترتیب چه تغییری می‌کنند؟

۱) سه واحد کم می‌شود ـ یک واحد اضافه می‌شود. ۲) سه واحد اضافه می‌شود ـ یک واحد اضافه می‌شود.

۳) سه واحد اضافه می‌شود ـ تغییر نمی‌کند. ۴) سه واحد کم می‌شود ـ دو واحد اضافه می‌شود.

B ۸۵۲- اگر عبارت $۳x^۳+۹x^۲$ مربع کامل باشد، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم بیشترین عدد دو رقمی x بر ۵ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۴

A ۸۵۳- اگر در تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۸، باقی‌مانده از $\frac{۵}{۷}$ خارج‌قسمت، ۲ واحد بیشتر باشد، حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۳۷۵ ۲) ۳۹۵ ۳) ۴۱۵ ۴) ۴۲۵

B ۸۵۴- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A بر ۲۴ برابر با ۱۷ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $\frac{A}{۵}$ بر ۱۲ کدام است؟ (عدد A مضرب ۵ است)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

B ۸۵۵- در یک تقسیم، مقسوم برابر با ۱۷۱ بوده و مجموع مقسوم‌علیه، خارج‌قسمت و باقی‌مانده برابر با ۲۹ می‌باشد. مجموع خارج‌قسمت و باقی‌مانده، کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

A ۸۵۶- اگر در یک تقسیم، مقسوم ۱۴ برابر باقی‌مانده باشد و باقی‌مانده دارای حداکثر مقدار خود باشد، مجموع مقسوم‌علیه و خارج‌قسمت کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۱

B ۸۵۷- رقم یکان بزرگ‌ترین عدد طبیعی a که اگر آن را بر ۱۵ و ۲۱ تقسیم کنیم، باقی‌ماندهٔ هر تقسیم با خارج‌قسمت برابر می‌شود، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۷

C ۸۵۸- اگر a عددی اول و دورقمی باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^۴+۴a^۲+۵$ بر ۶، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

B ۸۵۹- اگر $(m,m+۲)=۱$ و $a\,|\,m+۲$، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^۲+m^۲+۳$ بر ۸، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

C ۸۶۰- اگر $(m,m+۱)=(n,n+۲)$ و $m\,|\,n+۴$، باقی‌ماندهٔ تقسیم $m^۲-n^۲$ بر ۸ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۷

B ۸۶۱- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۳ و ۱۰ به ترتیب برابر با ۵ و ۴ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۳۰ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲۰ ۳) ۳۲ ۴) ۴۴

B ۸۶۲- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۴a+۷$ بر b، ۷ واحد از باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۲a+۴$ بر b بیشتر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم 4a بر b کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

B ۸۶۳- در تقسیم اعداد ۱۴۸ و ۱۰۰ بر عدد دورقمی b، باقی‌مانده‌ها به ترتیب ۵ و ۹ می‌باشند. مجموع ارقام عدد b کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

B ۸۶۴- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۲ برابر با ۸ و باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲a بر ۲۳ برابر با ۲۰ بوده و مقدار خارج‌قسمت نیز در این دو تقسیم برابر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۱ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

B ۸۶۵- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد a و ۲a بر b به ترتیب برابر با ۱۳ و ۹ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ۴۱ بر b کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

A ۸۶۶- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a و ۳a بر b به ترتیب ۶ و ۴ باشد، اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار b کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۲

B ۸۶۷- باقی‌ماندهٔ تقسیم دو عدد ۶۲۹ و ۲۴۱ بر عدد طبیعی b به ترتیب برابر ۵ و ۱ است. نسبت بزرگ‌ترین مقدار b به کوچک‌ترین مقدار آن کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

C ۸۶۸- تعداد نقاط با مختصات صحیح که در معادلهٔ $x^2+y^2=۱۳۹۸$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

C ۸۶۹- اگر a عددی زوج باشد، بزرگ‌ترین عددی که عبارت $(a+۸)(a+۶)(a+۴)(a+۲)$ همواره بر آن بخش‌پذیر است، کدام می‌باشد؟

۱) ۲۵۶ ۲) ۳۸۴ ۳) ۵۷۶ ۴) ۸۶۴

C ۸۷۰- به ازای کدام‌یک از مقادیر زیر برای b، عبارت $(a+b)(a+۴۵)(a+۱۷)$ به ازای تمامی مقادیر طبیعی a بر ۳ بخش‌پذیر است؟

۱) ۷۳ ۲) ۸۳ ۳) ۹۵ ۴) ۱۱۴

B ۸۷۱- مجموع مکعبات سه عدد متوالی همواره بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

B ۸۷۲- کدام‌یک از اعداد زیر را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب دو عدد $۶k+۳$ و $۶k'+۵$ نوشت؟

۱) ۶۶۱ ۲) ۶۶۳ ۳) ۶۶۵ ۴) ۶۶۷

C ۸۷۳- کدام‌یک از معادلات زیر، در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب ندارد؟

۱) $x^2-y^2=۴k$ ۲) $x^2-y^2=۴k+۱$ ۳) $x^2-y^2=۴k+۲$ ۴) $x^2-y^2=۴k+۳$

B ۸۷۴- کدام‌یک از معادلات زیر، در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای جواب است؟

۱) $n^3-n=۱۴۳۶۰$ ۲) $n^3-n=۲۴۳۶۰$ ۳) $n^3-n=۳۴۳۶۰$ ۴) $n^3-n=۴۴۳۶۰$

C ۸۷۵- کدام‌یک از نتیجه‌گیری‌های زیر، درست است؟

۱) $۷|(a^2+b^2)\Rightarrow ۴۹|ab$ ۲) $۸|a^2+b^2\Rightarrow ۶۴|ab$ ۳) $۹|a^2+b^2\Rightarrow ۸۱|ab$ ۴) $۱۰|a^2+b^2\Rightarrow ۱۰۰|ab$

ب م م - ک م م

A ۸۷۶- اگر a، b و c اعداد طبیعی باشند، $[a,b]=b$ و $(b,c)=b$ باشد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) $(a,b)=a$ ۲) $[a,c]=c$ ۳) $(a,c)=a$ ۴) $[b,c]=b$

A ۸۷۷- اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n، دو عدد $۱۲n+۷$ و $۵n-۲$ نسبت به هم اول نباشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

۱) ۵۹ ۲) ۶۷ ۳) ۸۳ ۴) ۸۹

A ۸۷۸- اگر n عددی طبیعی و دو عدد $۹n-۵$ و $n+۴$ دارای مقسوم‌علیه مشترک غیریک باشند، تعداد اعداد دو رقمی n کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

B ۸۷۹- اگر $a=۱۱k+۲$ و $a^3|۷۵۰$، آن‌گاه حاصل $(a,۶۶۰)$ با مربع کدام گزینه بیشترین اختلاف را دارد؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۴ ۴) ۶

B ۸۸۰- اگر $(x,۱۰)=۵$ و $(y,۱۰)=۵$ باشد، حاصل تقسیم $(x+y-۵,۱۰)$ بر $(y,۱۰)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) صفر ۴) ۲

استدلال ریاضی

اثبات مستقیم: با کمک فرض مسأله و مفاهیم و قضایایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، درستی حکم را ثابت می‌کنیم.

مسائلی که به این روش حل می‌کنیم، عموماً به صورت یک حکم شرطی هستند.

مثال **حاصل‌ضرب دو عدد به فرم $6k+1$ و $6k+5$ به کدام صورت است؟**

۱) $36k+1$ ۲) $6k-1$ ۳) $6k+1$ ۴) $6k+2$

پاسخ اعداد به فرم $6k+5$ را می‌توان به شکل $6k'-1$ نیز فرض کرد:

$$(6k+1)(6k+5)=(6k+1)(6k'-1)=36kk'-6k+6k'-1=6k''-1$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

مثال نقض: مثالی است که درستی یک حکم را در حالت کلی رد می‌کند.

اگر احکام مطرح‌شده با سور عمومی نادرست به نظر بیایند، از مثال نقض برای رد آن حکم کمک می‌گیریم.

مثال **کدام گزینه دارای مثال نقض نیست؟**

۱) باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد اول غیر از ۵ و ۷ بر ۱۳، برابر ۲ است.

۲) مربع هر عدد حقیقی از مکعب آن کوچک‌تر است.

۳) اگر برای دو عدد حقیقی a و b داشته باشیم $a \geq b$، آن‌گاه $\frac{b}{a} \leq 1$ $(a \neq 0)$

۴) باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع اعداد اول غیر از ۲ و ۳ بر ۴، برابر ۱ است.

پاسخ مثال نقض برای گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳):

$$1)\ a=17 \Rightarrow 17=13\times 1+\underbrace{4}_{\text{باقی‌مانده}} \qquad 2)\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow x^3<x^2 \quad \left(\frac{1}{8}<\frac{1}{4}\right) \qquad 3)\ \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a}=2>1$$

اثبات گزینهٔ (۴): اعداد اول غیر از ۲ و ۳ به فرم $p=6k\pm 1$ می‌باشند. پس: $p^2=36k^2\pm 12k+1=4k'+1$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها: گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همهٔ موارد ممکن در مورد مسأله را در نظر بگیریم.

این روش منحصر به اثبات مسائلی است که تعداد حالت‌های ممکن برای اثبات آن‌ها متناهی است و امکان بررسی همهٔ حالت‌ها وجود دارد.

هم‌ارزی منطقی زیر دلیلی برای درستی این روش اثبات است:

$$(\underbrace{p \vee q}_{\text{همهٔ حالت‌های ممکن}}) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

هم‌چنین برای هر تعداد متناهی گزارهٔ دلخواه نیز می‌توان گفت:

$$(\underbrace{p_1 \vee p_2 \cdots \vee p_n}_{\text{همه حالت‌های ممکن}}) \Rightarrow r \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow r)$$

تذکر در واقع در طرف دوم نشان می‌دهیم که برقراری همهٔ حالت‌ها گزارهٔ r را نتیجه می‌دهد.

مثال **اگر a مضرب ۳ نباشد، a^2 به کدام صورت است؟**

۱) $3q-1$ ۲) $3q-2$ ۳) $3q$ ۴) $9q-1$

پاسخ چون a مضرب ۳ نیست، پس به یکی از صورت‌های $3k+1$ یا $3k+2$ می‌باشد:

$$a=3k+1 \Rightarrow a^2=\overbrace{9k^2+6k}^{3q}+1=3q+1$$

$$a=3k+2 \Rightarrow a^2=9k^2+12k+4=\underbrace{9k^2+12k+3}_{3q'}+1=3q'+1$$

پس a^2 به فرم $3q+1$ یا همان $3q-2$ است. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

اثبات غیرمستقیم (برهان خلف): ابتدا فرض می‌کنیم حکم نادرست است (فرض خلف)، سپس با استدلال‌هایی منطقی و مبتنی بر فرض به یک نتیجهٔ غیرممکن یا خلاف فرض (تناقض) می‌رسیم.

به جای اثبات درستی قضیه، نادرست بودن نقیض آن را ثابت می‌کنیم. (توجه کنید که $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$)

به این الگو توجه کنید:

فرض می‌کنیم حکم نادرست است ⇐ به یک تناقض می‌رسیم ⇐ پس حکم مسأله درست است.

مثال **اثبات کدام گزینه احتیاج به استدلال به روش برهان خلف ندارد؟**

۱) عدد $\sqrt{5}$ گنگ است.

۲) از یک نقطه خارج یک خط فقط یک خط موازی با خط مفروض می‌توان رسم کرد.

۳) از هر نقطه روی یک خط یا خارج آن فقط یک خط عمود بر آن می‌توان رسم کرد.

۴) اگر α و β گنگ باشند و $\alpha+\beta$ گویا باشد، آن‌گاه $2\alpha+\beta$ گنگ است.

پاسخ گزینهٔ (۲) اصل توازی اقلیدس است و قضیه نیست، پس نیازی به اثبات ندارد، بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

اثبات بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز): دو گزاره معادل‌اند (هم ارزند)، هرگاه دارای ارزش یکسان باشند. برای اثبات درستی یکی از آن‌ها گزارهٔ ساده‌تر را به گزاره‌های ساده‌تر معادل تبدیل می‌کنیم و ادامهٔ این روند ما را به گزاره‌ای بدیهی می‌رساند.

$p \Leftrightarrow q$ زمانی دارای ارزش درست است که p و q معادل باشند، پس می‌توانیم به جای اثبات یکی از آن‌ها دیگری را اثبات کنیم.

مثال **در اثبات درستی رابطهٔ $x^2+y^2+z^2 \ge xy+xz+yz$ به کدام رابطهٔ بدیهی می‌رسیم؟**

۱) $(xy-xz)^2+(x-y)^2+(y-z)^2 \ge 0$

۲) $(x+y)^2+(x-z)^2+z^2 \ge 0$

۳) $(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \ge 0$

۴) $(z-x)^2+(z-y)^2+(z-x-y)^2 \ge 0$

پاسخ طرفین رابطه را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$x^2+y^2+z^2 \ge xy+xz+yz \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2 \ge 2xy+2xz+2yz \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2xz+z^2)+(y^2-2yz+z^2) \ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \ge 0$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

چون مجموع پنج عدد عددی فرد است، باید تعداد اعداد فرد، فرد باشد. اگر در میان ۵ عدد طبیعی، ۲ تا زوج و ۳ تا فرد باشند، مجموع این اعداد، فرد و حاصل‌ضرب آن‌ها زوج خواهد بود. (اگر ۵ تا فرد باشند، حاصل‌ضرب آن‌ها عددی فرد خواهد شد.) البته حالت ۴ تا زوج و یکی فرد هم قابل قبول است که در گزینه‌ها نیست.

۷۹۰ **۲** سه عدد زوج متوالی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a=2k,\ b=2k+2,\ c=2k+4 \quad , \quad (k \ge 0)$$

پس داریم:

$$\begin{cases} abc = 2k(2k+2)(2k+4) = 8\overbrace{\underbrace{k(k+1)(k+2)}_{6q}}^{\text{حاصل‌ضرب ۳ عدد متوالی مضرب !۳ است.}} = 48q \\ a+b+c = 2k+2k+2+2k+4 = 6k+6 = 6(k+1) = 6q' \end{cases} \Rightarrow A = abc+a+b+c = 48q+6q' = 6(8q+q')$$

۷۹۱ **۳**

$$a=k,\ b=k+1 \Rightarrow 4ab+1 = 4k^2+4k+1 = (2k+1)^2$$

$(2k+1)^2$ برابر c^2 است، پس:

$$c = \pm(2k+1) \xrightarrow{a,b\in\mathbb{N}} c = 2k+1 = k+(k+1) = a+b$$

۷۹۲ **۴**

$$a(\sqrt{2}-1)+b(3-2\sqrt{2}) = 4 \Rightarrow a\sqrt{2}-a+3b-2b\sqrt{2} = 4 \Rightarrow \sqrt{2}(a-2b)+(3b-a) = 4$$

چون b و a گویا هستند و سمت راست تساوی عددی گویا است، پس باید ضریب $\sqrt{2}$ برابر صفر باشد تا سمت چپ هم گویا شود، یعنی:

$$\begin{cases} a-2b=0 \\ 3b-a=4 \end{cases} \Rightarrow b=4,\ a=8 \Rightarrow 3a-b = 3(8)-4 = 20$$

۷۹۳ **۴** مثال نقض برای گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳):

۱) $a=b=c=1 \Rightarrow 1+8=9$: فرد

۲) $a=b=c=1 \Rightarrow 8+27=35$: فرد

۳) $a=1,\ b=2,\ c=2 \Rightarrow (2\times4\times5)+(3\times3\times5) = 40+45 = 85$: فرد

بررسی گزینهٔ (۴): ۲ حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) اگر حداقل یکی از اعداد a، b یا c زوج باشند، آن‌گاه:

$$\underbrace{(a+2)(b+4)(c+6)}_{\text{زوج}} + \underbrace{(a-2)(b-4)(c-6)}_{\text{زوج}} = \text{زوج}$$

ب) اگر هر سه فرد باشند، آن‌گاه:

$$\underbrace{(a+2)(b+4)(c+6)}_{\text{فرد}} + \underbrace{(a-2)(b-4)(c-6)}_{\text{فرد}} = \text{زوج}$$

۷۹۴ ۱ مثال نقض برای گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴):

$$۲)\ a=۶-\sqrt{۲}\ ,\ b=۷-\sqrt{۲}\Rightarrow a-b=-۱$$

$$۳)\ a=\sqrt{۶}\Rightarrow a^{۲}=۶$$

$$۴)\ a=\sqrt{۲}\ ,\ c=۰\Rightarrow ac=۰$$

اما در گزینهٔ (۱)، با استفاده از برهان خلف می‌توان اثبات کرد که $a+c$ همواره گنگ است.

۷۹۵ ۱

$$a=۰,\ b=\sqrt{۲}\Rightarrow a\times b=۰\ \text{گویا}$$

$$a=۱,\ b=\sqrt{۲}\Rightarrow a+b^{۲}=۳\ \text{گویا}$$

$$a=۰,\ b=\sqrt{۲}\Rightarrow b^{a}=(\sqrt{۲})^{۰}=۱\ \text{گویا}$$

به کمک برهان خلف می‌توان نشان داد که $a+b$ همواره گنگ است، یعنی:

$$\text{فرض خلف}: a+b=c\in\mathbb{Q}\Rightarrow \underbrace{b}_{\in\mathbb{Q}'}=\underbrace{c-a}_{\in\mathbb{Q}}$$

که این تناقض است، پس $a+b$ گنگ می‌باشد.

۷۹۶ ۳ مثال نقض برای گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴):

$$۱)\ \alpha^{۲}+۳\alpha=۱\Rightarrow \alpha^{۲}+۳\alpha-۱=۰\Rightarrow \alpha=\frac{-۳\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$$

بنابراین اگر $\alpha=\frac{-۳\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$ باشد (که عددی گنگ است)، $\alpha^{۲}+۳\alpha$ برابر با ۱ می‌شود.

$$۲)\ \alpha=\sqrt{۱۱}-۲\Rightarrow (|\alpha|+۲)^{۲}=(|\sqrt{۱۱}-۲|+۲)^{۲}=(\sqrt{۱۱}-۲+۲)^{۲}=(\sqrt{۱۱})^{۲}=۱۱$$

$$۴)\ \alpha-\frac{۲}{\alpha}=۲\Rightarrow \alpha^{۲}-۲\alpha-۲=۰\Rightarrow \alpha=\frac{۲\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=۱\pm\sqrt{۳}$$

بنابراین اگر $\alpha=۱\pm\sqrt{۳}$ باشد، $\alpha-\frac{۲}{\alpha}$ برابر با ۲ می‌شود.

بررسی گزینهٔ (۳):

$$\frac{۲\alpha-۱}{\alpha+۱}=\frac{۲(\alpha+۱)-۳}{\alpha+۱}=۲-\frac{۳}{\underbrace{\alpha+۱}_{\in\mathbb{Q}'}}\in\mathbb{Q}'$$

۷۹۷ ۲ برای $n=۴۲$ داریم:

$$k,\ k+۱,\ k+۲,\ldots,k+۴۱\xRightarrow{+}۴۲k+\frac{۴۱\times۴۲}{۲}=۴۲k+۲۱\times۴۱$$

و عبارت بالا بر ۴۲ بخش‌پذیر نمی‌باشد.

نکته تمام اعداد زوج، مثال نقض برای گزارهٔ داده‌شده می‌باشند.

۷۹۸ ۴ در گزینهٔ (۱)، عبارت داده‌شده همواره زوج است و در گزینه‌های (۲) و (۳) عبارت‌های داده‌شده همواره فرد هستند. اما در گزینهٔ (۴) داریم:

$$n:\text{زوج}\Rightarrow \underbrace{۶n^{۲}}_{\text{زوج}}-\underbrace{۵n}_{\text{زوج}}+۱۰=\text{زوج}$$

$$n:\text{فرد}\Rightarrow \underbrace{۶n^{۲}}_{\text{زوج}}-\underbrace{۵n}_{\text{فرد}}+۱۰=\text{فرد}$$

۷۹۹ ۱ تمام حالت‌های ممکن برای n را در نظر می‌گیریم:

$$n=۵k\xRightarrow{k=۰}n^{۲}-۴n+۹=۰^{۲}-۴\times۰+۹=۹\quad\times$$

$$n=۵k+۱\xRightarrow{k=۰}n^{۲}-۴n+۹=۱^{۲}-۴\times۱+۹=۶\quad\times$$

$$n=۵k+۲\xRightarrow{k=۰}n^{۲}-۴n+۹=۲^{۲}-۴\times۲+۹=۵\quad\checkmark$$

$$n=۵k+۳\xRightarrow{k=۰}n^{۲}-۴n+۹=۳^{۲}-۴\times۳+۹=۶\quad\times$$

$$n=۵k+۴\xRightarrow{k=۰}n^{۲}-۴n+۹=۴^{۲}-۴\times۴+۹=۹\quad\times$$

بنابراین $n=۵k+۲$ می‌باشد و داریم:

$$۲n+۱=۲(۵k+۲)+۱=۱۰k+۵=۵(۲k+۱)$$

پس $۲n+۱$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

۸۰۰ ۴ با توجه به باقی‌ماندهٔ تقسیم n بر ۴ داریم:

$$n=۴k\Rightarrow\frac{n^{۲}(n+۱)^{۲}}{۴}=\frac{۱۶k^{۲}(۴k+۱)^{۲}}{۴}=۴k^{۲}(۴k+۱)^{۲}:\text{زوج}\ \checkmark$$

$$n=۴k+۱\Rightarrow\frac{(۴k+۱)^{۲}(۴k+۲)^{۲}}{۴}=\frac{(۴k+۱)^{۲}\times۴\times(۲k+۱)^{۲}}{۴}=(۴k+۱)^{۲}(۲k+۱)^{۲}:\text{فرد}\ \times$$

$$n=۴k+۲\Rightarrow\frac{(۴k+۲)^{۲}(۴k+۳)^{۲}}{۴}=\frac{۴(۲k+۱)^{۲}(۴k+۳)^{۲}}{۴}=(۲k+۱)^{۲}(۴k+۳)^{۲}:\text{فرد}\ \times$$

$$n=۴k+۳\Rightarrow\frac{(۴k+۳)(۴k+۴)^{۲}}{۴}=\frac{(۴k+۳)^{۲}\times۱۶\times(k+۱)^{۲}}{۴}=۴(۴k+۳)^{۲}(k+۱)^{۲}:\text{زوج}\ \checkmark$$

پس برای $n=۴k+۳$ و $n=۴k$ عبارت داده‌شده زوج می‌شود که این عضوها در مجموعهٔ A عبارتند از:

$$\{۳,۴,۷,۸,۱۱,۱۲,۱۵,۱۶,۱۹,۲۰,۲۳,۲۴,۲۷\}\Rightarrow ۱۳\text{تا}$$

۸۰۱ **۲** برای اثبات حکم (۱) با استفاده از اثبات مستقیم داریم:

$$A+B=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$$

برای حکم (۲) از روش برهان خلف استفاده می‌شود و برای رد کردن حکم (۳)، می‌توان از مثال نقض $a=۳-\sqrt{۲}$ و $b=۶+\sqrt{۲}$ استفاده کرد.

۸۰۲ **۲** اگر $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)\cdots(a_n-b_n)$ زوج نباشد (فرض خلف)، پس عددی فرد است. بنابراین تمام n عامل $a_۱-b_۱, a_۲-b_۲, \dots, a_n-b_n$ هم فرد هستند. حال اگر n فرد باشد، باید حاصل‌جمع فردتا عدد فرد، عددی فرد شود. اما با توجه به این‌که $b_۱, b_۲, \dots, b_n$ همان اعداد $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ با ترتیبی متفاوت هستند، پس داریم:

$$(a_۱-b_۱)+(a_۲-b_۲)+\cdots+(a_n-b_n)=(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)-(b_۱+b_۲+\cdots+b_n)=۰$$

بنابراین مجموع زوج می‌شود که با «حاصل‌جمع فردتا عدد فرد، عددی فردی» است در تناقض است، پس فرض خلف باطل است و باید n زوج باشد.

۸۰۳ **۳** الف) اگر $x^۲-y^۲$ زوج باشد، آن‌گاه x و y یا هر دو زوج هستند یا هر دو فرد. داریم:

$$x=۲k,\ y=۲k'\Rightarrow x^۲-y^۲=۴k^۲-۴k'=۴(k^۲-k'^۲)=۴q\ \checkmark$$

$$x=۲k+۱,\ y=۲k'+۱\Rightarrow x^۲-y^۲=۴k^۲+۴k+۱-۴k'^۲-۴k'-۱=۴(k^۲+k-k'^۲-k')=۴q\ \checkmark$$

ب) اگر p عددی اول باشد، به صورت $۶k+۱$ یا $۶k+۵$ است (چرا که اعداد $۶k$، $۶k+۲$ و $۶k+۴$ زوج بوده و $۶k+۳$ همواره مضرب ۳ است)، بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم $p^۲$ بر ۶، برابر با ۱ خواهد بود و اثبات آن به شکل زیر است:

$$\begin{cases}(۶k+۱)^۲=۳۶k^۲+۱۲k+۱=۶\overbrace{(۶k^۲+۶k)}^{q}+۱=۶q+۱\\[2ex](۶k+۵)^۲=۳۶k^۲+۶۰k+۲۵=۶\underbrace{(۶k^۲+۱۰k+۴)}_{q'}+۱=۶q'+۱\end{cases}$$

پ) مثال نقض: اگر $a=۲$ باشد، $a+۱=۳$ نیز عددی اول است.

پس گزاره‌های (الف) و (ب) صحیح‌اند.

۸۰۴ **۴** در گزینهٔ (۴): اگر $a=۸$ و $b=۴$ باشد، $a^۲-b^۲$ بر ۸ بخش‌پذیر بوده اما a و b فرد نمی‌باشند.

۸۰۵ **۴** اگر دو گزارهٔ p و q هم‌ارز باشند $(p\Leftrightarrow q)$؛ هر دو گزاره‌های $p\Rightarrow q$ و $q\Rightarrow p$ درست خواهند بود.

در گزینهٔ (۴)، «اگر ab فرد باشد، $a+b$ زوج خواهد بود» که گزاره‌ای درست است، اما گزارهٔ «اگر $a+b$ زوج باشد، ab فرد است» گزاره‌ای نادرست است.

(مثال نقض : $a=۸$ و $b=۶$)

۸۰۶ **۳** گزارهٔ $\frac{x+y}{۲}\ge\sqrt{xy}$ گزاره‌ای درست، با شرط $y\ge۰$ و $x\ge۰$ می‌باشد و برای اثبات آن با استفاده از اثبات بازگشتی داریم:

$$\frac{x+y}{۲}\ge\sqrt{xy}\Rightarrow\frac{(x+y)^۲}{۴}\ge xy\Rightarrow x^۲+y^۲+۲xy-۴xy\ge۰\Rightarrow(x-y)^۲\ge۰$$

۸۰۷ **۱**

$$\frac{۴a-۵b}{۱۰a}\le\frac{a-b}{b}\xRightarrow{\times۱۰ab}۴ab-۵b^۲\le۱۰a^۲-۱۰ab\Rightarrow۱۰a^۲+۵b^۲-۱۴ab\ge۰\Rightarrow(۳a-۲b)^۲+(a-b)^۲\ge۰$$

توجه کنید با توجه به مثبت‌بودن a و b، با ضرب طرفین نامساوی در ۱۰ab، علامت نامساوی عوض نمی‌شود.

۸۰۸ **۱** با ضرب طرفین در $x^۲y^۲$ داریم:

$$\frac{x}{y^۲}+\frac{y}{x^۲}\ge\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}\Rightarrow x^۳+y^۳\ge xy^۲+yx^۲\Rightarrow(x+y)(x^۲+y^۲-xy)-xy(x+y)\ge۰$$

$$\Rightarrow(x+y)(x^۲+y^۲-xy-xy)\ge۰\Rightarrow(x+y)(x-y)^۲\ge۰$$

با توجه به مثبت بودن x و y، عبارت $x+y$ همواره مثبت است و $(x-y)^۲$ هم که همواره نامنفی می‌باشد، پس عبارت حاصل همواره برقرار است.

۸۰۹ **۳**

$$(a^۲+b^۲)(c^۲+d^۲)\ge(ac+bd)^۲\Rightarrow\cancel{a^۲c^۲}+a^۲d^۲+b^۲c^۲+\cancel{b^۲d^۲}\ge\cancel{a^۲c^۲}+\cancel{b^۲d^۲}+۲abcd$$

$$\Rightarrow a^۲d^۲+b^۲c^۲-۲abcd\ge۰\Rightarrow(ad-bc)^۲\ge۰$$

۸۱۰ **۱** با ضرب طرفین در ۲ داریم:

$$۲x^۲+۲y^۲+۲\ge۲xy+۲x+۲y\Rightarrow x^۲-۲x+۱+y^۲-۲y+۱+x^۲+y^۲-۲xy\ge۰\Rightarrow(x-۱)^۲+(y-۱)^۲+(x-y)^۲\ge۰$$

۸۱۱ **۱** با ضرب طرفین در ۲ داریم:

$$۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲\ge۲xy-۲xz+۲yz\Rightarrow x^۲-۲xy+y^۲+x^۲+۲xz+z^۲+z^۲-۲yz+y^۲\ge۰\Rightarrow(x-y)^۲+(x+z)^۲+(y-z)^۲\ge۰$$

۸۱۲ ۱

$$a^۲+۴b^۲+۳c^۲+A\geq ۲a+۱۲b+۶c \Rightarrow a^۲-۲a+۴b^۲-۱۲b+۳c^۲-۶c\geq -A$$

$$\Rightarrow a^۲-۲a+۱+۴b^۲-۱۲b+۹+۳c^۲-۶c+۳\geq -A+۱+۹+۳ \iff (a-۱)^۲+(۲b-۳)^۲+۳(c-۱)^۲\geq ۱۳-A$$

برای این که عبارت داده‌شده همواره صحیح باشد، باید داشته باشیم: $۱۳-A\leq ۰\Rightarrow A\geq ۱۳$

بنابراین حداقل مقدار قابل قبول برای A، برابر با ۱۳ است.

۸۱۳ ۲ با توجه به میانگین حسابی و هندسی دو عدد داریم:

$$\frac{a^۲+b^۲}{۲}\geq\sqrt{a^۲b^۲}\Rightarrow\frac{a^۲+b^۲}{۲}\geq|ab|\xRightarrow{ab>۰}\frac{a^۲+b^۲}{۲}\geq ab\Rightarrow\frac{ab}{a^۲+b^۲}\leq\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۵ab}{a^۲+b^۲}\leq\frac{۵}{۲}$$

۸۱۴ ۳

$$A=(a+b+c)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c})=۱+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+۱+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+۱=۳+\underbrace{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}_{\geq ۲}+\underbrace{\frac{a}{c}+\frac{c}{a}}_{\geq ۲}+\underbrace{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}}_{\geq ۲}$$

بنابراین $A\geq ۳+۲+۲+۲=۹$ می‌باشد.

۸۱۵ ۴

$$\frac{a^۲+b^۲}{۲}\geq\sqrt{a^۲b^۲}\Rightarrow\frac{a^۲+b^۲}{۲}\geq ab\Rightarrow\frac{a^۲+b^۲}{ab}\geq ۲\Rightarrow\frac{a^۴+b^۴}{۲}\geq\sqrt{a^۴b^۴}\Rightarrow\frac{a^۴+b^۴}{۲}\geq a^۲b^۲\Rightarrow\frac{a^۴+b^۴}{a^۲b^۲}\geq ۲$$

$$\frac{(۲a^۲+۲b^۲)(۳a^۴+۳b^۴)}{(ab)^۳}=\frac{۲\times ۳\overbrace{(a^۲+b^۲)}^{\geq ۲}\overbrace{(a^۴+b^۴)}^{\geq ۲}}{ab\times(a^۲b^۲)}$$

بنابراین عبارت داده‌شده بزرگ‌تر یا مساوی $۲۴=۲\times ۲\times ۳\times ۲$ بوده و حداقل مقدار آن ۲۴ می‌باشد و حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که $a=b$ باشد.

۸۱۶ ۲ اگر فرض کنیم $\alpha=\sqrt{۲}$ و $\beta=-\sqrt{۲}$، آن‌گاه $\alpha+\beta=۰$ می‌شود که عددی گویا است. اما:

$$\alpha^۲+۳\alpha\beta+۲\beta^۲=(\sqrt{۲})^۲+۳(\sqrt{۲})(-\sqrt{۲})+۲(-\sqrt{۲})^۲=۲-۶+۴=۰\in\mathbb{Q}$$

پس عبارت داده‌شده نادرست است.

۸۱۷ ۴

بخش‌پذیری در اعداد صحیح

بخش‌پذیری: عدد صحیح a (مخالف صفر) را شمارندهٔ عدد b گوییم، هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به‌طوری که: $b=aq$

- می‌توانیم بنویسیم $a\,|\,b$ و بخوانیم a، b را عاد می‌کند.
- در واقع اگر b بر a بخش‌پذیر باشد، می‌گوییم a، b را می‌شمارد.
- قرارداد می‌کنیم که صفر، عدد صفر را می‌شمارد: $۰|۰$

ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن

① برای عدد صحیح a داریم:

الف) $a\,|\,۰$ ، $a\,|\,a$ ، $\pm۱\,|\,a$ ، $\pm a\,|\,a$

ب) اگر $a\,|\,۱$ ، آن‌گاه $a=\pm۱$

پ) اگر $۰\,|\,a$، آن‌گاه $a=۰$

توجه همهٔ اعداد صفر را عاد می‌کنند اما صفر هیچ عدد غیرصفری را عاد نمی‌کند.

مثال **به ازای چند عدد طبیعی n، داریم: $۲n^۲+n-۲\,|\,۱$؟**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ از آن‌جایی که $P(n)\,|\,۱$ پس $P(n)=\pm۱$، در نتیجه داریم:

$$P(n)=۱\Rightarrow ۲n^۲+n-۲=۱\Rightarrow ۲n^۲+n-۳=۰\xRightarrow[\text{صفر است}]{\text{مجموع ضرایب}}\begin{cases}n=۱\\ n=\frac{c}{a}=\frac{-۳}{۲}\notin\mathbb{N}\quad\text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$P(n)=-۱\Rightarrow ۲n^۲+n-۲=-۱\Rightarrow ۲n^۲+n-۱=۰\Rightarrow(۲n-۱)(n+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}۲n-۱=۰\Rightarrow n=\frac{۱}{۲}\notin\mathbb{N}\quad\text{غ ق ق}\\ n+۱=۰\Rightarrow n=-۱\notin\mathbb{N}\quad\text{غ ق ق}\end{cases}$$

پس فقط برای $n=۱$ این رابطه برقرار است. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

۲) اگر $a|b$ آن‌گاه:

الف) $-a|-b$ ، $a|-b$ ، $-a|b$

ب) $a|mb$ ، $ma|mb$ $\quad(m\in\mathbb{Z})$

پ) اگر $b\neq ۰$ باشد آن‌گاه: $|a|\leq|b|$

ت) $a|b+ma$ $\quad(m\in\mathbb{Z})$

ث) اگر $b|a$ ، آن‌گاه : $|a|=|b|$

۳) اگر $a|b$ و $b|c$ ، آن‌گاه: $a|c$.

۴) اگر $a|b$ و $c|d$ ، آن‌گاه: $ac|bd$.

۵) اگر $ab|c$ ، آن‌گاه: $a|c$ و $b|c$.

۶) اگر $a|b$ و $a|c$ ، آن‌گاه: $a|am+bn$. $\quad(m,n\in\mathbb{Z})$

مثال **اگر $a|b$ و $a|c$، آن‌گاه کدام گزینه درست نیست؟**

۱) $a|b+c$ ۲) $a|b^۲+c$ ۳) $a^۲|b+c$ ۴) $a^۲|bc$

پاسخ **بررسی گزینه‌ها:**

$$۱)\ \begin{cases}a|b\\a|c\end{cases}\Rightarrow a|b+c \qquad ۲)\ a|b\Rightarrow\begin{cases}a|b^۲\\a|c\end{cases}\Rightarrow a|b^۲+c \qquad ۴)\ \begin{cases}a|b\\a|c\end{cases}\xRightarrow{\times} a^۲|bc$$

مثال نقض برای گزینهٔ (۳):

$$\begin{cases}a=۳\\b=۶\\c=۹\end{cases}\Rightarrow a^۲=۹\ ,\ b+c=۱۵\xRightarrow{۹\nmid ۱۵} a^۲\nmid b+c\Rightarrow$$ پس گزینهٔ (۳) جواب است.

مثال **اگر a عددی صحیح و $d|a-۴$ و $d|a^۲-۷a+۲۵$، آن‌گاه مجموع مقادیر طبیعی ممکن برای d کدام است؟**

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

پاسخ

$$\left.\begin{array}{l}d|a-۴\xRightarrow{\times a}d|a^۲-۴a\\ \text{از طرفی: } d|a^۲-۷a+۲۵\end{array}\right\}\xRightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}}d|۳a-۲۵$$

حال مجدداً از رابطهٔ $d|a-۴$ کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases}d|a-۴\\d|۳a-۲۵\end{cases}\Rightarrow d|۳a-۲۵-۳(a-۴)\Rightarrow d|-۱۳\Rightarrow d=\pm۱\ ,\pm۱۳$$

پس مجموع مقادیر طبیعی ممکن برای d برابر است با: $۱۴=۱+۱۳$. پس گزینهٔ (۱) صحیح است.

مثال **چند نقطه با مختصات صحیح بر روی منحنی به معادلهٔ $xy+x+y^۲+۲y=۰$ وجود دارد؟**

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ **روش اول:** در چنین مثال‌هایی ابتدا یکی از متغیرها را برحسب دیگری می‌نویسیم:

$$xy+x+y^۲+۲y=۰\Rightarrow x(۱+y)=-(y^۲+۲y)\Rightarrow x=\frac{-(y^۲+۲y)}{۱+y}\in\mathbb{Z}$$

حال برای آن‌که $\frac{-y^۲-۲y}{۱+y}$ صحیح باشد، باید $۱+y|-y^۲-۲y$.

طبق ویژگی (۲) قسمت (د) (اگر $a|b$، آن‌گاه $a|b+am$)، داریم:

$$۱+y|-y^۲-۲y\Rightarrow ۱+y|-y^۲-۲y+y(۱+y)\Rightarrow ۱+y|-y$$

دوباره از همین ویژگی استفاده می‌کنیم:

$$۱+y|-y\Rightarrow ۱+y|-y+۱(y+۱)\Rightarrow ۱+y|۱\Rightarrow ۱+y=\pm۱$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{cases}۱+y=۱\Rightarrow y=۰\\۱+y=-۱\Rightarrow y=-۲\end{cases}$$

پس y دو مقدار صحیح دارد، در نتیجه دو نقطه با مختصات صحیح داریم. پس گزینهٔ (۲) درست است.

نکته چندجمله‌ای $f(n)$ با ضرایب صحیح را در نظر بگیرید. برای یافتن nهایی که $n-a|f(n)$، می‌توانیم nهایی را بیابیم که $n-a|f(a)$.

حال راه‌حل دیگری برای مثال بالا ارائه می‌کنیم:

روش دوم: همان‌طور که در روش اول دیدیم باید مقادیری برای y پیدا کنیم که $۱+y|-y^۲-۲y$

$$۱+y=۰\Rightarrow y=-۱\xRightarrow{\text{نکتهٔ بالا}}۱+y|f(-۱)\xRightarrow{f(y)=-y^۲-۲y}۱+y|۱\Rightarrow ۱+y=\pm۱\Rightarrow\begin{cases}y=۰\\y=-۲\end{cases}$$

پس دو مقدار صحیح برای y وجود دارد.

نکته برای به توان رساندن طرفین رابطه عاد کردن یا حذف توان می‌توانیم به شکل زیر عمل کنیم:

(۱) $a \mid b \xRightarrow{n\in\mathbb{N}} a^n \mid b^n$ (۲) $a \mid b \xRightarrow{n\le m} a^n \mid b^m$ (۳) $a^n \mid b^m \xRightarrow{n\ge m} a \mid b$

مثال **۱ - $۷^{۲۰۰}$ بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟**

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۲۱ ۴) ۱۸

پاسخ می‌دانیم $۷^{۲۰۰} - ۱ = ۴۹^{۱۰۰} - ۱$ و همواره برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$a-b \mid a^n - b^n \xRightarrow[b=۱,n=۱۰۰]{a=۴۹} ۴۹-۱ \mid ۴۹^{۱۰۰}-۱ \Rightarrow ۴۸ \mid ۴۹^{۱۰۰}-۱ \xRightarrow{۱۲|۴۸} ۱۲ \mid ۴۹^{۱۰۰}-۱$$

بنابراین $۷^{۲۰۰} - ۱$ بر ۱۲ بخش‌پذیر است. پس گزینهٔ (۱) درست است.

نکته با فرض صحیح بودن اعداد a و b و برای اعداد طبیعی n و m داریم:

(۱) $a-b \mid a^n - b^n \ (n\in\mathbb{N}) \xRightarrow{\text{به طور ویژه}} a^m - b^m \mid a^n - b^n$ (n مضرب m است.)

(۲) $a+b \mid a^n - b^n$ (n زوج) $\xRightarrow{\text{به طور ویژه}} a^m + b^m \mid a^n - b^n$ (n مضرب زوج m است.)

(۳) $a+b \mid a^n + b^n$ (n فرد) $\xRightarrow{\text{به طور ویژه}} a^m + b^m \mid a^n + b^n$ (n مضرب فرد m است.)

بررسی گزینه‌ها:

$۱)\ ۴ \mid ۶\times۱۰ \not\Rightarrow ۴\mid۶,\ ۴\mid۱۰$ $۲)\ ۸ \mid ۲^۴ \not\Rightarrow ۸\mid۲$ $۳)\ ۴ \mid ۳+۵ \not\Rightarrow ۴\mid۳, ۴\mid۵$

اما در گزینهٔ (۴) داریم:

$$ac \mid b \Rightarrow b = acq \Rightarrow b = a(cq) \Rightarrow b = aq' \Rightarrow a \mid b$$

۸۱۸ **۲** برای آن‌که نقطه‌ای دارای طول و عرض صحیح باشد، باید مخرج کسر، صورت آن را عاد کند:

$$\begin{cases} x+۳ \mid ۷x+a \\ x+۳ \mid \underbrace{۷(x+۳)}_{۷x+۲۱} \end{cases} \xRightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} x+۳ \mid ۲۱-a$$

برای آن‌که تعداد کم‌تری نقطه داشته باشیم، باید $۲۱-a$ بین گزینه‌ها کم‌ترین تعداد مقسوم‌علیه را داشته باشد یا به عبارتی $۲۱-a$ اول باشد.

به ازای مقادیر ۳، ۵ و ۶ برای a، عبارت $۲۱-a$ مرکب می‌شود اما به ازای $a=۴$، $۲۱-a=۱۷$ می‌شود که اول است، پس جواب گزینهٔ (۲) است.

۸۱۹ **۳** **روش اول:** می‌دانیم اگر $a \mid b$، آن‌گاه $a \le b$ است.

$$n^۲+۱ \mid ۶n+۱ \Rightarrow n^۲+۱ \le ۶n+۱ \Rightarrow n^۲-۶n \le ۰ \Rightarrow ۰ \le n \le ۶$$

حال با آزمایش مقادیر n داریم:

$$n=۶ \Rightarrow ۶^۲+۱ \mid ۶(۶)+۱ \quad \checkmark$$

که باقی‌ماندهٔ تقسیم ۶ بر ۴، برابر ۲ است.

روش دوم:

$$\begin{cases} n^۲+۱ \mid ۶n+۱ \xRightarrow{\times(۶n-۱)} n^۲+۱ \mid \overbrace{(۶n+۱)(۶n-۱)}^{۳۶n^۲-۱} \\ n^۲+۱ \mid n^۲+۱ \xRightarrow{\times۳۶} n^۲+۱ \mid ۳۶n^۲+۳۶ \end{cases} \xRightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} n^۲+۱ \mid ۳۷ \Rightarrow n^۲+۱ = \pm۱, \pm۳۷$$

$n^۲+۱$ عددی مثبت است، پس:

$$n^۲+۱ = ۳۷ \Rightarrow n^۲ = ۳۶ \xRightarrow{n\in\mathbb{N}} n = ۶$$

که باقی‌ماندهٔ تقسیم ۶ بر ۴، برابر ۲ است.

۸۲۰ **۱** مخرج کسر باید صورت آن را عاد کند تا x و y دارای مختصات صحیح باشند:

$$x+۵ \mid x^۳+۱۲ \Rightarrow x+۵ \mid (-۵)^۳+۱۲ \Rightarrow x+۵ \mid -۱۱۳ \Rightarrow x+۵ \mid ۱۱۳$$

$x+۵=۰ \Rightarrow x=-۵$

۱۱۳ عددی اول است، پس با توجه به این‌که $x \in \mathbb{N}$، داریم:

$$x+۵ = ۱ \Rightarrow x = -۴ \notin \mathbb{N}$$

$$x+۵ = ۱۱۳ \Rightarrow x = ۱۰۸$$

۸۲۱ ۱ برای آن‌که کسر داده‌شده، عدد صحیح شود، لازم است مخرج کسر، صورت کسر را عاد کند: $x-۲|۱۲ \Rightarrow x-۲=\pm۱,\pm۲,\pm۳,\pm۴,\pm۶,\pm۱۲$

منحنی باید از ربع سوم بگذرد، در نتیجه x و y باید منفی باشند. پس:

$$x-۲=\begin{cases}-۱۲\\-۶\\-۴\\-۳\end{cases}\Rightarrow x=\begin{cases}-۱۰\Rightarrow y=-۱\\-۴\Rightarrow y=-۲\\-۲\Rightarrow y=-۳\\-۱\Rightarrow y=-۴\end{cases}$$

پس ۴ نقطه در ربع سوم داریم.

۸۲۲ ۴ **بررسی گزینه‌ها:**

$$۱)\, a^۷ | c^۴ \xRightarrow{\times c^۳} a^۷ | c^۷ \Rightarrow a | c \checkmark$$

$$۲)\begin{cases}a|b\\b|c\end{cases}\xRightarrow[\text{عاد کردن}]{\text{تعدی در}} a|c \checkmark$$

$$۳)\, ab|c \xRightarrow{a|ab} a|c \checkmark$$

$$۴)\, a|bc \not\Rightarrow a|c \text{ : مثال نقض } \begin{cases}a=۶\\b=۳\\c=۸\end{cases}\Rightarrow ۶|۳\times۸ \text{ اما } ۶\nmid۳ \text{ و } ۶\nmid۸ \Rightarrow$$ پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

۸۲۳ ۲

$$\begin{cases}۱۱۲|b^۳ \Rightarrow ۲^۴\times۷|b^۳ \Rightarrow \min(b)=۲^۲\times۷=۲۸\\ ۱۳۵|a^۲ \Rightarrow ۵\times۳^۳|a^۲ \Rightarrow \min(a)=۵\times۳^۲=۴۵\end{cases}\Rightarrow \min(a+b)=۷۳$$

۸۲۴ ۳

$$\begin{cases}a|b+۴\\a|c-۳\end{cases}\xRightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{در هم ضرب}} a|(b+۴)(c-۳)\Rightarrow a|bc-۳b+۴c-۱۲$$

از طرفی طبق فرض $a|b+۴$، پس $a|۳b+۱۲$. بنابراین:

$$\begin{cases}a|bc-۳b+۴c-۱۲\\a|۳b+۱۲\end{cases}\xRightarrow{\text{با هم جمع می‌کنیم}} a|bc+۴c$$

از طرفی $a|c-۳$، پس $a|۴c-۱۲$ بنابراین:

$$\begin{cases}a|bc+۴c\\a|۴c-۱۲\end{cases}\xRightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} a|bc+\underbrace{۱۲}_{k}$$

پس برای $k=۱۲$ عبارت $bc+k$ بر a بخش‌پذیر است.

۸۲۵ ۲

$$\begin{cases}۱۳|۱۱x+۷y \xRightarrow{\times۵} ۱۳|۵۵x+۳۵y\\ ۱۳|۱۳x+۱۳y \xRightarrow{\times۵} ۱۳|۶۵x+۶۵y\end{cases}\xRightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} \left.\begin{matrix}۱۳|۶۵x+۶۵y-۵۵x-۳۵y\Rightarrow ۱۳|۱۰x+۳۰y\\ \text{از طرفی: } ۱۳|۲۶y\end{matrix}\right\}\xRightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} ۱۳|۱۰x+۴y$$

چون $۱۳|۱۰x+ky$، پس $k=۴$ قابل‌قبول است.

۸۲۶ ۳

$$\left.\begin{matrix}d|ax+b\\d|a'x+b'\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}d|aa'x+ba'\\d|aa'x+ab'\end{matrix}\right\}\Rightarrow d|ab'-ba'$$

حال اگر $ab'-ba'=\pm۱$ باشد، آن‌گاه $d|\pm۱$ از آن نتیجه می‌شود که $d=\pm۱$ که همان مطلوب مسأله است. لذا باید $ab'-ba'=\pm۱$ باشد.

۸۲۷ ۲

$$\left.\begin{matrix}a|۹k+۷ \xRightarrow{\times۷} a|۶۳k+۴۹\\ a|۷k+b \xRightarrow{\times۹} a|۶۳k+۹b\end{matrix}\right\}\xRightarrow{-} a|۹b-۴۹$$

حال به بررسی هریک از گزینه‌ها می‌پردازیم:

$۱)\, b=۷\Rightarrow a|۶۳-۴۹\Rightarrow a|۱۴ \xRightarrow{a>۱} a=۷ \text{ یا } a=۲$ $\quad$ $۲)\, b=۸\Rightarrow a|۷۲-۴۹\Rightarrow a|۲۳\Rightarrow a=۲۳$

$۳)\, b=۹\Rightarrow a|۸۱-۴۹\Rightarrow a|۳۲\Rightarrow a=۲,a=۴,\dots$ $\quad$ $۴)\, b=۱۱\Rightarrow a|۹۹-۴۹\Rightarrow a|۵۰\Rightarrow a=۲,a=۵,\dots$

در واقع برای این‌که تنها یک مقدار برای a به دست آید، $۹b-۴۹$ باید عددی اول باشد.

۸۲۸ ۳ اگر $۲|x-y$، یکی از دو حالت زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x=۲k,y=۲k'\Rightarrow ۴|۴k^۲-۴k'^۲\Rightarrow ۴|۴(k^۲-k'^۲)\Rightarrow ۴|x^۲-y^۲ \checkmark\\ x=۲k+۱,y=۲k'+۱\Rightarrow ۴|۴k^۲+۴k+۱-۴k'^۲-۴k'-۱\Rightarrow ۴|۴(k^۲+k-k'^۲-k)\Rightarrow ۴|x^۲-y^۲ \checkmark\end{cases}$$

پس گزینهٔ (۳) درست است. حال برای گزینه‌های (۱) و (۲) و (۴) مثال نقض ارائه می‌کنیم:

$۱)\, ۴|۵-۱ \not\Rightarrow ۱۶|۲۵-۱$ $\quad$ $۲)\, ۳|۵-۲ \not\Rightarrow ۹|۲۵-۴$ $\quad$ $۴)\, ۳|۲+۱ \not\Rightarrow ۹|۴-۱$

۸۲۹ ۲

$$\begin{cases} x-y \mid 3x+11y \\ x-y \mid \underbrace{3(x-y)}_{3x-3y} \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} x-y \mid 14y \quad (I)$$

به‌علاوه این‌طور هم می‌توان گفت که:

$$\begin{cases} x-y \mid 3x+11y \\ x-y \mid \underbrace{11(x-y)}_{11x-11y} \end{cases} \xrightarrow{\text{با هم جمع می‌کنیم.}} x-y \mid 14x \, (II)$$

$$\begin{cases} (I)+(II) \Rightarrow x-y \mid 14x+14y \\ \text{از طرفی}: x-y \mid 3x+11y \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} x-y \mid 11x+3y$$

۸۳۰ ۳ a مضرب ۶، a^2 مضرب ۴۲ و a^3 مضرب ۵۴۰ است، پس داریم:

$$\begin{cases} 6 \mid a \Rightarrow 2\times 3 \mid a \quad (1) \\ 42 \mid a^2 \Rightarrow 2\times 3\times 7 \mid a^2 \Rightarrow 2\times 3\times 7 \mid a \quad (2) \\ 540 \mid a^3 \Rightarrow 2^2\times 3^3\times 5 \mid a^3 \Rightarrow 2\times 3\times 5 \mid a \quad (3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(3),(2),(1)} 2\times 3\times 5\times 7 \mid a \Rightarrow 210 \mid a \Rightarrow a = 210q \xrightarrow{q=1} \min(a) = 210 \Rightarrow \text{جمع ارقام} = 2+1+0 = 3$$

۸۳۱ ۲ می‌دانیم $a^m+b^m \mid a^n+b^n$. اگر n مضرب فرد m باشد، پس:

$$11^2+19^2 \mid (11^2)^{33}+(19^2)^{33} \Rightarrow 482 \mid 11^{66}+19^{66} \xrightarrow{241 \mid 482} 241 \mid 11^{66}+19^{66}$$

۸۳۲ ۲ برای هر عدد طبیعی n داریم $a-b \mid a^n-b^n$. پس داریم:

$$2025-1843 \mid 2025^{88}-1843^{88} \Rightarrow 182 \mid 2025^{88}-1843^{88} \xrightarrow{13 \mid 182} 13 \mid 2025^{88}-1843^{88}$$

پس $2025^{88}-1843^{88}$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

۸۳۳ ۴ می‌دانیم که $a^m-b^m \mid a^n-b^n$ (برای nهای مضرب m). از آن‌جایی که $3^4-2^4=65$، پس اگر $4 \mid n$، آن‌گاه $65 \mid a^n-b^n$.

حال تعداد اعداد دورقمی مضرب ۴ برابر است با: $\frac{96-12}{4}+1=22$

۸۳۴ ۳ اگر n مضرب m باشد، آن‌گاه: $a^m-b^m \mid a^n-b^n$

$$\begin{cases} m=3 \Rightarrow 3^3-2^3=19 \Rightarrow 19 \mid 3^{36}-2^{36} \\ m=4 \Rightarrow 3^4-2^4=65 \Rightarrow 65 \mid 3^{36}-2^{36} \end{cases}$$

همین‌طور اگر n مضرب زوج m باشد، آن‌گاه: $a^m+b^m \mid a^n-b^n$

$$m=3 \Rightarrow 3^3+2^3=35 \Rightarrow 35 \mid 3^{36}-2^{36}$$

پس عدد داده‌شده تنها به ۴۲ بخش‌پذیر نیست.

۸۳۵ ۳ اگر $m \mid n$، آن‌گاه $a^m-b^m \mid a^n-b^n$. از طرفی $39 \mid 5^4-1$، پس برای آن‌که $39 \mid 5^n-1$، باید $4 \mid n$. حال اعداد دورقمی با این شرط عبارتند از:

$A=\{12,16,20,\dots,96\}$

همین‌طور می‌دانیم که اگر n مضرب زوج m باشد، آن‌گاه: $a^m+b^m \mid a^n-b^n$. از طرفی $28 \mid 3^3+1$، پس برای آن‌که $28 \mid 3^n-1$، باید n مضرب زوج ۳ باشد که اعداد دو رقمی با این شرط عبارتند از:

$B=\{12,18,24,\dots,96\}$

از اشتراک A و B داریم: $A \cap B=\{12,24,36,\dots,96\} \Rightarrow \text{تعداد} = \frac{96-12}{12}+1=8$

۸۳۶ ۴

قضیهٔ تقسیم

قضیهٔ تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، در این‌صورت (با تقسیم a بر b) اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که: $0 \le r < b$ و

$$\underset{\text{مقسوم}}{a} = \overset{\text{مقسوم‌علیه}}{b}\underset{\text{خارج‌قسمت}}{q} + \overset{\text{باقی‌مانده}}{r}$$

بیشترین مقداری که r می‌تواند داشته باشد، $b-1$ است.

مثال **چند عدد طبیعی سه‌رقمی داریم که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۷، برابر ۴ است؟**

۱) ۱۲۷ ۲) ۱۲۸ ۳) ۱۲۹ ۴) ۱۳۰

پاسخ طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$a = bq + r \xrightarrow[r=۴]{b=۷} a = ۷q + ۴ \xrightarrow{۱۰۰ \le a \le ۹۹۹} ۱۰۰ \le ۷q + ۴ \le ۹۹۹ \Rightarrow ۹۶ \le ۷q \le ۹۹۵ \Rightarrow ۱۴ \le q \le ۱۴۲$$

پس $۱۲۹ = ۱ + ۱۴ - ۱۴۲$ عدد داریم. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

مثال **مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که در تقسیم بر ۴۷، باقی‌ماندهٔ آن، توان دوم خارج‌قسمت باشد، کدام است؟**

۱) ۱۶ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ باقی‌مانده برابر توان دوم خارج‌قسمت است $(r = q^۲)$، پس طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$a = bq + r \xrightarrow[r=q^۲]{b=۴۷} a = ۴۷q + q^۲ \xrightarrow{۰ \le r < b} ۰ \le q^۲ < ۴۷ \Rightarrow q_{max} = ۶$$

پس بیشترین مقدار برای a برابر است با:

$$a_{max} = ۴۷(۶) + (۶)^۲ = ۳۱۸ \Rightarrow \text{جمع ارقام} = ۳ + ۱ + ۸ = ۱۲ \Rightarrow \text{گزینهٔ (۳)}$$

مثال **اگر در یک تقسیم ۵۴ واحد از مقسوم کم کنیم، ۳ واحد از خارج‌قسمت کم شده، مقسوم‌علیه تغییر نکرده و باقی‌مانده ۶ واحد افزایش می‌یابد. مقدار مقسوم‌علیه در این تقسیم کدام است؟**

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

پاسخ در قضیهٔ تقسیم $a = bq + r$، ۵۴ واحد از مقسوم (a) و ۳ واحد از خارج‌قسمت (q) کم کرده و ۶ واحد به باقی‌مانده (r) اضافه کرده‌ایم، پس قضیه به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$a - ۵۴ = b(q - ۳) + (r + ۶) \Rightarrow a - ۵۴ = \underbrace{bq + r}_{a} - ۳b + ۶ \Rightarrow -۵۴ = -۳b + ۶ \Rightarrow ۳b = ۶۰ \Rightarrow b = ۲۰ \Rightarrow \text{گزینهٔ (۳)}$$

مثال **در یک تقسیم، مقسوم ۱۸ برابر باقی‌مانده و باقی‌مانده برابر با حداکثر مقدار خود است. در این تقسیم، مجموع مقسوم و مقسوم‌علیه کدام است؟**

۱) ۲۷۵ ۲) ۲۸۵ ۳) ۲۹۵ ۴) ۳۰۵

پاسخ در قضیهٔ تقسیم $a = bq + r$، حداکثر مقدار باقی‌مانده $b - ۱$ است. از آن‌جایی که مقسوم ۱۸برابر باقی‌مانده است. داریم:

$$a = ۱۸r = ۱۸(b - ۱) \xrightarrow[r=b-۱]{a=bq+r} ۱۸(b - ۱) = bq + (b - ۱) \Rightarrow ۱۸b - ۱۸ = bq + b - ۱ \Rightarrow ۱۷b - bq = ۱۷ \Rightarrow b(۱۷ - q) = ۱۷$$

از آن‌جایی که ۱۷ عددی اول است، پس دو حالت داریم:

$$۱)\begin{cases} b = ۱۷ \\ ۱۷ - q = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = ۱۷ \\ q = ۱۶ \\ r = b - ۱ = ۱۶ \\ a = ۱۸r = ۱۸ \times ۱۶ = ۲۸۸ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۲۸۸ + ۱۷ = ۳۰۵$$

$$۲)\begin{cases} b = ۱ \\ ۱۷ - q = ۱۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = ۱ \\ q = ۰ \\ r = b - ۱ = ۰ \\ a = ۱۸r = ۰ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۱$$

که فقط ۳۰۵ در گزینه‌ها وجود دارد. پس گزینهٔ (۴) درست است.

مثال **اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۸ و ۷ به ترتیب برابر با ۷ و ۵ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲a^۲ + ۵$ بر ۵۶ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵۵ ۴) ۵۲

پاسخ طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\begin{cases} a = ۸q + ۷ \xrightarrow{\times ۷} ۷a = ۵۶q + ۴۹ \\ a = ۷q' + ۵ \xrightarrow{\times ۸} ۸a = ۵۶q' + ۴۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} a = ۵۶(q' - q) - ۹$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵۶ برابر ۹- یا ۴۷ است. بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲a^۲ + ۵$ بر ۵۶ برابر است با:

$$۲(-۹)^۲ + ۵ = ۱۶۲ + ۵ = ۱۶۷ = ۵۶(۲) + ۵۵$$

پس $۲a^۲ + ۵ = ۵۶q'' + ۵۵$. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

افراز اعداد صحیح به کمک قضیهٔ تقسیم: اعداد صحیح بر اساس باقی‌ماندهٔ تقسیم‌شان بر b به یکی از b صورت زیر، قابل نوشتن هستند:

$$bk\ ,\ bk+1\ ,\ bk+2\ ,\ \dots\ ,\ bk+\underbrace{(b-1)}_{\text{بیشترین مقدار ممکن برای باقی‌مانده}}$$

- هر عدد صحیح را می‌توان به یکی از دو صورت $2k+1$ یا $2k$ (زوج یا فرد) نوشت.
- هر عدد اول $p>3$ را می‌توان به یکی از دو صورت $p=6k+1$ یا $p=6k+5$ نوشت.
- هر عدد صحیح و فرد را می‌توان به یکی از دو صورت $4k+1$ یا $4k+3$ نوشت.
- مربع هر عدد صحیح فرد به فرم $8k+1$ است.

مثال **عدد $5^{22}+7$ بر کدام‌یک از اعداد زیر همواره بخش‌پذیر است؟**

۱) ۸ ۲) ۱۱ ۳) ۱۶ ۴) ۱۳

پاسخ 5^{11} عددی فرد است و مربع هر عدد فرد به صورت $8k+1$ می‌باشد، پس داریم:

$$5^{22}+7=(5^{11})^2+7 \xrightarrow{(5^{11})^2=8k+1} 8k+1+7=8k+8=8(k+1)$$

پس $5^{22}+7$ بر ۸ بخش‌پذیر است. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) $a=bq+r \Rightarrow nk=nk'\times q+r \Rightarrow r=n(k-k'q) \Rightarrow r=nk''$ ✓

۲) $a=bq+r \Rightarrow nk=b\times nk'+r \Rightarrow r=n(k-k'b) \Rightarrow r=nk''$ ✓

۳) $a=bq+r \Rightarrow a=nkq+nk' \Rightarrow a=n(kq+k') \Rightarrow a=nk''$ ✓

۴) مثال نقض: $a=101, b=7, q=14, r=3 \Rightarrow b, q=7k, 101=7\times 14+3\neq 7k'$

۸۳۷ **۱** طبق قضیهٔ تقسیم $a=bq+r$ داریم:

$$a=bq+96$$

تمام عوامل اعداد طبیعی‌اند، پس حداقل q، برابر ۱ و از آن‌جایی که $b>96$ است، حداقل مقدار ممکن برای b برابر ۹۷ است، پس کم‌ترین مقدار مقسوم برابر است با:

$$a=bq+96 \xrightarrow[b_{min}=97]{q_{min}=1} a_{min}=97\times 1+96=193$$

پس a نمی‌تواند برابر ۱۹۰ باشد.

۸۳۸ **۴**

$$\left.\begin{array}{l} m=17q+3 \Rightarrow m^2=17q'+9 \\ n=17k+5 \Rightarrow 2n=17k'+10 \end{array}\right\} \Rightarrow m^2-2n=17t-1=17t'+16$$

۸۳۹ **۴** **روش اول:**

$$a=25b+17(b>17) \xrightarrow{a=6k} 6k=25b+(25-8) \Rightarrow 2(3k+4)=25(b+1) \Rightarrow b+1 \equiv \text{مضرب } 2 \xrightarrow{b>17} b_{min}=19 \Rightarrow a_{min}=492$$

روش دوم: طبق قضیهٔ تقسیم $a=bq+r$ $(r=17, q=25)$ داریم:

$$a=25b+17 \xrightarrow{a \text{ مضرب } 6} \cancel{25}^{1}b+\cancel{17}^{-1} \overset{6}{\equiv} 0 \Rightarrow b-1 \overset{6}{\equiv} 0 \Rightarrow b \overset{6}{\equiv} 1 \Rightarrow b=6k+1$$

از طرفی می‌دانیم در قضیهٔ تقسیم $b>17$، پس:

$$6k+1>17 \Rightarrow k>\frac{16}{6} \Rightarrow \min k=3 \Rightarrow \min b=19 \Rightarrow a_{min}=25\times 19+17=492 \Rightarrow a \text{ دهگان } =9$$

۸۴۰ **۲** می‌دانیم طبق قضیهٔ تقسیم: $0\le r<b$ و $a=bq+r$، بنابراین بیشترین مقدار باقی‌مانده برابر با $b-1$ و کم‌ترین مقدار آن برابر صفر است. پس:

$$r_{max}=b-1$$

$$a=bq+r \xrightarrow{r=b-1} a=bq+b-1 \Rightarrow a+1=b\underbrace{(q+1)}_{q'} \Rightarrow a+1=bq' \Rightarrow b\mid a+1$$

$$\left\{\begin{array}{l} b\mid a+1 \\ b\mid a+7 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} b\mid 6 \Rightarrow b\in\{1,2,3,6\} \xrightarrow{b>1} b=2,3,6$$

در نتیجه b دارای ۳ مقدار است.

۸۴۱ **۲** طبق قضیهٔ تقسیم $a = bq + r$ $(a = b + ۸۰۰, r = ۶۲)$ داریم:

$$b + ۸۰۰ = bq + ۶۲ \Rightarrow ۷۳۸ = b(q - ۱)$$

برای این‌که q دارای بیشترین مقدار ممکن باشد، باید b دارای حداقل مقدار ممکن باشد. از طرفی $r < b$، پس $b > ۶۲$ است. یعنی b کوچک‌ترین عددی است که از ۶۲ بزرگ‌تر بوده و مقسوم‌علیه ۷۳۸ نیز می‌باشد. با تجزیهٔ ۷۳۸ داریم:

$$۷۳۸ = ۲ \times ۳^۲ \times ۴۱$$

کوچک‌ترین مقسوم‌علیه بزرگ‌تر از ۶۲ برای عدد ۷۳۸ برابر با $b = ۲ \times ۴۱ = ۸۲$ می‌باشد. بنابراین:

$$۷۳۸ = ۲ \times ۳^۲ \times ۴۱ = b \times (q - ۱) \Rightarrow \cancel{۲} \times ۳^۲ \times \cancel{۴۱} = \cancel{۲} \times \cancel{۴۱} \times (q - ۱) \Rightarrow q - ۱ = ۹ \Rightarrow q = ۱۰$$

۸۴۲ **۴** طبق قضیهٔ تقسیم $a = bq + r$ داریم:

$$a = ۱۳q + ۱۰$$

با توجه به این‌که a عددی فرد و ۱۰ عددی زوج است، ۱۳q باید عددی فرد باشد، از این‌رو q باید فرد باشد: $(q = ۲k + ۱)$

$$a = ۱۳(۲k + ۱) + ۱۰ \Rightarrow a = ۲۶k + ۱۳ + ۱۰ \Rightarrow a = ۲۶k + ۲۳$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۲۶ برابر با ۲۳ است.

۸۴۳ **۴** طبق قضیهٔ تقسیم $a = bq + r$ داریم: $(b = ۴۴, r = ۳۲)$

$$a = ۴۴q + ۳۲$$

۱) کوچک‌ترین عدد طبیعی که می‌توان به مقسوم اضافه کرد تا باقی‌مانده تغییر نکند ۴۴ است، چرا که در آن صورت خواهیم داشت:

$$a + ۴۴ = ۴۴q + ۴۴ + ۳۲ = ۴۴(q + ۱) + ۳۲$$

۲) بزرگ‌ترین عدد طبیعی که می‌توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج‌قسمت تغییر نکند ۱۱ است، چرا که اگر به مقسوم ۱۱ واحد اضافه کنیم، باقی‌مانده برابر ۴۳ می‌شود (یعنی حداکثر مقدار ممکن باقی‌مانده). حال اگر باز هم به مقسوم اضافه شود، باقی‌مانده کاهش یافته و به جای آن یک واحد به خارج‌قسمت اضافه می‌شود. در واقع:

$$a + ۱۱ = ۴۴q + ۴۳$$

$$a + ۱۲ = ۴۴q + ۴۴ = ۴۴(q + ۱)$$

بنابراین نسبت این دو مقدار برابر است با:

$$\frac{۴۴}{۱۱} = ۴$$

۸۴۴ **۳** طبق قضیهٔ تقسیم $a = bq + r$ داریم: $(b = ۴۷, r = ۲q^۲ - ۳)$

$$a = ۴۷q + ۲q^۲ - ۳$$

حداکثر مقدار ممکن برای باقی‌مانده برابر با $b - ۱ = ۴۶$ است. پس داریم:

$$۲q^۲ - ۳ \le ۴۶ \Rightarrow q^۲ \le \frac{۴۹}{۲} \Rightarrow q_{max} = ۴$$

در نتیجه:

$$a_{max} = ۴۷ \times ۴ + ۲ \times ۱۶ - ۳ = ۲۱۷$$

۸۴۵ **۴** طبق قضیهٔ تقسیم $a = bq + r$ $(b = ۴۱, r = q)$، پس داریم:

$$a = ۴۱q + q = ۴۲q$$

و حداکثر مقدار r برابر با $b - ۱ = ۴۰$ است، پس:

$$q = r = ۴۰ \Rightarrow a = ۴۲ \times ۴۰$$

حال برای یافتن عدد دیگر داریم:

$$a' = ۳۹q' + r' \,,\; q' = r' \Rightarrow a' = ۴۰q'$$

اگر $q' = ۰$ باشد، آن‌گاه a' طبیعی نیست. بنابراین $q' = ۱$ و $a' = ۴۰$ خواهد بود. حال خواهیم داشت:

$$\frac{a}{a'} = \frac{۴۲ \times ۴۰}{۴۰} = ۴۲$$

۸۴۶ **۳** طبق قضیهٔ تقسیم $a = bq + r$، داریم:

$$a = b(۷) + ۶۰ = ۷b + ۶۰$$

حال اگر به مقسوم‌علیه x واحد اضافه کنیم با فرض ثابت ماندن مقسوم و خارج‌قسمت داریم:

$$a = (b + x) \times ۷ + r' \xrightarrow{a = ۷b + ۶۰} \cancel{۷b} + ۶۰ = \cancel{۷b} + ۷x + r' \Rightarrow r' = ۶۰ - ۷x \xrightarrow{۰ \le r'} ۰ \le ۶۰ - ۷x \Rightarrow ۷x \le ۶۰ \Rightarrow x \le ۸$$

۸۴۷ **۴** طبق قضیهٔ تقسیم $a = bq + r$، چون خارج‌قسمت و باقی‌مانده با هم برابرند $(q = r)$ داریم:

$$a = bq + q$$

از طرفی با تغییرات اعمال‌شده (۳ واحد از مقسوم‌علیه کم کنیم و ۵ واحد به خارج‌قسمت اضافه کنیم) داریم:

$$a = (b - ۳)(q + ۵) = bq - ۳q + ۵b - ۱۵$$

با برابر قرار دادن این دو عبارت داریم:

$$bq + q = bq - ۳q + ۵b - ۱۵ \Rightarrow ۴q = ۵b - ۱۵$$

کم‌ترین مقدار b که به ازای آن عبارت $۵b - ۱۵$ مضرب ۴ باشد برابر ۷ است $(۲۰ = ۱۵ - (۵ \times ۷))$، پس کم‌ترین مقدار q برابر است با:

$$۴q = ۳۵ - ۱۵ = ۲۰ \Rightarrow q_{min} = ۵$$

در نتیجه:

$$a = bq + q \xrightarrow[q_{min} = ۵]{b_{min} = ۷} a_{min} = ۳۵ + ۵ = ۴۰$$

۸۴۸ **۴** باقی‌مانده از مربع خارج‌قسمت ۲ واحد کم‌تر است، پس $r = q^۲ - ۲$. طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$a = ۳۷q + (q^۲ - ۲) \xRightarrow{۰ \le r < ۳۷} ۰ \le q^۲ - ۲ < ۳۷ \Rightarrow ۲ \le q^۲ < ۳۹ \Rightarrow q_{max} = ۶ \Rightarrow a_{max} = ۳۷ \times ۶ + (۳۶ - ۲) = ۲۵۶$$

که ۲۵۶ مضرب ۱۶ است.

۸۴۹ **۲** $q = r^۲$، پس طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$۱۶۵ = br^۲ + r \Rightarrow ۳ \times ۵ \times ۱۱ = r(br + ۱)$$

از آن‌جایی که $r < b$ است، پس داریم:

$r = ۳ \Rightarrow ۱۶۵ = ۹b + ۳ \Rightarrow b = ۱۸$ ✓

$r = ۱ \Rightarrow ۱۶۵ = b + ۱ \Rightarrow b = ۱۶۴$ ✓

$r = ۱۱ \Rightarrow ۱۶۵ = ۱۲۱b + ۱۱ \Rightarrow b = ۱/۲ \notin \mathbb{Z}$

$r = ۵ \Rightarrow ۱۶۵ = ۲۵b + ۵ \Rightarrow b = ۶/۴ \notin \mathbb{Z}$

پس فقط دو مقدار قابل قبول است.

۸۵۰ **۴** طبق قضیهٔ تقسیم $a = bq + r$ $(b = ۴۱، r = ۱۷)$، داریم:

$$a = ۴۱q + ۱۷$$

اگر عدد نوشته‌شده در هر یک از گزینه‌ها را به a اضافه کنیم، خواهیم داشت:

۱) $a + ۸۳ = ۴۱q + ۱۷ + ۸۳ = ۴۱q + ۱۰۰ = ۴۱q' + ۱۸$

۲) $a + ۹۳ = ۴۱q + ۱۷ + ۹۳ = ۴۱q + ۱۱۰ = ۴۱q' + ۲۸$

۳) $a + ۱۰۳ = ۴۱q + ۱۷ + ۱۰۳ = ۴۱q + ۱۲۰ = ۴۱q' + ۳۸$

۴) $a + ۱۱۳ = ۴۱q + ۱۷ + ۱۱۳ = ۴۱q + ۱۳۰ = ۴۱q' + ۷$

بنابراین در صورت اضافه کردن ۱۱۳ واحد به a، باقی‌مانده برابر با ۷ شده که از ۱۷ کم‌تر می‌باشد.

۸۵۱ **۱** طبق قضیهٔ تقسیم $a = bq + r$ داریم: $(b = ۶۳ \;,\; r = ۱۷)$

$$a = ۶۳q + ۱۷ \xRightarrow{+۶۰} a + ۶۰ = ۶۳q + ۱۷ + ۶۰ \Rightarrow a + ۶۰ = ۶۳q + ۷۷ = ۶۳q + ۶۳ + ۱۴ = ۶۳(q + ۱) + ۱۴$$

از باقی‌مانده ۳ واحد کم شده و به خارج‌قسمت ۱ واحد اضافه می‌شود.

۸۵۲ **۳** $۳x^۳ + ۹x^۲$ مربع کامل است، پس داریم:

$$۳x^۳ + ۹x^۲ = k^۲ \Rightarrow ۳x^۲(x + ۳) = k^۲$$

$x^۲$ و $k^۲$ مربع کامل‌اند، پس $۳(x + ۳)$ نیز مربع کامل است یا $x + ۳ = ۳q^۲$، پس:

$$x = ۳(q^۲ - ۱) \xRightarrow{\text{بیشترین مقدار دو رقمی x به ازای q=۵ است.}} x = ۷۲$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم ۷۲ بر ۵ برابر است با:

$$۷۲ = ۵ \times ۱۴ + ۲ \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = ۲$$

۸۵۳ **۲** اگر خارج‌قسمت q باشد، آن‌گاه باقی‌مانده برابر $\frac{۵}{۷}q + ۲$ می‌باشد. طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$a = bq + r \xRightarrow{r = \frac{۵}{۷}q + ۲} a = ۱۸q + \frac{۵}{۷}q + ۲$$

باقی‌مانده عددی طبیعی است، پس $۷|q$ و داریم:

۱) $q = ۷ \Rightarrow a = ۱۸ \times ۷ + ۷ = ۱۳۳$

۲) $q = ۱۴ \Rightarrow a = ۱۸ \times ۱۴ + ۱۲ = ۲۶۴$

۳) $q = ۲۱ \Rightarrow a = ۱۸ \times ۲۱ + ۱۷ = ۳۹۵ \Rightarrow$ حداکثر مقدار ۳۹۵ است.

۴) $q = ۲۸ \Rightarrow a = ۱۸ \times ۲۸ + ۲۲$ غقق (باقی‌مانده (۲۲) از مقسوم (۱۸) بیشتر است.)

۸۵۴ **۱** طبق قضیهٔ تقسیم $a = bq + r$ است، پس داریم: $(r = ۱۷ \;,\; b = ۲۴)$

$$A = ۲۴q + ۱۷ \Rightarrow A = ۲۴(q - ۲) + ۲ \times ۲۴ + ۱۷ \Rightarrow A = ۲۴q' + ۶۵$$

از طرفی A و ۶۵ هر دو مضرب ۵ هستند، پس q' نیز مضرب ۵ خواهد بود. بنابراین:

$$A = ۲۴q' + ۶۵ \xRightarrow{\div ۵} \frac{A}{۵} = ۲۴\left(\frac{q'}{۵}\right) + ۱۳ \Rightarrow \frac{A}{۵} = ۲۴q'' + ۱۳$$

$$\frac{A}{۵} = ۱۲ \times ۲ \times q'' + ۱۲ + ۱ \Rightarrow \frac{A}{۵} = ۱۲(۲q'' + ۱) + ۱ \Rightarrow \frac{A}{۵} = ۱۲k + ۱$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم $\frac{A}{۵}$ بر ۱۲ برابر با ۱ می‌باشد.

۸۵۵ **۱** طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$۱۷۱=bq+r \xRightarrow{b+q+r=۲۹} ۱۷۱=bq+(۲۹-b-q) \Rightarrow ۱۴۲=bq-b-q \xRightarrow{\text{طرفین را به‌علاوهٔ ۱ می‌کنیم.}} ۱۴۳=bq-b-q+۱$$

$$=b(q-۱)-(q-۱)=(b-۱)(q-۱)$$

از آن‌جایی که $۱۱\times۱۳=۱۴۳$، دو حالت زیر را داریم:

$$\begin{cases} b-۱=۱۳ \Rightarrow b=۱۴ \xRightarrow{b+q+r=۲۹} q+r=۲۹-۱۴=۱۵ \\ b-۱=۱۱ \Rightarrow b=۱۲ \xRightarrow{b+q+r=۲۹} q+r=۲۹-۱۲=۱۷ \end{cases}$$

که فقط ۱۷ در بین گزینه‌هاست.

۸۵۶ **۳** حداکثر مقدار باقی‌مانده $b-۱$ است و از طرفی هم مقسوم ۱۴ برابر باقی‌مانده است، پس داریم:

$$a=bq+r \xRightarrow{a=۱۴r} ۱۴r=bq+r \Rightarrow ۱۳r=bq \xRightarrow{r=b-۱} ۱۳(b-۱)=bq \Rightarrow ۱۳b-bq=۱۳ \Rightarrow b(۱۳-q)=۱۳$$

از آن‌جایی که ۱۳ عددی اول است دو حالت زیر را داریم:

$$۱)\begin{cases} b=۱ \\ ۱۳-q=۱۳ \Rightarrow q=۰ \end{cases} \Rightarrow b+q=۱ \qquad ۲)\begin{cases} b=۱۳ \\ ۱۳-q=۱ \Rightarrow q=۱۲ \end{cases} \Rightarrow b+q=۱۳+۱۲=۲۵$$

که ۲۵ در گزینه‌ها وجود دارد.

۸۵۷ **۲**

$$\begin{cases} a=۱۵q+q=۱۶q \\ a=۲۱q'+q'=۲۲q' \end{cases} \Rightarrow ۱۶q=۲۲q' \Rightarrow \frac{q}{q'}=\frac{۲۲}{۱۶}=\frac{۱۱}{۸} \Rightarrow \begin{cases} q=۱۱k \xRightarrow{r=q<۱۵} ۱۱k<۱۵ \Rightarrow k\le ۱ \\ q'=۸k' \xRightarrow{r'=q'<۲۱} ۸k'<۲۱ \Rightarrow k'\le ۲ \end{cases} \xRightarrow{\cap} k\le ۱ \Rightarrow k_{max}=۱$$

بنابراین:

$$\max(a)=۱۵\times۱۱+۱۱=۱۶۵+۱۱=۱۷۶ \Rightarrow$$ رقم یکان ۶ است.

۸۵۸ **۳** هر عدد اول به صورت $۶k+۱$ یا $۶k+۵$ یا به اختصار $۶k\pm۱$ است (توجه کنید که عکس این قضیه صحیح نمی‌باشد) داریم:

$$a=۶k\pm۱ \Rightarrow a^۴=۶k'+۱, a^۲=۶k''+۱ \Rightarrow ۴a^۲=۶k'''+۴ \Rightarrow a^۴+۴a^۲+۵=۶k'+۱+۶k''+۴+۵=۶q'+۱۰=۶q'+۴$$

۸۵۹ **۲** می‌دانیم که دو عدد فرد متوالی نسبت به هم اول هستند، بنابراین m عددی فرد است (توجه کنید که اگر m زوج باشد، $(m,m+۲)=۲$ خواهد بود.) حال با توجه به فرد بودن m، $m+۲$ نیز فرد بوده و با توجه به این‌که $a|m+۲$، a مقسوم علیه عددی فرد بوده و می‌توان نتیجه گرفت که a نیز فرد است. با توجه به این‌که مربع هر عدد فرد به صورت $۸k+۱$ است، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^۲+m^۲+۳$ بر ۸ برابر با $۱+۱+۳=۵$ می‌باشد.

۸۶۰ **۱** می‌دانیم که $(m,m+۱)=۱$، بنابراین $(n,n+۲)=۱$ و از آن‌جا نتیجه می‌گیریم که n فرد است (اگر n زوج باشد، $(n,n+۲)=۲$ خواهد بود.) حال با توجه به فرد بودن n، $n+۴$ نیز فرد بوده و از آن‌جایی که $m|n+۴$ می‌توان نتیجه گرفت که m نیز یک عدد فرد است (عدد فرد مقسوم‌علیه زوج ندارد.) بنابراین m و n فرد بوده و مربع آن‌ها به صورت $۸k+۱$ و $۸k'+۱$ است و $m^۲-n^۲$ برابر خواهد بود با:

$$m^۲-n^۲=۸k+۱-۸k'-۱=۸(k-k')=۸k''$$

۸۶۱ **۴** طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\begin{cases} a=۱۳q+۵ \Rightarrow ۱۰a=۱۳۰q+۵۰ \\ a=۱۰q'+۴ \Rightarrow ۱۳a=۱۳۰q'+۵۲ \end{cases} \Rightarrow ۳a=۱۳۰\underbrace{(q'-q)}_{k}+۲$$

پس داریم:

$$۳a=۱۳۰k+۲=۱۳۰\underbrace{(k-۱)}_{k'}+۱۳۰+۲ \Rightarrow ۳a=۱۳۰k'+۱۳۲$$

چون $۳a$ و ۱۳۲ مضرب ۳ می‌باشند، پس k' نیز مضرب ۳ است و می‌توانیم آن را بر ۳ تقسیم کنیم:

$$a=۱۳۰\underbrace{\left(\frac{k'}{۳}\right)}+۴۴$$

چون k' مضرب ۳ است پس $\frac{k'}{۳}\in\mathbb{Z}$.

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۳۰، برابر ۴۴ است.

۸۶۲ **۱** طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$۲a+۴=bq+r \xRightarrow{\times۲} ۴a+۸=b\overbrace{(۲q)}^{q'}+۲r \Rightarrow ۴a+۷=bq'+\underbrace{(۲r-۱)}_{\text{طبق صورت سؤال، ۷ واحد از r بیشتر است.}}$$

در نتیجه:

$$۲r-۱=r+۷ \Rightarrow r=۸ \Rightarrow ۲a+۴=bq+۸ \Rightarrow ۲a=bq+۴ \xRightarrow{\times۲} ۴a=b(۲q)+۸$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $۴a$ بر b برابر ۸ است.

۸۶۳ ۱ طبق قضیهٔ تقسیم $a = bq + r$ داریم:

$$۱۰۰ = bq' + ۹ \Rightarrow bq' = ۹۱ \qquad ۱۴۸ = bq + ۵ \Rightarrow bq = ۱۴۳$$

بنابراین b عددی دورقمی است که مقسوم‌علیه مشترک ۱۴۳ و ۹۱ می‌باشد. با توجه به این‌که $۱۳ \times ۱۱ = ۱۴۳$ و $۱۳ \times ۷ = ۹۱$، لذا تنها عدد با این ویژگی عدد ۱۳ است. بنابراین $b = ۱۳$ و جمع ارقام آن ۴ می‌باشد.

۸۶۴ ۱ طبق قضیهٔ تقسیم $a = bq + r$ داریم:

$$(b = ۱۲ , r = ۸) \Rightarrow a = ۱۲q + ۸ \Rightarrow ۲a = ۲۴q + ۱۶$$

$$\left.\begin{array}{l} ۲a = ۲۴q + ۱۶ \\ ۲a = ۲۳q + ۲۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲۴q + ۱۶ = ۲۳q + ۲۰ \Rightarrow q = ۴ \Rightarrow a = ۵۶$$

حال که مقدار $a = ۵۶$ به‌دست آمده، داریم:

$$۵۶ = ۵ \times ۱۱ + ۱$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۱ برابر با ۱ می‌باشد.

۸۶۵ ۳

$$a = bq + ۱۳ \Rightarrow ۲a = b(۲q) + ۲۶ \quad ; \quad (b > ۱۳)$$

اما طبق فرض، باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲a بر b برابر ۹ است، پس از ۲۶ مضربی از b کم شده و حاصل، برابر ۹ شده است. بنابراین داریم:

$$۲۶ - kb = ۹ \Rightarrow kb = ۱۷ \xRightarrow{b \geq ۱۴} \begin{cases} b = ۱۷ \\ k = ۱ \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$۴۱ = ۱۷ \times ۲ + ۷ \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = ۷$$

۸۶۶ ۲ طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\begin{cases} a = bq + ۶ \\ ۳a = bq' + ۴ \end{cases} \Rightarrow ۳(bq + ۶) = bq' + ۴ \Rightarrow ۳bq + ۱۸ = bq' + ۴ \Rightarrow b(q' - ۳q) = ۱۴ \xRightarrow{b|۱۴} b = \{۱،۲،۷،۱۴\}$$

از آن‌جایی که باقی‌مانده‌ها برابر۴ و ۶ می‌باشند و همواره $r < b$، پس:

$$۷ \leq b \xRightarrow{b=\{۱،۲،۷،۱۴\}} \begin{cases} b_{min} = ۷ \\ b_{max} = ۱۴ \end{cases} \Rightarrow b_{max} - b_{min} = ۷$$

۸۶۷ ۲ طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\begin{cases} ۶۲۹ = bq_۱ + ۵ \Rightarrow bq_۱ = ۶۲۴ \Rightarrow b|۶۲۴ \Rightarrow b|۳ \times ۱۳ \times ۲^۴ \\ ۲۴۱ = bq_۲ + ۱ \Rightarrow bq_۲ = ۲۴۰ \Rightarrow b|۲۴۰ \Rightarrow b|۳ \times ۵ \times ۲^۴ \end{cases} \Rightarrow b|(۶۲۴،۲۴۰) \Rightarrow b|۲^۴ \times ۳ \Rightarrow b|۴۸$$

$$\Rightarrow b \in \{۱،۲،۳،۴،۶،۸،۱۲،۱۶،۲۴،۴۸\}$$

باقی‌مانده همواره از مقسوم‌علیه کوچک‌تر است. پس:

$$۱ < b , ۵ < b \xRightarrow{\cap} ۶ \leq b \Rightarrow b = \{۶،۸،۱۲،۱۶،۲۴،۴۸\} \Rightarrow b_{max} = ۴۸ , b_{min} = ۶ \Rightarrow \frac{b_{max}}{b_{min}} = \frac{۴۸}{۶} = ۸$$

۸۶۸ ۱ ۱۳۹۸ عددی زوج است. برای x و y یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید:

۱) x و y هر دو زوج باشند.

در این صورت $x^۲$ و $y^۲$ هر دو مضرب ۴ بوده اما ۱۳۹۸ مضرب ۴ نمی‌باشد، بنابراین در این حالت معادله پاسخی در مجموعهٔ اعداد صحیح ندارد.

۲) x و y هر دو فرد باشند.

در این صورت $x^۲$ و $y^۲$ هر دو به صورت $۸k + ۱$ بوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^۲ + y^۲$ بر ۸ برابر با ۲ می‌باشد، اما باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۳۹۸ بر ۸ برابر با ۶ است، پس معادله جوابی ندارد.

۸۶۹ ۲ با توجه به این‌که a عددی زوج است، به جای a عبارت ۲k را قرار می‌دهیم:

$$(a + ۲)(a + ۴)(a + ۶)(a + ۸) = (۲k + ۲)(۲k + ۴)(۲k + ۶)(۲k + ۸) = ۱۶(k + ۱)(k + ۲)(k + ۳)(k + ۴)$$

که اعداد $k + ۱$، $k + ۲$، $k + ۳$ و $k + ۴$ چهار عدد متوالی بوده و حاصل‌ضرب آن‌ها بر !۴ بخش‌پذیر است پس بزرگ‌ترین عددی که عبارت داده‌شده همواره بر آن بخش‌پذیر است، برابر با $۱۶ \times ۴! = ۳۸۴$ می‌باشد.

۸۷۰ **۱** عبارت داده‌شده را برحسب باقی‌ماندهٔ تقسیم بر ۳، به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(a+17)(a+45)(a+b) \Rightarrow (a+2)(a+0)(a+b)$$

بنابراین اگر b عددی باشد که در تقسیم بر ۳ دارای باقی‌ماندهٔ ۱ باشد، عبارت داده‌شده در تقسیم بر ۳ به صورت زیر خواهد بود:

$$(a+2)(a)(a+1) = a(a+1)(a+2)$$

چون اعداد a، $(a+1)$ و $(a+2)$، سه عدد متوالی هستند، یکی از آن‌ها بر ۳ بخش‌پذیر خواهد بود، پس باید $b = 3k+1$ باشد.

بررسی گزینه‌ها:

۱) $73 = 3(24)+1$ ۲) $83 = 3(27)+2$ ۳) $95 = 3(31)+2$ ۴) $114 = 3(38)+0$

۸۷۱ **۱** این سه عدد متوالی را $k+1$، k و $k-1$ در نظر می‌گیریم:

$$(k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3 = k^3 - \cancel{3k^2} + 3k - \cancel{1} + k^3 + k^3 + \cancel{3k^2} + 3k + \cancel{1} = 3k^3 + 6k = 3k(k^2+2)$$

بنابراین این عدد حداقل یک عامل ۳ دارد.

حال اگر k مضرب ۳ باشد، این عدد یک عامل ۳ دیگر دارد و اگر k مضرب ۳ نباشد نیز دارای یک عامل ۳ است (اگر k مضرب ۳ نباشد، k^2+2 همواره بر ۳ بخش‌پذیر است). بنابراین این عدد همواره بر ۹ بخش‌پذیر می‌باشد، اما لزومی ندارد که همواره زوج باشد. (مثال نقض: $k = 5$)

۸۷۲ **۲** **روش اول:** حاصل‌ضرب دو عدد به صورت $6k+3$ و $6k'+5$، برابر خواهد بود با:

$$(6k+3)(6k'+5) = 36kk' + 30k + 18k' + 15 = 6(6kk' + 5k + 3k') + 15 = 6(6kk' + 5k + 3k' + 2) + 3 = 6k'' + 3 \Rightarrow$$

تنها گزینهٔ (۲) دارای این ویژگی است.

روش دوم: اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۶ برابر ۳ و باقی‌ماندهٔ تقسیم b بر ۶ برابر ۵ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم ab بر ۶ برابر با ۱۵ یا ۳ خواهد بود که عدد ۱۵ غیرقابل قبول است.

بنابراین حاصل‌ضرب دو عدد به صورت $6k+3$ و $6k'+5$ به صورت $6k''+3$ خواهد بود و در میان گزینه‌های داده‌شده تنها گزینهٔ (۲) دارای این ویژگی می‌باشد.

۸۷۳ **۳** باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع اعداد طبیعی بر ۴ می‌تواند ۰ یا ۱ باشد:

$$x = 4k \Rightarrow x^2 = 4k' \quad \text{و} \quad x = 4k+1 \Rightarrow x^2 = 4k'+1 \quad \text{و} \quad x = 4k+2 \Rightarrow x^2 = 4k' \quad \text{و} \quad x = 4k+3 \Rightarrow x^2 = 4k'+1$$

حال داریم:

$$x^2 - y^2 = \begin{cases} 4k' - 4k'' = 4\alpha \Rightarrow \text{(۱) گزینهٔ} \\ (4k'+1) - 4k'' = 4\alpha+1 \Rightarrow \text{(۲) گزینهٔ} \\ (4k'+1) - (4k''+1) = 4\alpha \Rightarrow \text{(۱) گزینهٔ} \\ 4k' - (4k''+1) = 4\alpha - 1 = 4\alpha' + 3 \Rightarrow \text{(۴) گزینهٔ} \end{cases}$$

بنابراین حاصل $x^2 - y^2$ به صورت 4α، $4\alpha+1$ و $4\alpha+3$ می‌تواند باشد. بنابراین گزینهٔ (۳) در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب ندارد.

۸۷۴ **۲** می‌دانیم حاصل‌ضرب ۳ عدد متوالی مضرب ۳ است پس: $n^3 - n = (n-1)n(n+1) = 3k$، بنابراین: $3 \mid n^3 - n$. بنابراین اگر معادلهٔ $n^3 - n = k$ دارای جواب باشد، k باید مضرب ۳ باشد (توجه کنید این‌که k باید مضرب ۳ باشد، شرط لازم است اما کافی نیست.) در گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) اعداد داده‌شده مضرب ۳ نیستند، بنابراین با رد گزینه‌های (۱) و (۳) و (۴)، می‌توان گفت که گزینهٔ (۲) صحیح است، اما برای این گزینه نیز داریم:

$$n^3 - n = 24360 \Rightarrow n = 29$$

۸۷۵ **۱** ابتدا باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع اعداد صحیح بر ۷ را محاسبه می‌کنیم:

$$x = 7k \Rightarrow x^2 = 7k' \quad \text{و} \quad x = 7k+1 \Rightarrow x^2 = 7k'+1 \quad \text{و} \quad x = 7k+2 \Rightarrow x^2 = 7k'+4 \quad \text{و} \quad x = 7k+3 \Rightarrow x^2 = 7k'+2$$

$$x = 7k+4 \Rightarrow x^2 = 7k'+2 \quad \text{و} \quad x = 7k+5 \Rightarrow x^2 = 7k'+4 \quad \text{و} \quad x = 7k+6 \Rightarrow x^2 = 7k'+1$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع اعداد صحیح بر ۷ برابر با ۰، ۱، ۲، ۴ است، بنابراین اگر جمع مربعات دو عدد صحیح بر ۷ بخش‌پذیر باشد، حتماً هر دو عدد مضرب ۷ بوده‌اند و می‌توان نتیجه گرفت که ab مضرب ۴۹ است.

مثال نقض برای گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴):

۲) $8 \mid 4^2 + 12^2 \Rightarrow 64 \nmid 48$ ۳) $9 \mid 3^2 + 12^2 \Rightarrow 81 \nmid 36$ ۴) $10 \mid 1^2 + 13^2 \Rightarrow 100 \nmid 13$

۸۷۶ ۴

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد «ب م م»

ب م م: عدد طبیعی d را ب م م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو باهم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دارای دو شرط زیر باشند:

الف) $d|a, d|b$ ب) $\forall m>0 ; m|a, m|b \to m \le d$

نکات ب م م:

۱) $(a,b)=(-a,b)=(a,-b)=(-a,-b)$

۲) $a|b \Rightarrow (a,b)=|a|$

۳) اگر k عددی طبیعی باشد: $(ka,kb)=k(a,b)$

۴) اگر n عددی طبیعی باشد: $(a^n,b^n)=(a,b)^n$

۵) اگر $a=bq+r$، آن‌گاه $(a,b)=(b,r)$

مثال اگر عدد طبیعی n مضرب ۷ نباشد، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $n^2+9n+21$ و $n+7$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱ و ۳ ۳) ۱ و ۵ ۴) ۷

پاسخ فرض کنیم ب م م دو عبارت d باشد. مطابق تعریف ب م م داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d|n^2+9n+21 \\ d|n+7 \xRightarrow{\times -n} d|-n^2-7n \end{array}\right\} \xRightarrow{+} d|2n+21$$

$$\left.\begin{array}{l} d|2n+21 \\ \text{از طرفی:} d|n+7 \xRightarrow{\times 2} d|2n+14 \end{array}\right\} \xRightarrow{-} d|7 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 7$$

چون $n \neq 7k$ پس d نمی‌تواند ۷ باشد، پس $d=1$. پس گزینهٔ (۱) صحیح است.

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد «ک م م»

ک م م: عدد طبیعی c را (ک م م) دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$، هرگاه دو شرط زیر را داشته باشند:

الف) $a|c, b|c$ ب) $\forall m>0 ; a|m, b|m \Rightarrow c \le m$

نکات ک م م:

۱) $[a,b]=[b,a]=[-a,b]=[a,-b]=[-a,-b]$

۲) $a|b \Rightarrow [a,b]=|b|$

۳) $[a,b](a,b)=|ab|$

۴) اگر k عددی طبیعی باشد: $[ka,kb]=k[a,b]$

۵) اگر n، عددی طبیعی باشد: $[a^n,b^n]=[a,b]^n$

۶) $(a,[a,b])=|a|$, $[a,(a,b)]=|a|$

مثال اگر a و b اعداد صحیح باشند، حاصل $[(a^2,a),(a,b)]$ کدام است؟

۱) $|a|$ ۲) a ۳) b ۴) ab

پاسخ

$$(a^2,a)=|a| \Rightarrow [|a|,\underbrace{(a,b)}_{d}] \overset{d||a|}{=\!=\!=} |a|$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} [a,b]=b \Rightarrow a|b \\ (b,c)=b \Rightarrow b|c \end{array}\right\} \Rightarrow a|c \Rightarrow (a,c)=a, [a,c]=c$$

توجه کنید که در گزینهٔ (۴)، $[b,c]=c$ خواهد بود.

۸۷۷ ۱

$$(12n+7,5n-2)=d \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d|5n-2 \xRightarrow{\times 12} d|60n-24 \\ d|12n+7 \xRightarrow{\times 5} d|60n+35 \end{array}\right. \xRightarrow{-} d|59 \Rightarrow \underbrace{d=1}_{\text{غقق}} \text{ یا } 59 \Rightarrow d=59$$