خرید کتاب های کنکور
با تخفیف ویژه
و
ارسال رایگان
Medabook.com
مدابوک
یک جلسه تماس تلفنی رایگان
با مشاوران رتبه برتر
برای انتخاب بهترین منابع
دبیرستان و کنکور
۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰

فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله

درسنامهٔ ۱

یادآوری مجموعه‌های مهم و روابط بین مجموعه‌ها

در سال‌های قبل با چند مجموعهٔ همیشه در صحنه و مهم آشنا شدیم که باید حتماً آن‌ها و نمادهایشان را به‌خاطر داشته باشید:

۱ مجموعهٔ اعداد طبیعی : $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\cdots\}$

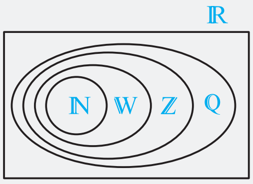
۲ مجموعهٔ اعداد حسابی : $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,\cdots\}$

۳ مجموعهٔ اعداد صحیح : $\mathbb{Z}=\{\cdots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\cdots\}$

۴ مجموعهٔ اعداد گویا : $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\,|\,m,n\in\mathbb{Z},n\neq ۰\right\}$

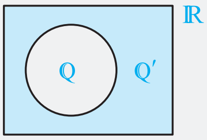
۵ مجموعهٔ اعداد گنگ $(\mathbb{Q}')$: مجموعه اعدادی هستند که نمی‌توان آن‌ها را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح نوشت مثل $\sqrt{۲}$ و π.

۶ مجموعهٔ اعداد حقیقی : $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$



نکته روابط زیر را که بسیار مهم است حتماً به‌خاطر بسپارید:

$$\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R} \quad , \quad \mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$$

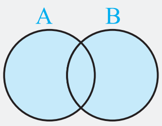


سؤال *دانش‌پژوه (بنیامین روشن)*: آقا پس $\mathbb{Q}'$ چی شد؟

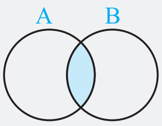
پاسخ: درود بر $\mathbb{Q}'$*! مطمئن باش گم نشده! در واقع اون قسمتِ بین* $\mathbb{Q}$ *و* $\mathbb{R}$، $\mathbb{Q}'$ *هست. به شکل مقابل نگاه کن تا بفهمی* $\mathbb{Q}'$ *کجاست.*

اجتماع، اشتراک و تفاضل

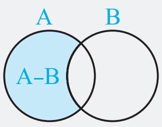
اجتماع دو مجموعهٔ A و B: مجموعه‌ای است که اعضایش متعلق به A یا B یا هر دو مجموعهٔ A و B هستند و آن را به‌صورت $A\cup B$ نمایش می‌دهیم. نمودار ون آن به‌صورت مقابل است:



اشتراک دو مجموعهٔ A و B: مجموعه‌ای است که هر عضو آن هم به A و هم به B تعلق داشته و آن را به‌صورت $A\cap B$ نشان می‌دهند. نمودار ون آن به‌صورت مقابل است:



تفاضل دو مجموعه: تفاضل مجموعهٔ B از A را به‌صورت $A-B$ نوشته و مجموعه‌ای است که عضوهای آن به A تعلق داشته باشد ولی به B تعلق نداشته باشد. نمودار ون آن به‌صورت مقابل است:



مثال **اگر $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{c,d\}$، آن‌گاه مجموعه‌های $A\cup B$، $A\cap B$، $A-B$ و $B-A$ را بیابید.**

پاسخ:

$$A\cup B=\{a,b,c,d\} \quad , \quad A\cap B=\{c\} \quad , \quad A-B=\{a,b\} \quad , \quad B-A=\{d\}$$

یادآوری قوانین مهم:

۱ $(A\cap B)\subseteq A\subseteq(A\cup B) \quad , \quad (A\cap B)\subseteq B\subseteq(A\cup B)$

۲ $A\subseteq B\Leftrightarrow\begin{cases}A\cup B=B\\A\cap B=A\end{cases}\xrightarrow{\text{نتیجه}} A\cup\varnothing=A \quad , \quad A\cap\varnothing=\varnothing$ (تهی اشتراکش با هر چیزی تهی و اجتماعش با هر چیزی همون‌چیز میشه)

۳ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \quad , \quad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

۴ $A\cap(A\cup B)\overset{A\subseteq A\cup B}{=\!=\!=}A \quad , \quad A\cup(A\cap B)\overset{A\cap B\subseteq A}{=\!=\!=}A$ (قوانین جذب)

۱- کدام نتیجهٔ زیر نادرست است؟

۱) $\mathbb{N} \cup \mathbb{W} \subseteq \mathbb{W}$ ۲) $\mathbb{N} \cap \mathbb{W} \subseteq \mathbb{W}$ ۳) $\mathbb{W} \cup \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{W}$ ۴) $\mathbb{W} \cap \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{W}$

۲- اگر اعداد حسابی را با $\mathbb{W}$، اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$، اعداد طبیعی فرد را با O و اعداد طبیعی زوج را با E نشان دهیم، کدام گزینه برابر $\varnothing$ است؟

۱) $\mathbb{N} - O$ ۲) $O - E$ ۳) $E - \mathbb{N}$ ۴) $\mathbb{W} - \mathbb{N}$

۳- به‌ازای کدام مجموعهٔ A، مجموعهٔ $B = \{x \mid x^۲ < ۱ \ ,\ x \in A\}$ هیچ عضوی ندارد؟

۱) $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ ۲) $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ ۴) اعداد صحیح زوج

۴- اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد دو رقمی کوچک‌تر از ۲۰ و B مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی و دو رقمی عدد ۳ که کوچک‌تر از ۲۰ هستند باشند، $A \cup B$ چند عضو از A بیشتر دارد؟

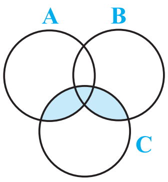
۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۵- اگر $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{۱۲}{x} \in \mathbb{N}\right\}$ و $B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{۱۸}{x} \in \mathbb{N}\right\}$، $A \cap B$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

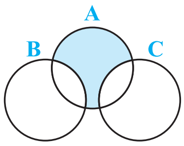
۶- اگر $A = \{۲,۳,۶,۷,۸\}$ و $B = \{۲,۴,۵,۶\}$ باشند، مجموعهٔ $(A \cup B) - [A - (A \cap B)]$ چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵



۷- کدام مجموعه، قسمت سایه‌خورده را نشان می‌دهد؟

۱) $A \cap (B \cup C)$ ۲) $A \cup (B \cap C)$
۳) $C \cup (A \cap B)$ ۴) $C \cap (A \cup B)$



۸- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، قسمت سایه‌دار را نشان می‌دهد؟

۱) $A - (B \cap C)$ ۲) $(A - C) \cap (A - B)$
۳) $A \cap (B \cup C)$ ۴) $(A \cup B) - (A \cup C)$

۹- اگر $A \cup B = \{k^۲ \mid k \in \mathbb{N}, k \leq ۸\}$ و $A \cup C = \{k^۳ \mid k \in \mathbb{N}\}$، آن‌گاه $A \cup (B \cap C)$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

درسنامهٔ ۲

بازه (فاصله)

اگر a و b دو عدد حقیقی و $a < b$ باشد، حالات زیر را داریم:

۱) تمام اعداد حقیقی بین این دو عدد را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم و آن را **بازهٔ باز** a و b می‌خوانیم.

$$(a,b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

۲) تمام اعداد حقیقی بین این دو عدد به همراه خود این دو عدد را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم و آن را **بازهٔ بسته** a و b می‌نامیم.

$$[a,b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

۳) تمام اعداد حقیقی بین این دو عدد به همراه تنها یکی از این دو عدد را به‌صورت‌های زیر نشان می‌دهیم و به آن‌ها **بازهٔ نیم‌باز** می‌گوییم.

$$[a,b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\} \quad , \quad (a,b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$

به‌طور خلاصه، برخی بازه‌ها را با فرض $a < b$، به‌صورت‌های زیر می‌توان نوشت:

نمایش بازه‌ای	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
(a,b)	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$	a b
$[a,b]$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$	a b
$(a,b]$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$	a b
$[a,b)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$	a b
$(-\infty,a]$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$	a
$(a,+\infty)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\}$	a
$(-\infty,+\infty)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$	

نکته گاهی می‌توان اجتماع دو یا چند بازه را به‌صورت تفاضلی نشان داد. مثلاً با فرض $a<b$ داریم:

$(-\infty,a)\cup(a,+\infty)=$  $=\{x\,|\,x<a$ یا $x>a\}=\mathbb{R}-\{a\}$

$(-\infty,a)\cup[b,+\infty)=$  $=\{x\,|\,x<a$ یا $x\geq b\}=\mathbb{R}-[a,b)$

سؤال دانش‌پژوه (لاله پژوهان): **آقا اجازه! این آخری رو میشه بیشتر توضیح بدین که چطور نوشتین؟**

پاسخ: ببین! برای نوشتن مجموعهٔ $(-\infty,a)\cup[b,+\infty)$ به اون یکی صورت، کافیه مجموعه‌ای رو پیدا کنیم که اجتماع اون با $(-\infty,a)\cup[b,+\infty)$، $\mathbb{R}$ بشه و با این مجموعه اشتراکی نداشته باشه. در این‌جا داریم:

$$(-\infty,a)\cup[b,+\infty)\cup\underbrace{[a,b)}_{\text{بازهٔ مورد نظر}}=\mathbb{R}\Rightarrow(-\infty,a)\cup[b,+\infty)=\mathbb{R}-[a,b)$$

۱۰- اجتماع بازه‌های $(۶,+\infty)$ و $(-\infty,۴)$ را به کدام صورت زیر می‌توان نشان داد؟

۱) $\mathbb{R}-(۴,۶)$ ۲) $\mathbb{R}-[۴,۶]$ ۳) $\mathbb{R}-[۴,۶)$ ۴) $\mathbb{R}-(۴,۶]$

۱۱- کدام مجموعهٔ زیر، نمایانگر $\mathbb{R}-(-۲,۱]$ است؟

۱) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<-۲$ و $x\geq ۱\}$ ۲) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\leq -۲$ و $x>۱\}$ ۳) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<-۲$ یا $x\geq ۱\}$ ۴) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\leq -۲$ یا $x>۱\}$

۱۲- مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>-۲$ یا $x\leq ۳\}$ برابر است با:

۱) $(-۲,۳]$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{R}-[-۲,۳)$ ۴) $\mathbb{Q}$

۱۳- کدام گزینه نادرست است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $\sqrt{۳}\not\in(-۱,۴]\cap(۲,+\infty)$ ۲) $\left\{\frac{۵b}{۲},۲b\right\}\subseteq[b,۳b]$

۳) $۶/۰۲۲\times ۱۰^{۲۳}\in(-۲,۵)\cup(-۳,+\infty)$ ۴) $[-۱,۲]\subseteq(-۱,۲]$

۱۴- حاصل کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $(-۳,۰)\cup(-۲,۵]=(-۲,۰)$ ۲) $(-\infty,۶]\cap(۲,۹)=(-\infty,۹)$

۳) $(۳,+\infty)\cup(۶,۱۰]=(۳,+\infty)$ ۴) $(-\infty,۱)\cap[۱,+\infty)=\mathbb{R}$

۱۵- مجموع مقادیر ممکن برای a که مجموعهٔ $(a-۲,۲a+۱)\cup\{۳a\}$، بازه‌ای نیم‌باز باشد، کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۲

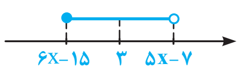
۱۶- اگر $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\,,\,۰\leq x<۳\}$، $B=\{x\,|\,x\in\mathbb{R},x\leq ۲\}$ و $C=\{x\,|\,x\in\mathbb{R},x\geq ۱\}$ باشد، مجموعهٔ $(A\cup B)\cap C$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۱۷- اگر $A=(-\infty,-۱)\cup(۴,+\infty)$ و $B=(-\infty,۵)\cap[-۴,+\infty)$ باشد، کدام گزینه زیرمجموعهٔ $A\cap B$ است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $(-۱,۴)$ ۲) $[۴,۵)$ ۳) $[-۴,-۲)$ ۴) $[-۴,۵)$

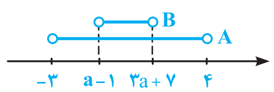
۱۸- با توجه به شکل نمایش داده شده، محدودهٔ x کدام است؟



۱) $(۲,۳)$ ۲) $(-۳,۲)$

۳) $(-۲,۳)$ ۴) $\varnothing$

۱۹- با توجه به نمایش بازه‌های A و B روی محور، محدودهٔ a کدام است؟



۱) $-۶<a<-۴$ ۲) $a<-۱$

۳) $a>-۲$ ۴) $-۲<a<-۱$

۲۰- اگر بازهٔ $[-۴,۲a+۷)$ شامل ۴ عدد صحیح باشد، مجموعه مقادیر a کدام است؟

۱) $(-۴,-۳/۵]$ ۲) $[-۳/۵,۴]$ ۳) $[-۴,-۳/۵)$ ۴) $[-۳/۵,۴)$

۲۱- اگر $A=\left\{x\,|\,۲x+m\leq\frac{m+۱}{۲}\right\}$ و $B=\{x\,|\,m-۵x\leq ۳m+۱\}$ و مجموعهٔ $A\cap B$ یک عضو داشته باشد، عدد m کدام است؟

۱) -۹ ۲) -۵ ۳) -۳ ۴) ۳

۲۲- اگر $[-4,3x-4]\cap[2y-5,7]=\{x\}$ باشد، عدد $x+2y$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۷/۵ ۳) ۶ ۴) ۵

۲۳- اگر $[-1,b]\cup[a,7]=[-2,9]$ باشد، آن‌گاه $b-a$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۲۴- اگر $[7,3a+1)\cup(a-2b,9)=[7,16)$ شود، مقدار $a-b$ کدام است؟ $(b\in\mathbb{Z})$

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۶- ۴) ۵-

۲۵- اگر $(2a-3,-2a+3]\cup(5,6)=(5a,b)$ شود، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۶- ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۳-

۲۶- اگر $(-\infty,\frac{3m+5}{7}]\cup(\frac{m-1}{2},+\infty)=\mathbb{R}$ باشد، محدودهٔ m کدام است؟

۱) $m=18$ ۲) $m\ge 17$ ۳) $m>17$ ۴) $m\le 17$

۲۷- اگر اشتراک بازه‌های $(1,6)$ و $(2,2x+1)$ به صورت $(2,4x-3)$ باشد، مقدار x^2+5x کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۴ ۳) ۲ ۴) ۸

۲۸- اگر $A=[5x+1,-3x-6]$ مجموعه‌ای ناتهی و $B=[3,6]$ باشد، چند عدد صحیح در تساوی $A\cap B=\varnothing$ صدق می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بیشمار

۲۹- اگر $A_m=\{x\,|\,x\in\mathbb{R},0<x-1<2^m\}$ باشد، $A_2\cap A_3$ بیانگر کدام بازه است؟

۱) $(1,5)$ ۲) $(3,5)$ ۳) $(2,5)$ ۴) $(5,9)$

۳۰- اگر $n\in\mathbb{N}$ و $A_n=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m\ge -n,2^m\le n\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $A_4\cap A_3$ چند عضو دارد؟ ریاضی خارج ۸۸ با تغییر

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۱- اگر $-1<a<0$ باشد، آن‌گاه $[a,a^4]-[a^3,a^2]$ کدام است؟

۱) $[a,a^3]\cup[a^2,a^4]$ ۲) $\varnothing$ ۳) $[a,a^3)$ ۴) $(a^2,a^4]$

۳۲- اگر $A_n=(-\frac{2}{n},\frac{n-2}{n})$ به‌صورت بازه باشد، مجموعهٔ $(A_3\cup A_6)-A_3$ برابر کدام بازه است؟ ریاضی خارج ۸۶

۱) $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ ۲) $[-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ ۳) $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ ۴) $[\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

۳۳- اگر $i\in\{1,2,3,\cdots,9\}$ ، $A_i=[-i,\frac{9-i}{2}]$، آن‌گاه مجموعهٔ $(A_2\cap A_5)-(A_1\cap A_7)$ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۲

۱) $[-2,-1)\cup(1,2]$ ۲) $[-2,-1]\cup[1,2]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $\varnothing$

۳۴- اگر n عددی طبیعی و A_n بازهٔ $((-1)^n n,2n)$ باشد، چند عدد صحیح به مجموعهٔ $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ تعلق دارد؟ ریاضی داخل ۸۴

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

درسنامهٔ ۳

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ای را که تعداد اعضای آن برابر با یک عدد حسابی باشد، «مجموعهٔ متناهی» می‌نامند و مجموعه‌ای را که متناهی نباشد، «مجموعهٔ نامتناهی» می‌گویند.

مثال مجموعهٔ اعداد طبیعی $(\mathbb{N})$، مجموعهٔ اعداد صحیح $(\mathbb{Z})$ و تعداد اعداد گویا یا گنگ در یک بازه، مجموعه‌های نامتناهی و مجموعهٔ مولکول‌های موجود در جهان هستی، مجموعه‌ای متناهی است. همچنین تهی نیز مجموعه‌ای است که صفر عضو دارد و لذا مجموعه‌ای متناهی می‌باشد.

سؤال *دانش‌پژوه (قلی اکبرزاده):* **آقا اجازه! آخه مولکول‌های جهان هستی که خیلی زیادن! چطوری میگن متناهیه پس؟**

پاسخ: *قلی جان، مگه به تو گفتن برو بشمر! درسته که فیلی زیادن، اما با داشتن امکانات لازم و صرف وقت بسیار، ممکنه که بشه تعداد اون‌ها رو به‌دست آورد. پس یادت باشه تعداد اعضای بعفی از مجموعه‌های متناهی ممکنه فیلی زیاد باشه، ولی نباید به‌فاطر این، اونا رو مجموعهٔ نامتناهی بگیریم!*

نکته جدول زیر به شما نشان می‌دهد که اگر A و B متناهی یا نامتناهی باشد، اوضاع از چه قرار است. خوب دقت کنید و به دلایل متناهی یا نامتناهی بودن آن‌ها فکر کنید:

مجموعه‌ها	$A\cap B$	$A\cup B$	$A-B$	$B-A$
A و B هر دو متناهی	متناهی	متناهی	متناهی	متناهی
A متناهی و B نامتناهی	متناهی	نامتناهی	متناهی	نامتناهی
A و B هر دو نامتناهی	می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.	نامتناهی	می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.	می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۳۵- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی
۲) مجموعهٔ دانش‌آموزان مدرسهٔ شما
۳) مجموعهٔ مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب
۴) مجموعهٔ تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات

۳۶- اگر مجموعهٔ $A=\{x\in B \mid 0<x<2\}$ نامتناهی باشد، مجموعهٔ B کدام نمی‌تواند باشد؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $\mathbb{Q}$
۲) $\mathbb{R}$
۳) $\mathbb{Q}'$
۴) $\mathbb{Z}$

۳۷- کدام گزینه بیانگر مجموعه‌ای متناهی است؟

۱) $(\frac{1}{2},\frac{1}{3}]-\{\frac{1}{5}\}$
۲) اعداد صحیح مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۲۰۰۰
۳) اعداد کسری که مخرجشان ۱ و صورتشان عدد طبیعی بوده و کم‌تر از ۵۰۰ باشند.
۴) جنگل‌های زیبای جهان

۳۸- کدام مجموعه متناهی است؟

۱) مجموعه خطوط گذرنده از مبدأ مختصات
۲) مجموعهٔ اعداد فرد صحیح و کوچک‌تر از 10^6
۳) مجموعه اعداد به صورت $\frac{1}{n}$ که $n\in\mathbb{N}$ و بزرگ‌تر از $\frac{1}{100}$ باشند.
۴) $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$

۳۹- کدام مجموعه دارای کوچک‌ترین عضو می‌باشد؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $(1,7)$
۲) $\{x\in\mathbb{R}, x\geq 7\}$
۳) $\{\cdots,-2,-1,0,1,2,3\}$
۴) گزینه‌های (۱) و (۲)

۴۰- فرض کنید A مجموعهٔ اعداد طبیعی کم‌تر از ۴ و B مجموعهٔ اعداد صحیح کم‌تر از ۴ باشد. آن‌گاه کدام مجموعهٔ زیر نامتناهی است؟

۱) $A\cap B$
۲) $A-B$
۳) $B-(A\cup B)$
۴) $A\cup B$

۴۱- اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی مضرب ۳ و B مجموعهٔ اعداد صحیح با قدرمطلق کم‌تر از ۱۰۰ باشد، کدام مجموعه در $\mathbb{Z}$ متناهی است؟ انسانی داخل ۸۶

۱) $A-B$
۲) $\mathbb{Z}-A$
۳) $A\cap B$
۴) $A\cup B$

۴۲- اگر مجموعهٔ $A=\{\frac{1}{x} \mid x\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{\frac{x}{8} \mid x\in\mathbb{N}\}$ مفروض باشند، کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟ انسانی داخل ۹۶

۱) $A-B$
۲) $B-A$
۳) $A\cap B$
۴) $A\cup B$

۴۳- اگر $A=[2a+2,+\infty)$ ، $B=(-\infty,4a-6]$ و مجموعهٔ $A\cap B$ متناهی باشد، بزرگ‌ترین محدودهٔ a، کدام است؟

۱) $a>4$
۲) $a<4$
۳) $a\geq 4$
۴) $a\leq 4$

۴۴- اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد و B مجموعهٔ اعداد اول باشد، کدام مجموعه متناهی و غیرتهی است؟ مشابه انسانی خارج ۹۶

۱) $A-B$
۲) $B-A$
۳) $A\cap B$
۴) $A-(A\cup B)$

۴۵- اگر A یک مجموعهٔ متناهی و B یک مجموعهٔ نامتناهی باشد، کدام‌یک از مجموعه‌های زیر حتماً متناهی است؟

۱) $B-A$
۲) $A-(B\cup A)$
۳) $B-(A\cap B)$
۴) $(A\cup B)\cap B$

۴۶- اگر B مجموعه‌ای دلخواه و $\mathbb{N}-B$ مجموعه‌ای متناهی و ناتهی باشد، کدام مجموعهٔ زیر قطعاً نامتناهی است؟

۱) $B-\mathbb{Z}$
۲) $B\cap\mathbb{Z}$
۳) $B-\mathbb{N}$
۴) $(\mathbb{N}-B)\cap\mathbb{Z}$

۴۷- در کدام گزینه دو مجموعهٔ A و B داده‌شده هر دو نامتناهی بوده و $A \cup B = \mathbb{N}$ می‌شود؟

۱) مجموعهٔ اعداد اول = A , مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج = B

۲) مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ = A , مجموعهٔ اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱۰۰ = B

۳) مجموعهٔ اعداد طبیعی که هم مضرب ۲ هستند و هم مضرب ۳ = A ، مجموعهٔ اعداد طبیعی که مضرب ۶ نیستند = B

۴) اعداد طبیعی نابیشتر از ۵۰ = A , اعداد طبیعی بیشتر از ۵۰ = B

۴۸- فرض کنید $B \subseteq A$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه نادرست است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) اگر A متناهی باشد، لزوماً B نیز متناهی است.

۲) اگر A نامتناهی باشد، لزوماً B نامتناهی است.

۳) اگر B نامتناهی باشد، لزوماً A نیز نامتناهی است.

۴) اگر B متناهی باشد، مجموعهٔ A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۴۹- در کدام شرایط زیر، مجموعهٔ $A-(B-C)$ قطعاً نامتناهی است؟

۱) A: متناهی و B و C دو مجموعهٔ دلخواه

۲) A: نامتناهی، B: متناهی و C: نامتناهی

۳) A و B و C هر سه نامتناهی

۴) A: نامتناهی، B: نامتناهی و C: متناهی

۵۰- اگر A مجموعه‌ای دلخواه و نامشخص، B مجموعه‌ای متناهی و C مجموعه‌ای نامتناهی باشد، کدام مجموعه حتماً متناهی است؟ (مجموعهٔ مرجع را $\mathbb{R}$ فرض کنید و $A \neq B, C$)

۱) $B \cup (A \cap C)$

۲) $(B \cap A) \cup (C - A)$

۳) $A-(B \cap C)$

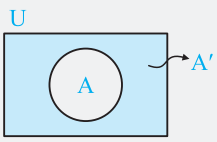
۴) $(B \cap C)-(C \cup A)$

درسنامه ۴

مجموعهٔ مرجع و متمم

مجموعهٔ مرجع: مجموعه‌ای است که تمام اعضای مجموعه‌های مورد بحث از آن انتخاب می‌شوند و آن را با U یا M نشان می‌دهند. **مثلاً:** وقتی می‌گوییم از اعداد طبیعی، مضارب ۳ را انتخاب می‌کنیم، اعداد طبیعی مجموعهٔ مرجع است.

مجموعهٔ متمم: متمم مجموعهٔ A که آن را با A' نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است که شامل همهٔ عضوهای U (مجموعهٔ مرجع) به غیر از عضوهای مجموعهٔ A است. نمودار ون آن به شکل مقابل است:



$$A' = \{x \mid x \in U, x \notin A\} = U - A$$

مثال اگر U، مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی و A مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی باشند، A' را بیابید.

پاسخ: $A' =$ تمامی اعضای U که در A نیستند. $= U - A = \{۱,۲,۳,\cdots,۹\} - \{۲,۳,۵,۷\} = \{۱,۴,۶,۸,۹\}$

نکته به دلایل درستی نکات زیر فکر کنید تا خوب برایتان جا بیفتد.

۱) $U' = \varnothing$ و $\varnothing' = U$

۲) $(A')' = A$ و $A \cap A' = \varnothing$ و $A \cup A' = U$

۳) $B - A = B \cap A'$

۴) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

۵) $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (قوانین دمورگان)

حالت کلی‌تر: $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$, $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$

مثال در جدول زیر متمم چند مجموعه را با توجه به مجموعهٔ مرجع بیان‌شده به‌دست آورده‌ایم. به آن‌ها خوب توجه کنید.

مجموعهٔ مرجع	مجموعهٔ A	مجموعهٔ A'
$\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$	$\{-۳,-۲,-۱\}$	$\{۰,۱,۲,۳\}$
$\mathbb{N}$	مجموعهٔ اعداد زوج	مجموعهٔ اعداد فرد
$\mathbb{W}$	$\{۰\}$	$\mathbb{N}$
$\mathbb{R}$	$[۴,+\infty)$	$(-\infty,۴)$
$\mathbb{R}$	$[۳,۴)$	$(-\infty,۳) \cup [۴,+\infty)$
$\mathbb{R}$	$(-\infty,۲) \cup (۲,۳) \cup (۴,+\infty)$	$\{۲\} \cup [۳,۴]$

۵۱- اگر $U = \{x \mid ۱ \leq x < ۹, x \in \mathbb{N}\}$ و $A = \{x \mid ۲x < ۷, x \in \mathbb{N}\}$، آن‌گاه A' چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۵۲- اگر مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی بوده و $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ ، $B=\{۲,۴,۶,۸\}$ و $C'=\{۳,۴,۵,۶\}$ باشد، آن‌گاه $(A\cup B)'\cap C$ کدام است؟

۱) $\{۵,۷,۹\}$ ۲) $\{۴,۵,۶\}$ ۳) $\{۷,۹\}$ ۴) $\{۵\}$

۵۳- اگر $A'=[-۱,۳)$ و $B'=(-۳,۲)$ و مجموعهٔ مرجع $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $(A\cup B)-A$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۵۴- اگر $U=\{۱,۲,۳,\cdots,n\}$ و $A=\{n,n-۱,n-۲,\cdots,۵\}$ ، آن‌گاه A' چند عضو دارد؟

۱) $n-۵$ ۲) $n-۴$ ۳) ۵ ۴) ۴

۵۵- کدام گزینه با $A\cup(A'\cap B)$ برابر است؟

۱) A ۲) B ۳) $A\cup B$ ۴) $A'\cup B'$

۵۶- حاصل $(A\cap B')\cup(B\cap A)$ کدام است؟

۱) B ۲) $\varnothing$ ۳) A ۴) $A\cap B$

۵۷- اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، $(A\cap B)-A$ کدام است؟

۱) $A\cap B$ ۲) $\varnothing$ ۳) A' ۴) B'

۵۸- اگر $A\subseteq B$ باشد، $(B-A)\cup A$ کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) $\varnothing$ ۴) M

۵۹- متمم مجموعهٔ $(B-A)'-A$ ، نسبت به مجموعهٔ مرجع کدام است؟ ریاضی خارج ۸۸

۱) $A\cup B$ ۲) $A\cap B$ ۳) $(A\cup B)'$ ۴) B

۶۰- اگر $A\subseteq B$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $B'-A=B'$ ۲) $A'-B=B'$ ۳) $A-B'=A$ ۴) $B-A'=B$

۶۱- اگر $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ مرجع باشد، $\mathbb{N}'-\mathbb{W}'$ کدام است؟

۱) $\{۰\}$ ۲) $\{\}$ ۳) $\{\dots,-۳,-۲,-۱\}$ ۴) $\{\dots,-۲,-۱,۰\}$

۶۲- اگر A ، B و C سه مجموعهٔ غیرتهی باشند، به طوری که $A\subseteq B$ ، آن‌گاه مجموعهٔ $(A\cap(B\cap C'))\cap(A\cap B\cap C)'$ کدام است؟

۱) B ۲) $A\cap C$ ۳) A ۴) $A\cap C'$ ریاضی داخل ۹۰

۶۳- اگر $A\subseteq B\subseteq C$ باشد، مجموعهٔ $(A'\cap B')'\cap(A'\cap C')'$ برابر کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) C ۴) $A-C$

۶۴- حاصل $[A\cap(A'\cup B)]\cup[B\cap(A'\cup B')]$ کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) A' ۴) B'

۶۵- اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، آن‌گاه مجموعهٔ $[A\cup(A\cap B)]'\cap[(B\cap A)\cup(B-A)]$ برابر کدام است؟ ریاضی داخل ۸۹

۱) $A'-B'$ ۲) $(A-B)'$ ۳) A' ۴) $\varnothing$

۶۶- متمم مجموعهٔ $C\cup A'\cup B'$ ، نسبت به مجموعهٔ جهانی، با کدام مجموعه برابر نیست؟ ریاضی خارج ۸۹

۱) $(A\cap B)-(A\cap C)$ ۲) $(A-C)\cup(B-C)$ ۳) $A\cap(B-C)$ ۴) $(A\cap B)-C$

۶۷- اگر مجموعهٔ مرجع مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد و $A'=\{۴,۶,۸,۱۰,۱۲\}$ و $B'=\{۴,۵,۶,۷,۸\}$ باشد، $(A\cap B)'$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۶۸- اگر $\mathbb{N}$ ، مجموعهٔ مرجع باشد، آن‌گاه کدام گزینه همواره درست است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) اگر A متناهی باشد، A' متناهی است.
۲) اگر A نامتناهی باشد، A' متناهی است.
۳) اگر A نامتناهی باشد، A' نامتناهی است.
۴) اگر A متناهی باشد، A' نامتناهی است.

۶۹- اگر $A\subseteq B$ و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه الزاماً کدام مجموعه نامتناهی است؟

۱) A' ۲) B' ۳) $A'\cap B'$ ۴) $A\cap B$

۷۰- اگر A و B دو زیرمجموعه از اعداد طبیعی و A متناهی و B نامتناهی باشد، کدام مجموعه الزاماً متناهی است؟

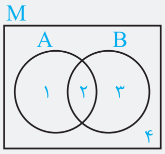
۱) $A'\cup B'$ ۲) $A\cap B'$ ۳) $A\cup B'$ ۴) $A'\cap B'$

درسنامهٔ ۵

یک روش جذاب و منحصر به فرد برای حل تست‌ها (روش شماره‌گذاری)

اکنون می‌خواهیم راجع به یک روش بسیار جالب صحبت کنیم که **اگر آن را خوب یاد بگیرید، در تست‌ها خیلی جلو می‌افتید**. بعضی راه‌های تستی انصافاً می‌توانند خیلی برای حل یک سؤال سخت کمک کنند. بخصوص در تست‌هایی که مجبورید چند گزینه را برای یافتن گزینهٔ درست امتحان کنید. خوب ببینید:

فرض کنید A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند. در این روش ابتدا با استفاده از نمودار وِن، A و B را نمایش داده و به هر کدام از نواحیِ مجزا یک شماره نسبت می‌دهیم. سپس می‌توانیم نواحی مختلف را با بیان شماره‌هایشان معرفی کنیم. به عنوان مثال با توجه به شکل مقابل چند مجموعهٔ زیر را به کمک اعداد می‌نویسیم:



$$\Rightarrow A=\{۱,۲\}\ ,\ B=\{۲,۳\}\ ,\ A\cap B=\{۲\}\ ,\ A\cup B=\{۱,۲,۳\}\ ,\ (A\cup B)'=\{۴\}$$

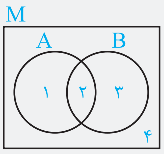
برای درک کاربرد این روش به مثال‌های زیر دقت کنید:

مثال مجموعهٔ $(A-B)\cup B$ برابر کدام گزینه است؟

۱) A ۲) B ۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

پاسخ: گزینهٔ (۴)

ابتدا یک نمودار وِن با مجموعه‌های A و B در حالت کلی رسم می‌کنیم. سپس با توجه به نمودار وِن، حاصل $(A-B)\cup B$ را به کمک اعداد بیان می‌کنیم:



$$\Rightarrow (A-B)\cup B=(\{۱,\cancel{۲}\}-\{\cancel{۲},۳\})\cup\{۲,۳\}=\{۱\}\cup\{۲,۳\}=\{۱,۲,۳\}$$

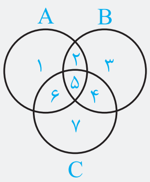
حال اگر به نمودار وِن نگاه کنیم، مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$، همان مجموعهٔ $A\cup B$ است. پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

مثال اگر $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $B\subseteq C$ ۲) $A\subseteq B$ ۳) $A\subseteq C$ ۴) $C\subseteq A$

پاسخ: گزینهٔ (۳)

با توجه به نمودار وِن، نواحی مجزا را شماره‌گذاری کرده و سپس مجموعه‌های $(A\cup B)\cap C$ و $A\cup(B\cap C)$ را به کمک اعداد بیان می‌کنیم:



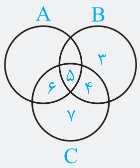
$$(A\cup B)\cap C=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\cap\{۴,۵,۶,۷\}=\{۴,۵,۶\}\quad (*)$$

$$A\cup(B\cap C)=\{۱,۲,۵,۶\}\cup\{۴,۵\}=\{۱,۲,۴,۵,۶\}\quad (**)$$

از طرفی با توجه به فرض تست، دو مجموعهٔ $(*)$ و $(**)$ با هم مساوی‌اند. پس داریم: $\{۴,۵,۶\}=\{۱,۲,۴,۵,۶\}$

برای برقراری تساوی فوق، اعداد ۱ و ۲ در مجموعهٔ سمت راست نباید وجود داشته باشند. پس در نواحی ۱ و ۲ نباید عضوی باشد. بنابراین نمودار وِن به‌صورت زیر در می‌آید و با توجه به آن مشخص است که $A\subseteq C$ است. زیرا:

$\xrightarrow{\text{نواحی ۱ و ۲} = \varnothing}$



$\Rightarrow A=\{۵,۶\}\ ,\ C=\{۵,۶,۴,۷\}\Rightarrow\{۵,۶\}\subseteq\{۵,۶,۴,۷\}\Rightarrow A\subseteq C\Rightarrow$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

اگر این روش را خوب یاد گرفته باشید، خیلی جاها از سخت‌ترین تست‌ها لذت خواهید برد! دقت کنید که این روش در مسائل مجموعه که به صورت شرطی بیان می‌شوند بسیار پرکاربرد است و حل را بسیار راحت می‌کند.

۷۱- اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، $(A\cap B')-(B-A)$ برابر کدام مجموعه است؟ ریاضی خارج ۹۱

۱) B' ۲) $\varnothing$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A-B$

۷۲- مجموعهٔ $(A-B)'\cap(A\cup B)\cap A'$ همواره برابر کدام است؟ ریاضی داخل ۸۸

۱) $B-A$ ۲) B ۳) A' ۴) $\varnothing$

۷۳- سادهٔ‌شدهٔ مجموعهٔ $(C\cap A\cap B)\cup(A-C)\cup(A-B)$ کدام است؟

۱) B ۲) A ۳) B' ۴) A'

۷۴- متمم مجموعهٔ $[A-(A-B)]\cup(A\cap B)'$ کدام است؟

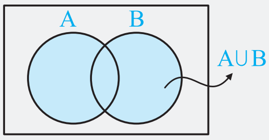
۱) U ۲) B' ۳) $A'\cup B'$ ۴) $\varnothing$

۷۵- اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، مجموعهٔ $(A\cap(A'\cup B))\cup(B\cap(A'\cup B'))$ برابر کدام است؟ ریاضی داخل ۹۷

۱) $A\cap B$ ۲) $A\cup B$ ۳) B ۴) A

درسنامهٔ ۶

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه $(n(A\cup B))$



اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی دلخواه باشند، تعداد اعضای اجتماع آن دو مجموعه از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

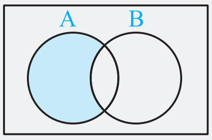
که در آن $n(A\cup B)$، تعداد اعضایی است که در A یا در B یا در هر دوی آن‌ها قرار دارد (تعداد اعضایی که حداقل در یکی از مجموعه‌های A یا B قرار دارند). هم‌چنین $n(A\cap B)$، تعداد اعضایی است که هم در A و هم در B حضور دارند.

مثال **اگر $n(A)=10$، $n(B)=7$ و $n(A\cup B)=15$ باشد، تعداد اعضایی که در هر دو مجموعه A و B قرار دارند را بیابید.**

پاسخ: خواستهٔ سؤال $n(A\cap B)$ است که با توجه به فرمول بیان‌شده داریم:

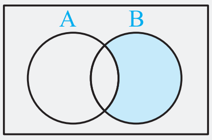
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow 15=10+7-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=2$$

نکته



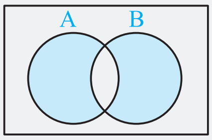
۱ تعداد اعضایی که فقط در مجموعهٔ A قرار دارند را با $n(A-B)$ نمایش داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنند:

$$n(A-B)=n(A\cap B')=n(A)-n(A\cap B)$$



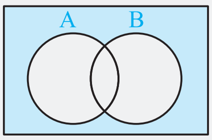
۲ تعداد اعضایی که فقط در مجموعهٔ B قرار دارند را با $n(B-A)$ نمایش داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنند:

$$n(B-A)=n(B\cap A')=n(B)-n(A\cap B)$$



۳ تعداد اعضایی که فقط در مجموعهٔ A یا فقط در مجموعهٔ B قرار دارند را با $n((A-B)\cup(B-A))$ نمایش داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنند:

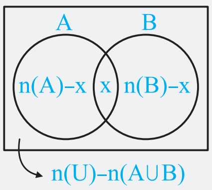
$$n((A-B)\cup(B-A))=n(A\cup B)-n(A\cap B)=n(A)+n(B)-2n(A\cap B)$$



۴ تعداد اعضایی که نه در A و نه در B قرار دارند را با $n(A'\cap B')$ نمایش داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنند:

$$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=n(U)-(n(A)+n(B)-n(A\cap B))$$

روش حل مسائل:



برای حل مسائل مربوط به این قسمت، ابتدا نمودار وِن مقابل را رسم کرده و به‌ترتیب زیر اطلاعات مسأله را روی نمودار وارد می‌کنیم:

مرحلهٔ ۱: در ناحیهٔ اشتراک دو مجموعهٔ A و B عدد x را می‌نویسیم.

مرحلهٔ ۲: در طرفین ناحیهٔ اشتراک دو مجموعهٔ A و B، عبارات $n(A)-x$ و $n(B)-x$ را می‌نویسیم.

مرحلهٔ ۳: در ناحیهٔ خارج از اجتماع دو مجموعهٔ A و B، عبارت $n(U)-n(A\cup B)$ را می‌نویسیم.

دقت کنید که با توجه به شکل، $n(A\cup B)$، همان $(n(A)-x)+(x)+(n(B)-x)$ یا $n(A)+n(B)-x$ است.

مثال **در یک کلاس ۴۰ نفره، ۲۵ نفر در درس ریاضی و ۳۰ نفر در درس فیزیک قبول شده‌اند. هم‌چنین ۲۰ نفر در هر دو درس قبول شده‌اند. در این‌صورت:**

الف) چند نفر در درس ریاضی قبول نشده‌اند؟ **ب) چند نفر فقط در درس فیزیک قبول شده‌اند؟**

ج) چند نفر حداقل در یکی از دروس ریاضی یا فیزیک قبول شده‌اند؟ **د) چند نفر فقط در یکی از دو درس ریاضی یا فیزیک قبول شده‌اند؟**

هـ) چند نفر در هیچ‌کدام از دو درس ریاضی و فیزیک قبول نشده‌اند؟ **و) چند نفر حداکثر در یکی از دروس ریاضی یا فیزیک قبول شده‌اند؟**

۹۶- اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، آن‌گاه کدام رابطه همواره درست است؟

۱) $n(U)=n(A)+n(B)+n(A'\cup B')$ ۲) $n(U)=n(A)+n(B)+n(A'\cap B')$

۳) $n(A)\times n(B)=1-n(A'\cup B')$ ۴) $n(A)\times n(B)=1-n(A')\times n(B')$

۹۷- اگر A، B و C سه مجموعهٔ دوبه‌دو جدا از هم باشند و داشته باشیم $n(A\cup B)=8$، $n(B\cup C)=10$ و $n(A\cup C)=6$، آن‌گاه $n(A\cup B\cup C)$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) ۹

درسنامهٔ ۸

الگو

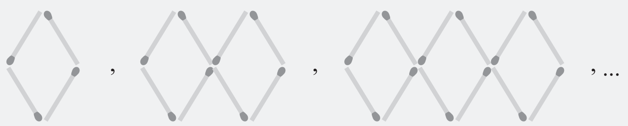
جملهٔ عمومی الگو: جملهٔ nام یک الگو را که در آن n عدد طبیعی دلخواه می‌باشد، جملهٔ عمومی الگو می‌نامند و معمولاً آن را با t_n یا a_n نمایش می‌دهند.

مثال اگر جملهٔ عمومی یک الگو به‌صورت $a_n=2n^2+1$ باشد، سه جملهٔ اول آن را به‌دست آورید.

پاسخ: $a_1=2(1)^2+1=3$: جملهٔ اول الگو ، $a_2=2(2)^2+1=9$: جملهٔ دوم الگو ، $a_3=2(3)^2+1=19$: جملهٔ سوم الگو

مثال به کمک چوب کبریت، شکل‌های زیر را ساخته‌ایم. با به‌دست آوردن یک الگو بگویید که:

الف) در شکل nام چند چوب کبریت به‌کار رفته است؟ (جملهٔ عمومی الگو را بیابید.)



ب) در شکل ۱۰ ام چند چوب کبریت به‌کار رفته است؟

پاسخ: الف) همان‌طور که از شکل‌ها مشخص است، در مرحلهٔ اول، ۴ چوب کبریت به‌کار رفته و در هر مرحلهٔ بعدی تعداد چوب کبریت‌ها ۴ تا نسبت به مرحلهٔ قبلی بیشتر شده است. پس در شکل nام، تعداد چوب کبریت‌ها برابر $(4n)$ است.

ب) برای پیدا کردن تعداد چوب کبریت‌ها در شکل دهم، کافی است در جملهٔ عمومی الگو یعنی $a_n=4n$، n را برابر ۱۰ قرار دهیم:

$a_{10}=4(10)=40$

الگوی خطی

الگوهایی که جملهٔ عمومی آن‌ها به‌صورت $t_n=an+b$ باشد را «الگوی خطی» می‌گویند (a و b اعداد حقیقی دلخواه ثابت). در این الگوها، اختلاف هر دو جملهٔ متوالی، مقدار ثابت a (ضریب n) است.

مثال آیا الگویی با جملات ...,۵,۸,۱۱,۱۴ خطی است؟

پاسخ: بله، زیرا اختلاف هر دو جملهٔ متوالی آن، مقدار ثابت ۳ است:

$5 \overset{+3}{\frown} 8 \overset{+3}{\frown} 11 \overset{+3}{\frown} 14 , \dots$

مثال در یک الگوی خطی، جملات سوم و هفتم به‌ترتیب ۷ و ۱۵ است. ابتدا جملهٔ عمومی الگو را بیابید و سپس جملهٔ بیستم آن را محاسبه کنید.

پاسخ: جملهٔ عمومی الگوی خطی به‌صورت $t_n=an+b$ است. داریم:

$$\begin{cases} t_3=7 \Rightarrow 3a+b=7 \\ t_7=15 \Rightarrow 7a+b=15 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a=2\ ,\ b=1 \Rightarrow t_n=2n+1$$

برای محاسبهٔ جملهٔ بیستم یعنی t_{20} در جملهٔ عمومی به‌جای n، ۲۰ قرار می‌دهیم:

$$t_n=2n+1 \xrightarrow{n=20} t_{20}=2(20)+1=41$$

مثال اگر $t_n=(2a-4)n^2+(a+1)n-a$ یک الگوی خطی باشد، جملهٔ هفتم آن را بیابید.

پاسخ: در یک الگوی خطی توان n حداکثر می‌تواند برابر ۱ باشد. پس ضریب n^2 باید صفر باشد:

$$2a-4=0 \Rightarrow a=2 \Rightarrow t_n=(2+1)n-2=3n-2 \Rightarrow t_7=3(7)-2=19$$

۹۸- چهار جملهٔ اول یک الگو به‌صورت $t_1=-1$، $t_2=8$، $t_3=-27$، $t_4=64$ است. جملهٔ هفتم این الگو کدام است؟

۱) ۳۴۳- ۲) ۳۴۳ ۳) ۲۱۶- ۴) ۲۱۶

۹۹- عدد حاصل از مرحلهٔ پنجم الگوی روبه‌رو کدام است؟

$1^3=1^2$

$1^3+2^3=3^2$

$1^3+2^3+3^3=6^2$

۱) ۱۹۶ ۲) ۲۱۶

۳) ۲۲۵ ۴) ۲۵۶

پاسخ‌های تشریحی

۱ **۳** می‌دانیم $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$. پس $\mathbb{W} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ می‌شود و چون $\mathbb{Z}$ زیرمجموعهٔ $\mathbb{W}$ نمی‌باشد، پس $\overbrace{\mathbb{W} \cup \mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{W}$ غلط و گزینهٔ (۳) جواب تست است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۴): $\mathbb{W} \cap \mathbb{Z} \overset{\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}}{=\!=\!=} \mathbb{W} \subseteq \mathbb{W}$ ✓ گزینهٔ (۲): $\mathbb{N} \cap \mathbb{W} = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$ ✓ گزینهٔ (۱): $\mathbb{N} \cup \mathbb{W} \overset{\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}}{=\!=\!=} \mathbb{W} \subseteq \mathbb{W}$ ✓

۲ **۳** حاصل تک‌تک گزینه‌ها را می‌یابیم:

گزینهٔ (۱): $\mathbb{N} - O = \{۱,۲,۳,۴,\cdots\} - \{۱,۳,۵,\cdots\} = \{۲,۴,۶,\cdots\} = E$

گزینهٔ (۲): $O - E = \underbrace{\{۱,۳,۵,\cdots\} - \{۲,۴,۶,\cdots\}}_{\text{این دو هیچ اشتراکی ندارند، پس از مجموعهٔ اول چیزی کم نمی‌شود.}} = \{۱,۳,۵,\cdots\} = O$

گزینهٔ (۳): $E - \mathbb{N} = \{۲,۴,۶,\cdots\} - \{۱,۲,۳,\cdots\} \xrightarrow[\text{وجود ندارد که در } \mathbb{N} \text{ نباشد}]{\text{هیچ عضوی از مجموعهٔ اول}} \varnothing$ ✓

گزینهٔ (۴): $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{۰,۱,۲,۳,\cdots\} - \{۱,۲,۳,\cdots\} = \{۰\}$

۳ **۳** با بررسی گزینه‌ها باید ببینیم به‌ازای کدام گزینه، $B = \varnothing$ می‌شود:

گزینهٔ (۱): $A = \mathbb{W} - \mathbb{N} = \{۰,\cancel{۱},\cancel{۲},\cancel{۳},\cdots\} - \{\underline{۱},\underline{۲},\underline{۳},\cdots\} = \{۰\}$

پس B به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$B = \{x \mid x^۲ < ۱, x \in \{۰\}\} \xrightarrow[x^۲=۰<۱]{x=۰} B = \{۰\} \neq \varnothing \Rightarrow$ این گزینه جواب نیست.

گزینهٔ (۲): $B = \{x \mid x^۲ < ۱, x \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}\}$

B، تهی نیست، زیرا مثلاً اگر $x = \frac{۱}{۲}$ را درنظر بگیریم، آن‌گاه $(\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴} < ۱$. پس این گزینه هم جواب نیست.

گزینهٔ (۳): $\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{\cdots,-۳,-۲,-۱,\cancel{۰},\cancel{۱},\cancel{۲},\cancel{۳},\cdots\} - \{\underline{۰},\underline{۱},\underline{۲},\underline{۳},\cdots\} = \{\cdots,-۳,-۲,-۱\}$

پس B به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$B = \{x \mid x^۲ < ۱, x \in \{\cdots,-۳,-۲,-۱\}\}$

به‌ازای هیچ xای از مجموعهٔ $\{\cdots,-۳,-۲,-۱\}$، $x^۲ < ۱$ نمی‌شود. پس $B = \varnothing$ و همین گزینه جواب است.

گزینهٔ (۴): $B = \{x \mid x^۲ < ۱, x \in \{\cdots,-۴,-۲,۰,۲,۴,\cdots\}\}$

فقط به‌ازای $x = ۰$ از مجموعهٔ $\{\cdots,-۴,-۲,۰,۲,۴,\cdots\}$، $x^۲ = ۰ < ۱$ می‌شود و لذا $B = \{۰\}$ غیرتهی است.

۴ **۲** ابتدا هر یک از مجموعه‌ها را می‌نویسیم:

$A = \{۱۱,۱۳,۱۵,۱۷,۱۹\}$

$B = \{۱۲,۱۵,۱۸\}$

$\Rightarrow A \cup B = \{۱۱,۱۲,۱۳,۱۵,۱۷,۱۸,۱۹\}$

$A \cup B$، ۷ عضو و A، ۵ عضو دارند. پس $A \cup B$ دو عضو بیشتر از A دارد.

۵ **۴**

> **نکته** مجموعهٔ $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{a}{x} \in \mathbb{N}\right\}$ بیانگر مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد طبیعی a می‌باشد. زیرا فقط x هایی انتخاب می‌شوند که a بر آن‌ها بخش‌پذیر باشد.

$A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{۱۲}{x} \in \mathbb{N}\right\} =$ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۲ $= \{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$

$B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{۱۸}{x} \in \mathbb{N}\right\} =$ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۸ $= \{۱,۲,۳,۶,۹,۱۸\}$

$\Rightarrow A \cap B = \{۱,۲,۳,۶\} \Rightarrow$ ۴ عضو دارد.

در واقع $A \cap B$ بیانگر شمارنده‌های مشترک ۱۲ و ۱۸ می‌باشد.

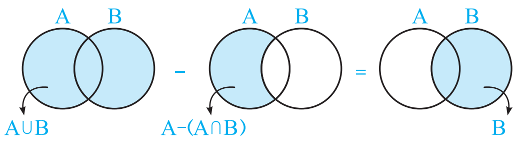
۶ **۳** **راه اول:**

$A \cup B = \{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ و $A \cap B = \{۲,۶\}$

$\Rightarrow (A \cup B) - [A - (A \cap B)] = \{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\} - [\{\cancel{۲},۳,\cancel{۶},۷,۸\} - \{\underline{۲},\underline{۶}\}]$

$= \{۲,\cancel{۳},۴,۵,۶,\cancel{۷},\cancel{۸}\} - \{\underline{۳},\underline{۷},\underline{۸}\} = \{۲,۴,۵,۶\} \Rightarrow$ چهار عضو دارد.

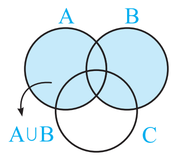
راه دوم: ابتدا مجموعهٔ خواسته‌شده را ساده می‌کنیم:



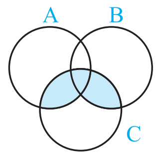
پس عبارت $(A\cup B)-(A-(A\cap B))$ همان مجموعهٔ $B=\{۲,۴,۵,۶\}$ است. لذا ۴ عضو دارد.

۷ | **۴** می‌خواهیم مسأله را طوری حل کنیم که روش حل کلی این نوع تست‌ها را خوب یاد بگیرید.

ببینید، معلوم است که گزینه‌های (۲) و (۳) نمی‌توانند جواب باشند، زیرا در گزینهٔ (۲) به علت وجود $A\cup$، جواب باید شامل کل A باشد، درحالی‌که قسمت سایه‌خورده در شکل فقط بخشی از A را دربرمی‌گیرد. مشابهاً در گزینهٔ (۳) به خاطر وجود $C\cup$ جواب باید همهٔ C را دربر بگیرد که با توجه به شکل چنین اتفاقی نیفتاده است. همچنین در گزینهٔ (۱)، عبارت $A\cap$، یعنی فقط قسمتی از A باید جواب باشد ولی بخشی از ناحیهٔ سایه‌خورده خارج از A قرار دارد و لذا گزینهٔ (۴) جواب است. ببینید:



$\Rightarrow C\cap(A\cup B)=$



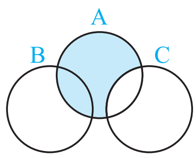
۸ | **۲** **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ (۱):

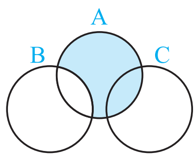
$$A-(B\cap C)\xrightarrow[B\cap C=\varnothing]{\text{با توجه به شکل صورت سؤال}}A-\varnothing=A$$

شکل صورت تست، کل A را نشان نمی‌دهد، پس این گزینه جواب نیست.

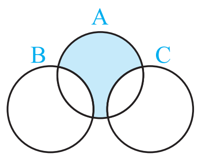
گزینهٔ (۲):



$\cap$



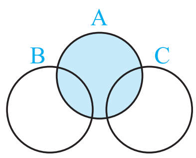
$=$



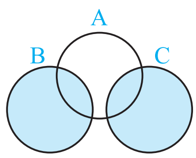
$\Rightarrow$ پس این گزینه جواب است.

$(A-C)$ $(A-B)$ $(A-C)\cap(A-B)$

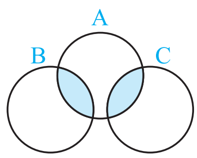
گزینهٔ (۳):



$\cap$



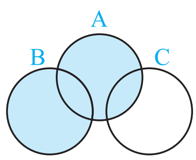
$=$



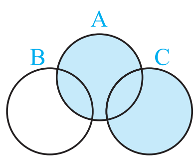
$\Rightarrow$ این گزینه جواب نیست.

A $B\cup C$ $A\cap(B\cup C)$

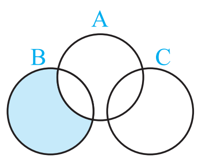
گزینهٔ (۴):



$-$



$=$



$\Rightarrow$ این گزینه جواب نیست.

$(A\cup B)$ $(A\cup C)$ $(A\cup B)-(A\cup C)$

۹ | **۲** ابتدا اعضای مجموعه‌های $A\cup B$ و $A\cup C$ را می‌یابیم:

$$A\cup B=\{۱^۲,۲^۲,۳^۲,۴^۲,۵^۲,۶^۲,۷^۲,۸^۲\}=\{۱,۴,۹,۱۶,۲۵,۳۶,۴۹,۶۴\}\quad(*)$$

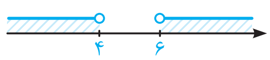
$$A\cup C=\{۱^۳,۲^۳,۳^۳,۴^۳,۵^۳,\cdots\}=\{۱,۸,۲۷,۶۴,۱۲۵,\cdots\}\quad(**)$$

حال برویم سراغ چیزی که تست از ما خواسته است:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

$$\xlongequal{(**),(*)}\{۱,۴,۹,۱۶,۲۵,۳۶,۴۹,۶۴\}\cap\{۱,۸,۲۷,۶۴,۱۲۵,\cdots\}=\{۱,۶۴\}\Rightarrow$$ دو عضو دارد.

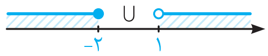
۱۰ | **۲** از آن‌جا که $\mathbb{R}=(-\infty,۴)\cup(۶,+\infty)\cup[۴,۶]$ و اشتراک این دو مجموعه، تهی است، پس $(-\infty,۴)\cup(۶,+\infty)=\mathbb{R}-[۴,۶]$. به عبارتی:

$(-\infty,۴)\cup(۶,+\infty)=$  $=\mathbb{R}-[۴,۶]$

۱۱ **۴**

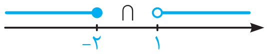
نکته کلمهٔ «و» در مجموعه‌ها معادل اشتراک ($\bigcap$) و کلمهٔ «یا» معادل اجتماع ($\bigcup$) می‌باشد.

در گزینهٔ (۴) داریم:

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \le -۲ \text{ یا } x > ۱\} = (-\infty, -۲] \overset{\text{معادل «یا»}}{\bigcup} (۱, +\infty) =$  $= \mathbb{R} - (-۲, ۱]$

اما در سایر گزینه‌ها داریم:

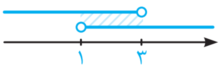
گزینهٔ (۱) : $(-\infty, -۲) \overset{\text{معادل «و»}}{\bigcap} [۱, +\infty) =$  $= \varnothing$

گزینهٔ (۲) : $(-\infty, -۲] \overset{\text{معادل «و»}}{\bigcap} (۱, +\infty) =$  $= \varnothing$

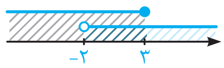
گزینهٔ (۳) : $(-\infty, -۲) \overset{\text{معادل «یا»}}{\bigcup} [۱, +\infty) =$  $= \mathbb{R} - [-۲, ۱)$

سؤال *دانش‌پژوه (نعیمه پولکی):* **ببخشید، میشه بگید چرا اشتراک در گزینه‌های (۱) و (۲)، $\varnothing$ شد؟**

پاسخ: *درود! اشتراک دو بازه یعنی قسمتی که بین هر دو بازه مشترک است. اون دو خط رسم شده هیچ‌وقت با هم از یک جا رد نشدن. مـثلاً اگه جواب $(-\infty, ۳) \bigcap (۱, +\infty)$ را بخواهیم داریم:*

$(۱, +\infty) \bigcap (-\infty, ۳) =$  $= (۱, ۳)$

۱۲ **۲** وقتی کلمهٔ «یا» وجود دارد، یعنی باید اجتماع بگیریم.

$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -۲ \text{ یا } x \le ۳\} = (-۲, +\infty) \bigcup (-\infty, ۳] =$  $= \mathbb{R}$

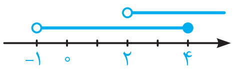
دقت کنید اجتماع برای این $\mathbb{R}$ شد که دو بازه‌ای که اجتماع آن‌ها را می‌خواستیم، کل محور را شامل می‌شوند.

سؤال *دانش‌پژوه (حسن بوربور):* **آقا اجتماع این دو بازه $[-۲, ۳]$ نمیشه؟**

پاسخ: *درود بر هرچی بوربورِ! به‌به! دیگه چی؟ نه نمیشه، اشتراک دو مجموعه رو نخواسته که جواب $[-۲, ۳]$ بشه، بلکه اجتماع اون‌ها رو خواسته.*

۱۳ **۴** **بررسی گزینه‌ها:**

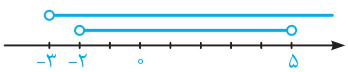
گزینهٔ (۱): این گزینه صحیح است. زیرا:



$(-۱, ۴] \bigcap (۲, +\infty) = (۲, ۴] \Rightarrow \sqrt{۳} \cong ۱/۷ \notin (۲, ۴]$

گزینهٔ (۲): اعداد $\frac{۵b}{۲} = ۲/۵b$ و $۲b$ هر دو عضو بازهٔ $[b, ۳b]$ هستند، پس $\left\{\frac{۵b}{۲}, ۲b\right\}$ زیرمجموعهٔ $[b, ۳b]$ بوده و این گزینه صحیح است.

گزینهٔ (۳): این گزینه صحیح است. زیرا:



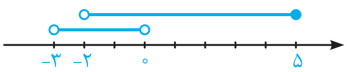
$(-۲, ۵) \bigcup (-۳, +\infty) = (-۳, +\infty) \Rightarrow ۶/۰۲۲ \times ۱۰^{۲۳} \in (-۳, +\infty)$

در حقیقت $۶/۰۲۲ \times ۱۰^{۲۳}$ عددی خیلی بزرگ و مثبت است و بازهٔ $(-۳, +\infty)$ شامل همهٔ اعداد حقیقی مثبت است.

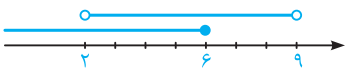
گزینهٔ (۴): نادرست است. زیرا بازهٔ $[-۱, ۲]$ شامل عدد -۱ است که این عدد در بازهٔ $(-۱, ۲]$ حضور ندارد. پس بازهٔ $[-۱, ۲]$ نمی‌تواند زیرمجموعهٔ $(-۱, ۲]$ باشد.

۱۴ **۳** **بررسی گزینه‌ها:**

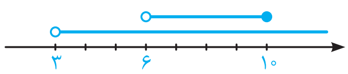
گزینهٔ (۱): $(-۳, ۰) \bigcup (-۲, ۵] = (-۳, ۵]$



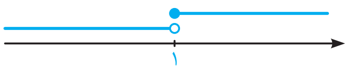
گزینهٔ (۲): $(-\infty, ۶] \bigcap (۲, ۹) = (۲, ۶]$



گزینهٔ (۳): $(۳, +\infty) \bigcup (۶, ۱۰] = (۳, +\infty)$ ✓



گزینهٔ (۴): $(-\infty, ۱) \bigcap [۱, +\infty) = \varnothing$



۱۵ **۳**

نکته مجموعهٔ $(x,y)\cup\{z\}$ در صورتی بازهٔ نیم‌باز است که z با یکی از x یا y برابر باشد. یعنی:

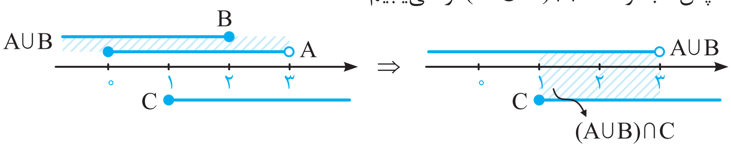
$$(x,y)\cup\{z\}=\begin{cases}z=x:(x,y)\cup\{x\}=[x,y)\\ \text{یا}\\ z=y:(x,y)\cup\{y\}=(x,y]\end{cases}$$

با توجه به نکتهٔ بیان شده داریم:

$$(a-۲,۲a+۱)\cup\{۳a\}\Rightarrow\begin{cases}\text{حالت (۱)}: a-۲=۳a\Rightarrow a=-۱ \xrightarrow[\text{در مجموعه}]{\text{جایگذاری}} (-۳,-۱)\cup\{-۳\}=[-۳,-۱)\\ \text{حالت (۲)}: ۲a+۱=۳a\Rightarrow a=۱ \xrightarrow[\text{در مجموعه}]{\text{جایگذاری}} (-۱,۳)\cup\{۳\}=(-۱,۳]\end{cases}$$

پس a می‌تواند ۱ یا ۱- باشد که مجموع مقادیر ممکن a برابر $-۱+۱=۰$ است.

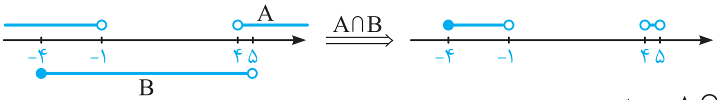
۱۶ **۳** مجموعه‌های A ، B و C را روی محور نمایش داده و سپس مجموعهٔ $(A\cup B)\cap C$ را می‌یابیم:



$$\Rightarrow (A\cup B)\cap C=[۱,۳)$$

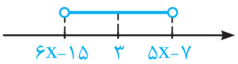
بازهٔ حاصل شامل دو عدد صحیح ۱ و ۲ است.

۱۷ **۳** ابتدا مجموعه‌های $A=(-\infty,-۱)\cup(۴,+\infty)$ و $B=(-\infty,۵)\cap[-۴,+\infty)=[-۴,۵)$ را روی محور رسم می‌کنیم و سپس به کمک نمودار، اشتراک A و B را می‌یابیم:



با توجه به گزینه‌ها فقط بازهٔ $[-۴,-۲)$ زیرمجموعهٔ $A\cap B$ می‌باشد.

۱۸ **۱** از شکل مقابل نتیجه می‌گیریم که $۶x-۱۵<۳<۵x-۷$ زیرا $۳\in(۶x-۱۵,۵x-۷)$ است. پس داریم:



$$\begin{cases}۶x-۱۵<۳\Rightarrow ۶x<۱۸\Rightarrow x<۳\\ ۳<۵x-۷\Rightarrow ۱۰<۵x\Rightarrow ۲<x\end{cases}\xRightarrow{\cap} ۲<x<۳$$

۱۹ **۴** با توجه به شکل، نتیجه می‌گیریم که $B\subseteq A$ بوده و لذا داریم:

$$\begin{cases}۳a+۷<۴\Rightarrow ۳a<-۳\Rightarrow a<-۱\\ -۳<a-۱\Rightarrow -۲<a\end{cases}\xRightarrow{\text{اشتراک}} -۲<a<-۱$$

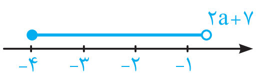
سؤال *دانش‌پژوه (اکبر پغر)*: **آقا اجازه نباید شرط $a-۱<۳a+۷$ را هم چک کنیم؟**

پاسخ: آفرین البته من توی ذهنم اونو هم چک کردم ولی خب ببین:

$$a-۱<۳a+۷\Rightarrow -۸<۲a\Rightarrow -۴<a$$

که جواب به دست آمده در این شرط صدق می‌کند.

۲۰ **۱** $۲a+۷$ حتماً باید از ۱- بزرگ‌تر باشد تا بازهٔ $[-۴,۲a+۷)$ حداقل شامل چهار عدد صحیح ۴- ، ۳- ، ۲- و ۱- شود.



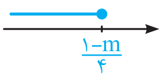
اما طبق فرض سؤال، بازهٔ $[-۴,۲a+۷)$ دقیقاً باید شامل چهار عدد صحیح باشد و نه بیشتر! پس $۲a+۷$ حداکثر می‌تواند صفر باشد. زیرا در این صورت بازه به صورت $[-۴,۰)$ درمیاید که مجدداً شامل همان چهار عدد صحیح ۴- ، ۳- ، ۲- و ۱- می‌شود. پس داریم:

$$-۱<۲a+۷\le ۰\xRightarrow{-۷} -۸<۲a\le -۷\Rightarrow -۴<a\le -\frac{۷}{۲}\Rightarrow -۴<a\le -۳/۵$$

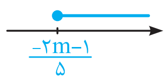
۲۱ **۳** ابتدا مجموعه‌های A و B را می‌یابیم:

$$A=\left\{x\,|\,۲x+m\le\frac{m+۱}{۲}\right\}:۲x+m\le\frac{m+۱}{۲}\Rightarrow ۲x\le\frac{m+۱}{۲}-m\Rightarrow ۲x\le\frac{m+۱-۲m}{۲}$$

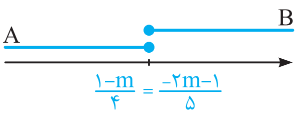
$$\Rightarrow ۲x\le\frac{۱-m}{۲}\Rightarrow x\le\frac{۱-m}{۴}$$



$$B=\{x\,|\,m-۵x\le ۳m+۱\}:m-۵x\le ۳m+۱\Rightarrow m-۳m-۱\le ۵x\Rightarrow\frac{-۲m-۱}{۵}\le x$$

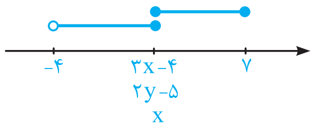


برای آن‌که $A\cap B$ فقط یک عضو داشته باشد، به ناچار باید داشته باشیم:



$$\frac{۱-m}{۴}=\frac{-۲m-۱}{۵}\Rightarrow ۵-۵m=-۸m-۴\Rightarrow ۳m=-۹\Rightarrow m=-۳$$

۲۲ **۱** از تساوی $(-۴,۳x-۴]\cap[۲y-۵,۷]=\{x\}$ متوجه می‌شویم که موقعیت نسبی مجموعه‌ها باید به صورت زیر باشد:

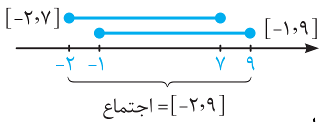


$$\Rightarrow ۳x-۴=۲y-۵=x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(۱):۳x-۴=x\Rightarrow ۲x=۴\Rightarrow x=۲\ (*)\\ (۲):۳x-۴=۲y-۵\overset{(*)}{\Longrightarrow}۳(۲)-۴=۲y-۵\Rightarrow ۲=۲y-۵\Rightarrow ۲y=۷\Rightarrow y=\frac{۷}{۲}\end{cases}$$

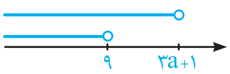
بنابراین: $۲y+x=۲(\frac{۷}{۲})+۲=۹$

۲۳ **۳** طبق فرض $[-۱,b]\cup[a,۷]=[-۲,۹]$ شده است. پس b باید برابر ۹ و a باید برابر ۲- باشد، علت آن را روی محور بیان می‌کنیم:



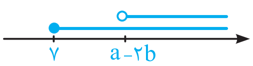
$$\Rightarrow b-a=۹-(-۲)=۱۱$$

۲۴ **۲** اجتماع دو بازهٔ $(a-۲b,۹)$ و $[۷,۳a+۱)$ برابر $[۷,۱۶)$ شده است. پس حتماً $۳a+۱$ برابر ۱۶ بوده و داریم:



$$۳a+۱=۱۶\Rightarrow ۳a=۱۵\Rightarrow a=۵$$

از طرفی چون ابتدای بازهٔ اجتماع عدد ۷ بوده، نتیجه می‌گیریم $۷\le a-۲b$ بوده. همچنین انتهای بازه همیشه بزرگ‌تر از ابتدای بازه است، پس در بازهٔ $(a-۲b,۹)$ نتیجه می‌گیریم $a-۲b<۹$. بنابراین:

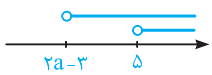


$$۷\le a-۲b<۹\overset{a=۵}{\Longrightarrow}۷\le ۵-۲b<۹\overset{-۵}{\Longrightarrow}۲\le -۲b<۴\overset{\div(-۲)}{\Longrightarrow}-۱\ge b>-۲\overset{b\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow}b=-۱$$

پس $a-b=۶$.

۲۵ **۲** اجتماع دو بازهٔ $(۵,۶)$ و $[۲a-۳,-۲a+۳]$ برابر بازهٔ $(۵a,b)$ است که شروع بازهٔ آن $۵a$ می‌باشد. سه حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت (۱): $۲a-۳<۵$ باشد:



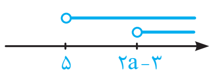
$$\xrightarrow[\text{عدد کوچک‌تر است}]{\text{در اجتماع : شروع بازه}}۵a=۲a-۳\Rightarrow ۳a=-۳\Rightarrow a=-۱$$

در این حالت اجتماع بازه‌ها به صورت $(-۵,b)\overset{a=-۱}{=}(۵a,b)$ در می‌آید و داریم:

$$(۲a-۳,-۲a+۳]\cup(۵,۶)\overset{a=-۱}{=}(-۵,۵]\cup(۵,۶)=(-۵,۶)=(-۵,b)\Rightarrow b=۶\Rightarrow a+b=-۱+۶=۵$$

حالت (۲): $۲a-۳=۵$. در این حالت با حل معادلهٔ $۲a-۳=۵$ به $a=۴$ می‌رسیم که به ازای آن بازهٔ $[۲a-۳,-۲a+۳]$ به صورت $[۵,-۵)$ درمی‌آید که چون ابتدای بازه بزرگ‌تر از انتهای آن شده! پس این حالت غلط است.

حالت (۳): $۲a-۳>۵$ باشد:



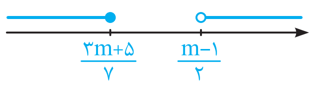
$$\xrightarrow[\text{عدد کوچک‌تر است}]{\text{در اجتماع : شروع بازه}}۵a=۵\Rightarrow a=۱$$

با جایگذاری $a=۱$ داریم:

$$(۲a-۳,-۲a+۳]\cup(۵,۶)\overset{a=۱}{=}(-۱,۱]\cup(۵,۶)$$

در این حالت اجتماع دو بازهٔ فوق را نمی‌توان به صورت یک بازه $(۵a,۶)$ نمایش داد. پس این حالت غلط است.

۲۶ **۴** ابتدا دو مجموعهٔ $(\frac{m-۱}{۲},+\infty)$ و $(-\infty,\frac{۳m+۵}{۷}]$ را روی محور رسم می‌کنیم:

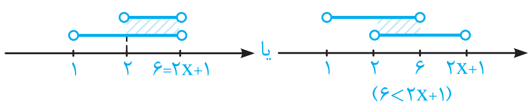


با توجه به شکل، اگر قرار باشد اجتماع این دو مجموعه، $\mathbb{R}$ (مجموعهٔ اعداد حقیقی) شود، باید داشته باشیم:

$$\frac{۳m+۵}{۷}\ge\frac{m-۱}{۲}\Rightarrow ۲(۳m+۵)\ge ۷(m-۱)\Rightarrow ۶m+۱۰\ge ۷m-۷\Rightarrow ۱۷\ge m$$

۲۷ **۲** با توجه به بازه‌های $(۱,۶)$ و $(۲,۲x+۱)$، می‌توان دو حالت زیر را به بررسی کرد:

حالت (۱): اگر $۶\le ۲x+۱$ باشد:



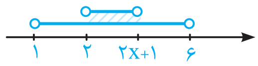
$$\overset{\cap}{\Longrightarrow}\underbrace{(۲,۶)\overset{\text{طبق فرض}}{=\!=\!=}(۲,۴x-۳)}_{=}\Rightarrow ۶=۴x-۳\Rightarrow ۴x=۹\Rightarrow x=\frac{۹}{۴}$$

حال چک کنیم به ازای $x=\frac{۹}{۴}$ جواب درست درمی‌آید یا خیر:

$$(۱,۶)\cap(۲,۲x+۱)=(۲,۴x-۳)\overset{x=\frac{۹}{۴}}{\Longrightarrow}(۱,۶)\cap\left(۲,۲(\tfrac{۹}{۴})+۱\right)\overset{?}{=}\left(۲,۴(\tfrac{۹}{۴})-۳\right)\Rightarrow\underbrace{(۱,۶)\cap(۲,۵/۵)}_{(۲,۵/۵)}=(۲,۶)$$ غلطه!

حالت (۲): اگر $۶ > ۲x+۱$ باشد:

$$\xRightarrow{\bigcap} (۲,۲x+۱) \xlongequal{\text{طبق فرض}} (۲,۴x-۳) \Rightarrow ۲x+۱=۴x-۳ \Rightarrow ۲x=۴ \Rightarrow x=۲$$



به ازای $x=۲$ درستی جواب را بررسی کنیم:

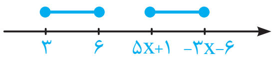
$$(۱,۶)\bigcap(۲,۲x+۱) \overset{?}{=} (۲,۴x-۳) \xRightarrow{x=۲} (۱,۶)\bigcap(۲,۵)=(۲,۵) \checkmark$$

$$x^۲+۵x \xlongequal{x=۲} ۲^۲+۵(۲)=۴+۱۰=۱۴$$

۲۸ | ۲ با توجه به تساوی $[۳,۶]\bigcap[۵x+۱,-۳x-۶]=\varnothing$ باید یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

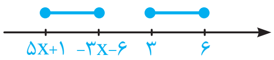
حالت (۱):

$$۶<۵x+۱ \Rightarrow ۵<۵x \Rightarrow x>۱$$



حالت (۲):

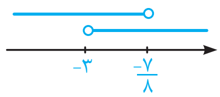
$$-۳x-۶<۳ \Rightarrow -۳x<۹ \Rightarrow x>-۳$$



از طرفی می‌دانیم عدد انتهای بازه بزرگ‌تر از عدد ابتدای بازه است. پس در بازهٔ $[۵x+۱,-۳x-۶]$ باید داشته باشیم:

$$۵x+۱<-۳x-۶ \Rightarrow ۸x<-۷ \Rightarrow x<-\frac{۷}{۸}$$

با توجه به شرط فوق حالت (۱) نمی‌تواند رخ دهد، چون جواب آن هیچ اشتراکی با این شرط ندارد. بنابراین جواب نهایی اشتراک جواب حالت (۲) با شرط فوق است.



$$x\in\left(-۳,-\frac{۷}{۸}\right) \xRightarrow{x\in\mathbb{Z}} -۲,-۱$$

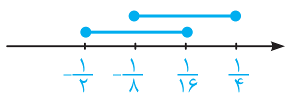
۲۹ | ۱ ابتدا $A_۲$ و $A_۳$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} A_۲=\{x\,|\,x\in\mathbb{R},۰<x-۱<۲^۲\}=\{x\,|\,x\in\mathbb{R},۱<x<۵\}\\ A_۳=\{x\,|\,x\in\mathbb{R},۰<x-۱<۲^۳\}=\{x\,|\,x\in\mathbb{R},۱<x<۹\}\end{array}\right\}\Rightarrow A_۲\bigcap A_۳=\{x\,|\,x\in\mathbb{R},۱<x<۵\}=(۱,۵)$$

۳۰ | ۳ با توجه به مجموعهٔ $A_n=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m\ge -n,۲^m\le n\}$، دو مجموعهٔ $A_۳$ و $A_۴$ را می‌یابیم:

$$\left\{\begin{array}{l} n=۳: A_۳=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m\ge -۳,۲^m\le ۳\}\Rightarrow A_۳=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱\}\\ n=۴: A_۴=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m\ge -۴,۲^m\le ۴\}\Rightarrow A_۴=\{-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}\end{array}\right. \Rightarrow A_۳\bigcap A_۴=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱\}\Rightarrow \text{۵ عضو}$$

۳۱ | ۳ طبق فرض $-۱<a<۰$ است. برای راحتی کار عددی در این بازه مانند $a=-\frac{۱}{۲}$ در نظر گرفته و در عبارت داده شده قرار می‌دهیم تا محاسبه راحت‌تر باشد:

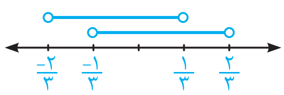


$$[a,a^۴]-[a^۳,a^۲] \xlongequal{a=-\frac{۱}{۲}} \left[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۱۶}\right]-\left[-\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۴}\right] \xlongequal[\text{به شکل}]{\text{با توجه}} \left[-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۸}\right)$$

پس چون $a=-\frac{۱}{۲}$ و $a^۳=-\frac{۱}{۸}$ بود، جواب تست $[a,a^۳)$ می‌شود.

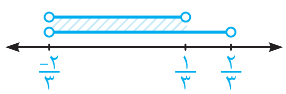
۳۲ | ۴ با توجه به تعریف A_n داریم:

$$\left.\begin{array}{l} A_۳=\left(-\frac{۲}{۳},\frac{۳-۲}{۳}\right)=\left(-\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳}\right)\\ A_۶=\left(-\frac{۲}{۶},\frac{۶-۲}{۶}\right)=\left(-\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow A_۳\bigcup A_۶=$$



$$=\left(-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}\right)$$

$$(A_۳\bigcup A_۶)-A_۳=\left(-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}\right)-\left(-\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳}\right)=$$



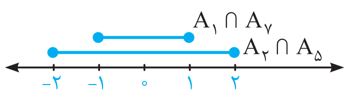
$$=\left[\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳}\right)$$

۳۳ | ۱ ابتدا مجموعه‌های موردنظر را تشکیل می‌دهیم:

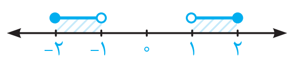
$$A_۱=\left[-۱,\frac{۹-۱}{۲}\right]=[-۱,۴] \text{ و } A_۲=\left[-۲,\frac{۹-۲}{۲}\right]=[-۲,۳/۵]$$

$$A_۵=\left[-۵,\frac{۹-۵}{۲}\right]=[-۵,۲] \text{ و } A_۷=\left[-۷,\frac{۹-۷}{۲}\right]=[-۷,۱]$$

$$\left\{\begin{array}{l} A_۲\bigcap A_۵=[-۲,۳/۵]\bigcap[-۵,۲]=[-۲,۲]\\ A_۱\bigcap A_۷=[-۱,۴]\bigcap[-۷,۱]=[-۱,۱]\end{array}\right. \Rightarrow$$



$$\Rightarrow (A_۲\bigcap A_۵)-(A_۱\bigcap A_۷)=$$

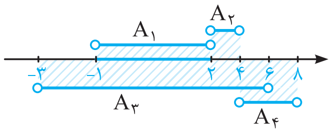


$$=[-۲,-۱)\bigcup(۱,۲]$$

۳۴ | ۳

> **نکته** اگر a و b دو عدد صحیح باشند که $a<b$، آن‌گاه در بازهٔ (a,b)، $b-a-۱$ عدد صحیح، در بازهٔ $[a,b)$ یا $(a,b]$، $b-a$ عدد صحیح و در بازهٔ $[a,b]$، $b-a+۱$ عدد صحیح وجود دارد.

$A_۱=\left((-۱)^۱\times ۱,۲(۱)\right)=(-۱,۲), A_۲=\left((-۱)^۲\times ۲,۲(۲)\right)=(۲,۴), A_۳=\left((-۱)^۳\times ۳,۲(۳)\right)=(-۳,۶), A_۴=\left((-۱)^۴\times ۴,۲(۴)\right)=(۴,۸)$

$A_۱\cup A_۲\cup A_۳\cup A_۴=$  $=(-۳,۸)$

که در این بازه $۸-(-۳)-۱=۱۱-۱=۱۰$ عدد صحیح وجود دارد.

۳۵ | ۴ **بررسی گزینه‌ها:**

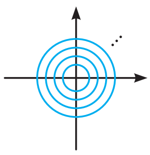
گزینهٔ (۱): مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی به‌صورت $\{۲,۳,۵,۷\}$ است که متناهی است.

گزینهٔ (۲): مجموعهٔ دانش‌آموزان مدرسهٔ شما هم دقیقاً تعداد مشخصی دارد و لذا متناهی است.

گزینهٔ (۳): تعداد مولکول‌های موجود در یک مول آب، $۶/۰۲۲\times ۱۰^{۲۳}$ عدد است که با این‌که عدد خیلی بزرگی می‌باشد ولی قابل شمارش بوده و لذا مجموعهٔ موردنظر متناهی است.

سؤال دانش‌پژوه *(اصغر بالازاده)*: **آقا! آخه تو اینجا هم باید شیمی بلد باشیم! اگه ما این عدد را نمی‌دونستیم چی‌کار کنیم؟**

پاسخ: درود بر این درس فوندنت! بیچاره معلم شیمی‌ات. تو در همین حد بدون که تعداد مولکول‌ها همیشه چه توی آب چه توی هرجایی متناهیه. خوب شد!



گزینهٔ (۴): تعداد دایره‌هایی که می‌توان به مرکز مبدأ مختصات رسم کرد نامتناهی است. پس همین گزینه جواب تست است.

۳۶ | ۴ **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ (۱): اگر $B=\mathbb{Q}$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ A، تمام اعداد گویای موجود در بازهٔ $(۰,۲)$ است که نامتناهی است.

گزینهٔ (۲): اگر $B=\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ A، تمام اعداد حقیقی موجود در بازهٔ $(۰,۲)$ است که نامتناهی است.

گزینهٔ (۳): اگر $B=\mathbb{Q}'$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ A، تمام اعداد گنگ موجود در بازهٔ $(۰,۲)$ است که نامتناهی است.

گزینهٔ (۴): اگر $B=\mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ A به‌صورت $\{۱\}$ درمی‌آید که متناهی است و همین گزینه جواب تست است.

۳۷ | ۳ **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ (۱): هر بازه‌ای که ابتدا و انتهایش یکسان نباشند بیانگر مجموعه‌ای نامتناهی است. اگر از این مجموعه یک یا حتی چند عدد برداریم باز هم نامتناهی باقی می‌ماند. پس گزینهٔ (۱) بیانگر مجموعه‌ای نامتناهی است.

گزینهٔ (۲): اعداد صحیح مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۲۰۰۰ به‌صورت مقابل هستند: $\{\cdots,۱۹۹۲,۱۹۹۵,۱۹۹۸\}$

همان‌طور که می‌بینید تا منفیِ بی‌نهایت این مضارب ادامه دارند، پس این مجموعه نیز نامتناهی است.

گزینهٔ (۳): اعداد کسری با مخرج یک که صورتشان اعداد طبیعی باشند، همان اعداد طبیعی هستند (مخرج ۱ عملاً بی‌تأثیر است) پس این گزینه بیانگر اعداد طبیعی کم‌تر از ۵۰۰ می‌باشد که مجموعه‌ای متناهی است.

گزینهٔ (۴): طبق آموخته‌های سال نهم و با توجه به تعریف مجموعه، جنگل‌های زیبای جهان نمی‌تواند بیانگر یک مجموعه باشد و لذا این گزینه اصلاً مجموعه نیست که بخواهد مجموعه‌ای متناهی یا نامتناهی باشد.

سؤال دانش‌پژوه *(اکبر شمس‌الریاضیات)*: **آقا به نظر من، شما با طبیعت رابطهٔ خوبی ندارید! آخه چرا جنگل مجموعه نیست؟!**

پاسخ: درود بر تو و علاقه‌ات به طبیعت! بچه! مشکل از جنگل نیست، مشکل اینه که عباراتی که دارای صفت هستن معمولاً مجموعه نیستن مثل افراد بلندقد و یا چاق یا همین جنگل‌های زیبا. چون‌که این صفت‌ها معمولاً ازنظر افراد مختلف فرق می‌کنه. مثلاً ممکنه من جنگلی رو زیبا بدونم ولی شما ندونین و چون طبق تعریف کتاب سال قبل، مجموعه‌ها باید بیانگر اشیای کاملاً مشخص باشن، پس این عبارت بیانگر یک مجموعه نیست.

۳۸ | ۳ **بررسی گزینه‌ها:**

۱) بی‌شمار خط گذرنده از یک نقطه می‌توان رسم کرد. پس این گزینه نامتناهی است.

۲) تمام اعداد فرد صحیح منفی جزء مجموعهٔ فوق محسوب می‌شوند. پس این مجموعه نیز نامتناهی است.

۳) این مجموعه را می‌توان به صورت $\left\{\frac{۱}{۱},\frac{۱}{۲},\cdots,\frac{۱}{۹۹}\right\}$ نشان داد. پس این مجموعه متناهی است.

۴) می‌دانیم $\mathbb{Z}-\mathbb{W}=\{\dots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\dots\}-\{۰,۱,۲,\dots\}=\{\dots,-۲,-۱\}$. پس این مجموعه نیز نامتناهی است.

۳۹ **۲** بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با توجه به بازهٔ باز $(۱۰,۷)$ باید کوچک‌ترین عضو پس از ۱ را بیابیم. اما هیچ عدد حقیقی‌ای بزرگ‌تر از عدد ۱ را نمی‌توان در این بازه یافت که بتوان ادعا کرد کوچک‌ترین عضو این بازه است. پس این بازه کوچک‌ترین عضو ندارد.

> **نکته** بازه‌های باز، کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو ندارند.

گزینهٔ (۲): برای اعداد بزرگ‌تر یا مساوی ۷، ۷ کوچک‌ترین عضو به حساب می‌آید و لذا این گزینه جواب تست است.

گزینهٔ (۳): این مجموعه بزرگ‌ترین عضو دارد (عدد ۳ بزرگ‌ترین عضو آن است)، ولی کوچک‌ترین عضو ندارد.

۴۰ **۴** مجموعهٔ A متناهی و مجموعهٔ B نامتناهی است، زیرا:

$$A=\{۱,۲,۳\}$$

$$B=\{\cdots,-۱,۰,۱,۲,۳\}$$

حال با توجه به جدول درسنامه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $\underset{\text{متناهی}}{A}\cap\underset{\text{نامتناهی}}{B}$: متناهی

گزینهٔ (۲): $\underset{\text{متناهی}}{A}-\underset{\text{نامتناهی}}{B}$: متناهی

گزینهٔ (۳): $B-(A\cup B)\xlongequal{B\subseteq A\cup B}\varnothing$: متناهی

گزینهٔ (۴): $\underset{\text{متناهی}}{A}\cup\underset{\text{نامتناهی}}{B}$: نامتناهی

پس گزینهٔ (۴) جواب تست است.

۴۱ **۳** ابتدا اعضای مجموعه‌های A و B را به‌صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$A=\{۳,۶,۹,\cdots\}\Rightarrow$ نامتناهی

$B=\{-۹۹,-۹۸,\cdots,۹۸,۹۹\}\Rightarrow$ متناهی

حال به کمک آموخته‌هایمان از جدول درسنامه، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $\underset{\text{نامتناهی}}{A}-\underset{\text{متناهی}}{B}\Rightarrow$ نامتناهی

گزینهٔ (۲): $\mathbb{Z}-A=\{\cdots,۰,۱,۲,۴,۵,۷,۸,\cdots\}\Rightarrow$ نامتناهی

گزینهٔ (۳): $\underset{\text{نامتناهی}}{A}\cap\underset{\text{متناهی}}{B}\Rightarrow$ متناهی

گزینهٔ (۴): $\underset{\text{نامتناهی}}{A}\cup\underset{\text{متناهی}}{B}\Rightarrow$ نامتناهی

پس گزینهٔ (۳) جواب تست است.

۴۲ **۳** ابتدا مجموعه‌های A و B را با نوشتن اعضا مشخص می‌کنیم:

$$A=\left\{\frac{۱}{x}\,|\,x\in\mathbb{N}\right\}\xRightarrow{x=۱,۲,۳,\ldots}A=\left\{\frac{۱}{۱},\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\ldots,\frac{۱}{n},\ldots\right\}$$

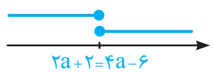
$$B=\left\{\frac{x}{۸}\,|\,x\in\mathbb{N}\right\}\xRightarrow{x=۱,۲,۳,\ldots}B=\left\{\frac{۱}{۸},\underbrace{\frac{۲}{۸}}_{\frac{۱}{۴}},\frac{۳}{۸},\underbrace{\frac{۴}{۸}}_{\frac{۱}{۲}},\frac{۵}{۸},\frac{۶}{۸},\frac{۷}{۸},\underbrace{\frac{۸}{۸}}_{۱},\frac{۹}{۸},\ldots\right\}$$

با توجه به مجموعه‌های A و B مشخص است که A و B هر دو نامتناهی‌اند. بنابراین $A\cup B$ نیز قطعاً نامتناهی است و از بین گزینه‌ها حذف می‌شود، داریم:

$A\cap B=\left\{\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},۱\right\}\Rightarrow$ $A\cap B$ متناهی است.

دقت کنید از $\frac{۹}{۸}$ به بعد دیگر هیچ‌گاه صورت کسرهای مجموعهٔ B، عدد ۱ نخواهد شد، لذا اشتراک A و B همان چهار عدد ۱، $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۸}$ است.

۴۳ **۴** اشتراک دو بازهٔ $(-\infty,۴a-۶]$ و $[۲a+۲,+\infty)$ تنها در دو حالت زیر متناهی می‌شود:



(۲) حالت: $A\cap B=\{۲a+۲\}\overset{\text{یا}}{=}\{۴a-۶\}$

شرط: $۲a+۲=۴a-۶\Rightarrow ۲a=۸\Rightarrow a=۴$

(۱) حالت: $A\cap B=\varnothing$

شرط: $۴a-۶<۲a+۲\Rightarrow ۲a<۸\Rightarrow a<۴$

پس مجموعه جواب موردنظر برای a به صورت $a\leq ۴$ است.

۴۴ ۲ ابتدا اعضای مجموعه‌های A و B را مشخص می‌کنیم:

$A=\{۱,۳,۵,۷,۹,\cdots\}\ ,\ B=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,\cdots\}$

حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $A-B=\{۱,۳,۵,۷,۹,\cdots\}-\{۲,۳,۵,۷,۱۱,\cdots\}=\{\text{اعداد فرد غیر اول}\}=\{۱,۹,۱۵,\cdots\}\Rightarrow$ نامتناهی

گزینهٔ (۲): $B-A=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,\cdots\}-\{۱,۳,۵,۷,۹,\cdots\}=\{۲\}\Rightarrow$ متناهی و غیرتهی

گزینهٔ (۳): $A\cap B=\{۳,۵,۷,۱۱,\cdots\}=\{\text{اعداد اول به غیر از ۲}\}\Rightarrow$ نامتناهی

گزینهٔ (۴): $A-(A\cup B)\xrightarrow{A\subseteq(A\cup B)}\varnothing$

پس گزینهٔ (۲) جواب تست است.

۴۵ ۲ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $\overset{\text{نامتناهی}}{B}-\overset{\text{متناهی}}{A}=$ قطعاً نامتناهی

گزینهٔ (۲): $\overset{\text{متناهی}}{A}-\underbrace{(\overset{\text{متناهی}}{A}\cup\overset{\text{نامتناهی}}{B})}_{\text{نامتناهی}}=$ قطعاً متناهی ✓

گزینهٔ (۳): $\overset{\text{نامتناهی}}{B}-\underbrace{(\overset{\text{متناهی}}{A}\cap\overset{\text{نامتناهی}}{B})}_{\text{متناهی}}=$ قطعاً نامتناهی

گزینهٔ (۴): مجموعهٔ $(A\cup B)\cap B$ همان مجموعهٔ B است که طبق فرض نامتناهی است.

۴۶ ۲ چون مجموعهٔ $\mathbb{N}-B$، متناهی است، نتیجه می‌گیریم که B قطعاً نامتناهی است و چون $\mathbb{N}-B$ ناتهی است می‌فهمیم که $B\neq\mathbb{N}$. حواستان باشد B می‌تواند زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$ باشد یا نباشد! مثلاً اگر $B=\{۴,۵,۶,\ldots\}$ باشد $B\subseteq\mathbb{N}$ و اگر مثلاً $B=\mathbb{Z}-\{۱,۲,۳,۴\}$ باشد که $B\not\subseteq\mathbb{N}$. حال گزینه‌ها را بررسی کنیم:

گزینهٔ (۱): مجموعهٔ $B-\mathbb{Z}$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. به عنوان مثال اگر $B=\{۳,۴,۵,\ldots\}$ باشد آن‌گاه $B-\mathbb{Z}$ برابر $\varnothing$ شده که متناهی است ولی اگر B را به صورت $B=\mathbb{Q}-\{۱,۲\}$ فرض کنیم ($\mathbb{Q}$: اعداد گویا) در این صورت $B-\mathbb{Z}$ نامتناهی است!

گزینهٔ (۲): چون $\mathbb{N}-B$ متناهی است، پس حتماً B شامل بیشمار عدد طبیعی است که وقتی آن را از $\mathbb{N}$ کسر می‌کنیم، فقط تعداد محدودی عدد در $\mathbb{N}$ باقی می‌ماند. از طرفی چون در $\mathbb{Z}$ تمام اعداد $\mathbb{N}$ حضور دارند پس $B\cap\mathbb{Z}$ شامل بیشمار عدد طبیعی بوده و لذا قطعاً نامتناهی است.

گزینهٔ (۳): $B-\mathbb{N}$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. مثلاً اگر $B=\{۳,۴,\ldots\}$ فرض شود، $B-\mathbb{N}$ برابر $\varnothing$ شده و متناهی است ولی اگر $B=\mathbb{Q}-\{۱,۲,۳\}$ باشد، $B-\mathbb{N}$ نامتناهی است!

گزینهٔ (۴): طبق فرض $\mathbb{N}-B$، متناهی است. از طرفی می‌دانیم اشتراک یک مجموعهٔ متناهی با یک مجموعهٔ نامتناهی، قطعاً متناهی است. پس $(\mathbb{N}-B)\cap\mathbb{Z}$ قطعاً متناهی است.

۴۷ ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): A و B نامتناهی هستند و داریم:

$A\cup B=\{۲,۴,۶,۸,\cdots\}\cup\{۲,۳,۵,۷,۱۱,\cdots\}=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷,\cdots\}$

این مجموعه برابر $\mathbb{N}$ نیست. زیرا مثلاً $۱\notin A\cup B$.

گزینهٔ (۲): A مجموعه‌ای متناهی است، پس این گزینه نمی‌تواند جواب باشد.

گزینهٔ (۳): اعداد طبیعی مضرب ۲ و ۳ همان اعداد طبیعی مضرب ۶ هستند.

$A=\{۶،۱۲،۱۸،\cdots\}$ و $B=\{۱،۲،۳،۴،۵،۷،۸،\cdots\}\Rightarrow$ A و B نامتناهی، $A\cup B=\mathbb{N}$

گزینهٔ (۴): A مجموعه‌ای متناهی است، پس این گزینه نمی‌تواند جواب باشد.

۴۸ ۲ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اگر A متناهی باشد، لزوماً هر زیرمجموعهٔ آن هم قطعاً متناهی خواهد بود. پس این گزینه درست است.

گزینهٔ (۲): اگر A نامتناهی باشد، آن‌گاه B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. مثلاً اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد، B می‌تواند مجموعهٔ متناهی $B=\{۱\}$ یا مجموعهٔ نامتناهی $B=\{x\mid x\in\mathbb{N},x\geq ۳\}$ باشد.

گزینهٔ (۳): واضح است وقتی زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ نامتناهی است، پس خود آن مجموعه هم قطعاً نامتناهی خواهد بود. پس این گزینه درست است.

گزینهٔ (۴): فرض کنید B مجموعهٔ متناهی مانند $\{۱\}$ باشد چون $B\subseteq A$ است، مجموعهٔ A را می‌توان هم به‌صورت متناهی مانند $A=\{۱,۲\}$ در نظر گرفت و هم به‌صورت نامتناهی مانند $A=\mathbb{N}$ در نظر گرفت. پس این گزینه هم درست است.

۴۹ ۲ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اگر A متناهی باشد و B و C دو مجموعهٔ دلخواه باشد:

$$\overset{\text{متناهی}}{A} - \underbrace{(B-C)}_{\text{متناهی یا نامتناهی}} = \text{قطعاً متناهی} \quad \times$$

گزینهٔ (۲): اگر A نامتناهی، B متناهی و C نامتناهی باشد، در این حالت $B-C$ قطعاً متناهی خواهد بود و در نتیجه داریم:

$$\underset{ن}{A} - \underbrace{(\underset{م}{B} - \underset{ن}{C})}_{م} = \text{قطعاً نامتناهی} \quad \checkmark$$

گزینهٔ (۳): اگر A، B و C هر سه نامتناهی باشند. در این صورت $B-C$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد و لذا داریم:

$$\underset{ن}{A} - \underbrace{(\underset{ن}{B} - \underset{ن}{C})}_{\text{ن یا م}} = \begin{cases} \text{اگر } B-C: \text{متناهی} \Rightarrow \underset{ن}{A} - \underbrace{(B-C)}_{م} = \text{قطعاً نامتناهی} \\ \text{اگر } B-C: \text{نامتناهی} \Rightarrow \underset{ن}{A} - \underbrace{(B-C)}_{ن} = \text{متناهی یا نامتناهی} \end{cases} \Rightarrow \text{پس نمی‌توان گفت قطعاً نامتناهی‌است.} \quad \times$$

گزینهٔ (۴): اگر A نامتناهی و B نامتناهی و C متناهی باشد. در این $B-C$ حتماً نامتناهی است و داریم:

$$\underset{ن}{A} - \underbrace{(\underset{ن}{B} - \underset{م}{C})}_{ن} = \text{متناهی یا نامتناهی} \Rightarrow \text{پس نمی‌توان گفت قطعاً نامتناهی‌است.} \quad \times$$

۵۰ ۴ طبق فرض A مجموعه‌ای دلخواه و نامشخص است. یعنی می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد ولی B متناهی و C نامتناهی است. برای راحتی کار کلمهٔ متناهی را با (م) و کلمهٔ نامتناهی را با (ن) نمایش می‌دهیم. حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱):

$$\text{اگر } A \text{ متناهی باشد.} \Rightarrow \overset{م}{B} \cup \underbrace{(\overset{م}{A} \cap \overset{ن}{C})}_{م} = \text{قطعاً متناهی}$$

$$\text{اگر } A \text{ نامتناهی باشد.} \Rightarrow \overset{م}{B} \cup \underbrace{(\overset{ن}{A} \cap \overset{ن}{C})}_{\text{م یا ن}} = \text{متناهی یا نامتناهی}$$

پس این گزینه با توجه به نوع مجموعهٔ A می‌تواند متناهی و یا نامتناهی باشد و غلط است.

گزینهٔ (۲):

$$\text{اگر } A \text{ متناهی باشد.} \Rightarrow \underbrace{(\overset{م}{B} \cap \overset{م}{A})}_{م} \cup \underbrace{(\overset{ن}{C} - \overset{م}{A})}_{ن} = \text{قطعاً نامتناهی}$$

$$\text{اگر } A \text{ نامتناهی باشد.} \Rightarrow \underbrace{(\overset{م}{B} \cap \overset{ن}{A})}_{م} \cup \underbrace{(\overset{ن}{C} - \overset{ن}{A})}_{\text{ن یا م}} = \text{متناهی یا نامتناهی}$$

پس این گزینه هم بستگی به نوع مجموعهٔ A دارد و غلط است.

گزینهٔ (۳):

$$\text{اگر } A \text{ متناهی باشد.} \Rightarrow \overset{م}{A} - \underbrace{(\overset{م}{B} \cap \overset{ن}{C})}_{م} = \text{قطعاً متناهی}$$

$$\text{اگر } A \text{ نامتناهی باشد.} \Rightarrow \overset{ن}{A} - \underbrace{(\overset{م}{B} \cap \overset{ن}{C})}_{م} = \text{قطعاً نامتناهی}$$

پس این گزینه هم غلط است.

گزینهٔ (۴):

$$\text{اگر } A \text{ متناهی باشد.} \Rightarrow \underbrace{(\overset{م}{B} \cap \overset{ن}{C})}_{م} - \underbrace{(\overset{ن}{C} \cup \overset{م}{A})}_{ن} = \text{قطعاً متناهی}$$

$$\Rightarrow \text{قطعاً متناهی} \quad \checkmark$$

$$\text{اگر } A \text{ نامتناهی باشد.} \Rightarrow \underbrace{(\overset{م}{B} \cap \overset{ن}{C})}_{م} - \underbrace{(\overset{ن}{C} \cup \overset{ن}{A})}_{ن} = \text{قطعاً متناهی}$$

۵۱ ۲ با توجه به صورت تست داریم:

$$\left.\begin{array}{l} U = \{۱,۲,۳,۴,\ldots,۸\} \\ ۲\times۱<۷\,,\ ۲\times۲<۷\,,\ ۲\times۳<۷ \Rightarrow A=\{۱,۲,۳\} \end{array}\right\} \Rightarrow A' = U - A = \{۴,۵,۶,۷,۸\} \Rightarrow \text{۵ عضو دارد.}\ A'$$

۵۲ ۳

مجموعهٔ مرجع: $U = \{۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹\}$ ، $A \cup B = \{۱،۲،۳،۴\} \cup \{۲،۴،۶،۸\} = \{۱،۲،۳،۴،۶،۸\}$

مجموعهٔ $(A \cup B)'$ شامل عضوهایی از مجموعهٔ مرجع U است که آن عضوها در مجموعهٔ $A \cup B$ حضور ندارند. پس داریم:

$$(A \cup B)' = \{۵,۷,۹\}$$

از طرفی $C' = \{۳,۴,۵,۶\}$ است. پس مجموعهٔ C برابر می‌شود با:

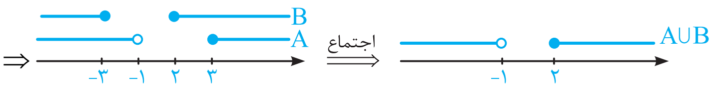
$$C = (C')' = \{۱,۲,۷,۸,۹\}$$

بنابراین:

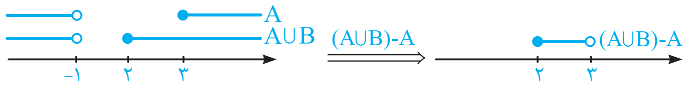
$$(A \cup B)' \cap C = \{۵,۷,۹\} \cap \{۱,۲,۷,۸,۹\} = \{۷,۹\}$$

۵۳ ۲ **روش اول:** ابتدا با استفاده از مجموعهٔ $A'=[-۱,۳)$ و $B'=(-۳,۲)$، مجموعه‌های A و B را می‌یابیم:

$A=\mathbb{R}-[-۱,۳)$
$B=\mathbb{R}-(-۳,۲)$ $\Rightarrow$



$\Rightarrow$



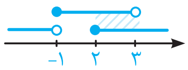
پس مجموعهٔ موردنظر برابر $[۲,۳)$ بوده که شامل یک عدد صحیح ۲ است.

روش دوم: با استفاده از فرمول $A'\cap B'=(A\cup B)'$ داریم:

$$A'\cap B'=[-۱,۳)\cap(-۳,۲)=[-۱,۲)=(A\cup B)'\Rightarrow A\cup B=\mathbb{R}-[-۱,۲)$$

از طرفی با توجه به فرمول $A-B=A\cap B'$ داریم:

$$(A\cup B)-A=(A\cup B)\cap A'=(\mathbb{R}-[-۱,۲))\cap[-۱,۳):$$



جواب: $[۲,۳)$

۵۴ ۴

$$A'=U-A=\underbrace{\{۱,۲,۳,\cdots,n-۱,n\}}_{U}-\underbrace{\{۵,۶,۷,\cdots,n-۱,n\}}_{A}=\{۱,۲,۳,۴\}\Rightarrow$$ ۴ عضو دارد.

سؤال *دانش‌پژوه (ملیکا پورفلاح):* **ببخشید A مگه $\{n,n-۱,\cdots,۵\}$ نبود؟**

پاسخ: بچه! مگه A ای که ما نوشتیم همون نیست؟! اگه خوب دقت کنی، من فقط ترتیب اعداد داخل مجموعه رو عوض کردم. یعنی A رو از تَه نوشتم. همین.

۵۵ ۳

$$A\cup(A'\cap B)=(\underbrace{A\cup A'}_{U})\cap(A\cup B)=U\cap(A\cup B)\xlongequal{A\cup B\subseteq U}A\cup B$$

۵۶ ۳ برای حل و ساده‌سازی عبارت داده‌شده، باید یک عملیات که شبیه فاکتورگیری است را بلد باشید. با هم ببینیم:

$$(A\cap B')\cup(B\cap A)\xlongequal{A\cap B=B\cap A}(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap(\underbrace{B'\cup B}_{U})=A$$

۵۷ ۲ ابتدا علامت «$-$» را به «$\cap$» تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$(A\cap B)-A=(A\cap B)\cap A'=\underbrace{A\cap A'}_{\varnothing}\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing$$

۵۸ ۲

$$(B-A)\cup A=(B\cap A')\cup A=(B\cup A)\cap(\underbrace{A'\cup A}_{U})=(B\cup A)\cap U\xlongequal{B\cup A\subseteq U}B\cup A\xlongequal{A\subseteq B}B$$

۵۹ ۱ ابتدا مجموعهٔ $(B-A)'-A$ را کمی ساده کرده و سپس متمم آن را به‌دست می‌آوریم:

$$(B-A)'-A=(B\cap A')'\cap A'=(B'\cup A)\cap A'=(B'\cap A')\cup(A\cap A')$$

$$\xlongequal{A\cap A'=\varnothing}(B'\cap A')\cup\varnothing=(B'\cap A')=(B\cup A)'$$

بنابراین مجموعهٔ $(B-A)'-A$ برابر با $(B\cup A)'$ است و متمم آن، مجموعهٔ $A\cup B$ است.

۶۰ ۴ با توجه به آن‌که اگر $A\subseteq B$ باشد، آن‌گاه $B'\subseteq A'$ است، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $B'\subseteq A':B'-A=B'\cap A'=B'$ ✓

گزینهٔ (۲): $B'\subseteq A':A'-B=A'\cap B'=B'$ ✓

گزینهٔ (۳): $A\subseteq B:A-B'=A\cap B=A$ ✓

گزینهٔ (۴): $A\subseteq B:B-A'=B\cap A=A\neq B$

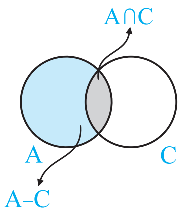
۶۱ ۱

$$\mathbb{N}'=\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\{\ldots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\ldots\}-\{۱,۲,\ldots\}=\{\ldots,-۲,-۱,۰\}$$

$$\mathbb{W}'=\mathbb{Z}-\mathbb{W}=\{\ldots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\ldots\}-\{۰,۱,۲,\ldots\}=\{\ldots,-۲,-۱\}$$

$$\Rightarrow\mathbb{N}'-\mathbb{W}'=\{\ldots,-۲,-۱,۰\}-\{\ldots,-۲,-۱\}=\{۰\}$$

۶۲ **۴** چون $A\subseteq B$ است پس $A\cap B=A$ بوده و داریم:



$$(\underbrace{A\cap(B}_{A}\cap C'))\cap(\underbrace{A\cap B}_{A}\cap C)'=(A\cap C')\cap(A\cap C)'$$

$$=(A-C)-(A\cap C)\xlongequal[\text{نمودار ون}]{\text{با توجه به}}A-C=A\cap C'$$

۶۳ **۲**

$$(A'\cap B')'\cap(A'\cap C')'\xlongequal{(A\cap B)'=A'\cup B'}((A')'\cup(B')')\cap((A')'\cup(C')')=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

$$\xlongequal[A\subseteq C\Rightarrow A\cup C=C]{A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B}B\cap C\xlongequal{B\subseteq C}B$$

۶۴ **۲** سؤال کمی سخت است. باید به خوبی از خواص اشتراک و اجتماع استفاده نماییم:

$$[A\cap(A'\cup B)]\cup[B\cap(A'\cup B')]=[\overbrace{(A\cap A')}^{\varnothing}\cup(A\cap B)]\cup[(B\cap A')\cup\overbrace{(B\cap B')}^{\varnothing}]$$

$$=[\varnothing\cup(A\cap B)]\cup[(B\cap A')\cup\varnothing]=(A\cap B)\cup(B\cap A')=(B\cap A)\cup(B\cap A')=B\cap\overbrace{(A\cup A')}^{U}=B$$

۶۵ **۱** ابتدا مجموعه‌های $A\cup(A\cap B)$ و $(B\cap A)\cup(B-A)$ را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases}A\cup(A\cap B)\xlongequal{\text{قانون جذب}}A \quad (*)\\ (B\cap A)\cup(B-A)\xlongequal{B-A=B\cap A'}(B\cap A)\cup(B\cap A')=B\cap(A\cup A')=B\cap U=B \quad (**)\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$[A\cup(A\cap B)]'\cap[(B\cap A)\cup(B-A)]\xlongequal[(**)]{(*)}A'\cap B=A'-B'$$

سؤال دانش‌پژوه (*رضا کشتکار*): **آقا چه‌طور علامت «$\cap$» در $A'\cap B=A'-B'$ به «−» تبدیل شد؟**

پاسخ: *درود بر تمام مثبت‌های جهان! ببین می‌دونیم* $A\cap B'=A-(B')'=A-B$. *یعنی اگه «$\cap$» بفواد به «−» تبدیل بشه، یک علامت «'» باید بالای عبارت بعد از منفی بذاریم.* پس $A'\cap B=A'-B'$.

۶۶ **۲** ابتدا متمم مجموعهٔ داده‌شده را به‌دست می‌آوریم، سپس با اعمال قوانین جبر مجموعه‌ها به گزینه‌هایی که برابر با آن هستند، می‌رسیم:

$$[C\cup A'\cup B']'=C'\cap A\cap B=A\cap B\cap C'$$

- $A\cap B\cap C'=(A\cap B)\cap C'=(A\cap B)-C\Rightarrow$ گزینهٔ (۴) برابر با مجموعهٔ داده‌شده است.
- $A\cap B\cap C'=A\cap(B\cap C')=A\cap(B-C)\Rightarrow$ گزینهٔ (۳) برابر با مجموعهٔ داده‌شده است.
- $A\cap(B\cap C')=A\cap(B-C)\xlongequal[\text{اشتراک بر روی تفاضل}]{\text{خاصیت توزیع‌پذیری}}(A\cap B)-(A\cap C)\Rightarrow$ گزینهٔ (۱) برابر با مجموعهٔ داده‌شده است.

بنابراین تنها مجموعهٔ گزینهٔ (۲) با مجموعهٔ داده‌شده برابر نیست.

۶۷ **۲** با توجه به قانون دمورگان داریم:

$$(A\cap B)'=A'\cup B'=\{۴,۶,۸,۱۰,۱۲\}\cup\{۴,۵,۶,۷,۸\}=\{۴,۵,۶,۷,۸,۱۰,۱۲\}$$

پس $(A\cap B)'$، ۷ عضو دارد.

۶۸ **۴** **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ (۱): نادرست است. مثلاً اگر $A=\{۱\}$ باشد، آن‌گاه $A'=\{۲,۳,۴,\cdots\}$ می‌شود که نامتناهی است.

گزینهٔ (۲): نادرست است. مثلاً اگر A را، مجموعهٔ اعداد زوج طبیعی بگیریم، آن‌گاه A'، مجموعهٔ اعداد فرد طبیعی می‌شود که نامتناهی است.

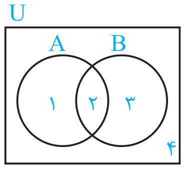
گزینهٔ (۳): نادرست است. مثلاً اگر A، مجموعهٔ اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ فرض شود (یعنی: $A=\{x\mid x\in\mathbb{N}\ ,\ x>۲\}=\{۳,۴,۵,\cdots\}$)، آن‌گاه $A'=\{۱,۲\}$ می‌شود که متناهی است.

گزینهٔ (۴): درست است، اگر A متناهی باشد، آن‌گاه A' حتماً نامتناهی خواهد بود.

۶۹ **۴** می‌دانیم اگر $A\subseteq B$ باشد، آن‌گاه $A\cap B=A$ می‌شود و چون A نامتناهی است پس مجموعهٔ $A\cap B$ نیز نامتناهی خواهد بود.

۷۰ **۲** طبق فرض A متناهی است و چون A زیرمجموعهٔ اعداد طبیعی است، پس A' الزاماً نامتناهی است. در حالی که از نامتناهی بودن B نمی‌توان نتیجه گرفت که B' حتماً متناهی است؛ به عنوان مثال اگر B مجموعهٔ اعداد زوج باشد، متمم آن یعنی B' مجموعهٔ اعداد فرد شده که نامتناهی است. بنابراین چون A متناهی است اشتراکش با مجموعهٔ B' که متناهی یا نامتناهی است حتماً متناهی خواهد بود.

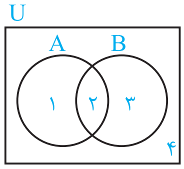
۷۱ **۴** با توجه به نمودار وِن در شکل مقابل، $B'=\{۱,۴\}$ است. بنابراین:



$$(A\cap B')-(B-A)=(\{۱,۲\}\cap\{۱,۴\})-(\{\cancel{۲},۳\}-\{۱,۲\})$$

$$=\{۱\}-\{۳\}=\{۱\}\xlongequal{\text{با توجه به شکل}}A-B$$

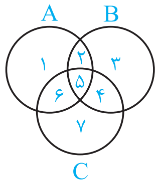
۷۲ **۱** مطابق شکل داریم:



$$(A-B)'\cap(A\cup B)\cap A'=(\{۱,\cancel{۲}\}-\{۲,۳\})'\cap(\{۱,۲\}\cup\{۲,۳\})\cap\{۳,۴\}$$

$$=(\{۱\})'\cap\{۱,۲,۳\}\cap\{۳,۴\}=\{۲,۳,۴\}\cap\{۱,۲,۳\}\cap\{۳,۴\}=\{۳\}\xlongequal[\text{نمودار ون}]{\text{با توجه به}}B-A$$

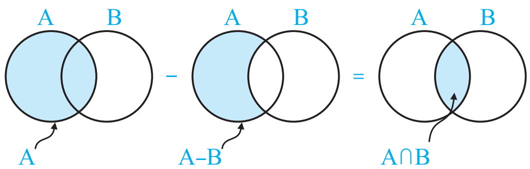
۷۳ **۲** با توجه به نمودار وِن مقابل داریم:



$$(C\cap A\cap B)\cup(A-C)\cup(A-B)=\{۵\}\cup\{۱,۲\}\cup\{۱,۶\}$$

$$=\{۱,۲,۵,۶\}\xlongequal{\text{با توجه به شکل}}A$$

۷۴ **۴** **راه اول:** با توجه به نمودار وِن زیر داریم:



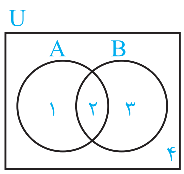
$$\Rightarrow A-(A-B)=A\cap B\quad(*)$$

بنابراین:

$$[A-(A-B)]\cup(A\cap B)'\overset{(*)}{=}\underbrace{(A\cap B)}_{X}\cup\underbrace{(A\cap B}_{X})'\xlongequal{X\cup X'=U}U$$

که متمم مجموعهٔ U برابر $\varnothing$ می‌باشد.

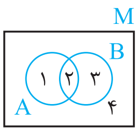
راه دوم: با توجه به شکل مقابل داریم:



$$[A-(A-B)]\cup(A\cap B)'=[\{\cancel{۱},۲\}-\{۱\}]\cup(\{۲\})'=\{۲\}\cup\{۱,۳,۴\}=\{۱,۲,۳,۴\}=U$$

که متمم آن برابر $U'=\varnothing$ می‌شود.

۷۵ **۳** ابتدا یک نمودار ون با مجموعه‌های A و B در حالت کلی رسم می‌کنیم. سپس با توجه به عضوهای مجموعه‌ها، مجموعهٔ زیر را ساده می‌کنیم:



$$(\underbrace{A\cap(A'\cup B)}_{(*)})\cup(\underbrace{B\cap(A'\cup B')}_{(**)})$$

$$(*):\{۱,۲\}\cap(\{۳,۴\}\cup\{۲,۳\})=\{۱,۲\}\cap\{۲,۳,۴\}=\{۲\}$$

$$(**):\{۳,۲\}\cap(\{۳,۴\}\cup\{۱,۴\})=\{۳,۲\}\cap\{۱,۳,۴\}=\{۳\}$$

$$\Rightarrow(*)\cup(**)=\{۲\}\cup\{۳\}=\{۲,۳\}$$

که مجموعهٔ $\{۲,۳\}$ با توجه به نمودار وِن همان مجموعهٔ B است.

۷۶ **۲**

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cup B)=۱۴+۱۷-۵=۲۶$$

۷۷ **۱**

$$(۱)\ \ n(A')=۲۵\Rightarrow n(U)-n(A)=۲۵\xrightarrow{n(U)=۳۰}۳۰-n(A)=۲۵\Rightarrow n(A)=۵\quad(*)$$

$$(۲)\ \ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\overset{(*)}{\Longrightarrow}۲۰=۵+n(B)-۲\Rightarrow n(B)=۱۷$$

بنابراین $n(B')$ برابر می‌شود با:

$$n(B')=n(U)-n(B)\Rightarrow n(B')=۳۰-۱۷=۱۳$$

۷۸ **۳** **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ (۱): ابتدا $n(A)$ را یافته و سپس از فرمول زیر، $n(A\cap B)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$n(A)=n(U)-n(A')\xrightarrow[n(A')=۱۴۰]{n(U)=۲۰۰}n(A)=۲۰۰-۱۴۰=۶۰$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۹۸=۶۰+۵۰-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۱۱۰-۹۸=۱۲$$

گزینهٔ (۲):

$$n(A\cap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۶۰-۱۲=۴۸$$

گزینهٔ (۳):

$$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=۲۰۰-۹۸=۱۰۲$$

گزینهٔ (۴):

$$n(A'\cup B')=n((A\cap B)')=n(U)-n(A\cap B)=۲۰۰-۱۲=۱۸۸$$