

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com



مدابوک



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰





مفهوم مجموعه

در ابتدای این درس، قصد داریم مطالب و مفاهیمی را در مورد مجموعه‌ها که در سال نهم با آن آشنا شده‌اید، یادآوری کنیم: در ریاضیات برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای مشخص و دوبه‌دو متمایز (غیرتکراری) از مجموعه استفاده می‌شود. به هر یک از اشیای مجموعه یک عضو مجموعه می‌گوییم.

قرارداد: اگر A یک مجموعه و a عضوی از آن باشد، می‌نویسیم $a \in A$ و اگر b عضوی از مجموعه A نباشد، می‌نویسیم $b \notin A$ به عنوان مثال، اگر $A = \{۱, ۲, ۵\}$ ، آن‌گاه $۵ \in A$ و $۳ \notin A$

مجموعه تهی: مجموعه‌ای که عضوی نداشته باشد، مجموعه تهی نام دارد و با نماد $\emptyset$ یا $\{\}$ نشان داده می‌شود.

تذکر: مجموعه تهی را نباید با مجموعه‌های $\{\emptyset\}$ و $\{\emptyset\}$ که هر کدام دارای یک عضو هستند، اشتباه بگیریم.

مثال: اگر $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{-۱\}, \{-۱, ۰\}\}$ باشد، کدام یک از عبارتهای زیر درست و کدام یک نادرست است؟

- (آ) $\{\emptyset\} \in A$ (ب) $\{-۱, ۰\} \in A$ (پ) $\{-۱\} \notin A$ (ت) $\{\emptyset\} \notin A$

پاسخ: A یک مجموعه ۵ عضوی است که اعضای آن -۱ ، ۰ ، $\{-۱\}$ ، $\{\emptyset\}$ و $\{\{\emptyset\}\}$ می‌باشند، بنابراین:

- (آ) درست است. (ب) نادرست است. (پ) درست است. (ت) نادرست است.

دو مجموعه مساوی: دو مجموعه A و B برابرند هرگاه هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A باشد و می‌نویسیم $A = B$

نتیجه: اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که در A نباشد، در این صورت مجموعه A با B برابر نیست و می‌نویسیم $A \neq B$

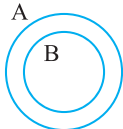
تست: دو مجموعه $\{۴, \{x, ۲\}\}$ و $\{y, \{z, ۳\}\}$ با هم برابرند. مقدار $xy + z$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

پاسخ: در دو مجموعه مساوی، اعضای آن‌ها یکسان است. بنابراین اگر $\{y, \{z, ۳\}\} = \{۴, \{x, ۲\}\}$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} y = 4 \\ \{x, 2\} = \{z, 3\} \end{cases} \Rightarrow xy + z = 12 + 2 = 14 \Rightarrow \text{گزینه (۳) صحیح است.}$$

زیرمجموعه: اگر هر عضو مجموعه B ، عضوی از مجموعه A باشد، می‌گوییم مجموعه B زیرمجموعه A است و می‌نویسیم $B \subseteq A$



نمایش $B \subseteq A$ با نمودار ون به صورت مقابل است:

تست: اگر $A = \{۱, ۲\}$ ، $B = \{۱, \{۱, ۲\}\}$ و $C = \{۱, ۲, \{۱, ۲\}\}$ سه مجموعه باشند، کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $A \in B$ (۲) $A \subseteq B$ (۳) $A \subseteq C$ (۴) $B \in C$

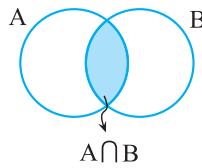
پاسخ: مجموعه B به صورت $B = \{۱, A\}$ است، پس $A \in B$ می‌باشد و در نتیجه گزینه (۱) درست است. مجموعه B دارای دو عضو ۱ و A است، پس مجموعه B دارای زیرمجموعه‌های مقابل است:

مشاهده می‌شود که A زیرمجموعه B نمی‌باشد و در نتیجه گزینه (۲) نادرست است.

اگر دو عضو ۱ و ۲ از مجموعه C را در یک مجموعه قرار دهیم، یکی از زیرمجموعه‌های C به دست می‌آید. این زیرمجموعه، همان مجموعه A است و در نتیجه گزینه (۳) صحیح است. از طرفی مجموعه C به صورت $C = \{۱, ۲, B\}$ است که درستی گزینه (۴) نتیجه می‌شود.

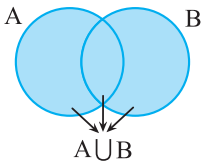
بنابراین گزینه (۲) جواب است.

نکته تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n می‌باشد. به عنوان مثال، یک مجموعه ۳ عضوی، $2^3 = 8$ زیرمجموعه دارد.



اشتراک دو مجموعه: مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهای A و هم عضو مجموعه B هستند. این مجموعه را با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم. در نمودار مقابل، قسمت رنگی، اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$



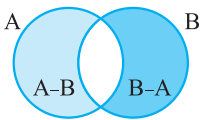
اجتماع دو مجموعه: مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهای A و B هستند. این مجموعه را با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم. در نمودار مقابل، قسمت رنگی، اجتماع دو مجموعه A و B را نشان می‌دهد:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

تفاضل دو مجموعه: مجموعه $A - B$ (منهای B) مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهای A که عضو مجموعه B نیستند.

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

نکته برای مشخص کردن مجموعه $A - B$ ، باید اعضای مشترک A و B را از A حذف کنیم و بقیهٔ اعضای A را بنویسیم.



در نمودار مقابل، مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ رنگی هستند:

مثال: اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 4\}$ و $B = \{x \mid x \in A, 0 < x \leq 3\}$ ، مجموعه $(A \cup B) - (A \cap B)$ را با اعضا مشخص کنید.

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 4\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{x \mid x \in A, 0 < x \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$$

$$\Rightarrow A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}, \quad A \cap B = \{1, 2, 3\}$$

$$\Rightarrow (A \cup B) - (A \cap B) = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} - \{1, 2, 3\} = \{-1, 0, 4\}$$

پاسخ:

نکته (قوانین جبر مجموعه‌ها) برای هر سه مجموعه A ، B و C روابط زیر برقرار است:

$$1) \begin{cases} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} A, B \subseteq A \cup B \\ A \cap B \subseteq A, B \end{cases}$$

$$6) A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{cases}$$

مجموعه‌های اعداد

مجموعه‌های اعداد طبیعی، حسابی و صحیح که به ترتیب با $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{W}$ و $\mathbb{Z}$ نمایش داده می‌شوند، به صورت زیر می‌باشند:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

مجموعهٔ اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم و به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

تذکر اعداد گویا به دو صورت کسر متعارفی و نماد یا بسط اعشاری، نمایش داده می‌شوند. به طور مثال داریم $\frac{3}{5} = 0.6$ که در آن کسر متعارفی

و 0.6 نماد اعشاری این عدد گویا است.

نمایش اعشاری عددهای گویا

نمایش اعشاری عددهای گویا به دو صورت است: ۱- مختوم (یا منتهای) ۲- نامنتهای و متناوب

(۱) **مختوم (تحقیقی یا پایان پذیر):** این دسته از اعداد گویا، کسرهای متعارفی هستند که پس از ساده شدن، در مخرج آن‌ها فقط عامل ۲ یا ۵ یا هر دو وجود دارد و به هنگام تقسیم صورت بر مخرج، باقی‌مانده به صفر می‌رسد و عمل تقسیم در مرحله‌ای متوقف می‌شود. به طور مثال کسرهای $\frac{3}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ و $\frac{9}{20}$ مختوم هستند، زیرا در مخرج این کسرها فقط عامل ۲ یا ۵ وجود دارد و داریم $\frac{3}{4} = 0.75$ ، $\frac{1}{5} = 0.2$ و $\frac{9}{20} = 0.45$

مشاوره و راهنمای انتخاب بهترین منابع کنکور : 021-28425210

در حالت کلی اگر a و b دو عدد حقیقی و $a < b$ باشد، آنگاه انواع بازه‌های محدود، هم‌چنین نماد، نمایش مجموعه‌ای و نمایش هندسی آن‌ها در جدول زیر خلاصه شده است:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a, b)	باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	بسته
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	نیم‌باز (نیم‌بسته)
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	نیم‌باز (نیم‌بسته)

۱۳

مثال: کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست می‌باشند؟ چرا؟

- (آ) $\frac{3}{2} \in (\frac{5}{4}, \frac{1}{5})$ (ب) $\{-1, 0\} \subseteq (-2, 1)$ (پ) $-\sqrt{5} \in [-3, -2]$ (ت) $[-1, 1] \subseteq (-1, 1)$
- پاسخ:** (آ) درست است، زیرا: $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5} = 0\frac{1}{5}$ ، $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \frac{3}{2} \in (\frac{5}{4}, \frac{1}{5})$
- (ب) درست است، زیرا بازه $(-2, 1)$ شامل تمام اعداد حقیقی بین -2 و 1 می‌باشد، پس بازه $\{-1, 0\}$ شامل دو عدد -1 و 0 می‌باشد. پس داریم: $\{-1, 0\} \subseteq (-2, 1)$
- (پ) درست است، زیرا: $-\sqrt{5} \approx -2.236$ $\Rightarrow -\sqrt{5} \in [-3, -2]$
- (ت) نادرست است، زیرا به‌طور مثال $-1 \in [-1, 1]$ ولی $-1 \notin (-1, 1)$

نکته: هر بازه یک مجموعه است، پس اجتماع، اشتراک و تفاضل بین بازه‌ها تعریف می‌شود.

مثال: اگر $A = [-2, 3]$ و $B = (0, 4)$ باشد:

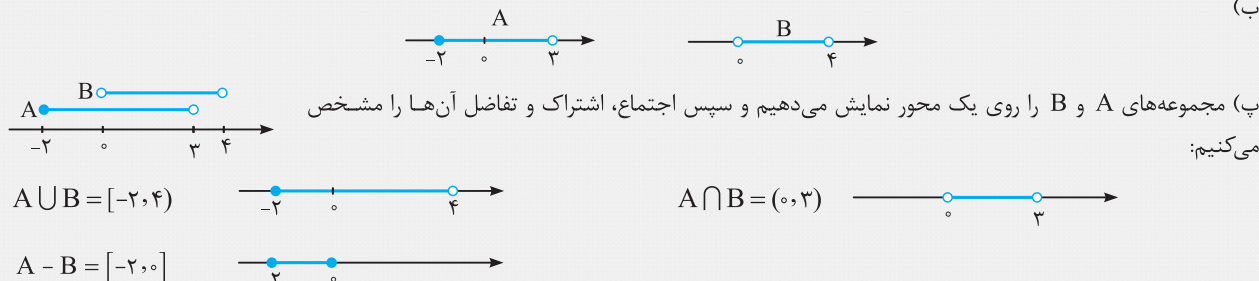
(آ) نمایش مجموعه‌ای A و B را بنویسید.

(ب) نمایش هندسی هر یک از مجموعه‌های A و B را رسم کنید.

(پ) $A \cap B$ ، $A \cup B$ و $A - B$ را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.

پاسخ: (آ) (ب)

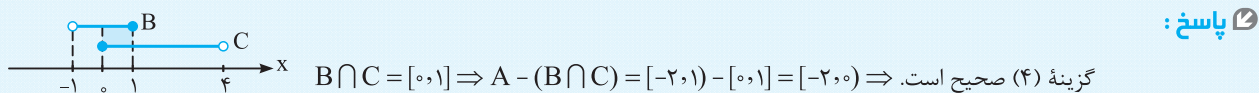
$A = [-2, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$ ، $B = (0, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$



تست: اگر $A = [-2, 1]$ ، $B = (-1, 1)$ و $C = [0, 4]$ باشند، مجموعه $A - (B \cap C)$ کدام است؟

- (۱) $[-2, -1]$ (۲) $[-2, -1)$ (۳) $[-2, 0]$ (۴) $[-2, 0)$

پاسخ:



طول و نقطه میانی در بازه‌های محدود

انتهای بازه + ابتدای بازه = طول نقطه میانی ، ابتدای بازه - انتهای بازه = طول بازه

تست: اگر $A = [-1, 2]$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq -x + 3 \leq 5\}$ باشد، طول بازه $A \cup B$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

پاسخ: با حل نامعادله $2 \leq -x + 3 \leq 5$ ، حدود X و در نتیجه مجموعه B را مشخص می‌کنیم:

$$2 \leq -x + 3 \leq 5 \xrightarrow{-3} -1 \leq -x \leq 2 \xrightarrow{+(-1)} -2 \leq x \leq 1 \Rightarrow B = [-2, 1]$$

گزینه (۱) صحیح است. $\Rightarrow 4 = 2 - (-2) =$ ابتدای بازه - انتهای بازه = طول بازه $A \cup B = [-1, 2] \cup [-2, 1] = [-2, 2] \Rightarrow A \cup B$

بازه‌های بی‌کران (نامحدود)

مجموعه همه اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی ۲ به صورت $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$ است. از نماد $(-\infty, 2]$ برای نمایش مجموعه A استفاده می‌کنیم و آن را بازه نیم‌باز $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) تا ۲ می‌نامیم.

از نمادهای $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) و $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) برای نمایش بازه‌های نامحدود استفاده می‌کنیم. اگر حداقل در یک طرف بازه یکی از نمادهای $+\infty$ یا $-\infty$ به‌کار رفته باشد، آن بازه را بی‌کران (نامحدود) می‌خوانیم.

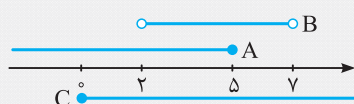
نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	نیم‌باز (نیم‌بسته)
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	نیم‌باز (نیم‌بسته)
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	$(a, +\infty)$	باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$	باز

فرض کنیم a یک عدد حقیقی باشد. انواع بازه‌های نامحدود، نماد، نمایش مجموعه‌ای و نمایش هندسی آن‌ها در جدول مقابل خلاصه شده است:

نکته بازه $(-\infty, +\infty)$ شامل تمام اعداد حقیقی است، به عبارت دیگر: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

مثال: اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$ ، $B = (2, 7)$ و $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ باشد، حاصل $(A \cap B) \cup C$ را به صورت بازه نوشته و روی محور نشان دهید.

پاسخ: هر یک از مجموعه‌های A ، B و C را روی یک محور مشخص می‌کنیم و با توجه به آن، مجموعه $(A \cap B) \cup C$ را به صورت بازه می‌نویسیم:



$$A \cap B = (-\infty, 5] \cap (2, 7) = (2, 5] \Rightarrow (A \cap B) \cup C = (2, 5] \cup [0, +\infty) = [0, +\infty)$$

نمایش هندسی مجموعه $(A \cap B) \cup C$ به صورت مقابل است:



تست: اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\}$ ، $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{x}{2} > 1\}$ و $C = [-4, +\infty)$ باشند، مجموعه $A \cup (B \cap C)$ چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

پاسخ: مجموعه B از حل نامعادله $-\frac{x}{2} > 1$ به دست می‌آید:

$$-\frac{x}{2} > 1 \xrightarrow{\times 2} -x > 2 \xrightarrow{+(-1)} x < -2 \Rightarrow B = (-\infty, -2)$$

$$B \cap C = (-\infty, -2) \cap [-4, +\infty) = [-4, -2) , A = (-2, 3] \Rightarrow A \cup (B \cap C) = (-2, 3] \cup [-4, -2) = [-4, 3] - \{-2\}$$

بنابراین مجموعه اعداد صحیح واقع در مجموعه $A \cup (B \cap C)$ به صورت زیر است:

گزینه (۲) صحیح است. $\Rightarrow 7 =$ تعداد اعداد صحیح $\Rightarrow \{-4, -3, -1, 0, 1, 2, 3\}$

تست: اگر $A = [-1, 4]$ ، $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-x+a}{2} \leq 3\}$ ، $C = A \cap B$ و $C = [0, 4]$ باشند، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) -۳ (۴) -۲

پاسخ: با حل نامعادله $\frac{-x+a}{2} \leq 3$ ، مجموعه B به دست می آید:

$$\frac{-x+a}{2} \leq 3 \xrightarrow{\times 2} -x+a \leq 6 \Rightarrow -x \leq 6-a \xrightarrow{\times (-1)} x \geq a-6 \Rightarrow B = [a-6, +\infty) , A = [-1, 4] \Rightarrow A \cap B = [a-6, 4]$$

از طرفی $C = A \cap B = [0, 4]$ ، پس $a-6 = 0$ و از آنجا $a = 6$ ، پس گزینه (۲) صحیح است.

مثال: اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = [n-2, n+3]$ بازه باشد، مجموعه های A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 را مشخص کنید.

پاسخ: با قرار دادن اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳ و ... به جای n در رابطه $A_n = [n-2, n+3]$ ، هر یک از بازه های A_1 ، A_2 ، A_3 و ... مشخص می شوند:

$$A_1 = [1-2, 1+3] = [-1, 4] , A_2 = [2-2, 2+3] = [0, 5] , A_3 = [3-2, 3+3] = [1, 6]$$



بازه های A_2 و A_3 روی محور به صورت روبه رو می باشند:

$$A_2 \cap A_3 = [0, 5] \cap [1, 6] = [1, 5]$$

$$A_3 - A_2 = [1, 6] - [0, 5] = [1, 6]$$

تست: اگر n یک عدد طبیعی و $A_n = [(-1)^n n, 2n]$ بازه باشد، مجموعه $(A_1 \cup A_2) - A_1$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

$$A_1 = [(-1)^1(1), 2(1)] = [-1, 2] , A_2 = [(-1)^2 \times 2, 2(2)] = [2, 4]$$

$$\Rightarrow A_1 \cup A_2 = [-1, 2] \cup [2, 4] = [-1, 4]$$

$$\Rightarrow (A_1 \cup A_2) - A_1 = [-1, 4] - [-1, 2] = (2, 4]$$

مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 4\}$ شامل دو عدد صحیح ۳ و ۴ است و در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

مجموعه های متناهی و نامتناهی

مجموعه متناهی (با پایان): مجموعه ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد مجموعه متناهی می نامیم.

مجموعه نامتناهی (بی پایان): مجموعه ای که تعداد اعضای آن را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد و در واقع تعداد اعضای آن از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ تر باشد، مجموعه نامتناهی می گوئیم. به عبارت دیگر مجموعه ای که متناهی نباشد را مجموعه نامتناهی می گوئیم.

مثال: فرض کنید A مجموعه مقسوم علیه های طبیعی ۱۲ و B مجموعه ضرب های طبیعی ۴ باشد، کدام یک از مجموعه های A و B متناهی و کدام یک نامتناهی است؟

پاسخ: نمایش اعضای هر یک از مجموعه های A و B به صورت زیر می باشد:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} , B = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$$

مجموعه A ، ۶ عضو دارد بنابراین یک مجموعه متناهی است، اما تعداد عضوهای مجموعه B را نمی توان با یک عدد حسابی بیان کرد، پس B یک مجموعه نامتناهی است.

قرارداد: اگر A یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه تعداد عضوهای مجموعه A را با $n(A)$ نمایش می دهیم.

نکته مجموعه تهی ($\emptyset$) یک مجموعه متناهی است، زیرا تعداد عضوهای آن صفر است و صفر نیز یک عدد حسابی می باشد: $n(\emptyset) = 0$ ، $0 \in \mathbb{W}$

تذکر تعداد اعضای برخی از مجموعه های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد، با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی می توان تعداد آن ها را به دست آورد.

به عنوان مثال، مجموعه درخت های شهر تهران، مجموعه ای با تعداد عضوهای زیاد است ولی یک مجموعه متناهی است.

مثال: کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام یک نامتناهی است؟

- (آ) مجموعه اعداد مربع کامل دورقمی
(پ) مجموعه درخت‌های جنگل‌های شمال
(ث) مجموعه دانش‌آموزان کشور
(ب) مجموعه اعداد گویای بین ۰ و ۱
(ت) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x \leq 4\}$
(ج) مجموعه اعداد طبیعی زوج

پاسخ: (آ) مجموعه اعداد مربع کامل دورقمی به صورت $A = \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$ می‌باشد که یک مجموعه متناهی است.

(ب) بین دو عدد ۰ و ۱ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد، بنابراین مجموعه اعداد گویای بین ۰ و ۱، یک مجموعه نامتناهی است.

(پ) هر چند تعداد درخت‌های جنگل‌های شمال بسیار زیاد است ولی تعداد آن‌ها را می‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد، پس این مجموعه یک مجموعه متناهی است.

(ت) مجموعه $\{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x \leq 4\} = \{-4, -3, \dots, 3, 4\}$ یک مجموعه متناهی ۹ عضوی است.

(ث) تعداد دانش‌آموزان کشور را می‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد، اگر چه مجموعه دانش‌آموزان کشور، مجموعه‌ای با تعداد اعضای بسیار زیاد است ولی متناهی می‌باشد.

(ج) مجموعه اعداد طبیعی زوج $E = \{2, 4, 6, \dots\}$ یک مجموعه نامتناهی است، زیرا تعداد اعضای آن را نمی‌توان با یک عدد حسابی بیان نمود.

تست: اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 - x \leq 2x - 1 < 7\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{1}{x} < 0\}$ ، در این صورت کدام مجموعه زیر نامتناهی است؟

- (۱) A (۲) $A - B$ (۳) $A \cap B$ (۴) $B - A$

پاسخ: هریک از مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$2 - x \leq 2x - 1 < 7 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 < 7 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow x < 4 \\ 2 - x \leq 2x - 1 \Rightarrow 3 \leq 3x \Rightarrow 1 \leq x \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x < 4 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} A = \{1, 2, 3\}$$

$$\frac{1}{x} < 0 \xrightarrow{1 > 0} x < 0 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} B = \{\dots, -3, -2, -1\}$$

مجموعه‌های A ، $A - B = A$ و $A \cap B = \emptyset$ متناهی و مجموعه $B - A = B$ یک مجموعه نامتناهی است. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

نکته اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آنگاه مجموعه‌های $A \cap B$ و $A - B$ ، متناهی و مجموعه‌های $A \cup B$ و $B - A$ ، نامتناهی هستند.

نکته اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه:

(۱) اگر B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A حتماً متناهی است.

(۲) اگر B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آنگاه A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

(۳) اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

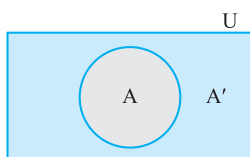
(۴) اگر A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آنگاه B حتماً نامتناهی است.

فصل

قسمت دوم

متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم و تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

متنم یک مجموعه

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = \delta k, k \in \mathbb{Z}\}$$
$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\} = U - A$$


نمودار ون مجموعه A' با مجموعه مرجع U به صورت مقابل است:

 **پاسخ:** متمم مجموعه‌های A و B نسبت به Z :

$$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A' = \mathbb{Z} - A = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} - \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} = \{\dots, -3, -2, 5, 6, 7, \dots\}$$

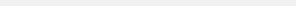
$$B = [-5, 1) \Rightarrow B' = \mathbb{Z} - B = \{\dots, -7, -6, 1, 2, \dots\}$$

متمم مجموعه‌های A و B نسبت به $\mathbb{R}$:

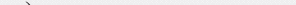
محور اعداد حقیقی را در نظر گرفته و هر یک از مجموعه‌های A و B را روی محور مشخص می‌کنیم. در هر مورد، قسمت‌های باقی مانده از محور، متمم مجموعه‌های A و B خواهد بود.

 $\Rightarrow A' = \mathbb{R} - A = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 4) \cup (4, +\infty)$

$B = [-\Delta, 1)$



$\Rightarrow B' = \mathbb{R} - B = \mathbb{R} - [-\Delta, 1) = (-\infty, -\Delta) \cup [1, +\infty)$



مثال: فرض کنید $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ مجموعه مرجع، $A = \{1, 2, 6, 10\}$ و $B = \{1, 3, 6, 8\}$ باشند. مجموعه‌های $A - B'$ ، $(A \cup B)'$ و $A' \cup B'$ را با اعضا مشخص کنید.

پاسخ: با حذف عضوهای مجموعه‌های A و B از U مجموعه‌های A' و B' مشخص می‌شوند:

$$A' = U - A = \{\chi, \cancel{\chi}, \mathfrak{z}, \mathfrak{d}, \cancel{\mathfrak{d}}, \mathfrak{a}, \cancel{\mathfrak{a}}\} - \{1, 2, \mathfrak{e}, 10\} = \{\mathfrak{z}, \mathfrak{d}, \mathfrak{a}\}$$

$$B' = U - B = \{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}\} - \{\cancel{1}, \cancel{3}, \cancel{6}, \cancel{8}\} = \{\cancel{2}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{7}, \cancel{9}, \cancel{10}\}$$

$$A - B' = \{1, \cancel{2}, 6, \cancel{7}\} - \{2, 5, 10\} = \{1, 6\}$$

مجموعه $A - B'$ به صورت مقابل است:

برای مشخص کردن مجموعه $(A \cup B)'$ ، ابتدا مجموعه $A \cup B$ را به دست می آوریم و سپس متمم آن را مشخص می کنیم:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 8, 10\} \Rightarrow (A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \Delta, \cancel{6}, \cancel{8}, \cancel{10}\} - \{1, 2, 3, 6, 8, 10\} = \{\Delta\}$$

$$A' \cup B' = \{\gamma, \delta, \lambda\} \cup \{\gamma, \delta, \iota\} = \{\gamma, \delta, \lambda, \iota\}$$

با توجه به مجموعه‌های A' و B' داریم:

تست: اگر A مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی و $B = \{3k - 1 \mid k \in A\} \subseteq A$ با مجموعه مرجع $\mathbb{Z}$ باشند، مجموعه $B' - A'$ شامل چند عدد اول است؟

(۴) ۲

(۳) ۳

(۲) ۵

(۱) ۶

پاسخ: مجموعه‌های A و B با اعضا به صورت زیر می‌باشند:

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}, B = \{3k - 1 \mid k \in A\} = \{3k - 1 \mid k \in \{1, 2, \dots, 9\}\} \subseteq A \Rightarrow B = \{2, 5, 8\}$$

$$\Rightarrow B' - A' = \{\dots, -1, 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, \dots\} - \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\} = \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$$

پس مجموعه $B' - A'$ شامل دو عدد اول می‌باشد. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

نکته: (قوانین جبر مجموعه‌ها): اگر A و B دو مجموعه با مجموعه مرجع U باشند، آن‌گاه روابط زیر همواره برقرار است:

$$U' = \emptyset \quad (\text{پ}) \quad \emptyset' = U \quad (\text{ب}) \quad (A')' = A \quad (\text{آ})$$

$$A - B = A \cap B' \quad (\text{ج}) \quad A \cup A' = U \quad (\text{ث}) \quad A \cap A' = \emptyset \quad (\text{ت})$$

$$A - B = A - (A \cap B) \quad (\text{خ}) \quad (A \cap B)' = A' \cup B' \quad (\text{ح}) \quad (A \cup B)' = A' \cap B' \quad (\text{چ})$$

تذکر: روابط (چ) و (ح) به قوانین دمورگان معروف هستند.

مثال: اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعه مرجع، $A = \{1, 4, 5\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$ باشند، درستی تساوی‌های $A - B = A \cap B'$ و $(A \cap B)' = A' \cup B'$ را بررسی کنید.

پاسخ: ابتدا مجموعه‌های A' و B' را با اعضا می‌نویسیم:

$$A' = U - A = \{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}\} - \{1, 4, 5\} = \{2, 3\}$$

$$B' = U - B = \{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}\} - \{1, 2, 3\} = \{4, 5\}$$

$$\begin{cases} A - B = \{\cancel{1}, \cancel{4}, \cancel{5}\} - \{1, 2, 3\} = \{4, 5\} \\ A \cap B' = \{1, 4, 5\} \cap \{4, 5\} = \{4, 5\} \end{cases} \Rightarrow A - B = A \cap B'$$

$$\begin{cases} A \cap B = \{1\} \Rightarrow (A \cap B)' = U - (A \cap B) = \{2, 3, 4, 5\} \\ A' \cup B' = \{2, 3\} \cup \{4, 5\} = \{2, 3, 4, 5\} \end{cases} \Rightarrow (A \cap B)' = A' \cup B'$$

تست: اگر مجموعه مرجع، مجموعه اعداد صحیح، $A' = \{1, 2, 3\}$ و $B' = \{2, 3, 4, 5\}$ باشند، آن‌گاه $(A \cup B)'$ کدام مجموعه است؟

(۴) $\{4, 5\}$

(۳) $\{3, 4, 5\}$

(۲) $\{2, 4, 5\}$

(۱) $\{2, 3\}$

گزینه (۱) صحیح است. $\Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B' = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3\}$

پاسخ:

تست: اگر A و B دو مجموعه با مجموعه مرجع U باشند، حاصل $(B \cup \emptyset') \cap (U - A)'$ کدام است؟

(۴) U

(۳) A'

(۲) A

(۱) $\emptyset$

$$B \cup \emptyset' = B \cup U = U \quad (۱)$$

پاسخ: مجموعه $\emptyset'$ با U برابر است و در نتیجه داریم:

$$U - A' = A \Rightarrow (U - A')' = A' \quad (۲)$$

مجموعه $U - A'$ با مجموعه A برابر است و در نتیجه داریم:

گزینه (۳) صحیح است. $\Rightarrow U \cap A' = A' \Rightarrow (۱), (۲) \Rightarrow (۱)$

مثال: اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعه مرجع، $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2\}$ باشد:

(آ) آیا $B \subseteq A$ است؟ چرا؟

(ب) با به دست آوردن A' و B' ، چه رابطه‌ای بین A' و B' وجود دارد؟

پاسخ: (آ) هر عضو مجموعه B ، عضوی از مجموعه A است، بنابراین $B \subseteq A$

$$A' = U - A = \{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}\} - \{1, 2, 3\} = \{4, 5\}, B' = U - B = \{3, 4, 5\}$$

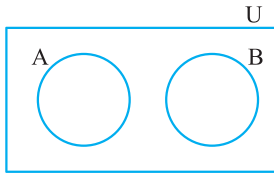
(ب)

هر عضو A' ، عضوی از B' است و در نتیجه $A' \subseteq B'$

نکته: اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $B' \subseteq A'$

مجموعه‌های جدا از هم

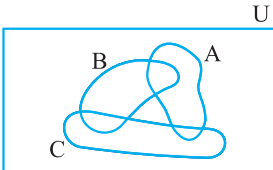
دو مجموعه جدا از هم: به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می‌گوییم. نمودار ون برای دو مجموعه جدا از هم به صورت مقابل است:



$$A \cap B = \{1, 2, 5\} \cap \{3, 4, 6\} = \emptyset$$

به عنوان مثال دو مجموعه $A = \{1, 2, 5\}$ و $B = \{3, 4, 6\}$ ، دو مجموعه جدا از هم هستند، زیرا:

نکته اگر A ، B و C سه مجموعه و $A \cap B \cap C = \emptyset$ باشد، آن گاه لزوماً سه مجموعه A ، B و C دو به دو جدا از هم نمی‌باشند. به شکل مقابل توجه کنید:



در واقع سه مجموعه A ، B و C دو به دو مجزا هستند هرگاه $A \cap B = \emptyset$ ، $A \cap C = \emptyset$ ، $B \cap C = \emptyset$

نکته اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، آن گاه $A \subseteq B'$ و $B \subseteq A'$

مثال: سه مجموعه دو به دو مجزا و نامتناهی A ، B و C از اعداد صحیح ارائه دهید که اجتماع آن‌ها برابر $\mathbb{Z}$ شود.

پاسخ: اگر $A = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$ ، $B = \{1, 3, 5, \dots\}$ و $C = \{2, 4, 6, \dots\}$ باشند، آن گاه A ، B و C سه مجموعه نامتناهی دو به دو جدا از هم‌اند و داریم:

$$A \cup B \cup C = \mathbb{Z}$$

نکته با توجه به این که باقی‌مانده عدد صحیح و دلخواه a بر عدد طبیعی n برابر عددی حسابی r است که در آن $0 \leq r < n$ ، بنابراین عدد صحیح a را می‌توان به صورت $a = nk + r$ نمایش داد که در آن $k \in \mathbb{Z}$ و $0 \leq r < n$. بر این اساس مجموعه اعداد صحیح را می‌توان به صورت اجتماع n مجموعه دوه‌دو جدا از هم و نامتناهی نمایش داد.

مثال: مجموعه اعداد صحیح را به صورت اجتماع چهار مجموعه نامتناهی دو به دو جدا از هم بنویسید.

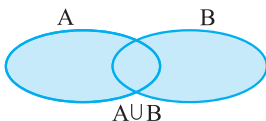
پاسخ: با استفاده از نکته قبل می‌توان نوشت:

$$A = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}, B = \{4k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$C = \{4k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}, D = \{4k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, \dots\}$$

A ، B ، C و D چهار مجموعه دو به دو مجزا هستند و $A \cup B \cup C \cup D = \mathbb{Z}$ می‌باشد.

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه متناهی

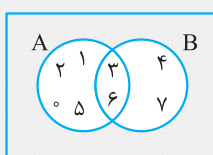


فرض کنید A و B دو مجموعه متناهی باشند، می‌دانیم نمودار ون اجتماع دو مجموعه A و B به صورت مقابل است:

عضوهای مشترک دو مجموعه A و B ، یعنی $A \cap B$ ، در هر یک از مجموعه‌های A و B قرار دارند. بنابراین برای به‌دست آوردن تعداد عضوهایی که در هر دو مجموعه (A یا B یا هر دو) قرار دارند، باید تعداد عضوهای مشترک A و B که دو بار به حساب می‌آیند، یعنی $n(A \cap B)$ را از $n(A) + n(B)$ کم کنیم.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

پس:



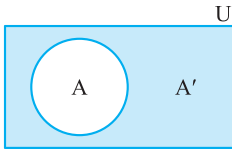
مثال: با توجه به نمودار ون مقابل، $n(A \cup B)$ را به‌دست آورید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 6 + 4 - 2 = 8$$

پاسخ:

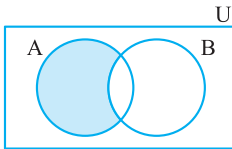
نکته اگر A و B دو مجموعه با مجموعه مرجع و متناهی U باشند، آن‌گاه:

(۱) تعداد اعضای A که به مجموعه A تعلق ندارند برابر است با:



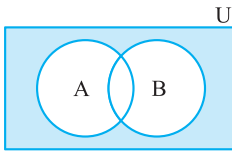
$$n(A') = n(U) - n(A)$$

(۲) تعداد اعضای A که به مجموعه A تعلق دارند و به مجموعه B تعلق ندارند (فقط به مجموعه A تعلق دارند)، برابر است با:



$$n(A - B) = n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B)$$

(۳) تعداد اعضای A که نه به مجموعه A تعلق داشته باشند و نه به مجموعه B ، برابر است با:



$$n(A' \cap B') \stackrel{\text{قانون دمورگان}}{=} n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$

تذکر اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، آن‌گاه:

$$۱) n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

$$۲) n(A - B) = n(A)$$

مثال: تعداد بیماران یک بیمارستان ۶۳ نفر است که از این افراد، ۳۷ نفر مرد هستند و ۲۰ نفر برای عمل جراحی بستری شده‌اند. اگر ۱۲ نفر از بین بستری شدگان برای عمل جراحی، مرد باشند، در این صورت چند نفر از ۶۳ بیمار:

(آ) یا مرد هستند و یا برای عمل جراحی بستری شده‌اند؟ (ب) مرد هستند ولی برای عمل جراحی بستری نشده‌اند؟

(پ) نه مرد هستند و نه برای عمل جراحی بستری شده‌اند؟

پاسخ: مجموعه تمام بیماران بیمارستان را با U ، مجموعه بیماران مرد را با A و مجموعه افرادی که برای عمل جراحی بستری شده‌اند را با B نشان می‌دهیم. طبق فرض داریم:

$$n(U) = 63, n(A) = 37, n(B) = 20, n(A \cap B) = 12$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 37 + 20 - 12 = 45$$

(آ) تعداد عضوهای مجموعه $A \cup B$ مطلوب است، پس:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 37 - 12 = 25$$

(ب) تعداد عضوهای مجموعه $A - B$ مدنظر است، پس:

(پ) تعداد عضوهای مجموعه $A' \cap B' = (A \cup B)'$ مدنظر است، پس:

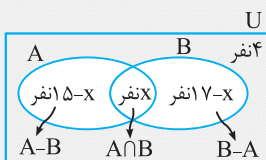
$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) \stackrel{(۱)}{=} 63 - 45 = 18$$

مثال: در یک کلاس ۲۷ نفری، تعداد ۱۵ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه نقاشی و ۱۷ نفر آن‌ها عضو گروه طراحی هستند. اگر ۴ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو گروه نباشند، مطلوب است تعداد دانش‌آموزانی که:

(آ) عضو هر دو گروه باشند. (ب) عضو گروه نقاشی باشند ولی عضو گروه طراحی نباشند.

پاسخ: مجموعه تمام دانش‌آموزان عضو گروه نقاشی را با A ، مجموعه تمام دانش‌آموزان عضو گروه طراحی را با B و مجموعه مرجع را با U نمایش می‌دهیم.

روش اول: در نمودار ون زیر، دو مجموعه A و B سطح درون U را به چهار ناحیه جداگانه تقسیم کرده‌اند که ۴ نفر طبق فرض در خارج مجموعه $A \cup B$ قرار دارند. فرض کنیم x نفر در اشتراک دو مجموعه A و B باشند، در این صورت $15 - x$ نفر در مجموعه $A - B$ و $17 - x$ نفر در مجموعه $B - A$ هستند. بنابراین:



$$n(U) = 27 \Rightarrow (15 - x) + x + (17 - x) + 4 = 27 \Rightarrow 36 - x = 27 \Rightarrow x = 9$$

(آ) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هر دو گروه هستند، برابر $x = 9$ نفر می‌باشد.

(ب) تعداد اعضای مجموعه $A - B$ مطلوب است، پس

$$n(A - B) = 15 - x = 15 - 9 = 6$$

روش دوم:

طبق فرض $n(A) = 15$ ، $n(B) = 17$ و $n(A \cup B) = 27 - 4 = 23$ می‌باشد.

$$(آ) n(A \cap B) \text{ جواب مسئله است: } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 23 = 15 + 17 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 32 - 23 = 9$$

$$(ب) n(A - B) \text{ جواب مسئله است: } n(A - B) = n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B) = 15 - 9 = 6$$

تست: اگر $n(A) = 17$ ، $n(A \cap B) = 4$ و $n(A \cup B) = 30$ باشند، $n(B)$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸
- پاسخ:** $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 30 = 17 + n(B) - 4$
 $\Rightarrow n(B) + 13 = 30 \Rightarrow n(B) = 30 - 13 = 17 \Rightarrow$ گزینه (۳) صحیح است.

تست: در یک آموزشگاه هنری، تعداد افرادی که در کلاس نقاشی شرکت کرده‌اند، ۲ برابر تعداد افرادی است که در کلاس تئاتر شرکت کرده‌اند. اگر تعداد افرادی که در کلاس نقاشی شرکت کرده‌اند ولی در کلاس تئاتر شرکت نکرده‌اند، ۸ نفر و تعداد افرادی که در کلاس تئاتر شرکت کرده‌اند ولی در کلاس نقاشی شرکت نکرده‌اند ۱ نفر باشد، چند نفر حداقل در یکی از این دو کلاس شرکت کرده‌اند؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۵ (۳) ۱۴ (۴) ۱۲
- پاسخ:** مجموعه‌های A و B را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:
 A : مجموعه افرادی که در کلاس نقاشی شرکت کرده‌اند،
 B : مجموعه افرادی که در کلاس تئاتر شرکت کرده‌اند.
 باید تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ را به دست بیاوریم. طبق فرض داریم:

$$\begin{aligned} n(A) &= 2n(B), \quad n(A - B) = 8, \quad n(B - A) = 1 \\ n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) = 8 \xrightarrow{n(A)=2n(B)} 2n(B) - n(A \cap B) = 8 \quad (1) \\ n(B - A) &= n(B) - n(A \cap B) = 1 \quad (2) \\ (1), (2) &\Rightarrow \begin{cases} 2n(B) - n(A \cap B) = 8 \\ -n(B) + n(A \cap B) = -1 \end{cases} \Rightarrow n(B) = 7, \quad n(A \cap B) = 6 \\ &\Rightarrow n(A) = 2n(B) = 14 \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 14 + 7 - 6 = 15 \Rightarrow \end{aligned}$$

گزینه (۲) صحیح است.

تعداد عضوهای اجتماع سه مجموعه متناهی

اگر A ، B و C سه مجموعه متناهی باشند، آن‌گاه:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

تست: اگر $n(A \cap B) = 4$ ، $n(A \cap C) = n(B \cap C) = 0$ ، $n(A) = 10$ ، $n(B) = 4$ و $n(C) = 7$ باشد، مقدار $n(A \cup B \cup C)$ کدام است؟

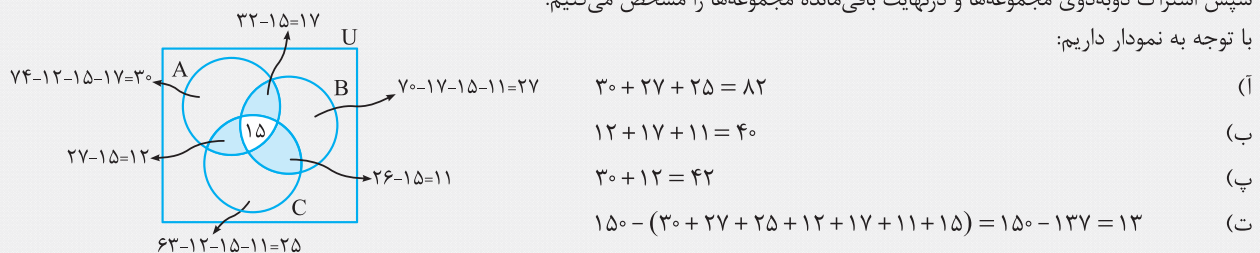
- (۱) ۲۱ (۲) ۱۷ (۳) ۱۴ (۴) ۱۳
- پاسخ:** $A \cap B \cap C = \emptyset \Rightarrow n(A \cap B \cap C) = 0$
 $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
 $= 10 + 4 + 7 - 4 - 0 - 0 + 0 = 17 \Rightarrow$ گزینه (۲) صحیح است.

مثال: در یک نظرسنجی از ۱۵۰ نفر، مشخص شده است که:

۷۴ نفر مجله A ، ۷۰ نفر مجله B و ۶۳ نفر مجله C را می‌خوانند. همچنین ۳۲ نفر مجله‌های A و B ، ۲۶ نفر مجله‌های B و C ، ۲۷ نفر مجله‌های A و C و ۱۵ نفر هر سه مجله A ، B و C را می‌خوانند. مطلوب است تعیین تعداد افرادی از این مجموعه که:
 (آ) دقیقاً یکی از سه مجله A یا B یا C را می‌خوانند.
 (پ) مجله A را می‌خوانند ولی مجله B را نمی‌خوانند.
 (ت) هیچ‌یک از این سه مجله را نمی‌خوانند.

پاسخ: مجموعه‌های A ، B و C را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A : افرادی که مجله A را می‌خوانند. B : افرادی که مجله B را می‌خوانند. C : افرادی که مجله C را می‌خوانند. نمودار ون سه مجموعه A ، B و C به صورت زیر است که با توجه به اطلاعات مسئله، تعداد عضوهای هر قسمت را به دست می‌آوریم. برای این منظور، ابتدا تعداد اعضای اشتراک سه مجموعه، سپس اشتراک دوبه‌دوی مجموعه‌ها و در نهایت باقی‌مانده مجموعه‌ها را مشخص می‌کنیم:





مجموعه، الگو و دنباله



مجموعه‌ها

۱. مجموعه $\{\{a, b\}, \{a, b\}, \{b, a\}, \emptyset, \{\}\}$ چند عضو دارد؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
۲. اگر $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ باشد، کدام نادرست است؟
 (۱) $\{\} \in A$ (۲) $\emptyset \subseteq A$ (۳) $\{1, 2\} \in A$ (۴) $\{1, 2\} \subseteq A$
۳. اگر $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) $\emptyset \subseteq A$ (۲) $\{\emptyset\} \in A$ (۳) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$ (۴) $n(A) = 2$
۴. اگر مجموعه C به صورت $\{x \in P \mid x - 1 < 3 \leq x\}$ تعریف شده باشد که در آن منظور از P مجموعه اعداد اول می‌باشد، کدام گزینه درست است؟
 (۱) $31 \in C$ (۲) $5 \in C$ (۳) $13 \notin C$ (۴) $29 \in C$
۵. اگر $A = \{4, 2x - y, 3\}$ و $B = \{3, 2^{2x+3y}, -14\}$ دو مجموعه باشند و $A = B$ ، مقدار $x + y$ کدام است؟
 (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) ۶
۶. کدام یک از اعداد زیر به مجموعه $A = \{2^x \times 3^y \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 5\}$ متعلق است؟
 (۱) ۸۱ (۲) ۴۸ (۳) ۱۶۴ (۴) ۱۴۴
۷. کدام یک از اعداد زیر به مجموعه $A = \{5, -1, -7, \dots, -43\}$ متعلق نیست؟
 (۱) -۲۵ (۲) -۱۳ (۳) -۳۷ (۴) -۲۱
۸. اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 = 0\}$ ، $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 - 2x = 0\}$ و $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 2\}$ باشند، کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) $A \subseteq C$ (۲) $B \not\subseteq C$ (۳) $A \not\subseteq B$ (۴) $B \notin C$
۹. اگر $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ و $C = \{\{1, 2\}, \{1, 2\}, \{1\}\}$ باشند، کدام بیان در مورد این مجموعه‌ها نادرست است؟ (سراسری ریاضی فایز از کشور-۹۷)
 (۱) $B \subseteq C$ (۲) $A \in B$ (۳) $A \subseteq B$ (۴) $B \in C$
۱۰. مجموعه‌های $A = \{2\}$ ، $B = \{3, 5, \{2\}\}$ و $C = \{\{\{2\}, 3, 5\}, 2\}$ مفروض‌اند. کدام بیان در مورد آن‌ها نادرست است؟ (سراسری ریاضی-۹۵)
 (۱) $A \in B$ (۲) $A \in C$ (۳) $B \in C$ (۴) $A \subset C$
۱۱. اگر $A = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ ، $B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$ و $C = \{1, 2, 3\}$ باشد، کدام رابطه درست است؟ (سراسری ریاضی فایز از کشور-۹۴)
 (۱) $A - B = C$ (۲) $B - C = \emptyset$ (۳) $B - C = \{1, 2\}$ (۴) $A - B = \{C\}$
۱۲. هرگاه $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، برای مجموعه X چند جواب وجود دارد؟
 (۱) ۳۲ (۲) ۶۴ (۳) ۱۲۸ (۴) ۲۵۶
۱۳. اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 5\}$ باشد، به جای X در رابطه $A \cap B \subseteq X \subseteq A \cup B$ چند مجموعه متفاوت می‌توان قرار داد؟
 (۱) ۴ (۲) ۱۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

بازه‌ها

۱۴. کدام گزینه درست است؟
 (۱) $-2 \in \{-3, 2\}$ (۲) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\} = (0, 1)$ (۳) $\sqrt{2} \in (1, 3) \cap [2, +\infty)$ (۴) $\{-1, \pi\} \subseteq [-1, 4)$
۱۵. کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2), \left[\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right] \subseteq (0, 1)$ (۲) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ یا } x \geq 3\} = \mathbb{R} - (-1, 3)$ (۳) $(-3, 0) \cup (-2, 5] = (-3, 5]$ (۴) $[2, 4) - (3, +\infty) = [4, +\infty)$

۱۶. حاصل عبارت $(-2, 1) \cap [-1, 2]$ کدام است؟
 (۱) $[-1, 1]$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $[-2, -1]$ (۴) $(-2, 2)$
۱۷. حاصل عبارت $(0, 2) - [-2, 3]$ کدام است؟
 (۱) $[-2, -1] \cup [2, 3]$ (۲) $(-2, 0) \cup (2, 3)$ (۳) $[-2, 0) \cup [2, 3]$ (۴) $(-2, 0) \cup (2, 3)$
۱۸. اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq 2x - 1 < 7\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 2 < 8\}$ باشد، حاصل $A - B$ کدام است؟
 (۱) $(2, 4)$ (۲) $[2, 4)$ (۳) $(-\infty, 1)$ (۴) $(-\infty, 1]$
۱۹. اگر $A = (-2, 5]$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$ ، در این صورت مجموعه $A - B$ برابر کدام است؟
 (۱) $\emptyset$ (۲) $(-2, 2)$ (۳) $(2, 5]$ (۴) $[2, 5]$
۲۰. اگر $A = (-\infty, 2]$ ، $B = [-3, 1)$ و $C = (-1, +\infty)$ باشد، حاصل $B \cup (A \cap C)$ کدام است؟
 (۱) $[-3, 2]$ (۲) $(-3, 2)$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $[-3, 1)$
۲۱. اگر $m + 1 \in [-1, 5]$ ، حدود m کدام است؟
 (۱) $0 \leq m \leq 3$ (۲) $-1 \leq m \leq 2$ (۳) $-3 \leq m \leq 0$ (۴) $1 \leq m \leq 4$
۲۲. اگر عدد ۱ به بازه $[4, 3m + 1, 2m]$ تعلق داشته باشد، آنگاه:
 (۱) $m \in [-2, 4)$ (۲) $m \in [-1, 1)$ (۳) $m \in (0, 4]$ (۴) $m \in (-2, 0]$
۲۳. بازه $(5, b]$ شامل فقط سه عدد مربع کامل است. حداکثر مقدار طبیعی b کدام است؟
 (۱) ۲۵ (۲) ۲۶ (۳) ۳۶ (۴) ۳۷
۲۴. اگر بازه $(-1, 2a - 1)$ شامل پنج عدد صحیح باشد، محدوده a کدام است؟
 (۱) $2/5 \leq a \leq 3$ (۲) $2/5 < a < 3$ (۳) $2/5 \leq a < 3$ (۴) $2/5 < a \leq 3$
۲۵. اگر $[1, a] \cup [b, 5] = [-1, 7]$ باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
۲۶. اگر $A_n = (n - 2, n + 3)$ ، $n \in \mathbb{N}$ باشد، $A_1 - (A_2 \cap A_3)$ کدام است؟
 (۱) $(4, 5)$ (۲) $(4, 5]$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $(-1, 1]$
۲۷. اگر $A_n = (-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n})$ به صورت بازه باشد، مجموعه $A_3 - (A_2 \cup A_4)$ برابر کدام بازه است؟
 (۱) $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (۲) $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ (۳) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (۴) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$
۲۸. اگر $A_i = [-i, \frac{9-i}{2}]$ ، $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ، آنگاه مجموعه $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_4)$ کدام است؟
 (۱) $(-2, -1) \cup (1, 2)$ (۲) $[-2, -1] \cup [1, 2]$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) $\emptyset$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۲۹. کدام یک از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟
 (۱) مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان
 (۲) مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون
 (۳) مجموعه کسرهای مثبت با صورت ۱
 (۴) مجموعه مقسوم علیه‌های یک عدد طبیعی
۳۰. کدام یک از مجموعه‌های زیر بی‌پایان است؟
 (۱) مجموعه تمام افراد روی کره زمین
 (۲) مجموعه تمام اتومبیل‌های موجود در جهان
 (۳) مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۵
 (۴) مجموعه تمام اعداد اول زوج
۳۱. اگر $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{W}$ و $\mathbb{N}$ به ترتیب مجموعه‌های اعداد طبیعی، حسابی و صحیح باشند، کدام مجموعه متناهی است؟
 (۱) $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ (۲) $\mathbb{W} \cap \mathbb{N}$ (۳) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{W}$ (۴) $\mathbb{W} - \mathbb{N}$
۳۲. اگر A مجموعه متناهی و B مجموعه نامتناهی باشد، مجموعه $A - B$ چگونه است؟
 (۱) بی‌پایان (۲) بی‌پایان (۳) تهی (۴) غیرقابل تعریف
۳۳. کدام مجموعه متناهی (باپایان) است؟
 (۱) $\{x \mid x \in \mathbb{N}; x^2 > 16\}$ (۲) $\{x \mid x \in \mathbb{N}; x \leq 12\}$ (۳) $\{x \mid x \in \mathbb{Z}; x > 1000\}$ (۴) $\{x \mid x \in \mathbb{Z}; x < 1000\}$
۳۴. کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟
 (۱) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (۲) مجموعه اعداد گویا در بازه $(1, 2)$
 (۳) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 1000\}$ (۴) مجموعه اعداد اول فرد

(برگرفته از کتاب درسی)

۳۵. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) بین دو عدد گویای $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{4}$ ، بی شمار عدد گویا وجود دارد.
- (۲) اگر مجموعه A یک زیرمجموعه نامتناهی داشته باشد، آن گاه A نیز نامتناهی است.
- (۳) اگر هر زیرمجموعه A متناهی باشد، آن گاه مجموعه A متناهی است.
- (۴) اگر مجموعه‌ای نامتناهی را به صورت اجتماع دو مجموعه جدا از هم بنویسیم که یکی از آن‌ها نامتناهی باشد، آن گاه دیگری حتماً متناهی است.

قسمت دوم: متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم و ...

مجموعه‌های مرجع و متمم

۳۶. اگر مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ مجموعه مرجع، E مجموعه اعداد طبیعی زوج و O مجموعه اعداد طبیعی فرد باشد، کدام رابطه نادرست است؟

$$E \cap O = O \quad (1) \quad E \cup O = \mathbb{N} \quad (2) \quad (E \cup O)' = \emptyset \quad (3) \quad E' \cap O = O \quad (4)$$

۳۷. اگر مجموعه‌های A و B هردو زیرمجموعه اعداد صحیح باشند به طوری که A مجموعه‌ای نامتناهی، B مجموعه‌ای متناهی و $C \subseteq A$ باشد، در این صورت کدام مجموعه قطعاً نامتناهی است؟

$$A \cap B' \quad (1) \quad B - A \quad (2) \quad B \cup C \quad (3) \quad A \cap C' \quad (4)$$

۳۸. اگر A مجموعه متناهی و B مجموعه نامتناهی باشد، آن گاه کدام مجموعه لزوماً متناهی است؟

$$A \cup B \quad (1) \quad A' \cup B \quad (2) \quad A \cap B' \quad (3) \quad A' \cap B \quad (4)$$

۳۹. اگر A بازه متناظر با مجموعه جواب نامعادله $x - 6 \leq 2x + 3 < x$ و $B = (-\infty, -2) \cup [4, +\infty)$ و $\mathbb{R}$ مجموعه مرجع باشد، حاصل $A \cap B'$ کدام است؟

$$(-3, 4) \quad (1) \quad (-3, -2) \quad (2) \quad [-2, 1] \quad (3) \quad (-2, 1] \quad (4)$$

۴۰. اگر مجموعه اعداد حسابی ($\mathbb{W}$) مجموعه مرجع باشد و $A = \{2x \mid x \in \mathbb{W}\}$ ، آن گاه A' برابر کدام است؟

$$\{2x \mid x \in \mathbb{W}'\} \quad (1) \quad \{2x - 1 \mid x \in \mathbb{W}\} \quad (2) \quad \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{W}\} \quad (3) \quad \{x - 1 \mid x \in \mathbb{W}\} \quad (4)$$

۴۱. اگر $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 40\}$ و $A = \{x \in U \mid 7 \leq x \leq 25\}$ ، آن گاه مجموعه $A' \cup U$ چند عضو دارد؟

$$40 \quad (1) \quad 39 \quad (2) \quad 23 \quad (3) \quad 19 \quad (4)$$

۴۲. اگر $\mathbb{N}$ مجموعه مرجع، $A' = \{x \mid x \geq 2\}$ و $B' = \{x \mid x \geq 5\}$ باشد، مجموعه $A \cup B$ کدام است؟

$$\{1, 2\} \quad (1) \quad \{1, 2, 3, 4\} \quad (2) \quad \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad (3) \quad \emptyset \quad (4)$$

۴۳. اگر $A' = \{1, 2, 4\}$ ، $B' = \{2, 3\}$ و مجموعه مرجع اعداد طبیعی فرض شود، آن گاه $(A \cap B)'$ کدام است؟

$$\{1, 2, 3, 4\} \quad (1) \quad \{1, 4, 3\} \quad (2) \quad \{1, 4\} \quad (3) \quad \{2\} \quad (4)$$

۴۴. اگر مجموعه $\mathbb{N}$ مرجع، $A = \{x \mid x \geq 4\}$ و $B = \{x \mid x < 2\}$ باشد، آن گاه حاصل $(A \cup B)'$ برابر کدام است؟

$$\{1, 2\} \quad (1) \quad \{3\} \quad (2) \quad \{2, 3\} \quad (3) \quad \{1, 2, 3\} \quad (4)$$

۴۵. اگر $U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ، $A \cap B = \{2, 3\}$ ، $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$ ، $A = \{1, 4\}$ و $B = \{5, 7, 9\}$ باشند، مجموعه A' کدام است؟

$$\{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad (1) \quad \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad (2) \quad \{5, 6, 7, 8, 9\} \quad (3) \quad \{5, 7, 8, 9\} \quad (4)$$

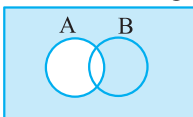
۴۶. اگر $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ مجموعه مرجع، $A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ، B مجموعه اعداد فرد و C مجموعه اعداد مربع کامل باشند، مجموعه $(C \cup A') - (C' - B)$ چند عضو دارد؟

$$2 \quad (1) \quad 3 \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad 5 \quad (4)$$

۴۷. با توجه به نمودار و ن مقابل، مجموعه رنگی کدام است؟

$$A' \quad (1) \quad B - A \quad (2) \quad A' \cup B \quad (4) \quad B' - A \quad (3)$$

(سراسری ریاضی)



جبر مجموعه‌ها

۴۸. اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، حاصل $(A \cap B') - A$ کدام است؟

$$A \quad (1) \quad A' \quad (2) \quad B \quad (3) \quad \emptyset \quad (4)$$

۴۹. حاصل $[A \cup (A' \cap U)] \cup B$ در کدام گزینه آمده است؟ (U مجموعه مرجع است.)

$$A \quad (1) \quad U \quad (2) \quad B \quad (3) \quad \emptyset \quad (4)$$

۵۰. اگر U مجموعه مرجع و A زیرمجموعه دلخواهی از آن باشد، ساده شده مجموعه $(A \cap U)' \cup A - (A' - U)'$ کدام است؟

- (۱) A (۲) A' (۳) U (۴) $\emptyset$

۵۱. اگر A و B دو مجموعه غیرتهی و $B - A = B$ باشد، حاصل $(A \cap B)' \cup (A - B)$ کدام است؟

- (۱) B (۲) U (۳) $\emptyset$ (۴) A

۵۲. متمم مجموعه $[(A \cap B') \cup (A' \cup B)]$ کدام است؟

- (۱) $A - B$ (۲) U (۳) $B - A$ (۴) $\emptyset$

۵۳. متمم مجموعه $(B - A)' - A$ ، نسبت به مجموعه مرجع کدام است؟ (سراسری ریاضی فارغ از کشور - ۸۸)

- (۱) $A \cup B$ (۲) $A \cap B$ (۳) A (۴) B

۵۴. اگر $A \subseteq B$ ، آنگاه کدام گزاره نادرست است؟ (سراسری ریاضی)

- (۱) $B' \subseteq A'$ (۲) $A' \cup B = U$ (۳) $A \cap B' = \emptyset$ (۴) $A' \cap B = \emptyset$

۵۵. اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، $(A \cap B') - (B - A)$ برابر کدام مجموعه است؟ (سراسری ریاضی فارغ از کشور - ۹۱)

- (۱) B' (۲) $\emptyset$ (۳) $A \cap B$ (۴) $A - B$

شمارش اعضای مجموعه‌ها

۵۶. اگر $n(U) = 30$ ، $n(A) = 12$ ، $n(B) = 20$ و $n(A \cap B) = 7$ باشد، حاصل $n(A' \cap B')$ کدام است؟

- (۱) ۲۳ (۲) ۷ (۳) ۵ (۴) ۳

۵۷. اگر $n(A) + n(B) = 3n(A \cap B)$ باشد، حاصل $\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۳

۵۸. اگر $n(A - B) = 2n(A \cap B)$ و $n(B) = 2n(A \cap B)$ باشند، حاصل $\frac{n(A \cup B)}{n(B - A)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) ۴

۵۹. اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه ۲۰ عضوی U باشند به طوری که $n(A - B) = 6$ ، $n(B \cap A') = 4$ و $n(A' \cap B') = 7$ باشد، مجموعه A چند عضو دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۶۰. در یک کلاس ۳۰ نفری، ۲۴ نفر به فوتبال و ۱۸ نفر به والیبال علاقمندند و ۴ نفر نیز به هیچ یک از دو بازی علاقه‌ای ندارند. در این کلاس چند نفر فقط به والیبال علاقمند هستند؟ (برگرفته از کتاب درسی)

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۶ (۳) ۶ (۴) ۲

۶۱. از ۵۱ دانش‌آموز یک دبیرستان، ۳۵ نفر در کلاس ادبیات، ۳۱ نفر در کلاس عربی و ۲۳ نفر در هر دو کلاس شرکت کرده‌اند. چند نفر در هیچ یک از دو کلاس شرکت ننموده‌اند؟ (سراسری ریاضی)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۶۲. در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه‌دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟ (سراسری ریاضی - ۹۸)

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸

۶۳. در یک کلاس ۴۲ نفری، ۱۵ نفر عضو گروه آزمایشگاهی و ۱۲ نفر عضو گروه فوتبال و ۷ نفر آنان عضو هر دو گروه هستند. چند نفر آنان عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟ (سراسری ریاضی فارغ از کشور - ۹۸)

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲

۶۴. از یک کلاس ۲۳ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۳ نفر عضو تیم والیبال می‌باشند. با فرض آن که هر دانش‌آموز حداقل در یک تیم عضو باشد، چند نفر دقیقاً عضو یکی از این دو تیم هستند؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۶۵. در یک مجموعه با ۴۱ نفر، اگر یک نفر از افرادی که ورزش می‌کنند ولی فعالیت هنری ندارند، کم کنیم و $\frac{3}{5}$ آن‌ها را در نظر بگیریم، حاصل برابر تعداد افرادی است که فعالیت هنری دارند ولی ورزش نمی‌کنند. اگر ۳ نفر در هیچ یک از این دو رشته فعالیت نکنند و ۵ نفر در هر دو رشته فعالیت کنند، چند نفر در رشته ورزشی فعالیت می‌کنند؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۲۶ (۳) ۲۳ (۴) ۲۱

۶۶. مجموعه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ و $A - B$ به ترتیب ۵، ۲ و ۲ عضو دارند. مجموعه $B - A$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۶۷. اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند، تعداد اعضای $A \cup B$ سه برابر تعداد اعضای B ، تعداد اعضای A ، $\frac{5}{3}$ برابر تعداد اعضای B و تعداد اعضای A که به هر دو مجموعه A و B تعلق دارند برابر ۳ باشد، آنگاه تعداد اعضای A که حداقل به یکی از دو مجموعه A یا B تعلق دارد کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۶۸. اجتماع دو مجموعه A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هریک از مجموعه‌های A و B ، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه جدید کدام است؟

- (۱) ۲۲ (۲) ۲۳ (۳) ۲۴ (۴) ۲۶

۶۹. اجتماع دو مجموعه A و B ، ۲۵ عضو دارد. به مجموعه A ، ۱۰ عضو جدید اضافه کرده‌ایم، به اشتراک آن‌ها ۹ عضو اضافه شده است. اجتماع مجموعه B و مجموعه جدید حاصل از A چند عضو دارد؟

(سراسری ریاضی)

- (۱) ۲۵ (۲) ۲۶ (۳) ۳۴ (۴) ۳۵

۷۰. مجموعه A دارای ۳۶ عضو و مجموعه B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آن‌ها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه A حذف شود، از اشتراک آن‌ها ۹ عضو حذف می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع مجموعه جدید با مجموعه B کدام است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۱ (۳) ۴۲ (۴) ۴۵

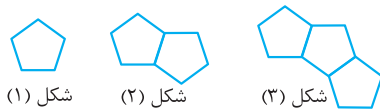
۷۱. اگر مجموعه مرجع، مجموعه تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ باشد، چند عدد وجود دارد که نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۴۷ (۳) ۵۰ (۴) ۵۳

قسمت سوم: الگو، دنباله و دنباله حسابی

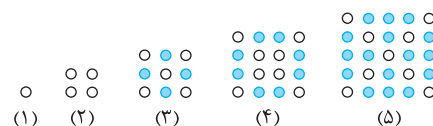
الگویابی

۷۲. با توجه به الگوی مقابل، در شکل چندم این الگو، ۴۹ پاره خط وجود دارد؟



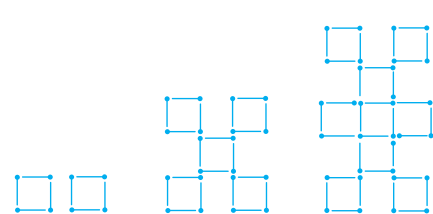
- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

۷۳. با توجه به الگوی مقابل، تعداد دایره‌های توخالی در مرحله دهم کدام است؟



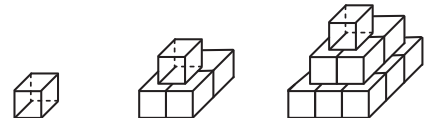
- (۱) ۲۰ (۲) ۱۹ (۳) ۱۸ (۴) ۱۷

۷۴. طبق الگوی مقابل، تعداد چوب کبریت‌های مرحله دوازدهم کدام است؟



- (۱) ۹۷ (۲) ۱۰۳ (۳) ۱۴۰ (۴) ۱۲۸

۷۵. با توجه به الگوی مقابل، در شکل ششم چند مکعب وجود دارد؟



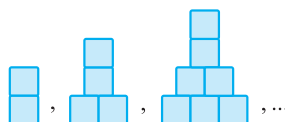
- (۱) ۹۶ (۲) ۹۱ (۳) ۱۳۹ (۴) ۱۳۶

۷۶. با توجه به الگوی مقابل، در شکل پانزدهم چند ستاره وجود دارد؟



- (۱) ۲۰۱ (۲) ۲۱۹ (۳) ۲۲۹ (۴) ۲۴۹

۷۷. در الگوی مقابل، جمله بیستم از چند مربع تشکیل یافته است؟



- (۱) ۲۰۰ (۲) ۲۰۱ (۳) ۲۱۰ (۴) ۲۱۱

۸۹. جمله $(2n - 3)$ ام یک دنباله برابر $n^2 + n$ است. جمله هفتم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۴۹ (۲) ۳۶ (۳) ۳۰ (۴) ۲۵

۹۰. کدام یک از دنباله‌های زیر، می‌تواند جملات یک دنباله درجه دوم باشد؟

- (۱) $205, 811, \dots$ (۲) $104, 9017, \dots$ (۳) $3, 12, 2, -3, \dots$ (۴) $1, 2, 6, 13, \dots$

۹۱. در دنباله درجه دوم $1, 8, 21, \dots$ ، جمله دهم چقدر از جمله پنجم بیش تر است؟

- (۱) ۲۰۵ (۲) ۲۱۰ (۳) ۲۱۵ (۴) ۲۲۰

۹۲. کوچک‌ترین جمله دنباله با جمله عمومی $a_n = n^2 - 20n + 1$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱۰۰ (۳) -۹۹ (۴) -۴۹

۹۳. اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شماره آن دسته باشد. $\dots, (7, 8, 9, 10), (4, 5, 6), (2, 3), (1)$

(سراسری ریاضی فارغ از کشور- ۹۴)

مجموع جملات در دسته بیستم کدام است؟

- (۱) ۴۰۱۰ (۲) ۴۰۲۰ (۳) ۴۰۳۰ (۴) ۴۰۴۰

۹۴. اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته برابر شماره آن دسته باشد. $\dots, (7, 9, 11), (3, 5), (1)$

(سراسری تجربی- ۹۴)

مجموع دو جمله اول و آخر دسته سی‌ام کدام است؟

- (۱) ۱۷۰۰ (۲) ۱۷۵۰ (۳) ۱۸۰۰ (۴) ۱۸۵۰

۹۵. اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، یعنی $\dots, \{7, 9, 11\}, \{3, 5\}, \{1\}$. در

(سراسری ریاضی فارغ از کشور- ۹۹)

این صورت جمله آخر واقع در دسته شماره چهل، کدام است؟

- (۱) ۱۵۶۳ (۲) ۱۵۸۹ (۳) ۱۶۳۹ (۴) ۱۶۵۱

۹۶. اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، یعنی $\dots, \{4, 5, 6\}, \{2, 3\}, \{1\}$. مجموع

(سراسری ریاضی- ۹۹)

اعداد واقع در دسته بیستم، کدام است؟

- (۱) ۴۱۲۰ (۲) ۴۰۲۰ (۳) ۴۰۱۰ (۴) ۳۹۸۰

دنباله بازگشتی

۹۷. جمله نهم دنباله $1, 3, 4, 7, \dots$ کدام است؟

- (۱) ۴۷ (۲) ۷۶ (۳) ۱۰۵ (۴) ۱۱۹

۹۸. در دنباله a_n ، جمله اول آن برابر ۲ و $a_{n+1} = 2a_n + n$ می‌باشد. جمله سوم دنباله کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۴ (۳) ۱۲ (۴) ۱۰

۹۹. رابطه $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ بین جملات یک دنباله برقرار است. اگر $u_1 = u_2 = 1$ باشد، جمله نهم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۴ (۳) ۳۳ (۴) ۳۲

۱۰۰. اگر جملات دنباله a_n از رابطه بازگشتی $a_n = xa_{n-1} + ya_{n-2}$ به دست آید و جملات این دنباله به صورت $\dots, 12, 5, 2, 1$ باشد، جمله ششم

این دنباله کدام است؟

- (۱) ۷۰ (۲) ۶۰ (۳) ۵۸ (۴) ۶۵

۱۰۱. اگر $u_n = 2u_{n-2} + n^2$ و جملات اول و دوم به ترتیب برابر ۱- و ۱ باشند، جمله ششم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۵۸ (۲) ۸۵ (۳) ۷۲ (۴) ۲۷

۱۰۲. در یک دنباله اعداد، $a_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$ داریم $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ، جمله هشتم این دنباله کدام است؟

(سراسری تجربی- ۹۵)

- (۱) ۱۲۷ (۲) ۱۵۹ (۳) ۲۴۷ (۴) ۲۵۵

۱۰۳. در یک دنباله اعداد، $a_1 = 3$ و برای هر $n \geq 2$ داریم $a_n = 2a_{n-1} - 2$ ، حاصل $a_8 - a_7$ ، کدام است؟

(سراسری فارغ از کشور- ۹۵)

- (۱) ۳۲ (۲) ۴۸ (۳) ۵۶ (۴) ۶۴

۱۰۴. اگر در دنباله بازگشتی $104, 10, 22, \dots$ و از جمله سوم، هر جمله مجموع مضرب‌های ثابتی از دو جمله قبلی خود باشند، جمله هفتم این

دنباله کدام است؟

- (۱) ۹۸ (۲) ۱۷۲ (۳) ۱۹۰ (۴) ۲۰۵

دنباله حسابی

۱۰۵. کدام یک از دنباله‌های زیر، یک دنباله حسابی است؟

- (۱) $t_n = 8n + 1$ (۲) $t_n = n^2$ (۳) $t_n = \frac{1}{n}$ (۴) $t_n = n^2 + n$

۱۲۴. در یک دنباله حسابی $t_m = n$ ، $t_n = m$ و $m \neq n$ می باشد. قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱) $n - m$ (۲) -1 (۳) $m - n$ (۴) 1

۱۲۵. در یک دنباله حسابی با جمله عمومی t_n ، $t_n + t_{n+1} = 4n$ می باشد. جمله پنجم دنباله کدام است؟

- (۱) 6 (۲) 8 (۳) 9 (۴) 11

۱۲۶. جمله دوم یک دنباله حسابی با جمله عمومی $t_n = (a - 2b)n^2 + an + 3 + b$ برابر ۱۳ است. جمله دهم این دنباله کدام است؟

- (۱) 45 (۲) 47 (۳) 51 (۴) 52

۱۲۷. اگر به قدرنسبت یک دنباله حسابی ۳ واحد اضافه کنیم، به جمله دهم این دنباله چند واحد اضافه می شود؟

- (۱) 30 (۲) 27 (۳) 24 (۴) 21

۱۲۸. در یک دنباله حسابی مجموع دو جمله اول برابر $7/5$ و مجموع جملات سوم و چهارم برابر $5/5$ است. قدرنسبت کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۱۲۹. مجموع سه عدد که تشکیل دنباله حسابی می دهند برابر ۲۷ و حاصل ضرب آن سه عدد برابر ۶۴۸ است. کوچک ترین آن سه عدد کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 6 (۴) 8

۱۳۰. مساحت یک مثلث قائم الزاویه که اضلاع آن جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند، برابر ۴۸ سانتی مترمربع است. محیط این مثلث کدام است؟

- (۱) $20\sqrt{3}$ (۲) $20\sqrt{2}$ (۳) $24\sqrt{2}$ (۴) 24

۱۳۱. زوایای داخلی یک چهارضلعی، تشکیل دنباله حسابی می دهند. اگر کوچک ترین زاویه آن 30° درجه باشد، مجموع دو زاویه بزرگ تر کدام است؟

- (۱) 250° (۲) 260° (۳) 270° (۴) 280°

۱۳۲. در دنباله حسابی با شرط $t_1 = 5$ و $d = 3$ ، جمله n ام چقدر از جمله n ام دنباله حسابی با فرض $t'_1 = 4$ و $d' = 3$ بزرگ تر است؟

- (۱) 1 (۲) $n + 1$ (۳) n (۴) $n - 1$

۱۳۳. مجموع جملات یک دنباله حسابی هفت جمله ای برابر ۷۷ و مجموع مجزورات جمله های آن ۹۵۹ است. جمله عمومی این دنباله کدام است؟

- (۱) $t_n = 3n - 1$ (۲) $t_n = 23 - 3n$ (۳) $t_n = n + 7$ (۴) $t_n = 19 - 2n$

۱۳۴. عدد ۱۱ اولین جمله از یک دنباله حسابی و اعداد ۴۴ و ۷۰۴ جملات دیگری از همان دنباله هستند. در حالتی که قدرنسبت این دنباله بیش ترین مقدار ممکن را داشته باشد، عدد ۷۰۴ چندمین جمله دنباله خواهد بود؟

- (۱) 11 (۲) 22 (۳) 33 (۴) 44

۱۳۵. به ازای چه مقدار از x ، سه جمله $x + 2$ ، $2x + 7$ و $7 - 2x$ تشکیل یک دنباله حسابی می دهند؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) -1 (۴) -2

۱۳۶. اعداد $3 + 2p$ ، $4 + 3p$ و $5p - 1$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟ (سراسری ریاضی)

- (۱) 4 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 7

۱۳۷. مقادیر k' ، k ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ چهار جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند. مجموع دو عدد k و k' کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۱۳۸. اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته بندی می کنیم، که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی $\{1\}$ ، $\{2, 3, 4\}$ ، $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ ، ... در دسته نهم، واسطه حسابی بین دو عدد اول و آخر آن، کدام است؟ (سراسری تجربی-۹۹)

- (۱) 71 (۲) 72 (۳) 73 (۴) 74

۱۳۹. بین دو عدد که تفاضل آن ها ۸۴۰ است، ۵ واسطه حسابی درج شده است. قدرنسبت کدام است؟

- (۱) 210 (۲) 168 (۳) 152 (۴) 140

۱۴۰. بین دو عدد ۲۰ و ۲۵، ده واسطه حسابی درج شده است، قدرنسبت این واسطه ها کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{9}$ (۲) $\frac{5}{10}$ (۳) $\frac{5}{11}$ (۴) $\frac{5}{6}$

۱۴۱. بین دو عدد ۲ و ۱۲ سه عدد قرار داده ایم که با این دو عدد تشکیل دنباله حسابی بدهد. جمله هفتم این دنباله کدام است؟ (عدد ۲، جمله اول است.)

- (۱) 16 (۲) 17 (۳) $14/5$ (۴) $15/5$



مجموعه، الگو و دنباله

پاسخ فصل ۱

۱۹۱

با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases} 2x - y = -14 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$ ، مقادیر x و y را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 3 \times \begin{cases} 2x - y = -14 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 6x - 3y = -42 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow 8x = -40 \Rightarrow x = -5 \\ \xrightarrow{2x - y = -14} 2(-5) - y = -14 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x + y = -1 \end{aligned}$$

۶ (۴) (۳) (۲) (۱)

تمام اعداد طبیعی که مجموع آن‌ها برابر ۵ باشد، عبارتند از:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

در نتیجه مجموعه A عبارت است از:

$$A = \{1 \times 3^4, 2^2 \times 3^3, 3^3 \times 3^2, 4^4 \times 3^1\} = \{162, 108, 72, 48\}$$

با توجه به گزینه‌ها، عدد ۴۸ در مجموعه A قرار دارد.

۷ (۴) (۳) (۲) (۱)

مجموعه A شامل مضارب ۶ منهای یک، از ۵ تا ۴۳ می‌باشد. لذا مجموعه A عبارت است از:

$$A = \{5, -1, -7, -13, -19, -25, -31, -37, -43\}$$

بنابراین عدد ۲۱ متعلق به مجموعه A نیست.

۸ (۴) (۳) (۲) (۱)

هر یک از مجموعه‌های A ، B و C را با اعضا می‌نویسیم:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1, 2 \Rightarrow A = \{-1, 2\}$$

$$\begin{aligned} x^3 - 2x = 0 &\Rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \\ \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} B &= \{0\} \end{aligned}$$

همچنین $C = \{-1, 0, 1, 2\}$ می‌باشد. با توجه به مجموعه‌های A ، B و C داریم:

۹ (۴) (۳) (۲) (۱)

مجموعه B دارای سه عضو ۱، ۲ و $\{1, 2\}$ و مجموعه C دارای دو عضو $\{1, 2\}$ ، $\{1, 2\}$ و ۱ است، بنابراین دو عضو ۱ و ۲ از مجموعه B در مجموعه C قرار ندارند، پس B زیرمجموعه C نمی‌باشد.

۱۰ (۴) (۳) (۲) (۱)

با توجه به مجموعه A ، مجموعه B به صورت $B = \{3, 5, A\}$ است. بنابراین A عضوی از مجموعه B است و در نتیجه گزینه (۱) صحیح است. با توجه به مجموعه B ، مجموعه C به صورت $C = \{B, 2\}$ است. بنابراین A عضوی از مجموعه C نمی‌باشد و در نتیجه گزینه (۲) نادرست است. توجه کنید که B عضوی از C است و مجموعه تک‌عضوی $\{2\}$ که همان مجموعه A است، زیرمجموعه‌ای از مجموعه C است.

۱ (۴) (۳) (۲) (۱)

نکته: برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیاء مشخص و دوبه‌دو متمایز از مجموعه استفاده می‌کنیم. مجموعه‌ای که عضوی نداشته باشد، مجموعه تهی نام دارد و با نماد $\emptyset$ یا $\{\}$ نشان داده می‌شود.

در مجموعه‌ها، تکرار عضو بی‌تأثیر است و با توجه به این‌که دو عضو $\{b, a\}$ و $\{a, b\}$ یکسان و همچنین $\emptyset$ و $\{\}$ یکی می‌باشند، بنابراین مجموعه به صورت $\{a, b, \{a, b\}, \emptyset\}$ درمی‌آید که یک مجموعه ۴ عضوی می‌باشد.

۲ (۴) (۳) (۲) (۱)

نکته: اگر هر عضو مجموعه A ، عضوی از مجموعه B باشد، آن‌گاه مجموعه A زیرمجموعه B است و می‌نویسیم:

$$A \subseteq B$$

مجموعه A دارای ۳ عضو $\{1, 2\}$ ، $\{2, 1\}$ می‌باشد که $\{\}$ عضو مجموعه A نیست، بنابراین گزینه (۱) نادرست است.

۳ (۴) (۳) (۲) (۱)

مجموعه A دارای سه عضو $\emptyset$ ، $\{\emptyset\}$ و $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ می‌باشد. یعنی تعداد اعضای A برابر ۳ است پس $n(A) = 3$ می‌دانیم مجموعه $\emptyset$ (تهی) زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است، پس گزینه (۱) درست است و چون $\{\emptyset\}$ عضوی از مجموعه A است، پس گزینه (۲) نیز درست است و چون اعضای $\emptyset$ و $\{\emptyset\}$ به A تعلق دارند، پس $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$

۴ (۴) (۳) (۲) (۱)

مجموعه C را می‌توان به صورت $C = \{x + 2 \mid x \in P, 5 \leq x < 31\}$ نوشت. برای نوشتن اعضای مجموعه C ابتدا تمام اعداد اول که در رابطه $5 \leq x < 31$ صدق می‌کنند را می‌نویسیم و سپس به هر یک از آن‌ها ۲ واحد اضافه می‌کنیم. اما اعداد اولی که در رابطه $5 \leq x < 31$ صدق می‌کنند عبارتند از:

$$5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$$

در نتیجه مجموعه C عبارت است از: $C = \{7, 9, 13, 15, 19, 21, 25, 31\}$ در نتیجه با توجه به گزینه‌ها رابطه $31 \in C$ درست است و بقیه گزینه‌ها نادرست هستند.

۵ (۴) (۳) (۲) (۱)

نکته: دو مجموعه A و B برابرند، هرگاه هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A باشد و می‌نویسیم:

$$A = B$$

برای مساوی بودن دو مجموعه A و B باید $2x - y$ برابر ۱۴- و $2^2x + 3y$ با عدد ۴ برابر باشد، پس داریم:

$$2x - y = -14, 2^2x + 3y = 4 \Rightarrow 2x + 3y = 2$$

فصل ۲ مثلثات

قسمت اول: نسبت‌های مثلثاتی

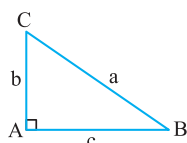
نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

۲۲۳. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، $AB = 4$ ، $BC = 8$ می‌باشد، مقدار $\sin C + \sqrt{3} \cos C$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{3}{5}$

۲۲۴. در مثلث ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، $\tan B = \sqrt{2}$ و $a = 3\sqrt{3}$ می‌باشد، اندازه ضلع c کدام است؟

- (۱) $\sqrt{6}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) ۲ (۴) ۳



۲۲۵. در مثلث قائم‌الزاویه ABC که $\hat{A} = 90^\circ$ ، حاصل $\frac{\cos^2 C}{\sin B \cos B}$ کدام است؟

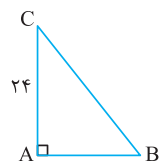
- (۱) $\tan B$ (۲) $\tan C$ (۳) $\sin B$ (۴) $\sin C$

۲۲۶. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، زاویه A قائمه و $\cos B = \frac{4}{5}$ است. مقدار $\tan C$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{5}{3}$

۲۲۷. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، زاویه A قائمه و $\tan C = \frac{5}{12}$ است. مقدار $\cos A + \cos B + \cos C$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{30}{13}$ (۲) $\frac{17}{13}$ (۳) $\frac{7}{13}$ (۴) $\frac{12}{13}$



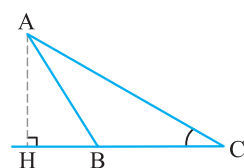
۲۲۸. در مثلث قائم‌الزاویه شکل مقابل، $\hat{A} = 90^\circ$ ، $AC = 24$ و $\cos C = \frac{4}{5}$ است. محیط مثلث ABC کدام است؟

- (۱) ۵۸ (۲) ۶۴ (۳) ۷۲ (۴) ۸۰

(سراسری ریاضی - ۹۹)

۲۲۹. در شکل مقابل، فرض کنید $\sin C = \frac{5}{13}$ و $CH = 9$. اندازه ارتفاع AH ، کدام است؟

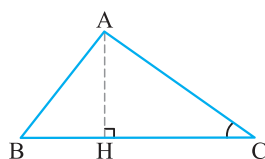
- (۱) $\frac{3}{25}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{3}{6}$ (۴) $\frac{3}{75}$



(سراسری ریاضی فارع از کشور - ۹۹)

۲۳۰. در شکل مقابل، $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $AC = 96$ ، اندازه ارتفاع AH ، کدام است؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۵۶ (۳) ۶۴ (۴) ۷۲



۲۳۱. در مثلث با طول اضلاع ۲، ۴ و $2\sqrt{5}$ ، اگر A کوچک‌ترین زاویه مثلث باشد، مقدار $\cot A + \sqrt{5} \cos A$ برابر کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۱۲۷. صفحه‌های یک از دو عقربه A و B را به ترتیب به ۴ و ۵ قطاع مساوی با شماره‌های {۱، ۲، ۳، ۴، ۵} و {۱، ۲، ۳، ۴} تقسیم می‌کنیم.

عقربه‌های هر دو صفحه را می‌چرخانیم. احتمال این‌که هر دو عقربه، روی ناحیه‌ی اعداد مساوی هم قرار بگیرند، چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{3}{75}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۱۱۲۸. حروف کلمه «ABADN» را بریده به‌طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، دو حرف A کنار هم قرار نمی‌گیرند؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۱۱۲۹. ۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند، با کدام احتمال دو فرد موردنظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۹)

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{9}{10}$

۱۱۳۰. از بین اعداد طبیعی سه رقمی، به تصادف یک عدد برداشته‌ایم. با کدام احتمال، لااقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر شده است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۶)

- (۱) $\frac{1}{24}$ (۲) $\frac{1}{25}$ (۳) $\frac{1}{26}$ (۴) $\frac{1}{28}$

۱۱۳۱. دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه «رو» یا تاس ۶ ظاهر می‌شود؟ (سراسری ریاضی- ۹۶)

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{7}{12}$

۱۱۳۲. یک سکه و دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال، جمع عدد دو تاس بیش‌تر از ۴ یا سکه «رو» ظاهر شده است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۶)

- (۱) $\frac{7}{12}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{11}{12}$

۱۱۳۳. احتمال آن‌که چهار نفر همگی در یک ماه از سال متولد شده باشند، کدام است؟

- (۱) $\left(\frac{11}{12}\right)^3$ (۲) $\frac{990}{12^3}$ (۳) $\left(\frac{1}{12}\right)^3$ (۴) $\left(\frac{1}{12}\right)^4$

۱۱۳۴. چهار دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آن‌ها یکسان است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۲)

- (۱) $\frac{19}{48}$ (۲) $\frac{41}{96}$ (۳) $\frac{23}{48}$ (۴) $\frac{55}{96}$

۱۱۳۵. احتمال قبولی شخصی در کنکور $\frac{1}{4}$ بیش‌تر از احتمال قبول نشدن وی در کنکور است. احتمال قبولی این شخص در کنکور چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{1}{55}$ (۴) $\frac{1}{45}$

۱۱۳۶. اگر $P(B') = 2P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{1}$ باشد، مقدار $P(A \cup B)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{7}$

۱۱۳۷. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A - B) = 2P(B - A) = P(A \cap B)$ حاصل $\frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{7}{2}$

۱۱۳۸. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به‌طوری‌که $P(A) = \frac{1}{6}$ ، $P(B) = \frac{1}{7}$ و $P(A \cap B') = \frac{1}{2}$ ، آن‌گاه $P(A' \cap B)$ کدام است؟

(سراسری ریاضی- ۹۲)

- (۱) $\frac{1}{1}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۱۱۳۹. تعداد مسافریں در یک هتل ۷۲ نفرند که ۲۳ نفر آن‌ها تاجر و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند. ۸ نفر از این تاجریں، برای اولین بار سفر کرده‌اند.

اگر فردی به تصادف از بین آن‌ها انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد نه تاجر است و نه اولین بار سفر کرده است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۷)

- (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{5}{9}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۱۴۰. از ساکنین شهری، ۳۰ درصد روزنامه‌الف، ۲۵ درصد روزنامه‌ب و ۹ درصد روزنامه‌الف و ب را می‌خوانند. اگر فردی از بین آن‌ها به تصادف

انتخاب شود، با کدام احتمال، هیچ یک از این دو روزنامه را نمی‌خواند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۵)

- (۱) $\frac{1}{45}$ (۲) $\frac{1}{48}$ (۳) $\frac{1}{54}$ (۴) $\frac{1}{56}$

۱۱۴۱. اگر $P(A - B) = \frac{2}{17}$ ، $P(B - A) = \frac{1}{17}$ و $P(B) = 3P(A)$ ، آن‌گاه $P(A \cup B)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{12}{17}$ (۲) $\frac{16}{17}$ (۳) $\frac{15}{17}$ (۴) $\frac{14}{17}$

۱۱۴۲. اگر $P(A - B) = \frac{1}{4}$ و $P(B - A) = \frac{2}{7}$ باشد، حداکثر مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{20}{21}$ (۲) $\frac{7}{8}$ (۳) $\frac{21}{20}$ (۴) $\frac{8}{7}$

قسمت چهارم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه، نمونه، متغیر و انواع آن

علم آمار، جامعه و نمونه

۱۱۴۳. به مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات می‌گوییم.

(۱) نمونه (۲) علم آمار (۳) آمار (۴) متغیر

۱۱۴۴. اولین قدم در استفاده از علم آمار، کدام است؟

(۱) سازماندهی (۲) پیش‌بینی

۱۱۴۵. در کدام بررسی، اندازه نمونه برابر اندازه جامعه است؟

(۱) نمونه تصادفی (۲) دسته‌بندی

۱۱۴۶. در کدام مورد عمل سرشماری انجام نشده است؟

(۱) تمام افراد جامعه مورد مطالعه قرار گیرد.

(۳) اندازه نمونه، برابر اندازه جامعه

۱۱۴۷. کدام یک از موارد زیر، جزء مشکلات سرشماری نمی‌باشد؟

(۱) مشخص نبودن موضوع مورد مطالعه

(۳) گران تمام شدن بررسی تمام اعضا

۱۱۴۸. کدام یک از جملات زیر نادرست است؟

(۱) تعداد اعضای جامعه، اندازه جامعه نام دارد.

(۳) سرشماری، یعنی مورد مطالعه قرار دادن تمام افراد جامعه

متغیر

۱۱۴۹. کدام متغیر، کیفی ترتیبی نمی‌باشد؟

(۱) مراحل کشت گیاه (۲) ماه تولد

۱۱۵۰. کدام متغیر، کیفی ترتیبی است؟

(۱) گروه خونی (۲) جمعیت

۱۱۵۱. نوع آلاینده‌ها چگونه متغیری است؟

(۱) کمی گسسته (۲) کمی پیوسته

۱۱۵۲. گروه خونی افراد کدام نوع متغیر است؟

(۱) کیفی اسمی (۲) کیفی ترتیبی

۱۱۵۳. مراحل تحصیلی، متغیر تصادفی است. نوع آن کدام است؟

(۱) کمی گسسته (۲) کمی پیوسته

۱۱۵۴. از چه نوع متغیری برای شماره‌گذاری صندوق‌های شرکت‌کنندگان در امتحانات، استفاده می‌شود؟

(۱) پیوسته (۲) اسمی (۳) ترتیبی (۴) گسسته

۱۱۵۵. «شماره صندوق» متغیر تصادفی است. نوع آن کدام است؟

(۱) کمی پیوسته (۲) کمی گسسته

۱۱۵۶. شاخص توده بدن چه نوع متغیری است؟

(۱) کمی پیوسته (۲) کمی گسسته

۱۱۵۷. شاخص توده بدن شخصی با وزن ۶۰ کیلوگرم و قد ۱۶۰ سانتی‌متر با تقریب دو رقم اعشار کدام است؟

(۱) ۲۲/۸۲ (۲) ۲۲/۸۶ (۳) ۲۳/۴۴ (۴) ۲۳/۶۸

۱۱۵۸. شاخص توده بدن و قد شخصی به ترتیب ۲۰ و ۱۷۰ سانتی‌متر می‌باشد. وزن این شخص برحسب کیلوگرم کدام است؟

(۱) ۵۶/۲ (۲) ۵۷/۸ (۳) ۵۸/۴ (۴) ۵۸/۷



مجموعه، الگو و دنباله

فصل ۱

۳۶۱

قسمت اول: مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱. درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

(ا) $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$	(ب) $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Q}'$	(پ) $-\sqrt{4} \notin \mathbb{Q}$
(ت) $\pi - 3/14 \in \mathbb{Q}$	(ث) $-4 \in \{-5, 1\}$	(ج) $0 \in \{0, 1\}$
(چ) $-1 \in (-1, 2]$	(ح) $\frac{2}{3} \in (0, 1)$	(خ) $\sqrt{3} \in (2, 3)$
(د) $\frac{n}{n+1} \in (0, 1) \quad (n \in \mathbb{N})$	(ذ) $(0, 1] = [0, 1)$	(ر) $\emptyset \subseteq (-\infty, 0]$
(ز) $[-1, 2] \subseteq [-1, 2)$	(ژ) $\{0, 1, 2\} \subseteq [-1, 4]$	(س) $(-1, 1) \subseteq \mathbb{Q}$
(ش) $6/0.23 \times 10^{23} \in (1000, +\infty)$	(ص) $-6 \times 10^{-4} \in (-1, 0)$	(ض) $\{x \in \mathbb{Q} \mid -1 < x < 0\} = (-1, 0)$

۲. یک نمودار ون مناسب رسم کرده و اعداد زیر را روی آن و در محل مناسب قرار دهید.

$$-\frac{7}{2}, \sqrt{5}, \frac{\sqrt{16}}{2}, -\frac{\pi}{2}, \sqrt{2} - 1/4, 1/0.5121212000..., -1/0.2 \times 10^4$$

۳. هر یک از بازه‌های زیر را به صورت مجموعه نمایش دهید و نمایش هندسی آن‌ها را رسم کنید.

(ا) $[-1, 4]$	(ب) $(0, 2]$	(پ) $(0, 2)$	(ت) $[-2, -1]$
(ث) $[-2, +\infty)$	(ج) $(-\infty, 1]$	(چ) $(1, +\infty)$	(ح) $(-\infty, 2)$

۴. هر یک از مجموعه‌های زیر را در صورت امکان به صورت بازه بنویسید.

(ا) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\}$	(ب) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$	(پ) $\{x \in \mathbb{Q} \mid -1 \leq x < 2\}$	(ت) $\{x \in \mathbb{Q}' \mid x < 1\}$
---	--	---	--

۵. حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به دست آورید.

(ا) $(-2, 5) \cap (-1, 7)$	(ب) $[-4, 0] \cap [-1, +\infty)$	(پ) $[-2, 4) \cup (0, 5]$	(ت) $(-\infty, -1) \cup [-1, +\infty)$
(ث) $(-\infty, 2) - (0, 3)$	(ج) $(0, 5] - [2, +\infty)$	(چ) $(-1, 0] \cap [0, 2)$	(ح) $(-\infty, -1) \cup (-\infty, 3)$

۶. اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ باشند، بازه‌هایی را که با مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cap B$ تعریف شده‌اند مشخص کنید.

۷. اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ ، $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$ و $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-x+3}{2} \leq 1\right\}$ باشند، مجموعه‌های زیر را به کمک بازه نمایش دهید.

(ا) C	(ب) $A \cup B$	(پ) $B \cap C$
(ت) $A - B$	(ث) $B - (A \cup C)$	(ج) $(A \cap B) \cup C$

۸. مجموعه‌های $\{0\}$ ، $\mathbb{R}$ ، $\{-1, 2\}$ ، $\mathbb{R} - \{3, 4\}$ و $[2, 5]$ و $[-1, 4]$ را روی محور نشان دهید و سپس هر یک از آن‌ها را به صورت اجتماع چند بازه بنویسید.

۹. اگر $\frac{2x+1}{3} \in [-2, 1]$ باشد، حدود x را مشخص کنید.

۱۰. کدامیک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدامیک نامتناهی است؟

(ا) مجموعه اعداد صحیح کوچک‌تر از ۲	(ب) مجموعه اعداد طبیعی پنج رقمی
(پ) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۲۰	(ت) مجموعه اعداد گنگ بین ۰ و ۱
(ث) مجموعه ارقام بعد از ممیز عدد $\sqrt{5}$	(ج) مجموعه روستاهای ایران

- (ج) بازه $(-۱, ۲)$
 (د) مجموعه اعداد اول زوج و دو رقمی
 (ر) $\{n \in \mathbb{N} \mid n + (-1)^n\}$
 (چ) مجموعه اعداد اول
 (خ) مجموعه کسرها با مخرج ۲
 (ذ) مجموعه مولکولهای آب در یک مول آب
۱۱. فرض کنید U مجموعه تمام مضربهای طبیعی ۶ باشد.

- (آ) مجموعه U را با اعضای آن نمایش دهید.
 (ب) U متناهی است یا نامتناهی؟
 (پ) یک زیرمجموعه متناهی و یک زیرمجموعه نامتناهی از U بنویسید.
 (ت) دو زیرمجموعه نامتناهی از U مانند A و B بنویسید که $A \subseteq B$ باشد.
 (ث) دو زیرمجموعه نامتناهی از U مانند C و D بنویسید که $U = C \cup D$ و $C \cap D = \emptyset$ باشد.
۱۲. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

- (آ) مجموعه $W - \mathbb{N}$ متناهی است یا نامتناهی؟
 (ب) دو مجموعه نامتناهی متمایز مثال بزنید که یکی از آنها زیرمجموعه دیگری باشد.
 (پ) دو مجموعه نامتناهی A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ و $B - A$ متناهی باشد.
 (ت) دو مجموعه نامتناهی A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ و $B - A$ نامتناهی باشد.
 (ث) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه A متناهی است یا نامتناهی؟
 (ج) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه A متناهی است یا نامتناهی؟
 (چ) اگر $A \subseteq B$ و A مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه B متناهی است یا نامتناهی؟
 (ح) اگر $A \subseteq B$ و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه B متناهی است یا نامتناهی؟

----- قسمت دوم: متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم و تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه -----

- ۱۳. اگر $U = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{۱, ۲, ۴, ۵\}$ ، $B = \{۲, ۳, ۶\}$ و $C = \{۱, ۵, ۶\}$ ، هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضا نمایش دهید.**

$$\bar{A} \cap \bar{B}' \quad (ب) \quad A' \cup C' \quad (پ) \quad B \cap (A \cup C)' \quad (ت) \quad A' - B'$$

- ۱۴. مجموعه شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۴ و ۱۵ را به ترتیب A و B بنامید. اگر $U = \{۱, ۲, \dots, ۲۵\}$ باشد، ابتدا هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضا نشان دهید و سپس تعداد عضوهای هریک را به دست آورید.**

$$\bar{A}' \quad (ب) \quad A \cup B \quad (پ) \quad B \cap A' \quad (ت) \quad A' \cup B' \quad (ث) \quad A' \cap B'$$

- ۱۵. اگر A زیرمجموعه‌ای دلخواه از مجموعه مرجع U باشد، ساده شده عبارت $(A' \cap \emptyset)' \cup (A' - (A \cap A'))$ را بنویسید.**
۱۶. $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و متمم هریک از مجموعه‌های زیر را به صورت بازه یا اجتماعی از بازه‌ها بنویسید.

$$\bar{A} \quad (-۱, ۰] \quad (ب) \quad W \quad (پ) \quad (-\infty, ۲) \quad (ت) \quad (-۱, +\infty) \quad (ث) \quad [۰, ۴] - [۱, ۲] \quad (ج) \quad (۵, +\infty) \cup (-۱, ۳)$$

- ۱۷. $\mathbb{Z}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.**
 (آ) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A ارائه کنید که A' هم نامتناهی باشد.
 (ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B ارائه کنید که B' متناهی باشد.
 (پ) اگر C مجموعه‌ای نامتناهی باشد، C' متناهی است یا نامتناهی؟
 (ت) اگر D مجموعه‌ای متناهی باشد، D' متناهی است یا نامتناهی؟
۱۸. فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشد به طوری که $n(U) = ۸۰$ ، $n(A) = ۲۱$ ، $n(B) = ۳۵$ و $n(A \cap B) = ۱۲$. مطلوب است:

$$\bar{n}(B') \quad (ب) \quad n(A \cup B) \quad (پ) \quad n(A - B) \quad (ت) \quad n(B \cap A') \\ (ث) \quad n(A' \cup B') \quad (ج) \quad n(A' \cap B') \quad (چ) \quad n((A - B) \cup (B - A))$$

۱۹. اگر $3n(A) = 2n(B) = 6n(A \cap B)$ باشد، حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\frac{n(A \cup B) - n(A \cap B)}{n(A - B)} \quad \text{ب)} \quad \frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)} \quad \text{آ)}$$

۲۰. به وسیله نمودار ون نشان دهید:

$$A' - B' = B - A \quad \text{ب)} \quad \text{آ)} \text{ اگر } A \subseteq B \subseteq U, \text{ آنگاه } B' \subseteq A' \subseteq U$$

۲۱. در یک نظرسنجی از ۱۰۰ نفر مشخص شده است که ۵۰ نفر به سریال‌های طنز و ۶۰ نفر به سریال‌های خانوادگی علاقمند هستند. اگر ۸۰ نفر

به حداقل یکی از این دو نوع سریال علاقمند باشند، مطلوب است تعداد افرادی که:

آ) به هر دو نوع سریال علاقمند باشند.

ب) به سریال‌های طنز علاقمندند ولی به سریال‌های خانوادگی علاقمند نیستند.

پ) نه به سریال‌های طنز علاقمند هستند و نه به سریال‌های خانوادگی.

۲۲. یک باشگاه ورزشی ۷۰ عضو دارد. ۴۰ نفر عضو تیم فوتبال، ۲۵ نفر عضو تیم والیبال و ۵۵ نفر حداقل در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند.

آ) چند نفر در هر دو رشته فوتبال و والیبال فعالیت می‌کنند.

ب) چند نفر در هیچ یک از این دو رشته فعالیت نمی‌کنند.

ت) چند نفر فقط در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند.

قسمت سوم: الگو، دنباله و دنباله حسابی

۲۳. به تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در شکل‌های مقابل توجه کنید:



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

اگر a_n تعداد چوب کبریت‌های شکل n ام باشد، آن گاه:

آ) a_1, a_2, a_3 و a_4 را بنویسید.

ب) تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در مرحله n ام را بر حسب n بنویسید.

پ) در شکل سی‌ام چند چوب کبریت به کار رفته است؟

۲۴. در یک الگوی خطی، جملات پنجم و یازدهم به ترتیب ۳۰ و ۷۲ می‌باشند.

آ) جمله عمومی الگو را بنویسید.

ب) جمله چندم الگو برابر ۴۱۵ می‌باشد؟

۲۵. پنج دنباله و پنج جمله عمومی به صورت زیر داده شده است. مشخص کنید که هر جمله عمومی مربوطه به کدام دنباله است؟

$$\begin{aligned} \bullet a_n &= \frac{4n}{2n-1} & \bullet b_n &= \frac{(-1)^n}{n+2} & \bullet c_n &= n^2 + 2n & \bullet d_n &= 2 - n & \bullet t_n &= \frac{2 + (-1)^n n^2}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

$$1, 0, -1, \dots \quad -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots \quad \frac{1}{2}, \frac{6}{5}, -\frac{7}{10}, \dots \quad 3, 8, 15, \dots \quad 4, \frac{8}{3}, \frac{12}{5}, \dots$$

۲۶. در هر قسمت، سه جمله بعدی دنباله را بنویسید. همچنین در سه قسمت اول، جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

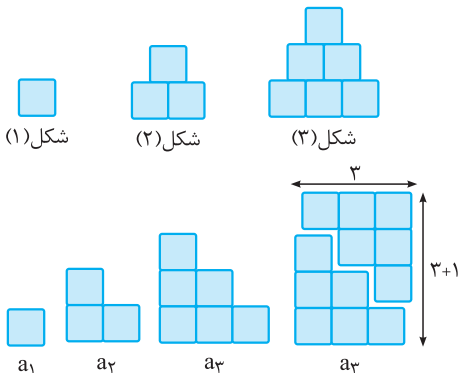
$$\begin{aligned} \text{آ)} & -1, 3, 7, \dots & \text{ب)} & 1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots & \text{پ)} & 3, 1, \frac{1}{3}, \dots & \text{ت)} & 1, 2, 4, 7, \dots \end{aligned}$$

۲۷. جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = \frac{3n+2}{n+4}$ است.

آ) چهار جمله اول دنباله را بنویسید.

ب) جمله چندم دنباله، برابر $\frac{5}{3}$ است؟

۲۸. الگوی مقابل را در نظر بگیرید:



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

آ) شکل بعدی را رسم و سپس تعداد مربع‌های هر شکل را به صورت

یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید.

ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ چرا؟

پ) شکل‌های الگوی بالا را به صورت مقابل تبدیل کنید. با توجه به

تصویر حاصل، a_n را بر حسب n به دست آورید.

ت) به کمک قسمت (پ)، حاصل عبارت $1 + 2 + 3 + \dots + n$ را

به دست آورید.