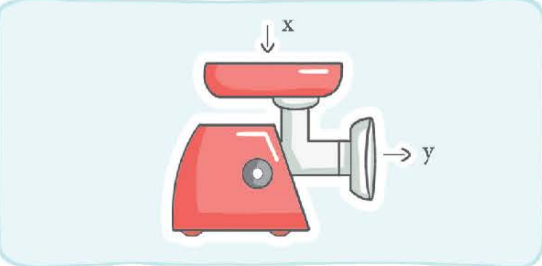
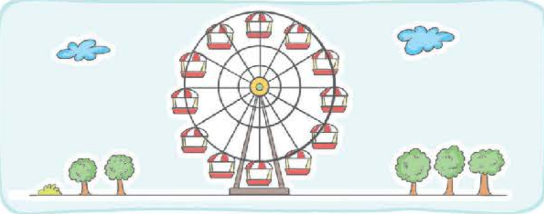
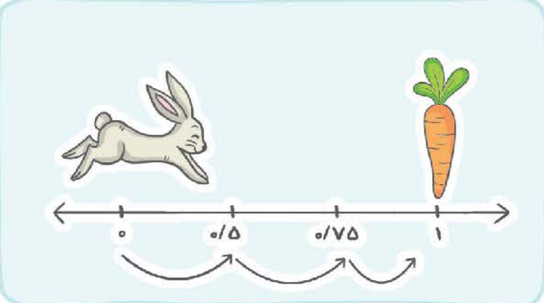
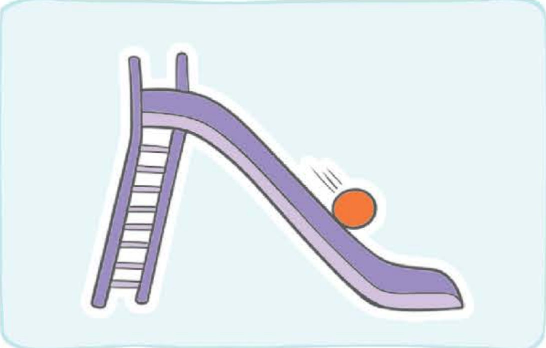
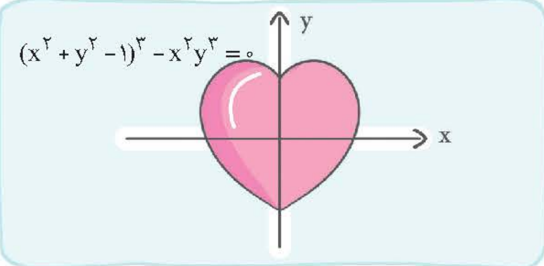
فهرست مطالب



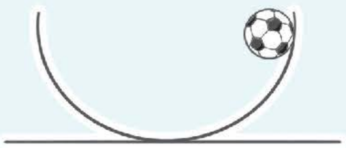


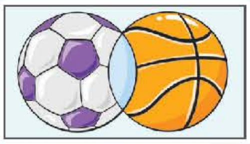




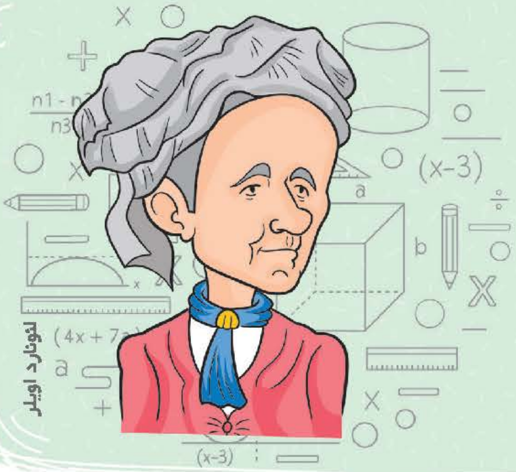


فهرست مطالب





فهرست مطالب



فصل اول: تابع

خلاصهٔ درسنامه و نکات فصل

بخش اول: تابع، دامنه و برد

بخش دوم: انتقال، تبدیلات و توابع چندجمله‌ای

بخش سوم: یکنوایی

بخش چهارم: اعمال جبری روی توابع و ترکیب توابع

بخش پنجم: یک‌به‌یک و وارون

تابع

یک ماشین است که به‌ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی می‌دهد. ورودی‌های مجاز را دامنه (D) و خروجی‌های آن را برد (R) می‌نامیم. تشخیص تابع از دیدگاه‌های مختلف را در جدول زیر ببینید:

تابع	دامنه	برد	تشخیص
نمودار پیکانی از A به B	A	زیرمجموعه‌ای از B	از هر عضو A دقیقاً یک فلش به B برود.
زوج مرتب	مجموعهٔ مؤلفه‌های اول	مجموعهٔ مؤلفه‌های دوم	نباید مؤلفه‌های اول برابر باشند.
نمودار مختصاتی	تصویر نمودار روی محور x ها	تصویر نمودار روی محور y ها	هر خط موازی محور y ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
ضابطه	x های مجاز	y های مجاز	هر رابطه به شکل $y=f(x)$ تابع است.

تذکر معمولاً رابطه‌هایی که در آن‌ها y دارای توان زوج، قدرمطلق، جزءصحیح و یا دارای ضریب متغیر هستند، تابع نیستند.

دامنه

دامنهٔ همهٔ توابع کنکوری برابر $\mathbb{R}$ است به‌جز توابع گفته‌شده در جدول زیر.

تابع	دامنه
کسری	$\mathbb{R}-\{$ریشه‌های مخرج$\}$
رادیکالی با فرجه زوج	زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم.
لگاریتمی	در تابع $y=\log_x u$ ، بین سه شرط $u>0$ ، $x>0$ و $x\neq 1$ اشتراک می‌گیریم.

تذکر برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع، هیچ‌وقت ضابطهٔ تابع را ساده نکنید.

برد

بهترین روش برای پیدا کردن برد توابع، رسم نمودار آن‌ها است. این روش معمولاً برای توابع براکتی، چندضابطه‌ای و قدرمطلقی استفاده می‌شود.

در جدول زیر، برد بعضی از توابع خاص آمده است. آن‌ها را بلد باشید:

ضابطه	برد	ضابطه	برد
$y=ax^2+bx+c\ ;\ a\neq 0$	۱) $a>0\ ;\ R=[\frac{-\Delta}{4a},+\infty)$ ۲) $a<0\ ;\ R=(-\infty,\frac{-\Delta}{4a}]$	$y=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$	$R=\{0,-1\}$
$y=\sin x\ ,\ y=\cos x$	$R=[-1,1]$	$y=x+\frac{1}{x}$	۱) $x>0\ ;\ R=[2,+\infty)$ ۲) $x<0\ ;\ R=(-\infty,-2]$
$y=x-[x]$	$R=[0,1)$	$y=\frac{ax+b}{cx+d}\ ;\ c\neq 0,\ ad-bc\neq 0$	$R=\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$

تساوی دو تابع

دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ را مساوی می‌گوییم هر وقت اولاً دامنه‌هایشان با هم برابر باشند و ثانیاً نمودارهایشان (ضابطه‌هایشان) هم یکی باشند. برای جلوگیری از افتادن در دام‌های تستی بخش تساوی دو تابع، حواستان به گذاشتن قدرمطلق بعد از خارج کردن عبارت از زیررادیکال با فرجه زوج باشد.

انتقال و تبدیلات

این‌جا می‌خواهیم از روی نمودار تابع $y=f(x)$، نمودارهای جدیدی را رسم کنیم. برای این‌کار ۶ حالت اصلی زیر را ببینید:

انتقال و تبدیلات	نحوهٔ رسم	دامنه و برد
$y=f(x)+k$	۱) $k>0$: $f(x)$ را به اندازهٔ k واحد بالا می‌بریم. ۲) $k<0$: $f(x)$ را به اندازهٔ k واحد پایین می‌بریم.	دامنه ثابت ولی برد k واحد جابه‌جا می‌شود.
$y=f(x+k)$	۱) $k>0$: $f(x)$ را به اندازهٔ k واحد چپ می‌بریم. ۲) $k<0$: $f(x)$ را به اندازهٔ k واحد راست می‌بریم.	برد ثابت ولی دامنه k واحد جابه‌جا می‌شود.
$y=kf(x)$	عرض تابع k برابر می‌شود.	دامنه ثابت ولی برد k برابر می‌شود.
$y=f(kx)$	طول تابع $\frac{1}{k}$ برابر می‌شود.	برد ثابت ولی دامنه $\frac{1}{k}$ برابر می‌شود.
$y=-f(x)$	قرینهٔ $f(x)$ نسبت به محور x ها	دامنه ثابت ولی برد تغییر می‌کند.
$y=f(-x)$	قرینهٔ $f(x)$ نسبت به محور y ها	برد ثابت ولی دامنه تغییر می‌کند.

تقدم روی انتقال و تبدیلات: برای رسم تابع $y=af(bx+c)+d$ از روی $f(x)$ تقدم به‌صورت زیر است:

۱) c ۲) b ۳) a ۴) d

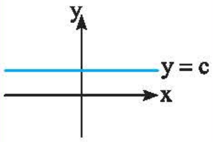
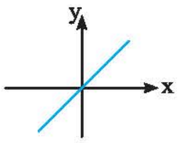
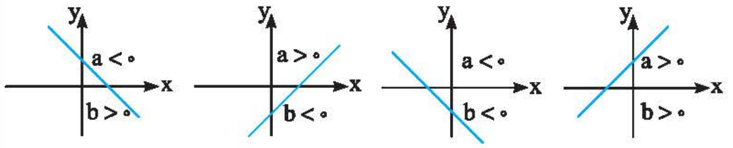
یعنی اینکه از روی $f(x)$ به‌ترتیب $f(x+c)$، $f(bx+c)$، $af(bx+c)$ و درآخر $af(bx+c)+d$ را رسم می‌کنیم.

رسم نمودار $|f(x)|$ و $f(|x|)$

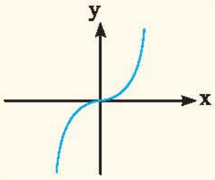
$y=\|f(x)\|$	ابتدا $f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس بخشی از $f(x)$ که زیر محور x ها است را قرینه کرده و به بالای این محور منتقل می‌کنیم.
$y=f(\|x\|)$	ابتدا $f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس سمت چپ محور y ها را پاک کرده و قرینهٔ بخشی که سمت راست محور y ها است را در سمت چپ هم می‌کشیم.

توابع خاص

نوبتی هم که باشد، نوبت توابع ثابت، همانی و خطی است. برای یادگرفتن آن‌ها جدول زیر را به‌خاطر بسپارید:

تابع	تابع ثابت	تابع همانی	تابع خطی
ضابطه	$y=c$	$y=x$	$y=ax+b\ ;\ a\neq 0$
تعریف	به‌ازای هر ورودی، جوابش c می‌شود.	هر ورودی‌ای که می‌گیرد، خروجی‌اش همان می‌شود.	در ضابطهٔ تابع خطی، a شیب و b عرض از مبدأ است.
نمودار			

تابع درجه سوم



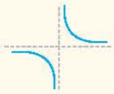
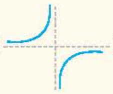
ضابطهٔ این تابع به‌صورت $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \ (a\neq 0)$ است. ساده‌ترین حالت این تابع $y=x^3$ است که نمودار آن به‌صورت مقابل می‌باشد (شبیه نُره):

به‌وضوح دامنه و برد این تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

تذکر توابع درجه سوم پرکاربرد مقابل را ببینید:

$\boxed{y=(x\pm2)^3=x^3\pm6x^2+12x\pm8}$, $\boxed{y=(x\pm1)^3=x^3\pm3x^2+3x\pm1}$

تابع هموگرافیک

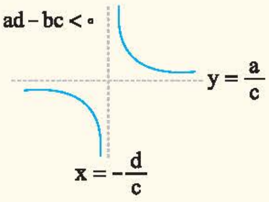
هر تابع به فرم $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ با دو شرط $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$ را هموگرافیک می‌نامیم. نمودار این تابع به یکی از دو شکل  یا  است.

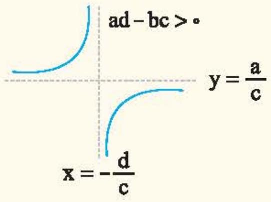
دامنه و برد این تابع به ترتیب به‌صورت $D=\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$ و $R=\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ می‌باشد.

تذکر در توابع به فرم هموگرافیک:

(۱) اگر $c=0$ باشد، تابع خطی می‌شود. (۲) اگر $ad-bc=0$ باشد، تابع ثابت می‌شود.

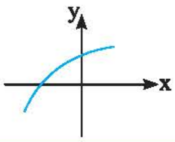
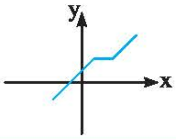
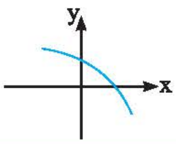
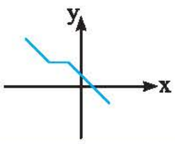
نمودار تابع هموگرافیک



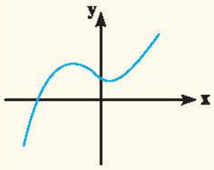


یکنوایی

حالت‌های مختلف یکنوایی را از روی جدول زیر یاد بگیرید:

وضعیت	تعریف فارسی	تعریف ریاضی	مثال
اکیداً صعودی	با افزایش x، مقدار تابع هم زیاد می‌شود.	$x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$	
صعودی	با افزایش x، مقدار تابع یا ثابت می‌ماند یا زیاد می‌شود.	$x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$	
اکیداً نزولی	با افزایش x، مقدار تابع کم می‌شود.	$x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$	
نزولی	با افزایش x، مقدار تابع یا ثابت می‌ماند یا کم می‌شود.	$x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$	

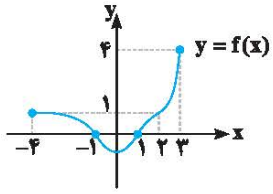
تذکر **(۱) توابعی که نه صعودی و نه نزولی باشند را غیریکنوا می‌نامیم. مانند شکل مقابل:**



(۲) تنها تابع دنیا که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت می‌باشد.

(۳) یکی از روش‌های خوب برای بررسی یکنوایی توابع، رسم آن‌ها است.

۳۸ شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع $\frac{\sqrt{f(x)}}{1-f(x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۹ اگر $f(x)=2^x$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(\frac{1}{x})-f(x)}$ به کدام صورت است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) $\mathbb{R}-(-1,1)$ ۲) $[-1,0)\cup(0,1]$ ۳) $[-1,0)\cup[1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1]\cup(0,1]$

۴۰ اگر $f(x)=(\sqrt{3})^x$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x)-f(\frac{2}{x+1})}$ به صورت $[a,b)\cup[c,+\infty)$ است. $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

۴۱ دامنهٔ تابع $y=\log_{x^2-1}(9-x^2)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) صفر

۴۲ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{1-\log(x^2-3x)}$ به کدام صورت است؟ (ریاضی داخل ۹۵)

۱) $[-2,0)\cup(3,5]$ ۲) $[-2,0]\cup(3,5)$ ۳) $[-2,3)$ ۴) $(0,5]$

۴۳ کدام عدد در دامنهٔ تابع $y=-\frac{1}{3}\cot(\frac{2x}{3})$ قرار ندارد؟

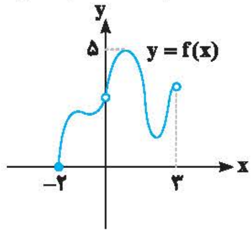
۱) $\frac{9\pi}{4}$ ۲) $\frac{-2\pi}{3}$ ۳) $\frac{9\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۴۴ دامنهٔ تابع $f(x)=\tan(\frac{\pi+\pi x}{2})$ در بازهٔ $(-5,5)$، شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۴

شاید برد به اندازهٔ دامنه مهم نباشه، ولی اخیراً توی کنکور مهم شده. البته برد خیلی از تابع‌ها رو جلوتر توی فصل کاربرد مشتق هم به سبکی دیگه می‌تونید به‌دست بیارید.

۴۵ نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر است. $D_f\cap R_f$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۶ اگر برد تابع $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ برابر $R_f=\{0,2,\frac{5}{4}\}$ باشد، کدام‌یک از نقاط زیر در دامنهٔ تابع f قرار ندارد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۲- ۴) ۱-

۴۷ اگر برد تابع خطی $y=\frac{-x}{2}+3$ بازهٔ $[0,3]$ باشد، دامنهٔ آن شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۸ اگر دامنهٔ تابع $y=-x^2+2$ بازهٔ $[-1,3]$ باشد، برد آن به صورت $[a,b]$ است. $b-a$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۴۹ برد تابع $y=|1-\sqrt{x}|$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $[0,1]$ ۳) $[0,+\infty)$ ۴) $(0,1)$

۵۰ اگر برد $y=-|x+1|-2$ بازهٔ $(-\infty,a]$ باشد، a^2 کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۹ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۵۱ برد تابع $f(x)=\begin{cases}2x & x\le 0\\ 3 & 0<x<4\\ 4+\sqrt{x} & x>4\end{cases}$، شامل چند عدد صحیح نیست؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۵۲ برد تابع $y=\frac{-۲}{-۱-x^۲}$ کدام است؟

۱) $(۰,۱]$ ۲) $(۰,۲]$ ۳) $[-۱,۰)$ ۴) $(-۲,-۱]$

۵۳ برد تابع $y=\sqrt{۴-x^۲}$ کدام است؟

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $[۲,+\infty)$ ۳) $[۰,۴]$ ۴) $[۰,۲]$

۵۴ برد تابع $f(x)=\sqrt{-x^۲+۴x+۱}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۵ محدودهٔ تغییرات برد $f(x)=x-\sqrt{x}$ به صورت $[a,+\infty)$ است. حاصل $[a+۱]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

۵۶ برد تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۱}+۲$ به صورت $\mathbb{R}-\{a\}$ است. $a^۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۵۷ برد تابع $f(x)=\frac{۱}{|x|+|x-۱|}$ در بازهٔ $[-۱,۲]$ کدام است؟

۱) $[۱,۳]$ ۲) $[\frac{۱}{۳},۱]$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $[۰,۱]$

۵۸ برد تابع $f(x)=\sqrt{۱+۴x-۸[\frac{x}{۲}]}$ کدام است؟

۱) $(۱,۳)$ ۲) $[۱,۳)$ ۳) $(۱,۳]$ ۴) $[۱,۳]$

۵۹ برد تابع $f(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{x} & x>۰\\ |x+۲| & x\leq ۰\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۱\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۱,۰\}$ ۴) $\mathbb{R}$

۶۰ برد دو تابع $f(x)=۴+\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=x^۲+۴x+(۳a-۴)$ با هم برابر است. برد تابع $y=a\sin x+۳$ کدام است؟

۱) $[۳,۷]$ ۲) $[-۱,۷]$ ۳) $[۱,۳]$ ۴) $[۴,۷]$

۶۱ برد تابع $y=\frac{x^۲+۲}{\sqrt{x^۲+۱}}$ به صورت $[a,+\infty)$ است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۲ برد تابع $f(x)=۲\sin^۲x-۳\cos^۲x$ کدام است؟

۱) $[-۲,۳]$ ۲) $[-۳,۲]$ ۳) $[-۲,۲]$ ۴) $[-۳,۳]$

۶۳ برد تابع $y=[|\cos^۳x-۳\cos^۲x+۳\cos x-۴|]$ شامل چند عضو است؟ ([ ] نماد جزءصحیح است.)

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۶۴ برد تابع $y=\frac{۲\sin x-۱}{۱+\sqrt{۱-\cos^۲x}}$ کدام است؟ $(x\in(۰,\pi))$

۱) $[-\frac{۱}{۲},۱)$ ۲) $(۱,+\infty)$ ۳) $(-۱,\frac{۱}{۲}]$ ۴) $(۰,۱)$

۶۵ برد تابع $y=\frac{x+۳}{x^۲+۲x+۱}$ به‌صورت $[a,+\infty)$ است. کمترین مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

از اینجا به بعد تست‌های تساوی دو تابع رو می‌بینین. فکر نمی‌کنیم خیلی براتون سخت باشه. از پسش برمیایید.

۶۶ اگر دو تابع $f=\{(۱,b),(۳,c)\}$ و $g=\{(a,b),(۱,۲)\}$ با هم برابر باشند، $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

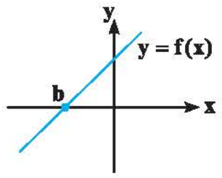
۶۷ کدام توابع با هم برابرند؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\begin{cases}f(x)=\frac{x}{x}\\ g(x)=۱\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}f(x)=\frac{x}{|x|}\\ g(x)=\begin{cases}-۱ & x>۰\\ ۱ & x<۰\end{cases}\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}f(x)=\frac{x^۲+۱}{x^۲+۱}\\ g(x)=\sin^۲x+\cos^۲x\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}f(x)=\sqrt{x^۲}\\ g(x)=x\end{cases}$

۱۵۷ نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+۳}{b-x}$ یک خط افقی است. ab کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۶ ۴) ۶-

۱۵۸ نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+۱}{(a-۲)x+\frac{۱}{۲}}$ به‌صورت زیر است. ab کدام است؟

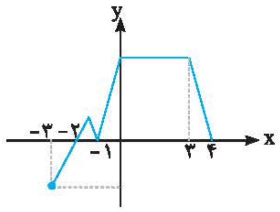


۱) ۱
۲) ۱-
۳) ۲
۴) ۲-

بخش سوم: یکنوایی

یکنوایی یکی از بخش‌های خیلی پرکاربرد توی ریاضیه که البته توی فصل کاربرد مشتق هم ادامش رو می‌گیم. خیلی باحاله. شروع کنیم؟

۱۵۹ نمودار تابع f(x) به‌صورت زیر است. اگر f در بازهٔ $[-۱,b]$ صعودی و در بازهٔ $[۰,a]$ نزولی باشد، بیشترین مقدار $a+b$ چقدر است؟ (آزمون‌های گاج)



۱) ۷
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۹

۱۶۰ تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۲x-۳$ با دامنهٔ $\{x:|x-۱|<۲\}$ همواره چگونه است؟

۱) نزولی ۲) مثبت ۳) صعودی ۴) منفی

۱۶۱ وضعیت یکنوایی تابع $f(x)=x^۳+۶x^۲+۱۲x-۱$ روی $\mathbb{R}$ چگونه است؟

۱) ابتدا صعودی اکید، سپس نزولی اکید ۲) ابتدا نزولی اکید، سپس صعودی اکید
۳) صعودی اکید ۴) نزولی اکید

۱۶۲ تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-۶x+۹}+۱$ از نظر یکنوایی کدام است؟

۱) ابتدا نزولی سپس صعودی ۲) ابتدا صعودی سپس نزولی ۳) نزولی ۴) صعودی

۱۶۳ تابع $f(x)=||x|-۲|+۱$ در کدام بازه صعودی است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $(۰,۲)$ ۲) $(۰,۱)$ ۳) $(-۱,۰)$ ۴) $(-۱,۱)$

۱۶۴ تابع $f(x)=|x^۲-۱|+۲$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $(۰,۲)$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $(-۱,۰)$

۱۶۵ نمودار تابع $f(x)=|x-\frac{x}{|x|}|$ در کدام بازه زیر نزولی است؟

۱) $[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]-\{۰\}$ ۲) $[۱,+\infty)$ ۳) $(۰,۱]$ ۴) $[-۱,۰)$

۱۶۶ تابع $f(x)=\frac{x+۳}{x-۲}$ در کدام بازه نزولی است؟

۱) $(-۱,۳)$ ۲) $(۰,۳)$ ۳) $(۲,۳)$ ۴) $(۱,۳)$

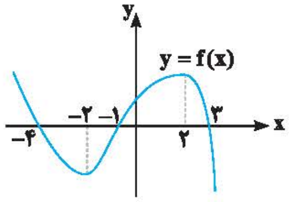
۱۶۷ مقدار تابع $y=\sin(\frac{x}{۲})$ در کدام بازه، با افزایش طول نقاط، کاهش نمی‌یابد؟

۱) $[-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}]$ ۲) $[-\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴}]$ ۳) $[\frac{۳\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲}]$ ۴) $[\pi,\frac{۵\pi}{۲}]$

۱۶۸ تابع $f(x)=\sqrt{\sin^{۲} x}$ در کدام بازه یکنوا است؟

۱) $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ ۲) $(\frac{-۳\pi}{۲},\frac{-\pi}{۲})$ ۳) $(\frac{\pi}{۲},\pi)$ ۴) $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$

۱۶۹ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر باشد، تابع $y=-f(x+۱)$ در بازهٔ $[a,b]$ نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۷

۱۷۰ اگر $f(x)=\frac{۲^{|x|}}{\sqrt{x}}$ و $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$ باشند، تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ از نظر یکنوایی کدام است؟

۱) نزولی ۲) صعودی ۳) ابتدا نزولی سپس صعودی ۴) ابتدا صعودی سپس نزولی

۱۷۱ تابع $f(x)=|-x||x-۳|-۳|$ در بازهٔ (a,b) اکیداً نزولی است. $۲a+b$ کدام است؟ $(b\neq ۰)$

۱) ۳ ۲) ۴/۵ ۳) ۶ ۴) ۷/۵

۱۷۲ نمودار تابع $y=(x-۲)|x+۳|$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $(-۵,۱)$ ۲) $(-۱,۵)$ ۳) $(۱,۵)$ ۴) $(-۵,-۱)$

۱۷۳ در بازه‌ای که تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-۲|+|x-۳|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x)=۲x^{۲}-x-۱۰$ در چند نقطه مشترک هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد نقطهٔ مشترک *(تجربی داخل ۹۷)*

۱۷۴ تابع $f=\{(۱,a+۲),(-۱,-a),(۳,۲a+b)\}$ هم صعودی و هم نزولی است. ab کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۳

۱۷۵ اگر $f=\{(-۱,۴),(۱,b),(\frac{۱}{۲},۴),(۰,\frac{a}{۲})\}$ تابعی صعودی باشد، کمترین مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۸

۱۷۶ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}|x| & x\leq ۱\\ x|x| & ۱<x<۲\\ -x+۱ & x\geq ۲\end{cases}$ در بازهٔ (a,b) اکیداً صعودی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۷ تابع $f(x)=\begin{cases}|x|(x^{۲}+\frac{۲}{x}) & x\geq ۰\\ -x^{۲}+a & x<۰\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است. حدود a کدام است؟

۱) $a\geq ۱$ ۲) $a\leq ۱$ ۳) $a\geq ۲$ ۴) $a\leq ۲$

۱۷۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}۲^{x} & x>۰\\ ۱۲۸ & x<۰\end{cases}$، به‌ازای چند مقدار صحیح از x، نامعادلهٔ $f(x^{۲}+۳)<f(-|x|)$ برقرار است؟ $(x\neq ۰)$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۷۹ اگر f تابعی اکیداً نزولی روی $\mathbb{R}$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\frac{۱}{\sqrt{f(x^{۲}-x)-f(۴x-۶)}}$ کدام است؟

۱) $(۱,۲)$ ۲) $(۱,۳)$ ۳) $(۲,۳)$ ۴) $(۲,۴)$

۱۸۰ اگر f تابعی صعودی روی $\mathbb{R}$ باشد، دامنهٔ $g(x)=\sqrt{f(|x-۱|)-f(|۳x+۵|)}$ کدام است؟

۱) $[-۳,-۱]$ ۲) $(-\infty,-۱]$ ۳) $(-\infty,-۳]$ ۴) $[-۱,۳]$

۱۸۱ تابع $f(x)=(a^{۲}-۱)x^{۲}+ax+۲$ در $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. این تابع در چه نقطه‌ای محور xها را قطع می‌کند؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۱۸۲ اگر بازهٔ $(-\infty,-۱]$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که تابع $f(x)=kx^{۲}+\frac{۸}{k}x+c$ در آن اکیداً صعودی است، k کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ± ۲ ۴) -۱

۹۵۲ مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=(\frac{1}{\sqrt{4x}}+x\sqrt{x})^3$ در $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{45}{4}$ ۲) $\frac{135}{16}$ ۳) $\frac{45}{16}$ ۴) $\frac{135}{4}$

۹۵۳ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) $\frac{7}{48}$ ۲) $\frac{5}{24}$ ۳) $\frac{7}{24}$ ۴) $\frac{7}{16}$

۹۵۴ اگر $f(x)=\sqrt{\frac{5-3x}{2x+1}}$ باشد و بدانیم $f'(k)=\frac{-13}{4(2k+1)^2}$، آنگاه مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{7}{11}$ ۲) $\frac{2}{11}$ ۳) $\frac{1}{11}$ ۴) $\frac{8}{11}$

۹۵۵ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}})^3$، حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ کدام است؟ (تجربی داخل ۹۵)

۱) -21 ۲) -18 ۳) 12 ۴) 15

۹۵۶ مشتق تابع $f(x)=x\times\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}$ در نقطهٔ $x=-3$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۹۵۷ مقدار مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[3]{(\frac{2x-x^2}{3x+5})^2}$ در نقطهٔ $x=-2$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹۵۸ اگر $g(x)=\sqrt{2x}$ و $f(x)=x^2-x$ باشند، حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)g(2+\Delta x)-f(2)g(2)}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

همیشه قرار نیس از اول مشتق بگیریم. بعضی وقت‌ها استفاده از تکنیک‌های مشتق‌گیری کمک زیادی بهمون می‌کنن. چهارتا تکنیک رو خوب بلدین دیگه؟

۹۵۹ مشتق تابع $f(x)=(x+2)(x^2-2x+4)(x^3+7)$ در $x=1$ کدام است؟

۱) ۵۱ ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) ۲

۹۶۰ اگر $f(x)=\frac{1+x+x^2+...+x^6}{x^3}$، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۹۶۱ مشتق تابع $y=\frac{(x-1)(x^2-2x+1)}{\sqrt{x-1}}$ در $x=5$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۹۶۲ مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x})^3$، در نقطهٔ $x=2$، کدام است؟ (تجربی داخل ۹۹)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{15}{4}$

۹۶۳ مشتق تابع $f(x)=\frac{\frac{x+1}{1-x}-\frac{1-x}{x+1}}{(1-\frac{1}{x+1})(\frac{1+x}{1-x}-1)}$ در نقطه‌ای به طول $x=2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۹۶۴ مشتق تابع $f(x)=\frac{1+\sqrt[3]{x^2}}{x+\sqrt[3]{x}}$ در $x=27$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{243}$ ۲) $-\frac{1}{81}$ ۳) $-\frac{1}{729}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۹۶۵ مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x+\sqrt{x}}$ در $x=1$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۹۶۶ اگر $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3+x}-\sqrt{x}}$ باشد، ضریب زاویهٔ خط مماس بر $f(x)$ در $x=1$ کدام است؟ (منظور از ضریب زاویه، همان مشتق است.)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۹۶۷ مشتق تابع $f(x)=(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+2\sqrt{x})+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x})$ در $x=3$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) 4 ۴) صفر

۹۶۸ اگر $f(x)=(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1})^2(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1})^3$ باشد، مقدار $f'(0)$ کدام است؟

۱) $\frac{14}{9}$ ۲) $-\frac{4}{9}$ ۳) $-\frac{27}{4}$ ۴) $-\frac{9}{4}$

۹۶۹ مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{\sqrt{5}x+\sqrt{2}x}\times\sqrt[6]{7x^2-2\sqrt{10}x^2}$ به‌ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$ ۳) $\frac{9}{\sqrt[3]{9}}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

۹۷۰ اگر $f(x)=x(2x-2)(4x-3)(3x-5)$، آنگاه مقدار $f'(1)$ کدام است؟

۱) -4 ۲) 4 ۳) 2 ۴) -2

۹۷۱ اگر $f(x)=x+(x-2)\cos\frac{\pi x}{6}$، حاصل $f'(2)-f(2)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۹۷۲ اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ همواره پیوسته و مخالف صفر باشند و همچنین $h(x)=\dfrac{(x^2-1)f(2x+1)}{g(x+1)f(x+2)}$، حاصل $h'(1)g(2)$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۹۷۳ مشتق تابع $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x+\sqrt[3]{4x}}+\dfrac{x^2-4}{2x+1}$ در $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

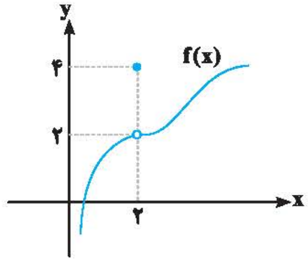
۹۷۴ مشتق تابع $f(x)=\dfrac{(16x^2-1)\times\tan(\pi ax)}{\sqrt{4x+3}}$ در $x=\frac{1}{4}$ برابر ۴ است. a کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) 3 ۲) 1 ۳) 5 ۴) 9

۹۷۵ اگر $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2+x}=\sqrt{2}$، مشتق تابع $y=f(x)\sqrt{2^{x+1}}$ در $x=0$ کدام است؟ (f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) 2 ۴) -2

۹۷۶ نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت مقابل است. مشتق تابع $g(x)=(x^2+x-6)f(x)$ در $x=2$ کدام است؟



۱) 20 ۲) -10 ۳) 10 ۴) -20

۹۷۷ اگر $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=(x^2-1)f(x)$ باشند، مشتق تابع $g(x)$ در $x=-1$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -2 ۳) 2 ۴) -1

۹۷۸ با فرض $f(x)=\dfrac{6x^2+8}{x-2}$ و $g(x)=\dfrac{x^3+12x}{x-2}$، حاصل $g'(x)-f'(x)$ کدام است؟

۱) $2x+1$ ۲) $x+2$ ۳) $2x+2$ ۴) $2x-4$

۹۷۹ اگر $f(x)=\dfrac{x^2-9}{-2x+2}$، $g(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{2x+6}$ و $f'(a)g(a)+g'(a)f(a)=8$ باشد، a کدام است؟

۱) 13 ۲) -5 ۳) -13 ۴) 5

۹۸۰ اگر $f(x)=\dfrac{(x+3)^3}{x-1}$ و $g(x)=\dfrac{2x+5}{2x+6}$ باشند، حاصل $g''f+f'g'$ در $x=2$ کدام است؟

۱) 2 ۲) -2 ۳) 4 ۴) -4

۹۸۱ اگر $f(x)=\sqrt{x^2+2}-x$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+x}$ باشند، حاصل $f'(x)g(x)-g'(x)f(x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $2x$ ۳) $2x-1$ ۴) $2+x^2$

۹۸۲ اگر $f(x)=\frac{2x^2-7x+5}{x+1}$ و $g(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$ و بدانیم $f'(a)g(a)=g'(a)f(a)$، مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۹۸۳ اگر $f(x)=\sqrt[5]{2x-3}$، مقدار $f^4(x)\times f'(x)$ در $x=2$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۹۸۴ اگر $f(x)=\sqrt{2x^2+2\sin^2 x}$ و $g(x)=\sqrt{x^2+2\cos^2 x}$ باشند، حاصل $ff'+gg'$ در $x=1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۲

۹۸۵ اگر $f(x)=\frac{1}{x+(1-x)^2}$ و $g(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2+x}$ باشند، حاصل تابع $h(x)=g(x)+xg'(x)+f'(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $x+1$ ۳) $1-x$ ۴) -1

۹۸۶ اگر $g(x)f'(x)+2x^4=f(x)g'(x)$ و $f(x)=x\sqrt{x}$ باشند، حاصل $\frac{g(2)}{f(2)}-\frac{g(1)}{f(1)}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -3 ۳) ۱ ۴) -1

بخش سوم: مشتق تابع مرکب (قاعدهٔ زنجیری)

یکی از بخش‌های مهم و پرتست توی مشتق، همین مشتق تابع مرکب هست. نسبتاً آسونه و اگه تست‌های قبلی رو خوب کار کرده باشین الآن کاره زیاد سختی ندارین.

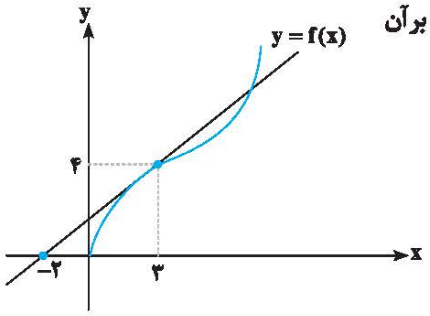
۹۸۷ در تابع f، اگر $f'(-1)=2$، آنگاه مقدار مشتق تابع با ضابطهٔ $y=f(\frac{2}{x})$ در $x=-2$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۲ ۴) ۴

۹۸۸ اگر $f'(x)=-\frac{1}{x}$، مشتق تابع $y=f(kx)$ کدام است؟ $(k\neq 0)$

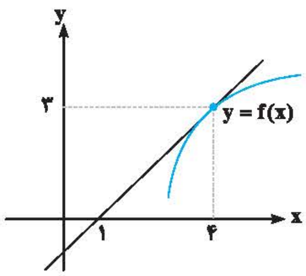
۱) $-\frac{k}{x}$ ۲) $\frac{k}{x}$ ۳) $-\frac{1}{x}$ ۴) $-\frac{k}{x^2}$

۹۸۹ نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت مقابل است. شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(-x)$ در $x=-3$ واقع بر آن کدام است؟



۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{5}{4}$ ۴) $-\frac{4}{5}$

۹۹۰ اگر نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، شیب خط مماس بر تابع $y=f(2x+1)$ در $x=\frac{3}{2}$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

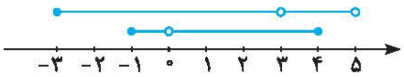
گزینهٔ «۳»: با جای‌گذاری $x=0$ داریم:
$\cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ ✗

به‌ازای یک مقدار از x، بی‌شمار مقدار متمایز برای y به‌دست آوردیم، پس تابع نیست.

گزینهٔ «۴»: با جای‌گذاری $x=1$ داریم:
$y^4 - y^3 = 0 \Rightarrow y^3(y-1) = 0 \Rightarrow y = 0\,,\ y = 1$ ✗

به‌ازای یک مقدار از x، دو مقدار متمایز برای y به‌دست آوردیم، پس رابطه، تابع نیست.

۱۳ | ۲ دامنهٔ توابع f و g به‌ترتیب $D_f = [-1,4] - \{0\}$ و $D_g = [-3,5) - \{3\}$ است که اشتراک این دو دامنه برابر است با:



$$\text{اشتراک} = [-1,0) \cup (0,3) \cup (3,4]$$

اعداد صحیح این اشتراک ۱ -، ۱، ۲ و ۴ هستند که تعدادشان ۴ تا است.

۱۴ | ۴ مخرج هیچ یک از کسرها نباید صفر شود. پس داریم:

$$x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \quad , \quad x \neq 0$$
$$x - \frac{1}{x} \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1\,,\ x \neq -1$$

پس دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $\mathbb{R} - \{0, -1, 1, 3\}$ است.

۱۵ | ۳ دامنهٔ توابع کسری به‌صورت $\mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است، پس باید ریشه‌های مخرج را به‌دست آوریم:

$$(x^2-4)(5x^2-26x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \\ 5x^2 - 26x + 5 = 0 \Rightarrow (5x-1)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ x = 5 \end{cases} \end{cases}$$

در نتیجه دامنهٔ تابع، شامل سه عدد صحیح ۲، ۲ - و ۵ نیست. (توجه داریم که $\frac{1}{5}$ صحیح نیست.) *(حواستون هست که وقتی می‌خوایم دامنه حساب کنیم حق ساده‌سازی نداریم.)*

۱۶ | ۲ دامنهٔ توابع کسری به‌صورت $\mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است، پس داریم:

$$|x+1| - 3 = 0 \Rightarrow |x+1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2 \\ x + 1 = -3 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

یعنی دامنهٔ تابع به‌صورت $\mathbb{R} - \{2, -4\}$ است، پس $a + b = -4 + 2 = -2$ می‌شود.

۱۷ | ۳ **روش اول:** می‌دانیم دامنهٔ توابع کسری $\mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است، پس وقتی دامنهٔ تابع $f(x)$، $\mathbb{R} - \{1, 3\}$ است، حتماً $x = 1$ و $x = 3$ ریشه‌های مخرج کسر هستند، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow 2(1)^2 - a(1) - b = 0 \Rightarrow \\ x = 3 \Rightarrow 2(3)^2 - a(3) - b = 0 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = 18 \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} -a - b = -2 \\ 3a + b = 18 \end{cases} \xrightarrow{+} 2a = 16 \Rightarrow a = 8 \xrightarrow{a+b=2} b = -6$$

در نهایت $2a + b = 2(8) - 6 = 10$ است.

روش دوم: $x = 1$ و $x = 3$ ریشه‌های مخرج کسر هستند، پس با توجه به اینکه ضریب x^2 برابر ۲ است، مخرج را می‌توانیم به‌صورت $2(x-1)(x-3)$ بنویسیم، پس داریم:

$$2(x-1)(x-3) = 2(x^2 - 4x + 3) = 2x^2 - 8x + 6$$

در آخر با مقایسهٔ این عبارت با مخرج کسر، یعنی $2x^2 - ax - b$ به‌وضوح $a = 8$ و $b = -6$ و درنتیجه $2a + b = 16 - 6 = 10$ است.

۱۸ | ۳ **روش اول:** با توجه به این‌که دامنهٔ f به‌صورت $\mathbb{R} - \{-3\}$ است، یعنی $x = -3$ ریشهٔ مضاعف عبارت درجه دوم مخرج یعنی $ax^2 + 12x + b$ است، پس این عبارت به‌صورت $(x+3)^2$ یا ضریبی از آن نوشته می‌شود:

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 \xrightarrow{\text{مقایسه با } ax^2+12x+b} 2(x^2 + 6x + 9) = ax^2 + 12x + b \Rightarrow 2x^2 + 12x + 18 = ax^2 + 12x + b \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 18 \end{cases}$$

پس $a + b = 20$ است.

روش دوم: مخرج کسر ریشهٔ مضاعف $x = -3$ دارد. پس اولاً دلتای مخرج مساوی صفر است و ثانیاً ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $ax^2 + 12x + b = 0$ برابر -3 است، پس داریم:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (12)^2 - 4(a)(b) = 0 \Rightarrow 144 = 4ab\,,\ x = \frac{-b}{2a} = -3 \Rightarrow \frac{12}{2a} = 3 \Rightarrow 6a = 12 \Rightarrow a = 2$$

حالا با جای‌گذاری $a = 2$ در تساوی $4ab = 144$، مقدار b برابر ۱۸ می‌شود. در نتیجه $a + b = 20$ است.

۱۹ **۴** ابتدا دامنهٔ تابع $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|x|+۲=۰ \Rightarrow |x|=-۲ \quad ✗$$

با توجه به این‌که در تابع g، مخرج کسر ریشه ندارد، پس دامنهٔ آن برابر با $\mathbb{R}$ است. از طرفی طبق فرض مسئله دامنهٔ دو تابع f و g با هم برابر است، در نتیجه دامنهٔ تابع $f(x)$ هم باید $\mathbb{R}$ باشد. یعنی مخرج کسر f نباید ریشه داشته باشد، پس داریم:

$$۲x^۲-x-m=۰;\ \Delta<۰ \Rightarrow (-۱)^۲-۴(۲)(-m)<۰ \Rightarrow ۱+۸m<۰ \Rightarrow ۸m<-۱ \Rightarrow m<\frac{-۱}{۸}$$

۲۰ **۴** می‌دانیم دامنهٔ توابع کسری به صورت {ریشه‌های مخرج} $-\mathbb{R}$ است. طبق فرض مسئله دامنهٔ تابع کسری داده شده $\mathbb{R}-\{۱\}$ است. در نتیجه مخرج کسر فقط باید یک ریشه داشته باشد $(x=۱)$، پس داریم:

$$(x-۱)(x^۲+mx+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \\ x^۲+mx+۱=۰ \end{cases}$$

در نتیجه معادلهٔ درجه دوم $x^۲+mx+۱=۰$ یا باید ریشه نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف $x=۱$ داشته باشد. پس داریم:

$$x^۲+mx+۱=۰$$

$$\Delta<۰ \Rightarrow m^۲-۴(۱)(۱)<۰ \Rightarrow m^۲<۴ \Rightarrow -۲<m<۲ \ ✓ \quad \text{حالت اول}$$

$$\Delta=۰, \frac{-b}{۲a}=۱ \Rightarrow \frac{-m}{۲}=۱ \Rightarrow m=-۲ \ ✓ \quad \text{حالت دوم}$$

در نهایت مجموعه مقادیر قابل قبول برای m، $-۲\le m<۲$ است.

۲۱ **۱** ابتدا با استفاده از خواص براکت، تابع f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^۲+۳}{[x-۱]+[۲-x]-۱}=\frac{x^۲+۳}{[x]-۱+۲+[-x]-۱} \Rightarrow f(x)=\frac{x^۲+۳}{[x]+[-x]}$$

از طرفی می‌دانیم $[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$ است، در نتیجه دامنهٔ تابع f به صورت $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ می‌باشد. یعنی دامنهٔ این تابع شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

۲۲ **۱** می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد:

$$x(۱-x)^۳\ge۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

	$-\infty$	۰	۱	$+\infty$
x	−	+	+	
$(۱-x)^۳$	+	+	−	
$x(۱-x)^۳$	−	+	−	

$$\Rightarrow ۰\le x\le۱ \Rightarrow [a,b]=[۰,۱]$$

در نتیجه $b-a=۱-۰=۱$ است.

۲۳ **۲** مطابق شکل، دامنهٔ تابع $x\ge-۱$ است. پس با توجه به ضابطهٔ تابع داریم:

$$x+b\ge۰ \Rightarrow x\ge-b \xrightarrow{x\ge-۱} -b=-۱ \Rightarrow b=۱$$

از طرفی نقطهٔ $(۲۴,-۳)$ روی نمودار تابع قرار دارد. پس این نقطه، درون تابع صدق می‌کند، می‌توان نوشت:

$$(۲۴,-۳)\in f \Rightarrow f(۲۴)=-۳ \Rightarrow a-\sqrt{۲۴+b}=-۳ \xrightarrow{b=۱} a-\sqrt{۲۵}=-۳ \Rightarrow a-۵=-۳ \Rightarrow a=۲$$

در نتیجه ضابطهٔ f به‌صورت $f(x)=۲-\sqrt{x+۱}$ است و برای محاسبهٔ طول از مبدأ، به جای y یا همان f، صفر می‌گذاریم. ببینید:

$$f(x)=۰ \Rightarrow ۲-\sqrt{x+۱}=۰ \Rightarrow \sqrt{x+۱}=۲ \xrightarrow{\text{توان دو}} x+۱=۴ \Rightarrow x=۳$$

۲۴ **۴** **روش اول:** برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y=\sqrt[۴]{\frac{۲}{x^۲}-\frac{۹}{۲}}+\sqrt[۳]{۲x-x^۲}$ تنها باید نامعادلهٔ $\frac{۲}{x^۲}-\frac{۹}{۲}\ge۰$ را حل کنیم (چرا؟)، پس داریم:

$$\frac{۲}{x^۲}-\frac{۹}{۲}\ge۰ \Rightarrow \frac{۴-۹x^۲}{۲x^۲}\ge۰ \xrightarrow[۲x^۲>۰]{x\ne۰} ۴-۹x^۲\ge۰ \Rightarrow \frac{۴}{۹}\ge x^۲ \xrightarrow{\sqrt{\ }} -\frac{۲}{۳}\le x\le\frac{۲}{۳} \xrightarrow{x\ne۰} x\in[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,\frac{۲}{۳}]$$

روش دوم: به کمک گزینه‌بازی، با فرض $x=۲$ داریم:

$$x=۲: \sqrt[۴]{\underbrace{\frac{۲}{۴}-\frac{۹}{۲}}_{\text{منفی}}}+\sqrt[۳]{۴-۴} \ ✗$$

پس $x=۲$ غیر قابل قبول است و گزینه‌های «۱» و «۳» نادرست هستند، زیرا $x=۲$ را دارند و از طرفی با توجه به ضابطهٔ تابع، $x\ne۰$ است، زیرا صفر ریشهٔ مخرج است، پس گزینهٔ «۲» هم رد می‌شود و پاسخ گزینهٔ «۴» است.

۲۵ **۴** **روش اول:** با جای‌گذاری $۳-x$ به‌جای x در تابع $f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$، ضابطهٔ $f(۳-x)$ را تعیین می‌کنیم و سپس برای محاسبهٔ دامنه، زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم. پس داریم:

$$f(۳-x)=\sqrt{۲(۳-x)-(۳-x)^۲}=\sqrt{۶-۲x-(x^۲-۶x+۹)}=\sqrt{-x^۲+۴x-۳}$$

$$-x^۲+۴x-۳\ge۰ \Rightarrow x^۲-۴x+۳\le۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۳)\le۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۱\le x\le۳$$

روش دوم: ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$ را تعیین می‌کنیم:

$$۲x-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲-۲x\leq ۰\Rightarrow x(x-۲)\leq ۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}۰\leq x\leq ۲$$

حالا برای محاسبهٔ دامنهٔ $y=f(۳-x)$، باید عبارت $۳-x$ در بازهٔ $[۰,۲]$ قرار بگیرد؟ (**چرا؟**) پس می‌توان نوشت:

$$۰\leq ۳-x\leq ۲\xrightarrow{-۳}-۳\leq -x\leq -۱\xrightarrow{\times(-۱)}۱\leq x\leq ۳$$

۲۶ **۴** **روش اول:** ضابطهٔ $f(-x+۱)$ به‌صورت مقابل است:

$$f(-x+۱)=\sqrt{-x+۱+|-x+۱+۳|}=\sqrt{-x+۱+|-x+۴|}$$

برای تعیین دامنهٔ تابع $f(-x+۱)$، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$-x+۱+|-x+۴|\geq ۰\xrightarrow{|-x+۴|=|x-۴|}|x-۴|-x+۱\geq ۰$$

برای حل نامعادلهٔ $|x-۴|-x+۱\geq ۰$ از بازه‌بندی استفاده می‌کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$x-۴=۰\Rightarrow x=۴\Rightarrow\begin{cases}x\leq ۴\xrightarrow{|x-۴|=-(x-۴)}-(x-۴)-x+۱\geq ۰\Rightarrow -۲x+۵\geq ۰\Rightarrow ۲x\leq ۵\Rightarrow x\leq \frac{۵}{۲}\\ x>۴\xrightarrow{|x-۴|=x-۴}x-۴-x+۱\geq ۰\Rightarrow -۳\geq ۰\Rightarrow x\in\varnothing\end{cases}$$

پس مجموعه‌جواب مسئله به‌صورت زیر است:

$$\underbrace{\{x\leq ۴\cap x\leq \tfrac{۵}{۲}\}}_{x\leq\frac{۵}{۲}}\cup\underbrace{\{x>۴\cap\varnothing\}}_{\varnothing}=x\leq\frac{۵}{۲}\Rightarrow D_{f(-x+۱)}=\{x\,|\,x\leq\tfrac{۵}{۲}\}=(-\infty,\tfrac{۵}{۲}]$$

روش دوم: ضابطهٔ تابع $f(-x+۱)$ به‌صورت $f(-x+۱)=\sqrt{-x+۱+|-x+۴|}$ است، به کمک گزینه بازی می‌توان نوشت:

$$x=۰\Rightarrow\sqrt{-(۰)+۱+|-(۰)+۴|}=\sqrt{۵}\ \checkmark\quad,\quad x=-۳\Rightarrow\sqrt{-(-۳)+۱+|-(-۳)+۴|}=\sqrt{۱۱}\ \checkmark$$

گزینه‌های «۲» و «۳»، $x=۰$ را ندارند، پس حذف می‌شوند. از طرفی $x=-۳$ نیز باید درون دامنه باشد، پس گزینهٔ «۱» هم حذف می‌شود و پاسخ تست، گزینهٔ «۴» است.

۲۷ **۳** با جای‌گذاری $x-۲$ به جای x در ضابطهٔ $f(x+۱)=\frac{۲x}{\sqrt{x-۱}}$، ضابطهٔ $f(x-۱)$ به‌دست می‌آید: (**چرا؟**)

$$f(x-۲+۱)=\frac{۲(x-۲)}{\sqrt{(x-۲)-۱}}=\frac{۲x-۴}{\sqrt{x-۳}}$$

همگی بلدیم که دامنهٔ این تابع بازهٔ $(۳,+\infty)$ است.

۲۸ **۲** برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $f(x)$، ابتدا سراغ رادیکال‌ها می‌رویم و عبارت زیر آن‌ها را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم، پس داریم:

$$\sqrt{x}:x\geq ۰\ (۱)\quad,\quad\sqrt{۳-\sqrt{x}}:۳-\sqrt{x}\geq ۰\Rightarrow ۳\geq\sqrt{x}\xrightarrow{\text{توان دو}}۹\geq x\ (۲)\quad,\quad\sqrt{۵-x}:۵-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۵\ (۳)$$

همچنین حواستان باشد که مخرج نباید صفر شود، پس می‌توان نوشت:

$$\sqrt{۵-x}-۱\neq ۰\Rightarrow\sqrt{۵-x}\neq ۱\xrightarrow{\text{توان دو}}۵-x\neq ۱\Rightarrow x\neq ۴\quad(۴)$$

در نهایت با اشتراک‌گیری از چهار محدودهٔ به‌دست آمده، دامنهٔ تابع $f(x)$ به‌صورت $[۰,۵]-\{۴\}$ می‌شود و در نهایت طبق فرض مسئله $a=۰$، $b=۵$ و $c=۴$ می‌باشد، پس $a+b+c=۰+۵+۴=۹$ می‌شود.

۲۹ **۱** **روش اول:** می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد، یعنی:

$$|x+۱|+|x-۳|-۶\geq ۰\Rightarrow|x+۱|+|x-۳|\geq ۶$$

با توجه به این‌که $x=-۱$ و $x=۳$ ریشه‌های قدرمطلق هستند، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}x<-۱:-(x+۱)-(x-۳)\geq ۶\Rightarrow -x-۱-x+۳\geq ۶\Rightarrow x\leq -۲\xrightarrow{\cap(x<-۱)}x\leq -۲\quad(۱)\\ -۱\leq x\leq ۳:(x+۱)-(x-۳)\geq ۶\Rightarrow x+۱-x+۳\geq ۶\Rightarrow ۴\geq ۶\ \times\\ x>۳:x+۱+x-۳\geq ۶\Rightarrow x\geq ۴\xrightarrow{(x>۳)}x\geq ۴\quad(۲)\end{cases}$$

در نتیجه دامنهٔ تابع برابر با اجتماع دو مجموعه جواب (۱) و (۲) یعنی $(-\infty,-۲]\cup[۴,+\infty)$ یا $\mathbb{R}-(-۲,۴)$ است.

روش دوم: به کمک عددگذاری می‌توان نوشت:

$$x=۴:y=\sqrt{|۴+۱|+|۴-۳|-۶}=\sqrt{۵+۱-۶}=\sqrt{۰}=۰\ \checkmark$$

در نتیجه $x=۴$ عضوی از دامنه است. (رد گزینه‌های «۲» و «۴»)

$$x=۰:y=\sqrt{|۰+۱|+|۰-۳|-۶}=\sqrt{۱+۳-۶}=\sqrt{-۲}\ \times$$

در نتیجه $x=۰$ عضوی از دامنه نیست (رد گزینهٔ «۳») و فقط گزینهٔ «۱» می‌تواند پاسخ تست باشد.

روش دوم: به کمک روش هوپیتال می‌توان نوشت:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^2(2+\Delta x)-f^2(2-\Delta x)}{\Delta x}=\frac{0}{0}\text{مبهم}\xrightarrow{HOP}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2f(2+\Delta x)f'(2+\Delta x)-2f(2-\Delta x)f'(2-\Delta x)(-1)}{1}$$

$$=2f(2)f'(2)+2f(2)f'(2)=4f(2)f'(2)\xrightarrow{f'(2)=3}12f(2)$$

۹۲۳ | ۱ **روش اول:** حد داده شده شباهت زیادی به تعریف مشتق در نقطهٔ $x=2$ دارد، پس به کمک اتحاد مزدوج و فاکتورگیری سعی بر ایجاد $f'(2)$ می‌کنیم، می‌توان نوشت:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(2+3h)-f^2(2-h)}{(h^2-h)f(2)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)+f(2-h)}{(h-1)f(2)}$$

حاصل حد دوم برابر -2 است، زیرا با جای‌گذاری $h=0$ در صورت و مخرج کسر داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)+f(2-h)}{(h-1)f(2)}=\frac{2f(2)}{-f(2)}=-2$$

فقط می‌ماند محاسبهٔ حد اول که به کمک نکتهٔ $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{rh}=(\frac{m-n}{r})f'(a)$ می‌توان نوشت:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{h}=(3+1)f'(2)=4f'(2)$$

در نهایت با فرض $f'(2)=5$، جواب مسئله برابر $-8f'(2)=-8\times 5=-40$ می‌شود.

روش دوم: با جای‌گذاری $h=0$ به ابهام صفرصفرم می‌رسیم، پس به کمک روش هوپیتال می‌توان نوشت:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(2+3h)-f^2(2-h)}{(h^2-h)f(2)}=\frac{0}{0}\text{مبهم}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to 0}\frac{2f(2+3h)f'(2+3h)\times 3-2f(2-h)f'(2-h)\times(-1)}{(2h-1)f(2)}$$

حواستون باشه که $f(2)$ ضریبه.

$$=\frac{6f(2)f'(2)+2f(2)f'(2)}{-f(2)}=\frac{8f(2)f'(2)}{-f(2)}=-8f'(2)\xrightarrow{f'(2)=5}-8\times 5=-40$$

۹۲۴ | ۲ ابتدا به کمک توضیحات مطرح شده در جلد درسنامه، حد داده شده را ساده می‌کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+2\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=(2-0)f'(3)=4\Rightarrow f'(3)=2$$

از طرفی می‌دانیم که منظور از $f'(3)$، شیب خط مماس بر تابع $f(x)$ در $x=3$ است، پس خط $y=ax$ خطی بین $y=x$ و $y=2x$ است و می‌توان نتیجه گرفت که a باید عددی بین ۱ تا ۲ باشد.

۹۲۵ | ۴ مساحت مثلث MNO برابر با $\frac{1}{2}\times OM\times ON$ است، پس داریم:

$$\frac{1}{2}\times 6\times ON=24\Rightarrow 3ON=24\Rightarrow ON=8$$

از طرفی مطابق شکل داده شده $f(4)=3$ است، پس حد $\lim_{x\to 4}\frac{f^2(x)-9}{x-4}$ ابهام صفرصفرم دارد و رفع ابهام حد به صورت زیر است:

$$\lim_{x\to 4}\frac{f^2(x)-9}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-3}{x-4}\times\lim_{x\to 4}(f(x)+3)$$

جواب حد دوم برابر ۶ و حد اول همان $f'(4)$ است $(f(4)=3)$ یعنی باید $6f'(4)$ را محاسبه کنیم. از طرفی $f'(4)$ همان شیب خط مماس بر نمودار $f(x)$ در نقطهٔ $x=4$ است که با داشتن نقطه‌های $M(0,6)$ و $N(8,0)$، $f'(4)$ به‌دست می‌آید، پس داریم:

$$f'(4)=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{6-0}{0-8}=-\frac{3}{4}$$

در نهایت جواب مسئله $6\times(-\frac{3}{4})=-\frac{9}{2}$ است.

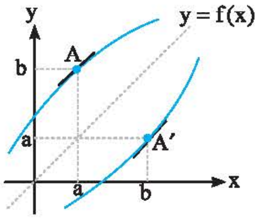
توجه کنید که برای رفع ابهام می‌توانستیم از قاعدهٔ هوپیتال هم کمک بگیریم:

$$\lim_{x\to 4}\frac{f^2(x)-9}{x-4}=\frac{0}{0}\text{مبهم}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 4}2f(x)f'(x)=2f(4)f'(4)=2(3)(-\frac{3}{4})=-\frac{9}{2}$$

۹۲۶ | ۲ با جای‌گذاری $x=2$ در عبارت $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{2-x}$ مخرج کسر صفر می‌شود و چون جواب حد ۷ شده، پس صورت کسر هم باید صفر شود، بنابراین $f(2)=3$ است، همچنین با کمی دقت به $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{2-x}$ می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{-(x-2)}=-f'(2)=7\Rightarrow f'(2)=-7$$

حالا سراغ $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f^{-۱}(x)-۲}{x-۳}$ می‌رویم، چون $f(۲)=۳$ است، پس $f^{-۱}(۳)=۲$ و باز هم تعریف مشتق را داریم، امّا این بار $(f^{-۱})'(۳)$ است.



همان‌طور که قبلاً هم بررسی کردیم اگر نقطهٔ $A(a,b)$ روی $f(x)$ و $f'(a)=m$، آنگاه $(f^{-۱})'(b)=\frac{۱}{m}$ می‌شود (شیب‌ها عکس هم میشن). شکل مقابل را هم ببینید:

پس طبق اطلاعات مسئله می‌توان نوشت:

$$f(۲)=۳\quad,\quad f'(۲)=-۷\Rightarrow (f^{-۱})'(۳)=\frac{-۱}{۷}$$

۹۲۷ ۲ از توابع $f(x)$ و $g(x)$ مشتق می‌گیریم و به ترتیب $x=۱$ و $x=\frac{۱}{۲}$ را در آن‌ها جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x)=x^۳+۲x+۱\Rightarrow f'(x)=۳x^۲+۲\xrightarrow{x=۱}f'(۱)=۳(۱)^۲+۲=۵$$

$$g(x)=x+\frac{۱}{x}\Rightarrow g'(x)=۱+(\frac{-۱}{x^۲})\xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}}g'(\frac{۱}{۲})=۱+(\frac{-۱}{\frac{۱}{۴}})=۱-۴=-۳$$

اختلاف دو عدد به‌دست آمده $۵-(-۳)=۸$ تا است.

۹۲۸ ۴ خواستهٔ مسئله همان مشتق تابع داده شده در $x=۰$ است. پس مشتق تابع $y=(f(x)-۱)(g(x)+۱)$ را محاسبه می‌کنیم و سپس $x=۰$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$y'=(f'(x)-۰)(g(x)+۱)+(g'(x)+۰)(f(x)-۱)\xrightarrow{x=۰}y'(۰)=f'(۰)(g(۰)+۱)+g'(۰)(f(۰)-۱)$$

از طرفی طبق فرض $f'(۰)=۲$، $f(۰)=-۲$، $g(۰)=\frac{۳}{۲}$ و $g'(۰)=۳$ است، پس می‌توان نوشت:

$$y'(۰)=۲(\frac{۳}{۲}+۱)+۳(-۲-۱)=۵-۹=-۴$$

۹۲۹ ۱ ابتدا مشتق تابع داده شده را پیدا کرده و سپس $x=-\frac{۱}{۲}$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$y=(x^۲+۱)(x^۲+x-\frac{۲}{x})\Rightarrow y'=(۲x+۰)(x^۲+x-\frac{۲}{x})+(۲x+۱+\frac{۲}{x^۲})(x^۲+۱)$$

$$\xrightarrow{x=-\frac{۱}{۲}}y'(\frac{-۱}{۲})=(-۱)(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}+۴)+(-۱+۱+\frac{۲}{\frac{۱}{۴}})(\frac{۱}{۴}+۱)=\frac{-۱۵}{۴}+(\frac{۵}{۴}\times ۸)=-\frac{۱۵}{۴}+۱۰=\frac{۲۵}{۴}$$

۹۳۰ ۳ ابتدا جملهٔ $\frac{x}{۳}$ را در پرانتز ضرب می‌کنیم و سپس از تابع مشتق می‌گیریم، پس داریم:

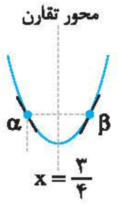
$$f(x)=\frac{x^۲}{۳}-\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x}{۳}-۰+\frac{۲}{۳}(-\frac{۱}{x^۲})$$

در نهایت با جای‌گذاری $x=۲$ در $f'(x)$ می‌توان نوشت:

$$f'(۲)=\frac{۴}{۳}+\frac{۲}{۳}(-\frac{۱}{۴})=\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۶}=\frac{۸-۱}{۶}=\frac{۷}{۶}$$

۹۳۱ ۱ روش اول: ابتدا $f'(x)$ را پیدا می‌کنیم و سپس با توجه به تساوی $f'(\alpha)+f'(\beta)=۰$ می‌توان نوشت:

$$f(x)=۲x^۲-۳x+۴\Rightarrow f'(x)=۴x-۳\ ;\ f'(\alpha)+f'(\beta)=۰\Rightarrow ۴\alpha-۳+۴\beta-۳=۰\Rightarrow ۴(\alpha+\beta)-۶=۰\Rightarrow ۴(\alpha+\beta)=۶\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$



روش دوم: محور تقارن سهمی $f(x)=۲x^۲-۳x+۴$ خط $x=\frac{۳}{۴}$ است. از طرفی از روی شکل مقابل دیده می‌شود که دو نقطهٔ متقارن در سهمی‌ها، شیب‌هایشان قرینهٔ هم است (مثلاً یکیشون ۲ و اون‌یکی ۲−)، یعنی $f'(\alpha)+f'(\beta)=۰$.

خلاصه این‌که می‌توان نتیجه گرفت که $x=\frac{۳}{۴}$ وسط دو نقطهٔ $x=\alpha$ و $x=\beta$ است، یعنی میانگین α و β برابر $\frac{۳}{۴}$ می‌باشد، پس داریم:

$$\frac{\alpha+\beta}{۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۳}{۲}$$

۹۳۲ ۴ مشتق تابع $f(x)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f(x)=\frac{۲x+۱}{x^۲+۲x-۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{(۲)(x^۲+۲x-۱)-(۲x+۲)(۲x+۱)}{(x^۲+۲x-۱)^۲}$$

حالا برای محاسبهٔ $f'(۱)$ و $f'(-۱)$ به‌جای x، ۱ و ۱− می‌گذاریم، پس می‌توان نوشت:

$$x=-۱: f'(-۱)=\frac{(۲)(۱-۲-۱)-(۰)(-۱)}{(۱-۲-۱)^۲}=\frac{-۴}{۴}=-۱$$

$$x=۱: f'(۱)=\frac{۲(۱+۲-۱)-(۴)(۳)}{(۱+۲-۱)^۲}=\frac{۴-۱۲}{۴}=-۲$$

در نهایت خواستهٔ مسئله یعنی $f'(۱)+f'(-۱)$ برابر ۳− است.

۹۳۳ **۲** با حوصلهٔ تمام، شروع به مشتق‌گیری از تابع کسری $f(x)$ می‌کنیم و سپس به جای xهای آن ۱- را قرار می‌دهیم، پس می‌توان نوشت:

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x+3)(x+2)-(1)(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+2)^2}\xrightarrow{x=-1}f'(-1)=\frac{(3-6+3)(1)-(1)(-1+3-3+2)}{(1)^2}=\frac{0-1}{1}=-1$$

۹۳۴ **۲** ابتدا از تابع $f(x)$ مشتق می‌گیریم و سپس $x=3$ و $x=-1$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم، داریم:

$$f(x)=\sqrt{x^2-2x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-2x}}\times(2x-2)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$x=3:f'(3)=\frac{3-1}{\sqrt{9-6}}=\frac{2}{\sqrt3}\ ,\ x=-1:f'(-1)=\frac{-1-1}{\sqrt{1+2}}=\frac{-2}{\sqrt3}$$

در نهایت خواستهٔ مسئله یعنی $\frac{f'(3)}{f'(-1)}$ برابر $\frac{\frac{2}{\sqrt3}}{\frac{-2}{\sqrt3}}=-1$ است.

۹۳۵ **۱** ابتدا از هریک از توابع داده شده به‌صورت زیر مشتق می‌گیریم. ببینید:

$$f(x)=\sqrt{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\ ,\ g(x)=\sqrt[3]{\frac1x}\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(\frac1x)^2}}\times(\frac{-1}{x^2})$$

حالا برای پیدا کردن $4f'(5)+3g'(1)$ می‌توان نوشت:

$$x=5:f'(5)=\frac{1}{2\sqrt{5-1}}=\frac{1}{2\sqrt4}=\frac14\ ,\ x=1:g'(1)=\frac{1}{3\sqrt[3]{1}}\times(-1)=-\frac13$$

در نهایت خواستهٔ مسئله برابر $4f'(5)+3g'(1)=4(\frac14)+3(-\frac13)=0$ می‌باشد.

۹۳۶ **۳** هریک از مشتق‌ها را جداگانه حساب کرده و در نهایت حاصل را با هم جمع می‌کنیم.

محاسبهٔ $f'(-1)$: برای به‌دست آوردن این مقدار از ضابطهٔ اول استفاده می‌کنیم، پس داریم:

$$f(x)=x+\sqrt[3]{x}\Rightarrow f'(x)=1+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\xrightarrow{x=-1}f'(-1)=1+\frac13=\frac43$$

محاسبهٔ $f'(2)$: با استفاده از ضابطهٔ دوم می‌توان نوشت:

$$f(x)=\frac2x+x^{-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-2}{x^2}+(-2x^{-3})=\frac{-2}{x^2}-\frac{2}{x^3}\xrightarrow{x=2}f'(2)=\frac{-2}{4}-\frac28=\frac{-4-2}{8}=\frac{-6}{8}=\frac{-3}{4}$$

محاسبهٔ $f'(4)$: برای به‌دست آوردن این مقدار با توجه به ضابطهٔ سوم، داریم:

$$f(x)=x^2\sqrt x\Rightarrow f'(x)=2x\sqrt x+\frac{1}{2\sqrt x}(x^2)\xrightarrow{x=4}f'(4)=2(4)\sqrt4+\frac{1}{2\sqrt4}(4^2)=16+4=20$$

در نهایت خواستهٔ مسئله برابر است با:

$$3f'(-1)+4f'(2)+f'(4)=3(\frac43)+4(\frac{-3}{4})+20=4-3+20=21$$

۹۳۷ **۱** می‌دانیم وقتی $f(x)=x^2$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم، $-x^2$ می‌شود و هنگامی که تابع دو واحد بالا برود ضابطهٔ $g(x)$ به‌صورت $g(x)=-x^2+2$ به‌دست می‌آید. حالا باید مشتق تابع $\frac{x^2}{-x^2+2}$ در $x=-2$ را پیدا کنیم، پس داریم:

$$y=\frac{x^2}{-x^2+2}\Rightarrow y'=\frac{2x(-x^2+2)-(-2x+0)(x^2)}{(-x^2+2)^2}\xrightarrow{x=-2}y'(-2)=\frac{(-4)(-2)-(+4)(4)}{(-4+2)^2}=\frac{8-16}{4}=-\frac84=-2$$

۹۳۸ **۴** طبق فرض مسئله $f(-1)=0$ و $f'(-1)=1$ است. حالا باید مشتق تابع $y=\frac{2x^2-3}{f(x)-x}$ را در $x=-1$ پیدا کنیم، پس داریم:

$$y'=\frac{(4x-0)(f(x)-x)-(f'(x)-1)(2x^2-3)}{(f(x)-x)^2}\xrightarrow{x=-1}y'(-1)=\frac{(-4)(f(-1)+1)-(f'(-1)-1)(2-3)}{(f(-1)+1)^2}=\frac{(-4)(0+1)-(1-1)(-1)}{(0+1)^2}=-4$$

۹۳۹ **۲** مشتق تابع $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ در $x=1$ برابر با $\frac{f'(1)g(1)-g'(1)f(1)}{g^2(1)}$ است. از طرفی طبق فرض مسئله $g'(x)f(x)-f'(x)g(x)=-x$. پس با جای‌گذاری $x=1$ در آن $g'(1)f(1)-f'(1)g(1)=-1$ می‌شود و یا این‌که $f'(1)g(1)-g'(1)f(1)=1$.

همچنین مقدار $g(1)$ برابر $g(1)=\sqrt{3+1}=2$ است، پس داریم:

$$\frac{f'(1)g(1)-g'(1)f(1)}{g^2(1)}=\frac{1}{(2)^2}=\frac14$$

۹۴۰ **۴** ابتدا $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^3+3x^2-x+4 \Rightarrow f'(x)=3x^2+6x-1$$

پس باید مجموع معکوس‌های ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+6x-1=0$ را پیدا کنیم که با استفاده از خواص معادلهٔ درجه دوم با فرض اینکه ریشه‌های معادلهٔ بالا، α و β باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-b}{c}=\frac{-6}{-1}=6$$

۹۴۱ **۳** مشتق تابع $y=(\frac{a+2}{3})x^3-ax^2+x$ به‌صورت $y'=(a+2)x^2-2ax+1$ است. از طرفی می‌دانیم اگر یک سهمی همواره بخواهد بالای محور xها باشد، باید ضریب x^2 مثبت و همچنین $\Delta<0$ باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{ضریب } x^2 = a+2>0 \Rightarrow a>-2 \\ \Delta<0 \Rightarrow (-2a)^2-4(a+2)(1)<0 \Rightarrow 4a^2-4a-8<0 \xrightarrow{\div 4} a^2-a-2<0 \Rightarrow (a-2)(a+1)<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1<a<2 \end{cases}$$

در نهایت با اشتراک گرفتن از دو محدودهٔ $a>-2$ و $-1<a<2$ جواب مسئله بازهٔ $(-1,2)$ می‌شود که اعداد صحیح موجود در این بازه ۰ و ۱ می‌باشند که تعدادشان ۲ تا است.

۹۴۲ **۳** خواستهٔ مسئله $(2f-g)'(2)$ یا $2f'(2)-g'(2)$ است. برای این‌کار، شیب خطوط $f(x)$ و $g(x)$ را پیدا می‌کنیم که همان $f'(x)$ و $g'(x)$ می‌باشند، پس داریم:

$$(0,1),(3,6): m_f=\frac{6-1}{3-0}=\frac{5}{3} \quad , \quad (0,2),(2,0): m_g=\frac{0-2}{2-0}=-1$$

پس $f'(x)=\frac{5}{3}$ و $g'(x)=-1$ است، در نهایت خواستهٔ مسئله برابر با $2f'(2)-g'(2)=2(\frac{5}{3})+1=\frac{13}{3}$ است.

۹۴۳ **۲** ابتدا مشتق تابع $y=\frac{g(x)}{f(x)}$ را در $x=3$ به‌دست می‌آوریم:

$$y'(3)=\frac{g'(3)f(3)-f'(3)g(3)}{f^2(3)}$$

حالا باید ضابطهٔ $g(x)$ و خط $f(x)$ در بازهٔ $2\le x\le 6$ را پیدا کنیم. تابع خطی $g(x)$ از دو نقطهٔ (۶,۶) و (۰,۲) می‌گذرد، پس معادلهٔ آن به‌صورت $y-2=\frac{6-2}{6-0}(x-0)$ یا $y=\frac{2}{3}x+2$ می‌باشد، یعنی $g(x)=\frac{2}{3}x+2$. پس $g(3)=4$ و $g'(3)=\frac{2}{3}$. حالا نوبت پیدا کردن معادلهٔ خط $f(x)$ در بازهٔ $2\le x\le 6$ است. این تابع از دو نقطهٔ (۲,۶) و (۶,۰) می‌گذرد، پس معادلهٔ آن به‌صورت $y-0=\frac{6-0}{2-6}(x-6)$ یا $y=-\frac{3}{2}x+9$ است، یعنی $f(x)=-\frac{3}{2}x+9$ (وقتی $2\le x\le 6$)، پس $f(3)=\frac{9}{2}$ و $f'(3)=-\frac{3}{2}$ است. در نهایت با جای‌گذاری مقادیر به‌دست آمده، مقدار $y'(3)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$y'(3)=\frac{(\frac{2}{3})(\frac{9}{2})-(-\frac{3}{2})(4)}{(\frac{9}{2})^2}=\frac{3+6}{\frac{81}{4}}=\frac{36}{81}=\frac{4}{9}$$

۹۴۴ **۱** شیب خط مماس بر تابع $f(x)$ در $x=3$ همان تانژانت 60°، یعنی $f'(3)=\sqrt{3}$ است. حالا مشتق تابع $g(x)=\frac{4x}{f(x)}$ را محاسبه کرده و سپس $x=3$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم. ببینید:

$$g'(x)=\frac{(4)f(x)-f'(x)(4x)}{f^2(x)}\xrightarrow{x=3}g'(3)=\frac{4f(3)-12f'(3)}{f^2(3)}=\frac{4\times5-12\times\sqrt{3}}{(5)^2}=\frac{20-12\sqrt{3}}{25}$$

حالا با توجه به‌صورت سؤال $a=20$ و $b=12$ و درنتیجه $a+b=32$ است.

۹۴۵ **۴** خط مماس بر $f(x)$ در $x=2$ را d می‌نامیم و با داشتن دو نقطهٔ $A(2,4)$ و $B(-1,0)$ از آن، شیبش را به‌راحتی به‌دست می‌آوریم، پس داریم:

$$m_d=\frac{4-0}{2+1}=\frac{4}{3}$$

از طرفی شیب خط d یعنی $\frac{4}{3}$ همان مشتق تابع $f(x)$ در $x=2$ است، یعنی $f'(2)=\frac{4}{3}$. حالا سراغ مشتق تابع y در $x=2$ می‌رویم، پس می توان نوشت:

$$y=\frac{x^2}{f(x)}\Rightarrow y'=\frac{2xf(x)-f'(x)x^2}{f^2(x)}\xrightarrow{x=2}y'(2)=\frac{4f(2)-4f'(2)}{f^2(2)}=\frac{4(4)-4(\frac{4}{3})}{(4)^2}=\frac{16-\frac{16}{3}}{16}=\frac{2}{3}$$