

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



فصل اول

هندسه تحلیلی و جبر

درسنامه ۱

یادآوری (معادله خط)

تعریف: هر معادله به صورت کلی $y = ax + b$ ، معادله یک خط است. مثلاً: $y = 2x$ یا $y = 2x + 1$ یا ...

قرار داشتن یک نقطه روی خط:

اگر نقطه $A(x_A, y_A)$ روی خط $y = ax + b$ قرار داشته باشد، آن گاه مختصات آن در معادله خط صدق می کند (یعنی $y_A = ax_A + b$).

مثال نقطه $A(1, 2)$ روی خط $y = 2x$ قرار دارد. زیرا:

$$y = 2x \xrightarrow{x_A=1, y_A=2} 2 = 2 \times 1 \Rightarrow 2 = 2 \checkmark \Rightarrow \text{مختصات A در معادله صدق کرد و تساوی برقرار شد.}$$

مثال اگر $A(2, 5)$ روی خط $mx + (m-1)y = 2m$ قرار داشته باشد، مقدار m را به دست آورید.

پاسخ: چون A روی خط $mx + (m-1)y = 2m$ قرار دارد، پس مختصات آن در معادله صدق می کند:

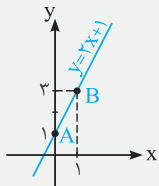
$$mx + (m-1)y = 2m \xrightarrow{x_A=2, y_A=5} m(2) + (m-1)(5) = 2m \Rightarrow 2m + 5m - 5 = 2m \Rightarrow 7m - 5 = 2m \Rightarrow 5m = 5 \Rightarrow m = 1$$

رسم نمودار خط $y = ax + b$:

برای رسم هر خط به دو نقطه دلخواه از آن خط نیاز داریم. برای پیدا کردن آن دو نقطه، به جای x در معادله، دو عدد دلخواه قرار می دهیم و به کمک آن y ها را می یابیم. سپس دو نقطه به دست آمده را روی دستگاه محورهای مختصات مشخص کرده و به هم وصل می کنیم و امتداد می دهیم.

مثال خط $y = 2x + 1$ را رسم کنید.

پاسخ: دو عدد دلخواه صفر و ۱ را به جای x قرار داده و y ها را می یابیم:

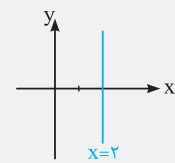


$$x = 0 \Rightarrow y = 2(0) + 1 = 1 \Rightarrow A(0, 1)$$

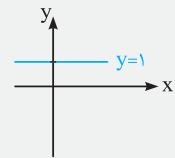
$$x = 1 \Rightarrow y = 2(1) + 1 = 3 \Rightarrow B(1, 3)$$

رسم خطوط خاص:

۱) خطوط $x = a$: خطوطی موازی محور y ها هستند که طول همه نقاط روی آن a می باشد. مثلاً:



۲) خطوط $y = b$: خطوطی موازی محور x ها هستند که عرض همه نقاط روی آن b می باشد. مثلاً:



۱- نقطه ای به طول ۲ روی خط $y = 2x - 1$ قرار دارد. عرض این نقطه کدام است؟

۵/۵ (۴)

۴/۵ (۳)

۳/۵ (۲)

۲/۵ (۱)

۲- نقطه $(3, b)$ روی خط $2x - y = 5$ قرار دارد. مقدار b برابر است با:

۳ (۴)

۱۱ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

۳- خط $2y + (3m - 6)x = 2m + 6$ از نقطه A به عرض ۲ روی محور y ها عبور می کند. m کدام است؟

۲ (۴)

-۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

۴- مختصات نقطه‌ای از خط $(x - y) = 19 - 2x + 5y$ که عرض آن از سه برابر طولش، یک واحد بیشتر باشد، کدام است؟

- (۱) $(3, 10)$ (۲) $(2, 7)$ (۳) $(1, 4)$ (۴) $(4, 13)$

۵- به‌ازای چه مقداری از a دو خط $(a + 2)x + y = 1$ و $x + ay - 2 = 0$ روی محور y ها یکدیگر را قطع می‌کنند؟

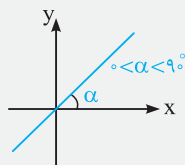
- (۱) -2 (۲) 2 (۳) 1 (۴) -1

درسنامه ۲

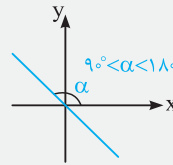
یادآوری (شیب خط، عرض از مبدأ و طول از مبدأ)

تعریف: در معادله خط $y = ax + b$ ، ضریب x یعنی a را **شیب خط** می‌گویند. مثلاً: شیب خط $y = 5x - 4$ ، برابر ۵ است.

نکته اگر a (شیب خط) را تغییر دهیم، زاویه خط با محور طول‌ها (یعنی α) نیز تغییر می‌کند.

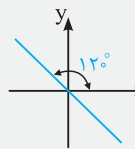


اگر زاویه خط با جهت مثبت محور x ها (یعنی α) کم‌تر از 90° باشد، شیب خط یعنی a مثبت است.



اگر زاویه خط با جهت مثبت محور x ها (یعنی α) بیشتر از 90° باشد، شیب خط یعنی a منفی است.

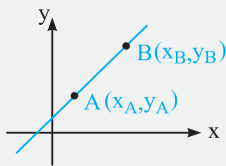
مثال اگر خطی با محور طول‌ها زاویه 120° بسازد، شیبش منفی است.



$$\text{شیب} = a < 0 \quad 120^\circ > 90^\circ$$

نکته شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی. به عبارت دیگر اگر دو نقطه از

خط مانند $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ معلوم باشد، آن‌گاه شیب خط AB را می‌توان از فرمول زیر به دست آورد:



$$\text{شیب خط } AB = m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

مثال اگر $A(2, 3)$ و $B(6, 9)$ ، آن‌گاه شیب پاره‌خط AB را به‌دست آورید.

پاسخ: با توجه به فرمول شیب خط داریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9 - 3}{6 - 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

سؤال دانش‌پژوه (پانته آ شکباز): آقا ما توی فرمول شیب خط، اول x و y نقطه A رو نوشتیم، بعد واسه نقطه B رو نوشتیم. غلطه؟ جواباً که

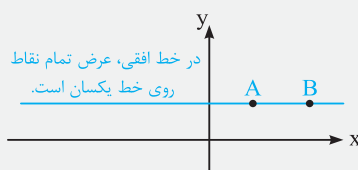
یکی شد:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3 - 9}{2 - 6} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

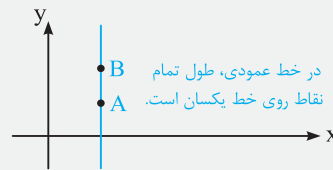
پاسخ: نه توی فرمول فرقی نمی‌کنه اول x و y مال کدوم نقطه باشه ولی خیلی مهمه آگه توی صورت کسر، اول y_B رو می‌نویسی، در مخرج هم اول x_B رو بنویسی. به عبارت دیگره باید B ها زیر هم و A ها هم زیر هم باشه.

نکته خط گذرنده از دو نقطه هم‌عرض افقی بوده و شیب آن صفر است. هم‌چنین خط گذرنده از دو نقطه هم‌طول، قائم بوده و شیب آن

تعریف نشده است. زیرا:

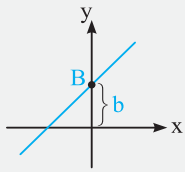


$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0}{x_B - x_A} = 0$$



$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{0} = \text{تعریف نشده}$$

عرض از مبدأ: در معادله خط $y = ax + b$ ، به عدد b عرض از مبدأ می‌گویند. مثلاً: عرض از مبدأ خط $y = 3x - 4$ برابر (-4) است.



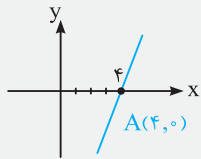
سؤال دانش‌پژوه (مینا شریفی): آقا همیشه روی شکل بگین که b دقیقاً کجای خطه؟

پاسخ: ببین وقتی می‌گیریم عرض از مبدأ قطی b هست، یعنی نمودار اون قط، محور y ها رو در نقطه‌ای به عرض b قطع می‌کنه. آگه اسم اون نقطه رو B بزاریم، مختصاتش $B(0, b)$ می‌شه. زیرا نقطه B روی محور y ها قرار داره و طول اون صفره.

نکته برای پیدا کردن عرض از مبدأ، کافی است در معادله خط، به جای x ، صفر قرار بدهیم و y را به دست آوریم. مثلاً: عرض از مبدأ خط $y + x = 2x - 7$ برابر می‌شود با:

$$y + x = 2x - 7 \xrightarrow{x=0} y + 0 = 0 - 7 \Rightarrow y = -7$$

طول از مبدأ: محل برخورد خط با محور x ها را طول از مبدأ می‌گویند. برای پیدا کردن طول از مبدأ کافی است، در معادله خط، به جای y ، صفر قرار بدهیم و x را به دست آوریم:



مثال طول از مبدأ خط $y = 2x - 8$ برابر می‌شود با:

$$y = 2x - 8 \xrightarrow{y=0} 0 = 2x - 8 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

یعنی خط $y = 2x - 8$ در نقطه A به طول ۴ محور x ها را قطع می‌کند.

معادله خط در حالت کلی

معادله خط در حالت کلی به صورت $ax + by + c = 0$ است که برای محاسبه شیب آن به یکی از دو روش زیر عمل می‌کنیم:

روش اول: ابتدا معادله خط را به صورت استاندارد در آورده و سپس ضریب x را می‌یابیم:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \xrightarrow{\div b} y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \Rightarrow \text{شیب} = x \text{ ضریب} = -\frac{a}{b}$$

روش دوم: از فرمول زیر شیب خط $ax + by + c = 0$ را به دست می‌آوریم:

$$\text{شیب} = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{a}{b}$$

مثال شیب خط $2x + 4y + 8 = 0$ را بیابید.

پاسخ: روش اول:

$$2x + 4y + 8 = 0 \Rightarrow 4y = -2x - 8 \xrightarrow{\div 4} y = -\frac{2}{4}x - \frac{8}{4} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

روش دوم:

$$2x + 4y + 8 = 0 \xrightarrow[\text{ضریب } y=4]{\text{ضریب } x=2} \text{شیب} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

سؤال دانش‌پژوه (اصغر بالاده‌زاده): آقا اجازه مثلاً آگه بخوایم شیب خط $5x = -2y + 7$ رو به دست بیاریم با توجه به فرمول شما میشه $\frac{5}{2}$ ؟

$$\text{شیب} = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{5}{-2} = \frac{5}{2}$$

پاسخ: پی میگی اصغر! تقسیم رو شهید کردی، دقت کن واسه استفاده از این فرمول باید معادله خط متماً به شکل $ax + by + c = 0$ باشه. یعنی متماً باید x و y بغل هم باشن! ولی تو معادله خطی که گفتی x و y از هم جدا هستن. پس اول باید x و y رو بغل هم بیاریم، بعد از فرمول ببریم:

$$5x = -2y + 7 \Rightarrow 5x + 2y = 7 \xrightarrow[\text{ضریب } y=2]{\text{ضریب } x=5} \text{شیب} = -\frac{5}{2}$$

سؤال همون دانش‌پژوه: آقا عدد ۷ چرا نبردین پیش x و y ها؟

پاسخ: برای محاسبه شیب اصلاً عدد ثابت معادله رو آرم حساب نمی‌کنیم. بزار هر طرفی دوس داشت باشه. مهم نیست!

مثال شیب، طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط $5x - 7y + 2 = 3x + 4y$ را به دست آورید.

پاسخ: برای محاسبه شیب باید معادله را مرتب کنیم تا جایی که فقط یک x و یک y در معادله باقی بماند:

$$5x - 7y + 2 = 3x + 4y \Rightarrow 5x - 7y + 2 - 3x - 4y = 0 \Rightarrow 2x - 11y + 2 = 0 \xrightarrow[\text{ضریب } y=-11]{\text{ضریب } x=2} \text{شیب} = -\frac{2}{-11} = \frac{2}{11}$$

$$2x - 11y + 2 = 0 \xrightarrow{x=0} 0 - 11y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{11}$$

برای محاسبه عرض از مبدأ، x را صفر قرار می‌دهیم:

$$2x - 11y + 2 = 0 \xrightarrow{y=0} 2x - 0 + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

برای محاسبه طول از مبدأ، y را صفر قرار می‌دهیم:

۶- اگر شیب خط $y = (2m - 4)x + m$ برابر ۲ باشد، طول از مبدأ خط کدام است؟

۳ (۱)	$-\frac{3}{2}$ (۲)	$-\frac{3}{4}$ (۳)	۶ (۴)
-------	--------------------	--------------------	-------

۷- عرض از مبدأ خطی ۳ و شیب آن ۲- است. این خط محور x ها را با چه طولی قطع می‌کند؟

$\frac{2}{3}$ (۱)	$-\frac{3}{2}$ (۲)	$\frac{3}{2}$ (۳)	$-\frac{2}{3}$ (۴)
-------------------	--------------------	-------------------	--------------------

۸- مجموع عرض از مبدأ و شیب خط $1 = 2\left(\frac{x-y}{3}\right) + 3\left(\frac{x+y}{2}\right)$ کدام است؟

$\frac{13}{5}$ (۱)	$-\frac{6}{5}$ (۲)	$-\frac{7}{5}$ (۳)	$\frac{7}{5}$ (۴)
--------------------	--------------------	--------------------	-------------------

۹- مساحت مثلثی که از برخورد خط d به معادله $3x + 2y = 12$ با محورهای مختصات به دست می‌آید برابر است با:

۱۲ (۱)	۶۴ (۲)	۴ (۳)	۲۴ (۴)
--------	--------	-------	--------

۱۰- از تقاطع سه خط با شیب‌های $0/5$ ، 10 و -1 در صفحه مختصات، یک مثلث به وجود آمده است. کدام شکل می‌تواند نشان‌دهنده این

مثلث باشد؟



درسنامه ۳

یادآوری (به دست آوردن معادله خط)

معمولاً در سه حالت زیر از ما می‌خواهند، معادله خط بنویسیم. پس خوب به ادامه درس توجه کنید:

حالت اول: شیب m و عرض از مبدأ h را به ما می‌دهند، در این صورت معادله خط به صورت $y = mx + h$ است.

مثال: معادله خطی که شیبش ۲ و عرض از مبدأ آن ۳ باشد، به صورت $y = 2x + 3$ است.

حالت دوم: شیب m و یک نقطه $A(x_A, y_A)$ را به ما می‌دهند. در این صورت کافی است از فرمول زیر معادله خط را به دست آوریم:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

مثال: معادله خطی را که از نقطه $A(2, 4)$ عبور کرده و شیب آن $m = 3$ باشد، به دست آورید.

$$y - 4 = 3(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 3x - 6 \Rightarrow y = 3x - 6 + 4 \Rightarrow y = 3x - 2$$

پاسخ:

حالت سوم: فقط ۲ نقطه از خط مانند $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ را به ما می‌دهند و هرچی نگاه می‌کنیم در سؤال خبری از شیب خط نیست! در

این صورت از یکی از دو روش زیر استفاده می‌کنیم.

روش اول: ابتدا شیب را با توجه به فرمول زیر حساب کرده و سپس معادله را با داشتن شیب و یک نقطه از خط می‌نویسیم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \text{معادله خط: } y - y_A = m(x - x_A)$$

مثال: معادله خطی را که از دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(2, 4)$ می‌گذرد، به دست آورید.

پاسخ: خب در صورت سؤال خبری از شیب نیست! پس ابتدا شیب خط را به دست آورده و سپس معادله آن را می‌نویسیم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 2}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = 2(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 2x - 2 \Rightarrow y = 2x$$

سؤال دانش‌پژوه (مهگل عنبرستانی): آقا من واسه معادله نوشتن از نقطه B استفاده کردم، جواب منم $y = 2x$ شد، اونم درسته؟ ببینید:

$$y - y_B = m(x - x_B) \Rightarrow y - 4 = 2(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 2x - 4 \Rightarrow y = 2x$$

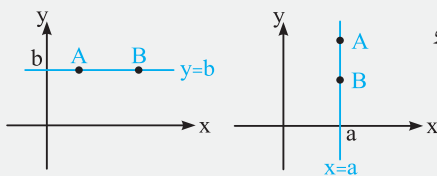
پاسخ: بله، فرقی نمی‌کنه که برای نوشتن معادله از کدوم نقطه استفاده کنی، چون هم A و هم B روی خط قرار دارن و مقدماتشون در معادله خط صدق می‌کنه.

روش دوم: معادله خط در حالت کلی را به صورت $y = mx + h$ در نظر می‌گیریم و سپس چون دو نقطه A و B از خط را داریم، مختصات آن‌ها را در معادله قرار داده و مجهولات m و h را می‌یابیم.

مثال معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(2, 4)$ می‌گذرد.

پاسخ:

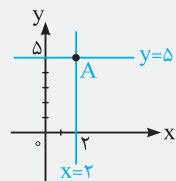
$$y = mx + h \Rightarrow \begin{cases} A(1, 2): 2 = m(1) + h \\ B(2, 4): 4 = m(2) + h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + h = 2 \\ 2m + h = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} m = 2, h = 0 \Rightarrow y = 2x + 0 \Rightarrow y = 2x$$



نکته معادله خطی که از دو نقطه هم‌طول $A(a, b)$ و $B(a, c)$ می‌گذرد، برابر $x = a$ و معادله خطی که از دو نقطه هم‌عرض $A(a, b)$ و $B(c, b)$ می‌گذرد، برابر $y = b$ است.

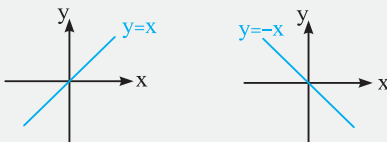
مثال معادله خط گذرنده از نقاط $A(1, 2)$ و $B(1, 5)$ به صورت $x = 1$ و معادله خط گذرنده از نقاط $A(2, 4)$ و $B(3, 4)$ به صورت $y = 4$ است.

نکته معادله خط افقی گذرنده از نقطه $A(x_A, y_A)$ به صورت $y = y_A$ و معادله خط عمودی گذرنده از آن به صورت $x = x_A$ است.



مثال معادله خط افقی گذرنده از $A(2, 5)$ به صورت $y = 5$ و معادله خط عمودی گذرنده از آن به صورت $x = 2$ است.

است.



نکته معادله خط نیمساز ناحیه اول و سوم به صورت $y = x$ و معادله خط نیمساز ناحیه دوم و چهارم به صورت $y = -x$ است.

و چهارم به صورت $y = -x$ است.

۱۱- معادله خطی که شیب آن ۴ بوده و از نقطه $A(3, 2)$ عبور کند، کدام است؟

$$y = 4x - 10 \quad (2)$$

$$y = 2x - 8 \quad (1)$$

$$y = -3x + 5 \quad (4)$$

$$y = 3x + 2 \quad (3)$$

۱۲- شیب خطی -۶ و طول از مبدأ آن ۲- است. عرض از مبدأ آن چیست؟

$$-6 \quad (4)$$

$$-12 \quad (3)$$

$$-4 \quad (2)$$

$$-3 \quad (1)$$

۱۳- معادله خطی که عرض از مبدأ آن ۵ و طول از مبدأ آن ۳- باشد، کدام است؟

$$y = 5x + \frac{5}{3} \quad (2)$$

$$y = \frac{1}{3}x + 5 \quad (1)$$

$$y = \frac{5}{3}x + 5 \quad (4)$$

$$y = 5x + \frac{1}{3} \quad (3)$$

۱۴- خطی که از دو نقطه $(1, 2)$ و $(2, 4)$ می‌گذرد، به‌ازای کدام مقدار m از نقطه $(m, m-1)$ نیز خواهد گذشت؟

$$-2 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۱۵- شیب خط گذرنده از دو نقطه $A(2m-1, 5m)$ و $B(3m, 5m-1)$ برابر $\frac{1}{3}$ است. معادله آن خط کدام است؟

$$2y - x + 23 = 0 \quad (4)$$

$$x + 2y = 23 \quad (3)$$

$$2x + y = 23 \quad (2)$$

$$x + 2y + 23 = 0 \quad (1)$$

یادآوری (خطوط موازی و عمود)

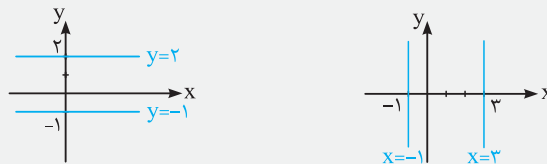
خطوط موازی:

دو خط $y = ax + b$ و $y = cx + d$ با هم موازی هستند، هرگاه شیب‌های آن‌ها برابر باشد. یعنی $a = c$. مثلاً: دو خط $y = 2x - 7$ و $y = 2x + 5$ با هم موازی می‌باشند، زیرا شیب هر دو خط ۲ است.

دو خط عمود بر هم:

دو خط غیرموازی با محورهای مختصات $y = ax + b$ و $y = cx + d$ بر هم عمودند، هرگاه حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر (-1) شود. یعنی $a \times c = -1$. به بیان دیگر در صورتی می‌گوییم آن دو خط بر هم عمودند که شیب هر کدام، عکس قرینه شیب دیگری باشد. یعنی: $a = \frac{-1}{c}$. مثلاً: دو خط $y = -2x$ و $y = \frac{1}{2}x + 1$ بر هم عمودند، زیرا $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$ است.

نکته اگر خطی موازی محور x ها باشد، معادله‌اش به صورت $(y = \text{عدد})$ و اگر موازی محور y ها باشد، معادله‌اش به صورت $(x = \text{عدد})$ است. مثلاً:



مثال به ازای چه مقداری از k ، دو ضلع مجاور یک مربع، می‌توانند بر دو خط به معادله‌های $2y - 3x = k$ و $(k+2)x - 6y = 11$ منطبق باشند؟

آزمونهای گاج

$$\begin{aligned} & \text{گزینه (۱):} \quad -6 \quad \text{(۲)} \quad -\frac{5}{3} \quad \text{(۳)} \quad 6 \quad \text{(۴)} \quad \frac{5}{3} \\ & \text{پاسخ: گزینه (۱)، دو ضلع مجاور هر مربعی بر هم عمودند، پس:} \\ & \begin{cases} 2y - 3x = k \Rightarrow m_1 = \frac{3}{2} \\ (k+2)x - 6y = 11 \Rightarrow m_2 = \frac{k+2}{6} \end{cases} \xrightarrow{m_1 m_2 = -1} \frac{3}{2} \times \frac{k+2}{6} = -1 \Rightarrow k = -6 \end{aligned}$$

۱۶- به ازای چه مقداری از a ، خط $(a+1)y = 5 - (a-3)x$ موازی با خط $y = -x$ است؟

(۱) -۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

۱۷- به ازای کدام مقدار b خطی که از نقطه $A(-2, 3)$ و مبدأ مختصات می‌گذرد با خط $y = \frac{3}{b}x + 2$ موازی است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۱۸- دو خط با معادلات $(m-1)y - mx = 5$ و $2x - m(1-x+y) = 0$ موازی یکدیگرند. مقدار $-\frac{1}{m}$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۹- عرض از مبدأ خطی که از نقطه $(2, -3)$ موازی خط گذرنده بر دو نقطه $(1, 4)$ و $(-1, 5)$ رسم شود، کدام است؟

(۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۰- کدام یک از خطوط زیر خط $2x - 3y = 5$ را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع می‌کند و با خط $4x - 2y = 5$ موازی است؟

(۱) $2x - y = 15$ (۲) $2x - y = -15$ (۳) $y = -2x - 15$ (۴) $2y - x = 15$

۲۱- در یک مستطیل $ABCD$ دو رأس مجاور هستند. اگر $C(3, 3)$ رأس سوم آن باشد، آن‌گاه خط گذرنده از ضلع CD ، محور

x ها را با چه طولی قطع می‌کند؟

(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۴ (۴) -۴

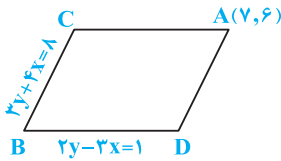
۲۲- مربع $ABCD$ در ناحیه اول صفحه مختصات واقع است به طوری که $A(5, 1)$ و $B(10, 4)$ دو رأس مجاور آن هستند. خط گذرنده از

ضلع AD ، نیمساز ناحیه اول و سوم را با چه عرضی قطع می‌کند؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) ۷

۲۳- نقاط $A(1, 0)$ ، $B(4, 2)$ و $C(a, -a)$ سه رأس یک مثلث هستند. به ازای کدام مقدار a ، مثلث ABC متساوی الساقین بوده و $\hat{A} = 90^\circ$ است؟

(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۴ (۴) -۴



۲۴- در متوازی‌الاضلاع شکل مقابل، عرض نقطه C کدام است؟

(۲) $\frac{12}{17}$

(۱) $\frac{12}{7}$

(۴) $-\frac{12}{17}$

(۳) $-\frac{12}{7}$

۲۵- به ازای چه مقدار m، دو خط $y - (2m + 1)x = 1$ و $(m + 1)y - x = 2$ بر هم عمودند؟

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) $-\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) $-\frac{3}{2}$

۲۶- خط L به معادله $(k + 1)y + 2kx - k + 1 = 0$ بر خط گذرنده بر دو نقطه $(2, -1)$ و $(8, 3)$ عمود است. معادله خط L کدام است؟

(۴) $3y - 2x = -5$

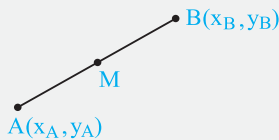
(۳) $2y - 3x = -5$

(۲) $2y + 3x = 1$

(۱) $2y + 3x = 4$

درسنامه ۵

طول پاره‌خط AB و مختصات وسط آن



اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو سر پاره‌خط AB باشند، آنگاه:

الف) طول پاره‌خط AB (فاصله A و B) برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

ب) مختصات $M(x_M, y_M)$ وسط پاره‌خط AB برابر است با:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ و } y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

مثال اگر $A(8, -4)$ و $B(2, 4)$ باشد، طول پاره‌خط AB و مختصات نقطه M، وسط پاره‌خط AB را پیدا کنید.

پاسخ:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2 - 8)^2 + (4 - (-4))^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{8 + 2}{2} = 5 \text{ و } y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4 + 4}{2} = 0 \Rightarrow M(x_M, y_M) = (5, 0)$$

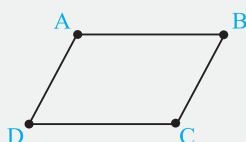
سؤال دانش‌پژوه (افشین روشن): آقا اجازه! در فرمول طول پاره‌خط AB، چرا اول طول و عرض نقطه B و بعدش طول و عرض نقطه A رو نوشتین؟ اگر ما فرمول رو به صورت زیر بنویسیم، غلطه؟

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

پاسخ: اصلاً مهم نیست اول، طول یا عرض نقطه A رو بنویسی یا نقطه B رو. فقط مهم اینه که طول‌های دو نقطه و عرض‌های دو نقطه رو از هم کم کنیم. من دلم اینطوری می‌خواد، یکی دیگه دلش با ما نیست اون‌طوری می‌خواد! (دله دیگه کاریش نمیشه کرد!) تو هر کدوم رو خواستی اول بنویس.

کاربرد: حال اگر نقاط $A(8, -4)$ و $B(2, 4)$ که در مثال قبل فاصله‌شان ۱۰ و مختصات وسط آن‌ها $M(5, 0)$ شد، دو نقطه دلخواه از یک شکل باشند، این فاصله و مختصات وسط آن‌ها معانی مختلفی دارد که در زیر به چند مورد مهم آن‌ها اشاره می‌کنیم:

A و B دو سر ضلع مربع $AB = 10$ طول ضلع	A و B دو سر قطر مربع $AB = 10$ طول قطر $\frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}}$ طول ضلع مرکز مربع: $M(5, 0)$	A و B دو سر قطر متوازی‌الاضلاع $AB = 10$ طول قطر کوچک محل تلاقی ۲ قطر: $M(5, 0)$	A و B دو سر شعاع دایره $AB = 10$ طول شعاع قطر = ۲۰	A و B دو سر قطر دایره $AB = 10$ قطر دایره $\frac{AB}{2} = 5$ شعاع مرکز دایره: $M(5, 0)$
--	---	---	--	---



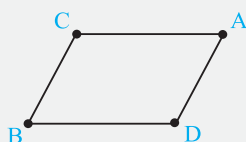
$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

نکته در هر متوازی الاضلاع ABCD داریم:

فرار از اشتباه: حواستان باشد که در فرمول فوق، رئوسی که مقابل هم هستند، در کنار هم قرار می‌گیرند. مثل رأس‌های A و C و رأس‌های B و D.

مثال اگر $A(10, 4)$ ، $B(-6, -2)$ و $C(0, 2)$ سه رأس متوازی الاضلاع BCAD باشد، مختصات رأس D را پیدا کنید.

پاسخ: با توجه به شکل و نام‌گذاری متوازی الاضلاع BCAD متوجه می‌شویم که رئوس A و B مقابل هم و رئوس C و D نیز مقابل هم هستند. پس فرمول به صورت زیر درمی‌آید:



$$\begin{cases} x_A + x_B = x_C + x_D \Rightarrow 10 + (-6) = 0 + x_D \Rightarrow x_D = 4 \\ y_A + y_B = y_C + y_D \Rightarrow 4 + (-2) = 2 + y_D \Rightarrow y_D = 0 \end{cases} \Rightarrow D(4, 0)$$

۲۷- در مثلث ABC با رئوس $A(0, 0)$ ، $B(-2, 1)$ و $C(1, 2)$ طول پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع AB و AC را به هم وصل می‌کند، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{10}$ (۲) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (۳) $2\sqrt{10}$ (۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

آزمون‌های گاج

۲۸- فاصله نقطه A به طول ۲- از نقطه $B(1, -3)$ برابر ۵ است. عرض نقطه A کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۷ (۲) -۱ (۳) -۵ (۴) -۷

۲۹- در یکی از محله‌های تهران، خانه‌ای آتش گرفته است که مختصات آن خانه بر روی نقشه مرکز آتش‌نشانی به صورت $P(50, 30)$ است. نزدیک‌ترین مراکز آتش‌نشانی به این خانه در نقاط $A(10, -20)$ و $B(80, 90)$ قرار دارند. کدام مرکز برای اعزام آتش‌نشانان به محل آتش گرفته مناسب‌تر است و چه قدر تا محل فاصله دارد؟

برگرفته از کتاب درسی

- (۱) $\sqrt{4500}$ ، A (۲) $\sqrt{4100}$ ، B (۳) $\sqrt{4100}$ ، A (۴) $\sqrt{4500}$ ، B

۳۰- طول جغرافیایی تبریز و چابهار به ترتیب ۴۶ و ۶۱ درجه شرقی و عرض آن‌ها به ترتیب ۳۸ و ۲۵ درجه شمالی است که به طور خلاصه موقعیت آن‌ها را می‌توان به صورت $T(46, 38)$ و $C(61, 25)$ نمایش داد. اگر مسافت فیزیکی هر درجه طول و عرض جغرافیایی برابر ۱۱۰ کیلومتر باشد، فاصله مستقیم این دو شهر چند کیلومتر است؟

برگرفته از کتاب درسی

- (۱) $\sqrt{349}$ (۲) $110\sqrt{349}$ (۳) $\sqrt{394}$ (۴) $110\sqrt{394}$

۳۱- دایره‌ای به مرکز $O(3, 4)$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۶ قطع می‌کند. محیط این دایره کدام است؟

- (۱) 10π (۲) 5π (۳) 2π (۴) π

۳۲- دو نقطه $A(1, -2)$ و $B(-3, 0)$ دو سر قطر یک مربع هستند. محیط مربع کدام است؟

- (۱) $\sqrt{10}$ (۲) ۱۰ (۳) $2\sqrt{10}$ (۴) $\sqrt{160}$

برگرفته از کتاب درسی

۳۳- دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای $A(4, -2)$ و $B(-2, 6)$ است. در این صورت کدام گزینه غلط است؟

- (۱) مختصات مرکز دایره $O(1, 2)$ است. (۲) شعاع دایره برابر ۵ است. (۳) نقطه $C(4, 6)$ روی محیط دایره قرار دارد. (۴) معادله یکی از قطرهای آن $2x + 3y = 4$ است.

۳۴- نقاط $A(3, 3)$ ، $B(-1, 1)$ و $O(0, 0)$ سه رأس یک مستطیل هستند. مساحت این مستطیل کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) ۹

۳۵- سه نقطه $A(4, -2)$ ، $B(1, 2)$ و $C(0, 0)$ سه رأس مثلث ABC هستند. محیط مثلث کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{5}$ (۲) $5 + 2\sqrt{5}$ (۳) $5 + 3\sqrt{5}$ (۴) $3\sqrt{5}$

۳۶- اگر نقاط $A = (0, -1)$ ، $B = (1, -2)$ و $C = (-1, -2)$ سه رأس مثلث ABC باشند، آن‌گاه نوع دقیق مثلث و محیط آن کدام است؟

برگرفته از کتاب درسی

- (۱) قائم‌الزاویه، $2\sqrt{2} + 2$ (۲) متساوی‌الساقین، $3\sqrt{2}$ (۳) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین، $2\sqrt{2} + 2$ (۴) متساوی‌الاضلاع، $3\sqrt{2}$

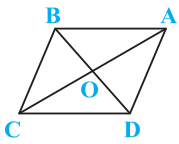
برگرفته از کتاب درسی

۳۷- اگر $A(1, 4)$ ، $B(-2, -2)$ و $C(4, 2)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول میانه AM کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۳۸- در مثلث ABC با سه رأس $A(1,4)$ ، $B(-2,-2)$ و $C(4,2)$ میانه وارد بر ضلع BC محور x ها را با چه طولی قطع می کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

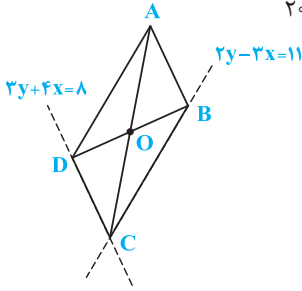


۳۹- در شکل مقابل نقاط $C(2,2)$ ، $B(4,6)$ و $O(5,4)$ رئوس متوازی الاضلاع هستند. معادله ضلع AD کدام است؟

- (۱) $y = 3x + 10$ (۲) $y = 3x - 10$ (۳) $y = 2x - 10$ (۴) $y = 2x + 10$

۴۰- نقطه $A(3,1)$ یک رأس مربعی می باشد. اگر معادله دو قطر این مربع $y - 2x = 0$ و $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ باشد، طول قطر مربع کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) $4\sqrt{5}$ (۳) ۱۰ (۴) ۲۰

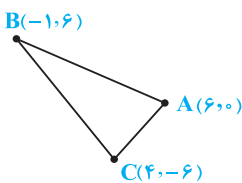


۴۱- نقطه $A(7,6)$ یکی از رئوس متوازی الاضلاع مقابل است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ می باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ **تجربی داخل ۹۰**

- (۱) (۱,۵) (۲) (۳,۴) (۳) (۳,۵) (۴) (۴,۳)

۴۲- نقاط A و B با مختصات $(3, m)$ و $(7, -1)$ مفروض اند. از وسط پاره خط AB، خط d را موازی خط به معادله $2x = y - 4$ رسم می کنیم. اگر عرض از مبدأ خط d، -۵ باشد، آن گاه مقدار m کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۱۹ (۳) ۹ (۴) ۱۱



۴۳- کدام خط زیر حتماً از محل برخورد میانه های مثلث مقابل عبور می کند؟

- (۱) $y = -x + 3$ (۲) $y = 3x - 1$ (۳) $x = 0$ (۴) $y = x$

۴۴- اگر $A(1,1)$ و $C(-3,-3)$ دو رأس مقابل در لوزی ABCD باشند، معادله خطی که دو رأس B و D روی آن قرار می گیرند، کدام است؟

- (۱) $y = -x - 2$ (۲) $y = 2x - 3$ (۳) $y = -x - 2$ (۴) $y = 2x - 3$ ($x \neq -1$)

۴۵- نقطه $M(2,3)$ وسط پاره خط واصل بین نقطه A و نقطه $B(4,6)$ است. خطی که از نقطه A گذشته و بر پاره خط AB عمود است، محور y ها را با کدام عرض قطع می کند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۶- اگر d، خط گذرنده از نقاط $A(a,b)$ و $B(b,a)$ باشد، این خط کدام ویژگی را ندارد؟ ($a \neq b, a, b \in \mathbb{R}$) **برگرفته از کتاب درسی**

- (۱) بر خط $y - x = 3$ عمود است. (۲) با خط $4x + 2y = 2(x - 3)$ موازی است.

(۳) از نقطه $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$ می گذرد. (۴) خط $y = x$ را در نقطه $(\frac{b-a}{2}, \frac{a+b}{2})$ قطع می کند.

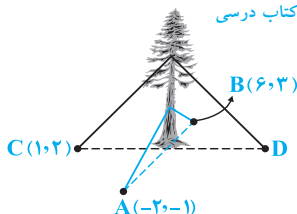
۴۷- خطی محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می کند. اگر $M(-3,2)$ وسط AB باشد، معادله این خط کدام است؟

- (۱) $2x - 3y = -12$ (۲) $2x - 3y = 12$ (۳) $3x + 2y = -5$ (۴) $3x - 2y = 5$

۴۸- نقاط $A(1,2)$ ، $B(-5,2)$ و $C(-2,5)$ سه رأس یک مربع هستند. مجموع طول و عرض رأس چهارم کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۵ (۳) -۱ (۴) ۱

۴۹- برای جلوگیری از افتادن یک درخت کهنسال، آن را به کمک ۴ کابل به چهار نقطه در زمین محکم کرده اند، به طوری که فاصله هر نقطه تا پای درخت، برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا پای درخت. مختصات نقطه D کدام است؟ **برگرفته از کتاب درسی**



- (۱) (۰,۳) (۲) (۱,۳) (۳) (۳,۱) (۴) (۳,۰)

۵۰- نقاط $A(1,2)$ ، $B(-5,2)$ و $C(-2,5)$ سه رأس یک متوازی الاضلاع هستند، رأس چهارم این متوازی الاضلاع کدام نمی تواند باشد؟

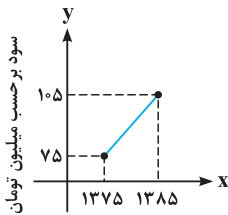
- (۱) (-۲, -۱) (۲) (۴, ۵) (۳) (-۷, ۵) (۴) (-۸, ۵)

۵۱- دو نقطه $A(2a, a)$ و $B(a+3, a-4)$ دو رأس یک مثلث هستند. میانه نظیر رأس C ، منطبق بر خط $y = 5$ است. فاصله وسط ضلع AB تا نقطه $E(8, 2)$ چه قدر است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۱۲ (۴) ۱۰

۵۲- سود سالانه یک کارگاه از سال ۱۳۷۵ تا ۱۳۸۵ مطابق نمودار مقابل بوده و در طول ۳۰ سال آینده این سود با همین روند افزایش خواهد یافت. اگر در سال n م، مقدار سود سالانه با میانگین سود سالانه کارگاه در ده سال ۱۳۷۵ تا ۱۳۸۵ برابر باشد، آن گاه در سال $(n+20)$ م، سود سالانه شرکت چقدر است؟

- (۱) ۱۳۵ (۲) ۱۴۰ (۳) ۱۴۵ (۴) ۱۵۰



برگرفته از کتاب درسی

درسنامه ۶

قرینه یک نقطه نسبت به نقطه یا خط

قرینه نقطه $A(x_A, y_A)$ نسبت به نقطه $M(x_M, y_M)$:

فرض کنید قرینه A نسبت به M ، نقطه $B(x_B, y_B)$ باشد. در این صورت مطابق شکل، نقطه M وسط پاره خط AB قرار می‌گیرد. $(MB = MA)$ پس می‌توانیم از فرمول مختصات وسط پاره خط AB استفاده کرده و مختصات B را بیابیم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 2x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_B = 2x_M - x_A$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 2y_M = y_A + y_B \Rightarrow y_B = 2y_M - y_A$$

مثال قرینه نقطه $A(5, 1)$ را نسبت به نقطه $M(3, 2)$ به دست آورید.

پاسخ:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 3 = \frac{5 + x_B}{2} \Rightarrow 6 = 5 + x_B \Rightarrow x_B = 1 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 2 = \frac{1 + y_B}{2} \Rightarrow 4 = 1 + y_B \Rightarrow y_B = 3 \end{cases} \Rightarrow B(1, 3)$$

مثال اگر نقطه $A(3, 4)$ قرینه نقطه $B(0, 0)$ نسبت به نقطه M باشد، فاصله نقاط A و M را به دست آورید.

پاسخ: باتوجه به شکل رسم شده می‌دانیم $BM = MA = \frac{AB}{2}$. پس کافی است ابتدا فاصله نقاط A و B را به دست آوریم.

$$AB = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\Rightarrow \text{فاصله } A \text{ و } M = AM = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

قرینه نقطه A نسبت به خط d :

فرض کنید بخواهیم قرینه نقطه $A(2, 0)$ را نسبت به خط $y = x$ پیدا کنیم. برای این کار مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله ۱: با توجه به شکل، خط AB بر خط d عمود است. چون شیب خط $y = x$ برابر ۱ می‌باشد پس شیب خط AB ، قرینه و معکوس آن یعنی -۱ است. حال معادله خط AB را می‌نویسیم:

$$y - 0 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 2$$

مرحله ۲: خطوط d و AB را در یک دستگاه قرار داده و با حل دستگاه محل برخورد دو خط یعنی نقطه M (وسط پاره خط AB) را می‌یابیم:

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} M(1, 1)$$

مرحله ۳: با استفاده از فرمول مختصات وسط پاره خط، مختصات نقطه B (قرینه A) را می‌یابیم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{2 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = 0, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{0 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 2$$

پس قرینه نقطه A نسبت به خط d برابر $B(0, 2)$ است.

۵۳- اگر نقطه $A(3, 2)$ را نسبت به نقطه $B(2\alpha - 1, 8)$ قرینه کنیم، به نقطه $C(5, \beta + 1)$ می‌رسیم. مقدار $2\alpha + \beta$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۴ (۳) ۱۹ (۴) ۱۸

۵۴- نقطه $A(2, 3)$ ، قرینه نقطه B نسبت به نقطه $M(-2, 5)$ است. مساحت دایره‌ای که مرکز آن نقطه B بوده و از وسط پاره خط MB می‌گذرد، کدام است؟

- (۱) π (۲) 2π (۳) 3π (۴) 5π

۵۵- دایره‌ای به مرکز $O(-1, 2)$ ، از قرینه نقطه $A(3, 4)$ نسبت به نقطه $M(-2, 2)$ می‌گذرد. کدام یک از نقاط زیر روی محیط این دایره قرار دارد؟

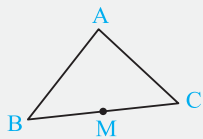
- (۱) $C(-2, 3)$ (۲) $C(-5, 4)$ (۳) $C(8, 3)$ (۴) $C(5, 4)$

۵۶- قرینه نقطه $A(-2, -1)$ نسبت به خط $y + 2x = 5$ کدام است؟

- (۱) $(3, 6)$ (۲) $(6, 3)$ (۳) $(2, 1)$ (۴) $(1, 2)$

درسنامه ۷

عمودمنصف در مثلث



فرض کنید بخواهیم معادله عمودمنصف وارد به ضلع BC را به دست آوریم. برای این کار مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱ مختصات نقطه M ، وسط ضلع BC را پیدا می‌کنیم:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2}, y_M = \frac{y_B + y_C}{2}$$

۲ چون عمودمنصف وارد بر BC ، عمود بر آن است، پس شیب ضلع BC را یافته و سپس آن را قرینه و معکوس می‌کنیم:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}} = -\frac{1}{m_{BC}}$$

۳ با داشتن نقطه M و شیب، معادله عمودمنصف وارد بر BC به صورت زیر خواهد بود:

$$y - y_M = \frac{-1}{m_{BC}}(x - x_M)$$

مثال اگر $A(-1, 2)$ ، $B(3, 0)$ و $C(1, -2)$ باشد، معادله عمودمنصف وارد بر ضلع BC را به دست آورید.

پاسخ: ۱ محاسبه وسط BC :

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2, y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0 + (-2)}{2} = -1 \Rightarrow M(2, -1)$$

۲ محاسبه شیب عمودمنصف:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-2 - 0}{1 - 3} = \frac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}} = -\frac{1}{m_{BC}} = -1$$

۳ نوشتن معادله عمودمنصف:

$$y - (-1) = -1(x - 2) \Rightarrow y + 1 = -x + 2 \Rightarrow y = -x + 1$$

۵۷- نقاط $A(5, 3)$ و $B(3, 5)$ مفروضند، معادله عمودمنصف AB کدام است؟

- (۱) $y = -x$ (۲) $y = x - 2$ (۳) $y = 2 - x$ (۴) $y = x$

۵۸- دو رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع $A(1, 1)$ و $B(5, 1)$ هستند. مختصات رأس سوم این مثلث کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $(3, 1 + \sqrt{3})$ (۲) $(3, -\sqrt{3})$ (۳) $(3, 1 - 2\sqrt{3})$ (۴) $(1, 1 + 2\sqrt{3})$

۵۹- اگر $A(2, 3)$ و $B(-2, -1)$ دو رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند، مختصات رأس سوم این مثلث کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $(-2\sqrt{3}, 1 - 2\sqrt{3})$ (۲) $(-2\sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ (۳) $(2\sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{3})$ (۴) $(2\sqrt{3}, 1 - 2\sqrt{3})$

۶۰- اگر $A(2, 1)$ و $B(5, 3)$ دو سر قطر مربع $ACBD$ باشند، عرض از مبدأ خط عبوری از قطر CD کدام است؟

- (۱) $\frac{21}{4}$ (۲) $\frac{7}{4}$ (۳) $\frac{29}{4}$ (۴) 5

۶۱- خط به معادله $2x + 4y = 5$ عمودمنصف پاره خط AB است که در آن $A(a, 4)$ و $B(-1, b)$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) -1 (۳) 2 (۴) -2

پاسخ‌های تشریحی

نقطه روی خط $\frac{x-y}{3} + y = 2x - 1$ قرار دارد، پس مختصاتش در معادله صدق می‌کند. حال با قرار دادن طول نقطه یعنی $x = 2$ در معادله، عرض آن را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x-y}{3} + y = 2x - 1 \xrightarrow{x=2} \frac{2-y}{3} + y = 2(2) - 1 \Rightarrow \frac{2-y+3y}{3} = 3$$

$$\Rightarrow 2+2y=9 \Rightarrow 2y=7 \Rightarrow y = \frac{7}{2} = 3.5$$

چون نقطه $(3, b)$ روی خط $2x - y = 5$ قرار دارد، پس مختصات آن در معادله صدق می‌کند:

$$2x - y = 5 \xrightarrow{\substack{x=3 \\ y=b}} 2(3) - b = 5 \Rightarrow b = 1$$

چون نقطه A روی محور y قرار دارد، پس طول آن صفر است، پس $A(0, 2)$. از طرفی چون خط از نقطه A عبور می‌کند، مختصات A در معادله خط صدق می‌کند. داریم:

$$2y + (3m - 6)x = 2m + 6 \xrightarrow{(0,2)} 2(2) + (3m - 6)(0) = 2m + 6 \Rightarrow 4 = 2m + 6$$

$$\Rightarrow 4 - 6 = 2m \Rightarrow 2m = -2 \Rightarrow m = -1$$

اگر طول نقطه A را با x_A و عرض آن را با y_A نمایش دهیم، طبق فرض سؤال می‌خواهیم عرض آن از سه برابر طولش، یک واحد بیشتر باشد، یعنی $y_A = 3x_A + 1$. چون نقطه A روی خط قرار دارد، پس مختصاتش در معادله صدق می‌کند:

$$2x_A + 5y_A = 19 - (x_A - y_A) \xrightarrow{y_A=3x_A+1} 2x_A + 5(3x_A+1) = 19 - (x_A - (3x_A+1))$$

$$\Rightarrow 2x_A + 15x_A + 5 = 19 - x_A + 3x_A + 1 \Rightarrow 15x_A = 15 \Rightarrow x_A = 1$$

با جایگذاری $x_A = 1$ در $y_A = 3x_A + 1$ ، عرض A برابر ۴ می‌شود. بنابراین مختصات نقطه A به صورت $(1, 4)$ درمی‌آید.

فرض کنید نقطه A ، محل برخورد دو خط باشد. طبق فرض نقطه A روی محور y ها قرار دارد. پس $x_A = 0$. حال در معادله $(a+2)x + y = 1$ ، x را صفر قرار داده تا عرض نقطه A به دست آید:

$$(a+2)x_A + y_A = 1 \xrightarrow{x_A=0} (a+2)(0) + y_A = 1 \Rightarrow y_A = 1 \Rightarrow A(0, 1)$$

چون A محل برخورد دو خط است، پس مختصات آن در هر دو معادله خط صدق می‌کند. لذا مختصات A را در معادله $x + ay - 2 = 0$ قرار می‌دهیم و a را می‌یابیم:

$$0 + a(1) - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

شیب خط $y = (2m - 4)x + m$ یعنی $2m - 4$ برابر ۲ است. پس:

$$2m - 4 = 2 \Rightarrow 2m = 6 \Rightarrow m = 3$$

حال $m = 3$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم و طول از مبدأ خط را به دست می‌آوریم:

$$y = (2m - 4)x + m \xrightarrow{m=3} y = 2x + 3 \xrightarrow{\text{برای محاسبه طول از مبدأ}} 0 = 2x + 3 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

y را صفر قرار می‌دهیم.

ابتدا معادله خط را با داشتن شیب و عرض از مبدأ می‌نویسیم:

$$y = ax + b \xrightarrow{\substack{a=-2 \\ b=3}} y = -2x + 3$$

برای پیدا کردن محل برخورد خط با محور x ها، کافی است در معادله، y را صفر قرار بدهیم:

$$y = -2x + 3 \xrightarrow{y=0} 0 = -2x + 3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

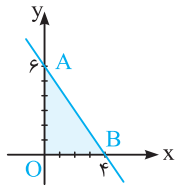
قبل از هر اقدامی آن را ساده کنید:

$$2\left(\frac{x-y}{3}\right) + 2\left(\frac{x+y}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{2x-2y}{3} + \frac{2x+2y}{2} = 1 \xrightarrow{\times 6} 2(2x-2y) + 3(2x+2y) = 6$$

$$\Rightarrow 4x - 4y + 9x + 9y = 6 \Rightarrow 13x + 5y = 6 \Rightarrow 5y = -13x + 6 \xrightarrow{\div 5} y = \frac{-13}{5}x + \frac{6}{5}$$

پس شیب $a = \frac{-13}{5}$ و عرض از مبدأ $b = \frac{6}{5}$ است:

$$a + b = \frac{-13}{5} + \frac{6}{5} = -\frac{7}{5}$$



راه اول: ابتدا محل برخورد خط با محورهای مختصات (یعنی همان عرض از مبدأ و طول از مبدأ) را می‌یابیم:

$$\xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم.}]{\text{x را صفر}} 3(0) + 2y = 12 \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6$$

$$\xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم.}]{\text{y را صفر}} 3x + 2(0) = 12 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

پس خط مطابق شکل، محور x ها را در $x = 4$ و محور y ها را در $y = 6$ قطع می‌کند و مثلث قائم‌الزاویه OAB را می‌سازد که مساحت آن

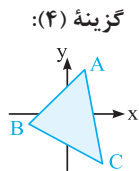
$$\text{برابر } 12 = \frac{4 \times 6}{2} \text{ می‌شود.}$$

راه دوم:

کنته در خط $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ ، عرض از مبدأ q و طول از مبدأ p است و مساحت مثلث حاصل از برخورد خط با محورهای مختصات برابر $\left| \frac{pq}{2} \right|$ است.

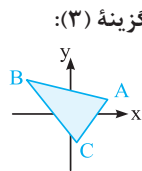
$$3x + 2y = 12 \xrightarrow{\div 12} \frac{3x}{12} + \frac{2y}{12} = \frac{12}{12} \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow \text{مساحت مثلث} = \left| \frac{pq}{2} \right| = \left| \frac{4 \times 6}{2} \right| = 12$$

از تقاطع سه خط با شیب‌های $0/5$ ، 10 و -1 مثلثی ایجاد کرده‌ایم. پس دو ضلع مثلث باید شیب مثبت و یک ضلع دیگر باید شیب منفی داشته باشد. حالا بریم خدمت گزینه‌ها برسیم:



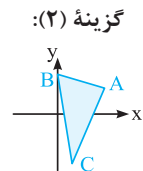
گزینه (۴):

شیب اضلاع AC و BC منفی و شیب ضلع AB مثبت است. پس غلط است.



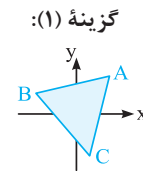
گزینه (۳):

شیب اضلاع AB و BC منفی و شیب ضلع AC مثبت است. پس غلط است.



گزینه (۲):

شیب اضلاع AB و BC منفی و شیب ضلع AC مثبت است. پس غلط است.



گزینه (۱):

شیب اضلاع AB و AC مثبت و شیب ضلع BC منفی است. پس همین گزینه صحیح است.

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = 4(x - 3) \Rightarrow y - 2 = 4x - 12 \Rightarrow y = 4x - 10$$

معادله خط را به صورت $y = ax + b$ فرض می‌کنیم. با توجه به مسئله شیب -6 است ($a = -6$) و طول از مبدأ -2 است. یعنی خط محور x ها را در $x = -2$ قطع کرده و لذا از نقطه $A(-2, 0)$ عبور کرده است. حال با جای‌گذاری مختصات A در معادله، عرض از مبدأ را می‌یابیم:

$$y = ax + b \xrightarrow{a=-6} y = -6x + b \xrightarrow{A(-2,0)} 0 = -6(-2) + b \Rightarrow b = -12$$

راه اول: در معادله خط $y = ax + b$ ، عرض از مبدأ b بوده که طبق فرض مسئله برابر ۵ است. از طرفی طول از مبدأ آن -3 می‌باشد، یعنی خط محور x ها را در $x = -3$ قطع کرده و لذا از نقطه $A(-3, 0)$ عبور کرده است. برای به‌دست آوردن شیب خط، مختصات نقطه A را در معادله قرار می‌دهیم:

$$y = ax + 5 \xrightarrow{A(-3,0)} 0 = a(-3) + 5 \Rightarrow 3a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{3}x + 5$$

راه دوم:

یادآوری اگر p طول از مبدأ و q عرض از مبدأ یک خط باشد، معادله خط به صورت $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ است.

با توجه به یادآوری فوق داریم:

$$\begin{cases} \text{عرض از مبدأ} = q = 5 \\ \text{طول از مبدأ} = p = -3 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{x}{3} + 1 \xrightarrow{\times 5} y = \frac{5}{3}x + 5$$

ابتدا معادله خط گذرنده از نقاط $A(1, 2)$ و $B(2, 4)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 2}{2 - 1} = 2 \Rightarrow y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2 + 2 \Rightarrow y = 2x$$

حال اگر خط بخواهد از نقطه $(m, m-1)$ عبور کند، مختصات $(m, m-1)$ باید در معادله خط (یعنی $y = 2x$) صدق کند:

$$y = 2x \Rightarrow m - 1 = 2(m) \Rightarrow m = -1$$

سؤال دانش‌پژوه (بهرام هشت‌گل): آقا، m همون شیبه؟

پاسخ: بهرام جان شما که فواید بوردی! شیب برابر ۲ شد. قرار نیست هر گردی، گردو باشه که! بچه هر جایی توی دنیا، تو m دیری که شیب نیست. این‌ها m یه مجهوله، همین!

۴ ۱۵

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{(\Delta m - 1) - (\Delta m)}{3m - (2m - 1)} = \frac{\Delta m - 1 - \Delta m}{3m - 2m + 1} = \frac{-1}{m + 1} \xrightarrow{\text{شیب} = \frac{1}{2}} \frac{-1}{m + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow m + 1 = -2 \Rightarrow m = -3$$

با توجه به مقدار m ، مختصات نقطه A و B برابر $A(-7, -15)$ و $B(-9, -16)$ می‌شود. حال به کمک شیب و یکی از نقاط A یا B معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y - (-15) = \frac{1}{2}(x - (-7)) \Rightarrow y + 15 = \frac{1}{2}(x + 7) \Rightarrow 2y + 30 = x + 7 \Rightarrow 2y - x + 23 = 0$$

دو خط $y = -x$ و $(a - 3)x - (a + 1)y = 5$ با هم موازی هستند، پس شیب‌هایشان برابر است. بریم ابتدا شیب‌ها را به دست آوریم:

۴ ۱۶

$$\begin{cases} (a - 3)x - (a + 1)y = 5 \\ y = -x \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرب } x \text{ در شیب}} \text{شیب} = -\frac{a - 3}{-(a + 1)} = \frac{a - 3}{a + 1}$$

از برابر قرار دادن شیب‌ها، a به دست می‌آید:

$$\frac{a - 3}{a + 1} = -1 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} a - 3 = -a - 1 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

خطی گذرنده از نقاط $A(-2, 3)$ و مبدأ مختصات $(0, 0)$ ، با خط $y = \frac{3}{b}x + 2$ موازی است، پس شیب هر دو خط با هم یکسان می‌باشد:

۴ ۱۷

$$\begin{cases} y = \frac{3}{b}x + 2 \\ \text{شیب} = \frac{3}{b} \end{cases} \xrightarrow{\text{شیب‌ها برابر}} \frac{3}{b} = -\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 6 = -3b \Rightarrow b = -2$$

$$\text{شیب خط گذرنده از } B(0, 0) \text{ و } A(-2, 3) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 3}{0 - (-2)} = -\frac{3}{2}$$

دو خط $(m - 1)y - mx = 5$ و $2x - m(1 - x + y) = 0$ موازی هم هستند، پس شیب‌هایشان برابر است. بریم ابتدا شیب‌ها را به دست آوریم:

۴ ۱۸

$$\begin{cases} (m - 1)y - mx = 5 \\ 2x - m(1 - x + y) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرب } x \text{ در شیب}} \text{شیب} = -\frac{-m}{m - 1} = \frac{m}{m - 1}$$

$$2x - m(1 - x + y) = 0 \Rightarrow 2x - m + mx - my = 0 \Rightarrow (2 + m)x - my - m = 0 \xrightarrow{\text{ضرب } x \text{ در شیب}} \text{شیب} = \frac{2 + m}{m}$$

از برابر قرار دادن شیب‌ها، m را می‌یابیم:

$$\frac{m}{m - 1} = \frac{2 + m}{m} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} m \times m = (m - 1)(2 + m) \Rightarrow m^2 = 2m + m^2 - 2 - m \Rightarrow 0 = m - 2 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow -\frac{1}{m} = -\frac{1}{2}$$

خط مورد نظر ما، موازی خط گذرنده بر دو نقطه $A(1, 4)$ و $B(-1, 5)$ است. پس شیب هر دو خط یکسان است. شیب خط گذرنده از A

۴ ۱۹

و B برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 4}{-1 - 1} = \frac{1}{-2}$$

بنابراین معادله خط را با داشتن شیب $-\frac{1}{2}$ و نقطه $C(2, -3)$ می‌نویسیم:

$$y - y_C = m(x - x_C) \Rightarrow y - (-3) = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y + 3 = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow \text{مبدأ از مبدأ}$$

در سؤال از نقطه‌ای صحبت شده که عرض آن ۵ است. چون آن نقطه محل برخورد دو خط است، پس روی هر دو خط قرار دارد. با قرار دادن $y = 5$ در معادله خط $2x - 3y = 5$ ، طول نقطه را می‌یابیم:

۱ ۲۰

$$2x - 3y = 5 \xrightarrow{y=5} 2x - 3(5) = 5 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow A(10, 5)$$

از طرفی خط مورد نظر با خط $4x - 2y = 5$ موازی است، پس شیب آن همان شیب خط $4x - 2y = 5$ است.

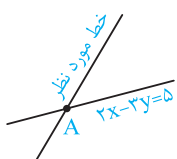
$$4x - 2y = 5 \Rightarrow 2y = 4x - 5 \xrightarrow{\div 2} y = 2x - \frac{5}{2} \Rightarrow \text{شیب} = 2$$

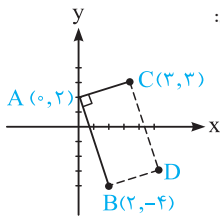
بنابراین معادله خطی را می‌نویسیم که از نقطه $A(10, 5)$ می‌گذرد و شیب آن $m = 2$ است:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 5 = 2(x - 10) \Rightarrow y = 2x - 15 \Rightarrow 2x - y = 15$$

سؤال دانش‌پژوه (نیک‌سیما پولوان): آقا اجازه چرا گفتین نقطه برخورد (تقاطع) دو خط روی هر دو خطه؟

پاسخ: بزار رو شکل توضیح بدم. بین دو خط مقابل، همدیگرو توی نقطه A قطع کردن. همون طوری که می‌بینی A هم روی خط $2x - 3y = 5$ قرار داره و هم روی خطی که دنبالشیم. پس مقدمات A در معادله هر دو خط صدق می‌کنه.



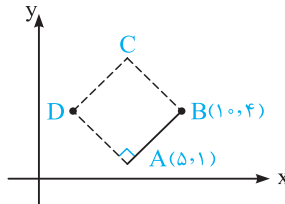


می‌دانیم در مستطیل اضلاع روبه‌رو به هم شیب‌های برابر دارند. پس شیب ضلع CD برابر شیب ضلع AB است. داریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4 - 2}{2 - 0} = -\frac{6}{2} = -3 \Rightarrow m_{CD} = -3$$

حال معادله خط CD را با داشتن C(3, 3) و $m_{CD} = -3$ می‌نویسیم:

$$y - 3 = -3(x - 3) \xrightarrow[y=0]{\text{برخورد با محور X}} 0 - 3 = -3(x - 3) \Rightarrow x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$$



فرض کنید مربع مورد نظر به صورت مقابل باشد:

می‌دانیم در مربع، اضلاع AB و AD برهم عمود است. پس شیب AD، قرینه و معکوس شیب ضلع AB است:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 1}{10 - 5} = \frac{3}{5} \Rightarrow m_{AD} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$$

حال با داشتن شیب $m_{AD} = -\frac{5}{3}$ و نقطه A(5, 1)، معادله خط گذرنده از ضلع AD را به دست می‌آوریم:

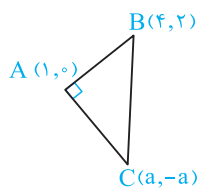
$$y - 1 = -\frac{5}{3}(x - 5)$$

برای محاسبه محل برخورد این خط و نیمساز ناحیه اول و سوم ($y = x$) در معادله خط فوق به جای y ، x قرار می‌دهیم:

$$x - 1 = -\frac{5}{3}(x - 5) \Rightarrow 3x - 3 = -5x + 25 \Rightarrow 8x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{8} = \frac{7}{2} = 3.5$$

چون $x = y$ است، پس عرض نقطه برخورد هم 3.5 است.

مثلث ABC متساوی‌الساقین و در رأس A قائمه است. پس دو پاره‌خط AB و AC برهم عمودند. لذا حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها (-1) است. داریم:



$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 0}{4 - 1} = \frac{2}{3}$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-a - 0}{a - 1} = -\frac{a}{a - 1}$$

$$\Rightarrow m_{AB} \times m_{AC} = -1 \Rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{-a}{a - 1} = -1 \Rightarrow \frac{-2a}{3a - 3} = -1 \Rightarrow -2a = -3a + 3 \Rightarrow a = 3$$

سؤال دانش‌پژوه (لیلا فرهادی‌پور): آقا اجازه ما اومدیم طول اضلاع AB، AC و BC رو پیدا کردیم و بعدش در فرمول فیثاغورس

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ قرار دادیم و } a \text{ رو به دست آوردیم. اینم میشه؟}$$

پاسخ: آره میشه ولی ۲ ساعت طول می‌کشه! افراد مبتدی از این راهی که تو گفتی میرن!

می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، اضلاع روبه‌رو موازی‌اند؛ پس AC با BD موازی است. حال شیب خط BD را یافته و از روی آن، شیب خط AC را به دست می‌آوریم:

$$2y - 3x = 1 \Rightarrow \text{شیب BD} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{شیب AC} = \frac{3}{2}$$

$$y - y_A = m_{AC}(x - x_A) \Rightarrow y - 6 = \frac{3}{2}(x - 7) \Rightarrow 2y - 12 = 3x - 21 \Rightarrow 2y - 3x = -9$$

حال برای به دست آوردن عرض نقطه C کافی است، معادلات دو خط AC و BC را در یک دستگاه حل کنیم:

$$\begin{cases} 4 \times \{2y - 3x = -9\} \\ 3 \times \{3y + 4x = 8\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y - 12x = -36 \\ 9y + 12x = 24 \end{cases} \Rightarrow 17y = -12 \Rightarrow y = \frac{-12}{17}$$

دو خط $y - (2m + 1)x = 1$ و $(m + 1)y - x = 2$ بر هم عمودند. پس حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر (-1) است. بریم شیب‌های آن‌ها را

$$y - (2m + 1)x = 1 \Rightarrow y = (2m + 1)x + 1 \Rightarrow \text{شیب} = 2m + 1$$

$$(m + 1)y - x = 2 \Rightarrow (m + 1)y = x + 2 \Rightarrow y = \frac{1}{m + 1}x + \frac{2}{m + 1} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{1}{m + 1}$$

بنابراین:

$$\text{شیب خط دوم} \times \text{شیب خط اول} = -1 \Rightarrow (2m + 1) \times \frac{1}{m + 1} = -1 \Rightarrow \frac{2m + 1}{m + 1} = -1 \Rightarrow 2m + 1 = -m - 1 \Rightarrow 3m = -2 \Rightarrow m = \frac{-2}{3}$$

ابتدا شیب هر دو خط را پیدا می‌کنیم: ۲۶ ۲

$$(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0 \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{2k}{k+1}$$

$$A(2, -1) \text{ و } B(8, 3) \Rightarrow \text{شیب} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - (-1)}{8 - 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

دو خط بر هم عمودند، پس حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر (-۱) است. بنابراین داریم:

$$\frac{-2k}{k+1} \times \frac{2}{3} = -1 \Rightarrow \frac{-4k}{3k+3} = -1 \Rightarrow 4k = 3k+3 \Rightarrow k=3$$

حال $k=3$ را در معادله خط L قرار دهیم تا معادله آن به دست آید:

$$(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0 \xrightarrow{k=3} 4y + 6x - 3 + 1 = 0 \xrightarrow{\div 2} 2y + 3x - 1 = 0 \Rightarrow 2y + 3x = 1$$

ابتدا مختصات وسط پاره‌خط‌های AB و AC را به دست می‌آوریم: ۲۷ ۲

$$AB \text{ وسط پاره خط } : x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 8}{2} = 5 \text{ و } y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \Rightarrow M(5, 1)$$

$$AC \text{ وسط پاره خط } : x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2 + 6}{2} = 4 \text{ و } y_N = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0 \Rightarrow N(4, 0)$$

حال طول پاره خط MN را می‌یابیم:

$$MN = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = \sqrt{(5 - 4)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

عرض نقطه A را y_A فرض می‌کنیم. فاصله دو نقطه $A(-2, y_A)$ و $B(1, -3)$ برابر ۵ است. بنابراین: ۲۸ ۴

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \Rightarrow 5 = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (y_A - (-3))^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 25 = 9 + (y_A + 3)^2 \Rightarrow (y_A + 3)^2 = 16$$

$$\Rightarrow (y_A + 3)^2 - 16 = 0 \Rightarrow \underbrace{(y_A + 3)^2 - 4^2}_{\text{اتحاد مزدوج}} = 0 \Rightarrow (y_A + 3 - 4)(y_A + 3 + 4) = 0$$

$$\Rightarrow (y_A - 1)(y_A + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_A - 1 = 0 \Rightarrow y_A = 1 \\ y_A + 7 = 0 \Rightarrow y_A = -7 \end{cases}$$

سؤال دانش‌پژوه (مریم گلدره): آقا من اوادم گزینه‌ها را در معادله $(y_A + 3)^2 = 16$ جایگذاری کردم، دیدم اگر $y_A = -7$ باشد تساوی برقراره و گفتم همون جوابه.

پاسخ: آخرین به هوش. البته اول سال تحصیلی همه فوبن ایشالا تا آخر سال هم اینطوری فعال باشیم ☺

فاصله خانه از دو تا مرکز آتش‌نشانی را حساب می‌کنیم تا ببینیم کدام مرکز به خانه آتش‌گرفته نزدیک‌تر است: ۲۹ ۳

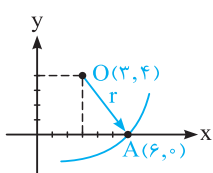
$$\begin{cases} P(50, 30) \\ A(10, -20) \\ B(80, 90) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AP = \sqrt{(50 - 10)^2 + (30 - (-20))^2} = \sqrt{40^2 + 50^2} = \sqrt{1600 + 2500} = \sqrt{4100} \\ BP = \sqrt{(80 - 50)^2 + (90 - 30)^2} = \sqrt{30^2 + 60^2} = \sqrt{900 + 3600} = \sqrt{4500} \end{cases}$$

پس مرکز آتش‌نشانی A به خانه آتش‌گرفته شده نزدیک‌تر است و اگر اعزام آتش‌نشانان از آن‌جا انجام بگیرد، بهتر است.

$$AB = \sqrt{(61 - 46)^2 + (25 - 38)^2} = \sqrt{15^2 + 13^2} = \sqrt{225 + 169} = \sqrt{394}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله مستقیم این دو شهر در حالت واقعی} = 110 \times AB = 110 \times \sqrt{394}$$

دایره موردنظر محور xها را در نقطه‌ای به طول ۶ قطع می‌کند، پس نقطه $A(6, 0)$ روی دایره قرار دارد. از طرفی فاصله هر نقطه روی محیط دایره تا مرکز دایره، برابر شعاع دایره است. پس داریم: ۳۰ ۱



$$\text{شعاع} = r = OA = \sqrt{(6 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{36 + 0} = \sqrt{36} = 6$$

$$\text{محیط دایره} = 2\pi r \stackrel{r=6}{=} 2\pi(6) = 12\pi$$

بنابراین:

۴ ۳۲

ابتدا طول قطر مربع را می‌یابیم:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (0 - (-2))^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

از طرفی می‌دانیم: (ضلع $\times$ قطر) = قطر. پس داریم:

$$\sqrt{20} = \sqrt{2} \times \text{ضلع} \Rightarrow \text{ضلع} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{20}{2}} = \sqrt{10} \Rightarrow \text{محیط} = 4(\text{ضلع}) = 4\sqrt{10} = \sqrt{16 \times 10} = \sqrt{160}$$

۴ ۳۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): چون A و B دو سر قطر دایره هستند، پس وسط قطر AB همان مرکز دایره است. لذا داریم:

$$\begin{cases} x_O = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1 \\ y_O = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow O(1, 2) \quad \checkmark$$

گزینه (۲): ابتدا طول قطر را می‌یابیم:

$$AB = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (-2 - 6)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow \text{شعاع} = \frac{\text{قطر}}{2} = 5 \quad \checkmark$$

گزینه (۳): اگر نقطه C(4, 6) روی محیط دایره باشد، باید فاصله‌اش تا مرکز دایره O(1, 2) برابر شعاع دایره باشد:

$$OC = \sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

پس نقطه C روی محیط دایره قرار دارد.

گزینه (۴): اگر معادله $2x + 3y = 4$ ، معادله یکی از قطرهای دایره باشد، حتماً مختصات مرکز دایره در آن صدق می‌کند:

$$2x + 3y = 4 \xrightarrow{O(1, 2)} 2(1) + 3(2) = 8 \neq 4 \Rightarrow \text{این گزینه غلط و جواب است.}$$

۲ ۳۴ واسه حل اینطور مسائل، کشیدن شکل خیلی به ما کمک می‌کنه!

با توجه به شکل، مساحت مستطیل برابر $OA \times OB$ می‌شود. حال طول OA و OB را می‌یابیم:

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$$

$$OB = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2} = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

بنابراین:

$$\text{مساحت مستطیل} = OA \times OB = \sqrt{18} \times \sqrt{2} = \sqrt{36} = 6$$

۳ ۳۵ برای پیدا کردن محیط مثلث باید طول اضلاع AB، AC و BC را به‌دست آوریم:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

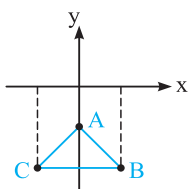
$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(4 - 0)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

پس محیط مثلث برابر می‌شود با:

$$AB + AC + BC = 5 + 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 5 + 3\sqrt{5}$$

۳ ۳۶ با توجه به شکل حدس می‌زنیم AB و AC بر هم عمودند. برای آن‌که مطمئن شویم، شیب آن‌ها را می‌یابیم:



$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-2)}{1 - 4} = -1 \\ m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{0 - (-2)}{0 - 4} = -1 \end{cases} \Rightarrow m_{AB} \times m_{AC} = (-1) \times (-1) = 1$$

چون حاصل ضرب شیب‌ها (-1) شد پس مطمئن شدیم دو ضلع AB و AC بر هم عمودند. در نتیجه مثلث ABC قائم‌الزاویه است. برای

محاسبه محیط باید طول اضلاع آن را بیابیم:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (-2 - (-1))^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

پس اولاً چون $AB = AC$ شد، پس مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است. ثانیاً محیط آن برابر می شود با:

$$\text{محیط} = AB + AC + BC = \sqrt{2} + \sqrt{2} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

سؤال دانش پژوه (ناصر افته پاری): آقا اجازه ما اول اومدیم طول اضلاع رو به دست آوردیم و فهمیدیم چون دوتا ضلع با هم برابرند

مثلث متساوی الساقینه، بعدش طول اضلاع رو در رابطه فیثاغورس $a^2 = b^2 + c^2$ چک کردیم چون تساوی برقرار شد، گفتیم پس

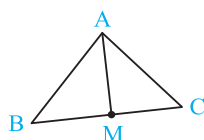
قائم الزاویه هم هستش. آیا درسته حرف ما؟

پاسخ: ناصر از این حرف تو، اشک تو پشای من جمع شد! بله کاملاً درسته. فکرش نمی کردم این قدر تاثیر کتاب خوب زود روی تو، خودش نشون بده!

همان طوری که در شکل می بینید، میانه AM از نقطه A به وسط ضلع BC (نقطه M) وصل می شود. پس

۳۷ ۲

ابتدا مختصات نقطه M وسط BC را می یابیم:



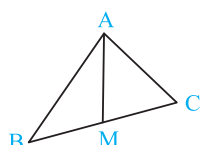
$$x_M = \frac{x_C + x_B}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1 \quad \text{و} \quad y_M = \frac{y_C + y_B}{2} = \frac{2 + (-2)}{2} = 0 \Rightarrow M(1, 0)$$

حال با استفاده از نقاط $A(1, 4)$ و $M(1, 0)$ ، طول میانه AM را می یابیم:

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(1 - 1)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{0 + 16} = \sqrt{16} = 4$$

ابتدا مختصات وسط پاره خط BC را می یابیم:

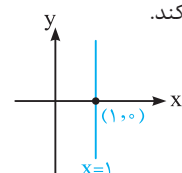
۳۸ ۱



$$x_M = \frac{x_C + x_B}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1, \quad y_M = \frac{y_C + y_B}{2} = \frac{2 + (-2)}{2} = 0 \Rightarrow M(1, 0)$$

با معلوم شدن دو نقطه A و M می توان معادله میانه AM را نوشت. حواستان باشد A و M دارای طول یکسان ۱ هستند. پس طبق

درسنامه معادله خط گذرنده از آن ها به صورت $x = 1$ خواهد بود. واضح است که این خط محور x ها را در $x = 1$ قطع می کند.



سؤال دانش پژوه (شورام هریری): آقا کجا واضح؟ واسه ما که خیلی هم تاریکه!

پاسخ: بزار شکل بکشیم واسه تا تاریکی تو هم از بین بره. فقط $x = 1$ محور x ها رو در $x = 1$ قطع می کنه.

پس نقطه برقرار آن با محور x ها، نقطه $(1, 0)$ میشه.

در متوازی الاضلاع نقطه O وسط دو قطر AC و BD است. حال با توجه به فرمول وسط پاره خط، مختصات رئوس A و D را پیدا کرده و

۳۹ ۳

سپس با معلوم شدن دو نقطه A و D می توانیم معادله خط AD را بنویسیم:

$$\text{AC وسط O: } \begin{cases} x_O = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 5 = \frac{x_A + 2}{2} \Rightarrow 10 = x_A + 2 \Rightarrow x_A = 8 \\ y_O = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow 4 = \frac{y_A + 2}{2} \Rightarrow 8 = y_A + 2 \Rightarrow y_A = 6 \end{cases} \Rightarrow A(8, 6)$$

$$\text{BD وسط O: } \begin{cases} x_O = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow 5 = \frac{4 + x_D}{2} \Rightarrow 10 = 4 + x_D \Rightarrow x_D = 6 \\ y_O = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow 4 = \frac{6 + y_D}{2} \Rightarrow 8 = 6 + y_D \Rightarrow y_D = 2 \end{cases} \Rightarrow D(6, 2)$$

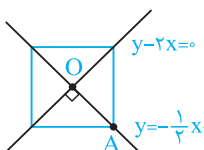
حال می توانیم معادله AD را بنویسیم:

$$m_{AD} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{2 - 6}{6 - 8} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow y - y_D = m_{AD}(x - x_D) \Rightarrow y - 2 = 2(x - 6)$$

$$\Rightarrow y - 2 = 2x - 12 \Rightarrow y = 2x - 10$$

ابتدا نقطه برخورد دو قطر را که همان مرکز مربع است به کمک حل دستگاه زیر پیدا می کنیم:

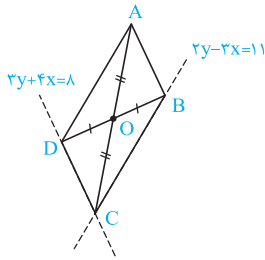
۴۰ ۱



$$\begin{cases} y - 2x = 0 \Rightarrow y = 2x & (*) \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} & (**) \end{cases} \Rightarrow 2x = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow 2x + \frac{1}{2}x = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5x}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 1 \xRightarrow{(*)} y = 2 \times 1 = 2$$

پس مرکز مربع $O(1, 2)$ می شود. از طرفی فاصله مرکز مربع تا یکی از رأس های آن مثل رأس A ، برابر نصف قطر است. بنابراین:

$$\text{نصف قطر} = \sqrt{(x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2} = \sqrt{(1 - 8)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65} \Rightarrow \text{قطر} = 2\sqrt{65}$$



معادله دو ضلع BC و CD را در یک دستگاه قرار داده و با حل دستگاه محل تلاقی آن‌ها یعنی نقطه C مشخص می‌شود. داریم:

$$4 \times \begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y - 12x = 44 \\ 9y + 12x = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \oplus \\ \hline \end{matrix} +17y = 68 \Rightarrow y = \frac{68}{17} = 4 \xrightarrow[\text{از معادلات}]{\text{جای‌گذاری در یکی}} x = -1 \Rightarrow C(-1, 4)$$

حال با معلوم بودن مختصات دو رأس مقابل A و C (دو سر قطر AC)، مختصات وسط قطر را می‌یابیم:

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{7 + (-1)}{2} = 3 \text{ و } y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5 \Rightarrow O(3, 5)$$

با فرض $A(3, m)$ و $B(7, -1)$ ، مختصات نقطه M، وسط پاره خط AB را می‌یابیم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 + 7}{2} = 5 \text{ و } y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{m - 1}{2} \Rightarrow M(5, \frac{m-1}{2})$$

شیب خط $2x = y - 4$ یا همان $y = 2x + 4$ برابر ۲ است. چون خط d موازی آن می‌باشد، پس شیب خط d نیز ۲ می‌باشد و از وسط پاره خط AB یعنی از نقطه M عبور می‌کند. پس معادله خط d برابر می‌شود با:

$$y - y_M = m(x - x_M) \Rightarrow y - (\frac{m-1}{2}) = 2(x - 5) \Rightarrow y = 2x - 10 + \frac{m-1}{2}$$

طبق فرض عرض از مبدأ خط d -۵ است. با توجه به معادله داده شده عرض از مبدأ $-10 + \frac{m-1}{2}$ بوده که باید آن را مساوی -۵ قرار دهیم تا m به دست آید:

$$-10 + \frac{m-1}{2} = -5 \Rightarrow \frac{m-1}{2} = 5 \Rightarrow m-1 = 10 \Rightarrow m = 11$$

سؤال دانش‌پژوه (منیا اسماعیلی): آقا اجازه عرض از مبدأ خط مگه $\frac{m-1}{2}$ نیست؟ چرا ۱۰- رو هم با اون گرفتیم؟

کج پاسخ: ببین هر معادله خط استاندارد از ۲ قسمت تشکیل شده، یه قسمت اون X داره و قسمت دیگه X نداره. به قسمت بدون X می‌گیم عرض از مبدأ و به ضریب X می‌گیم شیب. حالا یه بار دیگه ببین.

$$y = 2x - 10 + \frac{m-1}{2}$$

قسمت بدون X قسمت دارای X

— آره، آقا حالا درست شد!

— درست بود بچه، برای تو حالا درست شد!

فرض کنید O محل برخورد میانه‌ها باشد. برای پیدا کردن آن، کافی است معادله دو تا از میانه‌ها را به دست آورده و آن دو معادله را در یک دستگاه قرار داده و از حل آن مختصات O را بیابیم.

محاسبه معادله میانه AA': نقطه A' وسط ضلع BC است. پس مختصات آن برابر می‌شود با:

$$x_{A'} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-1 + 4}{2} = \frac{3}{2} \text{ و } y_{A'} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{6 + (-6)}{2} = 0 \Rightarrow A'(\frac{3}{2}, 0)$$

با معلوم شدن دو نقطه A و A' می‌توانیم معادله میانه AA' را بنویسیم:

$$m_{AA'} = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} = \frac{0 - 6}{\frac{3}{2} - 3} = 0 \Rightarrow \text{معادله } y = y_A \Rightarrow y = 0 \text{ افقی است.}$$

محاسبه معادله میانه CC': نقطه C' وسط ضلع AB است. پس مختصات آن برابر می‌شود با:

$$x_{C'} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{6 + (-1)}{2} = \frac{5}{2} \text{ و } y_{C'} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + (-6)}{2} = 0 \Rightarrow C'(\frac{5}{2}, 0)$$

با معلوم شدن دو نقطه C و C' می‌توانیم معادله میانه CC' را بنویسیم:

$$m_{CC'} = \frac{y_{C'} - y_C}{x_{C'} - x_C} = \frac{0 - (-6)}{\frac{5}{2} - 4} = \frac{6}{-\frac{3}{2}} = -4 \Rightarrow y - y_C = m_{CC'}(x - x_C)$$

$$\Rightarrow y - (-6) = -4(x - 4) \Rightarrow y + 6 = -4x + 16 \Rightarrow y = -4x + 10$$

حال معادلات میانه‌های AA' و CC' را در یک دستگاه قرار داده تا محل تلاقی آن‌ها پیدا شود:

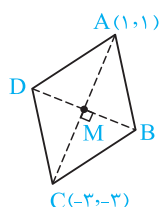
$$\begin{cases} y = 0 & (*) \\ y = -4x + 10 & (**) \end{cases} \Rightarrow 0 = -4x + 10 \Rightarrow 4x = 10 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow O(\frac{5}{2}, 0)$$

با توجه به گزینه‌ها، فقط خط $y = -x + 3$ از نقطه $O(\frac{5}{2}, 0)$ عبور می‌کند زیرا مختصات O در معادله آن صدق می‌کند. پس گزینه (۱) صحیح است.

سؤال دانش‌پژوه (والیه همزه‌لویی): آقا اجازه سؤال محل برخورد سه میانه رو خواسته بود، شما چرا محل برخورد دو تا میانه رو به دست آوردین پس؟

پاسخ: آگه به شکل دقت کنی می‌بینی که محل برخورد دو میانه همان محل برخورد سه میانه یعنی نقطه O است. پس کافیه هر دو تا میانه‌ای که دوس داشتیو در نظر بگیری و محل برخوردشونو پیدا کنی.

متماً دارین دار و بیدار می‌کنین که این ریگه چه سؤال سفتیه آئه! خب ابتدا شکل بکشیم تا مسأله کمی واضح‌تر شود، می‌دانیم در لوزی قطرهای بر هم عمودند و هم‌دیگر را نصف می‌کنند.



برای نوشتن معادله خط DB به دو چیز نیاز داریم یکی مختصات نقطه M و دیگری شیب خط DB. اول

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1 + (-3)}{2} = -1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1 + (-3)}{2} = -1 \Rightarrow M(-1, -1)$$

مختصات نقطه M وسط پاره‌خط AC را می‌یابیم:

از طرفی چون DB بر AC عمود است. شیب AC را یافته و آن را قرینه و معکوس می‌کنیم:

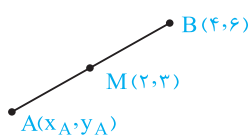
$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-3 - 1}{-3 - 1} = 1 \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} m_{BD} = -1$$

حال معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_M = m_{BD}(x - x_M) \Rightarrow y - (-1) = (-1)(x - (-1)) \Rightarrow y + 1 = -x - 1 \Rightarrow y = -x - 2$$

صبر کنید گزینه (۱) را انتخاب نکنید! ما دنبال خطی هستیم که دو رأس B و D بتواند روی آن قرار بگیرد اما اگر یکی از نقاط B یا D روی نقطه M قرار بگیرد، آن‌گاه آن نقطه به همراه A و C در یک راستا بوده و لذا شکل لوزی نمی‌شود! پس باید نقطه M را از خط BD حذف کنیم. برای این کار باید شرط $x \neq -1$ را به خط اضافه کنیم. زیرا $x = -1$ طول نقطه M است که آن را نمی‌خواهیم!

با توجه به فرمول وسط پاره‌خط داریم:



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 2 = \frac{x_A + 4}{2} \Rightarrow 4 = x_A + 4 \Rightarrow x_A = 0$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 3 = \frac{y_A + 6}{2} \Rightarrow 6 = y_A + 6 \Rightarrow y_A = 0$$

پس $A(0, 0)$. از طرفی شیب پاره‌خط AB برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6 - 0}{4 - 0} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{شیب خط عمود بر AB} = -\frac{2}{3}$$

حال معادله خط گذرنده از A و عمود بر پاره‌خط AB را می‌نویسیم:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x$$

عرض از مبدأ خط فوق صفر است. پس محور yها را در نقطه‌ای به عرض صفر قطع می‌کند.

ابتدا شیب خط d، گذرنده از نقاط $A(a, b)$ و $B(b, a)$ را می‌یابیم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{a - b}{b - a} = \frac{-(b - a)}{(b - a)} = -1$$

حال درستی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

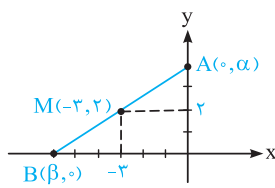
گزینه (۱): شیب خط $y - x = 3$ یا $y = x + 3$ ، یک است که چون قرینه و معکوس شیب خط d است، پس خط d بر خط $y = x + 3$ عمود است و این گزینه صحیح است.

گزینه (۲): شیب خط $4x + 2y = 2(x - 3)$ را می‌یابیم: $4x + 2y = 2x - 6 \Rightarrow 2y = -2x - 6 \Rightarrow y = -x - 3$ چون در این خط بوده و برابر شیب خط d است، پس این دو خط موازی بوده و این گزینه صحیح است.

گزینه (۳): نقطه $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$ ، در حقیقت مختصات وسط پاره‌خط AB است و چون نقاط A و B روی خط d قرار دارند، لذا وسط پاره‌خط AB نیز روی خط d قرار دارد. پس این گزینه صحیح است.

گزینه (۴): غلط است، زیرا می‌دانیم نقطه برخورد دو خط باید در معادله هر دو خط صدق کند ولی مختصات نقطه $(\frac{b-a}{2}, \frac{a+b}{2})$ ضابطه $y = x$ صدق نمی‌کند! پس نمی‌تواند نقطه برخورد خط d و خط $y = x$ باشد. قابل ذکر است که خط $y = x$ و خط d در نقطه $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$ متقاطع و در آن نقطه بر هم عمود هم هستند (چرا؟).

ابتدا دو نقطه روی محورهای مختصات و نقطه M را روی شکل نشان می‌دهیم؛ چون $M(-3, 2)$ وسط پاره خط AB است. داریم:

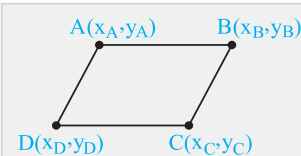


$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -3 = \frac{0 + \beta}{2} \Rightarrow \beta = -6 \Rightarrow B(-6, 0)$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 2 = \frac{\alpha + 0}{2} \Rightarrow \alpha = 4 \Rightarrow A(0, 4)$$

$$AB \text{ شیب} = \frac{4 - 0}{0 - (-6)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

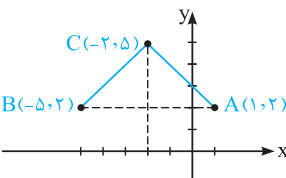
$$AB \text{ معادله: } y - 4 = \frac{2}{3}(x - 0) \Rightarrow 3(y - 4) = 2x \Rightarrow 3y - 2x = 12 \xrightarrow{\times(-1)} 2x - 3y = -12$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

در هر متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داریم:

یادآوری



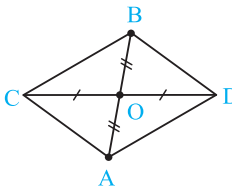
$$\begin{cases} x_A + x_B = x_C + x_D \Rightarrow 1 + (-5) = -2 + x_D \Rightarrow x_D = -2 \\ y_A + y_B = y_C + y_D \Rightarrow 2 + 2 = 5 + y_D \Rightarrow y_D = -1 \end{cases}$$

$$x_D + y_D = -3$$

سؤال دانش‌پژوه (آرمان بریعی): آقا شما توی فرمول که نقاط A و C رو با هم و نقاط B و D رو با هم گرفته بودین پس چرا توی

این مسأله A و B را با هم و C و D را با هم گرفتین؟

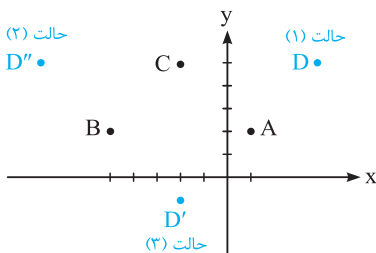
پاسخ: ببین عزیز بان، مهم اسم نقاط نیست که! مهم اینه که توی این فرمول نقاطی را باید با هم بگیریم که در متوازی‌الاضلاع، مقابل هم هستند. به کمک رسم شکل می‌توان فهمید کدام نقاط مقابل هم هستند.



$$\begin{cases} x_A + x_B = x_C + x_D \Rightarrow \begin{cases} -2 + 6 = 1 + x_D \Rightarrow x_D = 3 \\ -1 + 3 = 2 + y_D \Rightarrow y_D = 0 \end{cases} \Rightarrow D(3, 0) \end{cases}$$

در چهارضلعی مقابل می‌توانیم رابطه زیر را بنویسیم:

حالت (۲)
 D''



حالت (۱)
 D

ابتدا نقاط $A(1, 2)$ ، $B(-5, 2)$ و $C(-2, 5)$ را روی محورهای مختصات مشخص می‌کنیم. رأس چهارم می‌تواند در محل‌های D یا D' یا D'' قرار بگیرد. حال به کمک فرمول، مختصات این نقاط را می‌یابیم:

حالت (۱):

$$\begin{cases} x_C + x_A = x_B + x_D \Rightarrow -2 + 1 = -5 + x_D \Rightarrow x_D = 4 \\ y_C + y_A = y_B + y_D \Rightarrow 5 + 2 = 2 + y_D \Rightarrow y_D = 5 \end{cases} \Rightarrow D(4, 5)$$

حالت (۲):

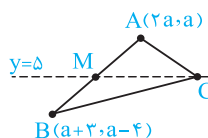
$$\begin{cases} x_C + x_B = x_A + x_{D''} \Rightarrow -2 + (-5) = 1 + x_{D''} \Rightarrow x_{D''} = -8 \\ y_C + y_B = y_A + y_{D''} \Rightarrow 5 + 2 = 2 + y_{D''} \Rightarrow y_{D''} = 5 \end{cases} \Rightarrow D''(-8, 5)$$

حالت (۳):

$$\begin{cases} x_C + x_{D'} = x_B + x_A \Rightarrow -2 + x_{D'} = -5 + 1 \Rightarrow x_{D'} = -2 \\ y_C + y_{D'} = y_B + y_A \Rightarrow 5 + y_{D'} = 2 + 2 \Rightarrow y_{D'} = -1 \end{cases} \Rightarrow D'(-2, -1)$$

میانۀ نظیر رأس C پاره‌خطی است که یک سر آن رأس C و سر دیگر آن وسط ضلع AB است. پس ابتدا

مختصات نقطه M ، وسط ضلع AB را می‌یابیم:



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2a + (a+3)}{2} = \frac{3a+3}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{a + (a-4)}{2} = \frac{2a-4}{2} = a-2$$

از طرفی معادله میانه CM، $y = 5$ است. چون نقطه M روی این خط است، پس $y_M = 5$ نیز برابر ۵ خواهد بود. داریم:

$$y_M = 5 \Rightarrow a - 2 = 5 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow x_M = \frac{3a + 3}{2} = \frac{3(7) + 3}{2} = 12$$

پس $M(12, 5)$ بوده و فاصله آن تا نقطه $E(8, 2)$ برابر است با:

$$ME = \sqrt{(12-8)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

میانگین سود سالانه کارگاه در ده ساله مورد نظر با توجه به نمودار برابر است با:

۴ ۵۲

$$\text{میانگین سود سالانه} = \frac{10 \times 5 + 7 \times 5}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

این مقدار سود در میانگین ۱۰ ساله اول یعنی در سال $n = \frac{1375 + 1385}{2} = 1380$ ام رخ می‌دهد. حال باید ببینیم در سال $(n + 20) = 1380 + 20 = 1400$ ام، سود سالانه چه قدر است. پس ابتدا معادله خط را می‌یابیم:

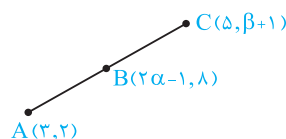
$$m = \frac{105 - 75}{1385 - 1375} = \frac{30}{10} = 3 \Rightarrow y - 75 = 3(x - 1375) \Rightarrow y = 3x - 4125 + 75 \Rightarrow y = 3x - 4050$$

حال زمان را ۱۴۰۰ قرار می‌دهیم تا سود سالانه را بیابیم:

$$1400 \text{ سال در سالانه} = 3(1400) - 4050 = 150$$

با توجه به فرمول بیان شده در درسنامه داریم:

۴ ۵۳



$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 2\alpha - 1 = \frac{3 + 5}{2} \Rightarrow 2\alpha - 1 = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{5}{2}$$

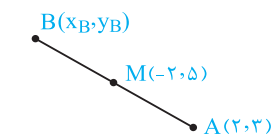
$$y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow 8 = \frac{2 + \beta + 1}{2} \Rightarrow 16 = \beta + 3 \Rightarrow \beta = 13$$

بنابراین:

$$2\alpha + \beta = 2\left(\frac{5}{2}\right) + 13 = 18$$

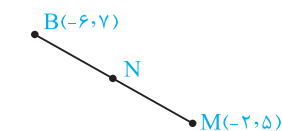
A قرینه B نسبت به نقطه $M(-2, 5)$ است، یعنی M وسط پاره خط AB است (مانند شکل زیر) پس داریم:

۴ ۵۴



$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -2 = \frac{2 + x_B}{2} \Rightarrow -4 = 2 + x_B \Rightarrow x_B = -6 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 5 = \frac{3 + y_B}{2} \Rightarrow 10 = 3 + y_B \Rightarrow y_B = 7 \end{cases} \Rightarrow B(-6, 7)$$

حال وسط پاره خط MB را می‌یابیم:



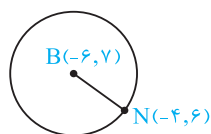
$$\begin{cases} x_N = \frac{x_B + x_M}{2} = \frac{-6 + (-2)}{2} = -4 \\ y_N = \frac{y_B + y_M}{2} = \frac{7 + 5}{2} = 6 \end{cases} \Rightarrow N(-4, 6)$$

حال شعاع دایره را می‌یابیم:

$$R = BN = \sqrt{(-6 - (-4))^2 + (7 - 6)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

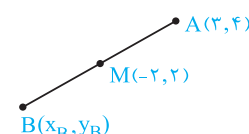
پس مساحت دایره برابر می‌شود با:

$$\text{مساحت دایره} = \pi R^2 = \pi(\sqrt{5})^2 = 5\pi$$



ابتدا نقطه B، قرینه نقطه $A(3, 4)$ را نسبت به نقطه $M(-2, 2)$ می‌یابیم. در این صورت با توجه به شکل، نقطه M وسط پاره خط AB است. داریم:

۴ ۵۵



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -2 = \frac{3 + x_B}{2} \Rightarrow -4 = 3 + x_B \Rightarrow x_B = -7$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 2 = \frac{4 + y_B}{2} \Rightarrow 4 = 4 + y_B \Rightarrow y_B = 0$$

حال شعاع دایره به مرکز $O(-1, 2)$ و عبوری از نقطه $B(-7, 0)$ را می‌یابیم:

$$R = \sqrt{(-1 - (-7))^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$

اگر نقطه‌ای روی محیط دایره باشد، فاصله‌اش تا مرکز دایره باید برابر شعاع یعنی $\sqrt{40}$ باشد.

بررسی گزینه‌ها:

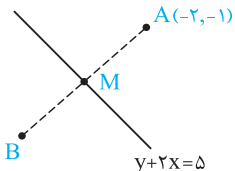
گزینه (۱): $C(-2, 3): OC = \sqrt{(-2 - (-1))^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq \sqrt{4}$

گزینه (۲): $C(-5, 4): OC = \sqrt{(-5 - (-1))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \neq \sqrt{4}$

گزینه (۳): $C(1, 3): OC = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \neq \sqrt{4}$

گزینه (۴): $C(5, 4): OC = \sqrt{(5 - (-1))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = \sqrt{4} \quad \checkmark$

مرحله اول: پاره خط AB بر $y + 2x = 5$ عمود است. لذا شیب AB، قرینه و معکوس شیب خط $y = -2x + 5$ است:



$$m_{AB} = \frac{1}{2}$$

حال معادله خط AB را می‌نویسیم:

$$y - (-1) = \frac{1}{2}(x - (-2)) \Rightarrow 2y + 2 = x + 2 \Rightarrow x = 2y$$

مرحله دوم: خطوط $x = 2y$ و $y + 2x = 5$ را در یک دستگاه قرار داده و محل برخورد آن‌ها که وسط پاره خط AB است را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x = 2y & (*) \\ y + 2x = 5 & (**) \end{cases} \Rightarrow y + 2(2y) = 5 \Rightarrow 5y = 5 \Rightarrow y = 1 \xRightarrow{(*)} x = 2$$

پس $M(2, 1)$.

مرحله سوم:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 2 = \frac{-2 + x_B}{2} \Rightarrow 4 = -2 + x_B \Rightarrow x_B = 6 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{-1 + y_B}{2} \Rightarrow 2 = -1 + y_B \Rightarrow y_B = 3 \end{cases} \Rightarrow B(6, 3)$$

می‌دانیم عمودمنصف AB، آن را نصف کرده و بر آن عمود است. پس ابتدا مختصات وسط پاره خط AB و شیب AB را می‌یابیم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4 \text{ و } y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4 \Rightarrow M(4, 4)$$

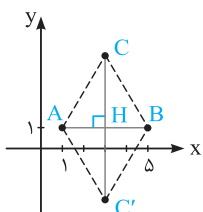
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 3}{3 - 5} = \frac{2}{-2} = -1 \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} m_{\text{عمودمنصف}} = 1$$

حال با داشتن نقطه $M(4, 4)$ و شیب ۱ معادله عمودمنصف را می‌نویسیم:

$$y - y_M = m(x - x_M) \Rightarrow y - 4 = 1(x - 4) \Rightarrow y = x - 4 + 4 \Rightarrow y = x$$

سؤال دانش‌پژوه (عسل مبارزان): آقا اجازه احساس کردیم رو تخته یه فرمول نوشتین واسه این سؤال ولی بعد پاکش کردین، تورو خدا اگه فرمولی داره بگین. قول می‌دیم خوب یادش بگیریم.

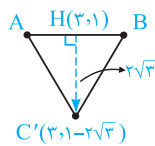
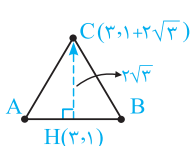
کج پاسخ: این احساس منو کشته! باشه می‌گم ببینین بچه‌ها که $A(m, n)$ و $B(n, m)$ باشه، معادله عمودمنصف پاره خط AB میشه $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم). هواستون به مفتحات A و B باشه‌ها، طول و عرض A و B جابه‌جا هستن.



در مثلث متساوی‌الاضلاع مقابل، رأس سوم C روی عمودمنصف ضلع AB قرار دارد. با توجه به شکل طول

ضلع $AB = 4$ است. از طرفی می‌دانیم ارتفاع در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ است. پس در

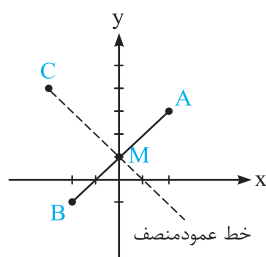
این مثلث با ضلع $AB = 4$ ، ارتفاع $CH = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ است. حال وسط پاره خط AB را می‌یابیم:



$$H \text{ مختصات نقطه } H: x_H = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3, y_H = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1 \Rightarrow H(3, 1)$$

حال کافی است از نقطه H به اندازه طول ارتفاع بالا برویم و به نقطه C برسیم یا پایین برویم و

به نقطه C' برسیم (مسئله دو تا جواب دارد).



۵۹ ۴ در مثلث متساوی الاضلاع، رأس سوم C روی عمودمنصف ضلع AB قرار دارد. حال معادله عمودمنصف AB را می‌یابیم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + (-2)}{2} = 0, y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1 \Rightarrow M(0, 1)$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 3}{-2 - 2} = \frac{-4}{-4} = 1 \xrightarrow[\text{و معکوس}]{\text{قرینه}} m_{\text{عمودمنصف}} = -1$$

$$\text{معادله عمودمنصف: } y - 1 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x + 1$$

نقطه $C(x_C, y_C)$ چون روی خط عمودمنصف AB قرار دارد، پس مختصاتش در معادله عمودمنصف صدق می‌کند یعنی $y_C = -x_C + 1$. از طرفی چون مثلث متساوی الاضلاع است طول ضلع AC و AB برابر است داریم:

$$AC = AB \Rightarrow \sqrt{(x_C - 2)^2 + (y_C - 3)^2} = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{32}$$

$$\xrightarrow{y_C = -x_C + 1} \sqrt{(x_C - 2)^2 + (-x_C + 1 - 3)^2} = \sqrt{32} \xrightarrow{\text{توان } 2} (x_C - 2)^2 + (-x_C + 2)^2 = 32$$

$$\Rightarrow x_C^2 + 4 - 4x_C + x_C^2 + 4 + 4x_C = 32 \Rightarrow 2x_C^2 = 24 \Rightarrow x_C^2 = 12 \Rightarrow x_C = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{y_C = -x_C + 1} y_C = \mp 2\sqrt{3} + 1$$

پس نقطه C به صورت $(2\sqrt{3}, 1 - 2\sqrt{3})$ یا $(-2\sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{3})$ خواهد بود.

۶۰ ۳ A(2, 1) و B(5, 3) دو سر قطر AB از یک مربع هستند، می‌دانیم در مربع دو قطر عمودمنصف هم‌دیگر هستند. یعنی از وسط هم رد شده و حاصل ضرب شیب‌هایشان -1 است (شیب‌ها قرینه و معکوس هم‌اند). حال برای نوشتن معادله قطر CD ابتدا وسط قطر AB و شیبش را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 1}{5 - 2} = \frac{2}{3} \Rightarrow m_{CD} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{3}{2}$$

$$M \text{ مختصات: } x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 5}{2} = \frac{7}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2 \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}, 2\right)$$

حال با داشتن یک نقطه $M\left(\frac{7}{2}, 2\right)$ و شیب $m_{CD} = -\frac{3}{2}$ معادله قطر CD را می‌نویسیم:

$$y - 2 = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{7}{2}\right) \Rightarrow y - 2 = -\frac{3}{2}x + \frac{21}{4} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{21}{4} + 2$$

پس عرض از مبدأ برابر $\frac{21}{4} + 2 = \frac{29}{4}$ می‌شود.

۶۱ ۲ ابتدا وسط پاره خط AB را می‌یابیم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{a + (-1)}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4 + b}{2} \Rightarrow M\left(\frac{a-1}{2}, \frac{4+b}{2}\right)$$

چون خط عمودمنصف از نقطه M (وسط AB) رد می‌شود، پس مختصات M در آن صدق می‌کند:

$$2x + 4y = 5 \Rightarrow 2\left(\frac{a-1}{2}\right) + 4\left(\frac{4+b}{2}\right) = 5 \Rightarrow a - 1 + 8 + 2b = 5 \Rightarrow a + 2b = -2 \quad (*)$$

از طرفی شیب خط عمودمنصف، قرینه و معکوس شیب پاره خط AB است (زیرا بر آن عمود است).

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{b - 4}{-1 - a} \\ 2x + 4y = 5 \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_{AB} = -\frac{1}{m_{\text{عمودمنصف}}} \Rightarrow \frac{b-4}{-1-a} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow b - 4 = 2(-1 - a) \Rightarrow b - 4 = -2 - 2a \Rightarrow b + 2a = 2 \quad (**)$$

حال معادلات (*) و (**) را در یک دستگاه حل کرده و a و b را می‌یابیم:

$$\begin{cases} a + 2b = -2 \\ b + 2a = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = 2, b = -2 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{-2}{2} = -1$$