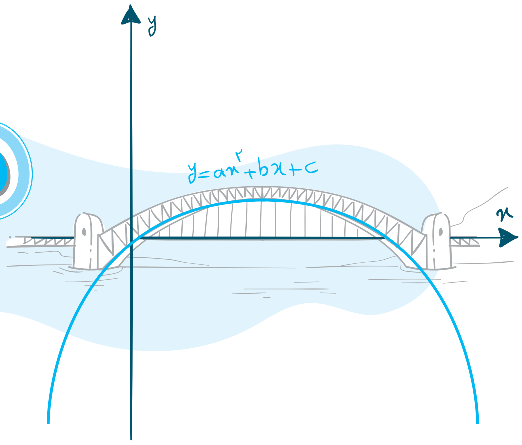
معادله‌ها و نامعادله‌ها

فصل چهارم



درسنامهٔ ۱

معادلهٔ درجه دوم

هر معادله‌ای که پس از ساده‌سازی به شکل $ax^۲+bx+c=۰$ $(a\neq ۰)$ در بیاید یک معادلهٔ درجه دوم نامیده می‌شود.

روش‌های حل معادلهٔ درجه دوم

۱ـ روش تجزیه: برای حل معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ به روش تجزیه، ابتدا به کمک اتحادها و فاکتورگیری عبارت $ax^۲+bx+c$ را تجزیه کرده و سپس از نکتهٔ مقابل جواب را می‌یابیم.

$$\boxed{A\times B=۰\Rightarrow A=۰ \text{ یا } B=۰}$$

مثال معادلهٔ $x^۲-۵x+۶=۰$ را حل کنید.

پاسخ

$$x^۲-۵x+۶=۰ \xrightarrow[\text{جملهٔ مشترک}]{\text{اتحاد}} \underbrace{(x-۲)}_{A}\underbrace{(x-۳)}_{B}=۰\Rightarrow x-۲=۰\Rightarrow x=۲ \text{ یا } x-۳=۰\Rightarrow x=۳$$

۲ـ روش ریشه‌گیری: *ریشه‌گیری در سال‌های گذشته جزء روش‌های اساسی حل معادله محسوب نمی‌شد، اما در سال دهم برای خودش کسی شده. بـه هر حال ریشه‌گیری خیلی روش خاصی هم نیست.* در حالت کلی بدانید اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (همون بزرگ‌تر یا مساوی صفر) باشـد، ریشـه‌های معادلهٔ $x^۲=a$ برابرند با: $x=\sqrt{a}$ ، $x=-\sqrt{a}$.

مثال ریشه‌های معادلهٔ $(x-۱)^۲=۴$ را بیابید.

پاسخ با ریشه‌گیری داریم:

$$(x-۱)^۲=۲^۲ \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} x-۱=۲\Rightarrow x=۳ \quad \text{یا} \quad x-۱=-۲\Rightarrow x=-۱$$

۳ـ روش مربع کامل کردن: برای حل معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ به روش مربع کامل کردن، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) اگر $a\neq ۱$، کل معادله را بر a تقسیم می‌کنیم:

$$ax^۲+bx+c=۰ \xrightarrow{\div a} x^۲+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=۰$$

۲) جملات دارای x را سمت چپ نگه داشته و عدد ثابت را به سمت راست می‌بریم:

$$x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=۰\Rightarrow x^۲+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a}$$

۳) مجذور نصف ضریب x را به طرفین معادله اضافه می‌کنیم:

$$x \text{ ضریب} =\frac{b}{a} \xrightarrow{\text{نصف}} \frac{b}{۲a} \xrightarrow{\text{مجذور}} \left(\frac{b}{۲a}\right)^۲ \Rightarrow x^۲+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{۲a}\right)^۲=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{۲a}\right)^۲$$

۴) به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، سمت چپ تساوی را به صورت اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌نویسیم:

$$x^۲+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{۲a}\right)^۲=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{۲a}\right)^۲ \Rightarrow \left(x+\frac{b}{۲a}\right)^۲=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{۲a}\right)^۲$$

۵) به کمک روش ریشه‌گیری، معادله را حل کرده و جواب را می‌یابیم.

مثال معادلهٔ $x^۲-۳x+۲=۰$ را به روش مربع کامل کردن حل نمایید.

پاسخ با توجه به این‌که ضریب $x^۲$ برابر با ۱ می‌باشد، از انجام مرحلهٔ اول معاف هستیم. داریم:

$$x^۲-۳x+۲=۰ \xrightarrow[\text{عدد ۲ را به سمت راست می‌بریم.}]{\text{مرحلهٔ (۲)}} x^۲-۳x=-۲ \xrightarrow[\text{را به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم.}]{\text{مرحلهٔ (۳): مجذور نصف ضریب } x} x^۲-۳x+\left(\frac{-۳}{۲}\right)^۲=-۲+\left(-\frac{۳}{۲}\right)^۲=-۲+\frac{۹}{۴}$$

$$\xrightarrow[\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}]{\text{مرحلهٔ (۴)}} \left(x-\frac{۳}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{۴}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ \xrightarrow[\text{ریشه‌گیری}]{\text{مرحلهٔ (۵)}} \begin{cases} x-\frac{۳}{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}=۲ \\ x-\frac{۳}{۲}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۲}=۱ \end{cases}$$

نکته بهتر است بدانید که عبارتی که برای تشکیل مربع کامل در معادلهٔ $x^2+\frac{b}{a}x+c=0$ اضافه می‌شود، $\frac{b^2}{4a^2}=(\frac{b}{2a})^2$ می‌باشد.

۴- روش فرمول کلی: در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ عبارت b^2-4ac را با نماد Δ نشان می‌دهند و به آن «دلتا» می‌گویند. جواب‌های معادله در صورت وجود از فرمول مقابل به دست می‌آید:

$$\text{جواب‌های معادله}=x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

وضعیت جواب‌های معادلهٔ درجه دوم با توجه به علامت Δ:

$\Delta>0\Rightarrow$ معادله دو جواب حقیقی متمایز دارد: $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ ,\ x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta=0\Rightarrow$ معادله فقط یک ریشهٔ حقیقی (ریشهٔ مضاعف) دارد: $x=-\frac{b}{2a}$

$\Delta<0\Rightarrow$ با توجه به منفی‌شدن زیر رادیکال، معادله جواب حقیقی ندارد.

مثال جواب‌های معادلات زیر را بیابید.

الف) $2x^2+x+1=0\xrightarrow{a=2,b=1,c=1}\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(2)(1)=1-8=-7<0\Rightarrow$ معادله، جواب حقیقی ندارد.

ب) $3x^2-7x+2=0\xrightarrow{a=3,b=-7,c=2}\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4(3)(2)=49-24=25$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{25}}{2(3)}=\frac{7\pm5}{6}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{12}{6}=2\\ x=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\end{cases}$$

مثال m را طوری تعیین کنید که معادلهٔ $-4x^2-mx-1=0$ دارای جواب‌های حقیقی یکسان باشد.

پاسخ اگر جواب‌های حقیقی معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ یکسان باشند (معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد) باید $\Delta=0$ باشد. پس داریم:

$$(-m)^2-4(-4)(-1)=0\Rightarrow m^2-16=0\Rightarrow m^2=16\Rightarrow m=\pm4$$

دو نکتهٔ طلایی و مهم:

۱) اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، $a+c=b$ باشد، آن‌گاه یکی از جواب‌ها برابر $x=-1$ و دیگری $x=-\frac{c}{a}$ می‌باشد.

مثال در معادلهٔ $12x^2+10x-2=0$، چون $12+(-2)=10$ می‌باشد $(a+c=b)$، بدون حل معادله می‌توانیم بگوییم یکی از ریشه‌ها $x=-1$ و دیگری $x=-\frac{-2}{12}=+\frac{1}{6}$ می‌باشد.

۲) اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، جمع ضرایب معادله صفر شود $(a+c+b=0)$، آن‌گاه یکی از جواب‌ها $x=1$ و دیگری $x=\frac{c}{a}$ می‌باشد.

مثال در معادلهٔ $3x^2+5x-8=0$ چون $3-8+5=0$ می‌باشد، پس بدون حل معادله می‌توانیم بگوییم یکی از جواب‌ها $x=1$ و دیگری $x=-\frac{8}{3}$ می‌باشد.

سؤال دانش‌پژوه (*ماندانا باغی*): **آقا ببخشید چرا به جای $a+b+c$ گفتین $a+c+b$؟ مگه فرقی دارن؟**

پاسخ *آفرین! نه فرقی نداره ولی اگه همیشه ما $a+c$ رو اول محاسبه کنیم اون وقت راحت‌تر می‌تونیم بررسی کنیم که حالات ۱ و ۲ برای معادله برقرار هست یا نه و سرعتتون توی حل تست‌ها بالاتر می‌ره.*

نکته در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، اگر علامت $\frac{c}{a}$ منفی باشد، معادله همواره دو ریشهٔ حقیقی دارد، زیرا در این حالت همیشه $\Delta>0$ می‌شود. چون:

$$\Delta=b^2-4ac\xrightarrow{\frac{c}{a}<0\Rightarrow ac<0}b^2-\underbrace{4ac}_{\text{منفی}}=b^2+\underbrace{-4ac}_{\text{مثبت}}=b^2+(\text{یک عدد مثبت})>0$$

مثال معادلهٔ $-2x^2-6x+7=0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

پاسخ چون $\frac{c}{a}=-\frac{7}{2}$، عددی منفی است، پس معادله حتماً دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۱- مجموع جواب‌های معادلهٔ $(x-1)^2=(1-\sqrt{3})^2$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) صفر ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $2+2\sqrt{3}$

۲- با اضافه‌کردن کدام عدد به طرفین معادلهٔ $x(x+\frac{1}{4})=\frac{7}{4}$ معادله به روش مربع کامل حل می‌شود؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{1}{64}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۳- در حل معادلهٔ $4x^2+5x-3=0$ به روش مربع کامل، به تساوی $(x+n)^2=m$ رسیده‌ایم. مقدار $n+8m$ کدام است؟

۱) $\frac{39}{2}$ ۲) ۳۹ ۳) $\frac{39}{8}$ ۴) $\frac{39}{4}$

۴- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $((1-x^2)^2-3)^2=36$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۴ ۲) -4 ۳) ۹ ۴) -9

۵- معادلهٔ درجه دوم $x(2x-5)=a$ به ازای یک مقدار a ریشهٔ مضاعف دارد. مقدار ریشهٔ مضاعف کدام است؟

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۶- اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^2-12x+9=0$ تفاضل دو ریشه برابر صفر باشد، یک ریشهٔ این معادله کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

۷- در معادلهٔ درجه دوم $x^2+bx+c=0$ با شرط $b=c+1$، یکی از ریشه‌های آن به کدام صورت زیر است؟

۱) $-c$ ۲) $2b-1$ ۳) $\frac{b}{2}$ ۴) c

۸- کدام‌یک از مقادیر زیر، یکی از ریشه‌های معادلهٔ $150x^2-2x-148=0$ می‌باشد؟

۱) $\frac{2}{150}$ ۲) $-\frac{2}{150}$ ۳) $-\frac{74}{75}$ ۴) $\frac{74}{75}$

۹- در مورد ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $(\sqrt{2}+1)x^2-2\sqrt{2}x+\sqrt{2}-1=0$ کدام گزینه درست است؟

۱) هر دو ریشه از $\frac{1}{2}$ کوچک‌ترند. ۲) هر دو ریشه از $\frac{1}{2}$ بزرگ‌ترند.

۳) یکی از ریشه‌ها از $\frac{1}{2}$ بزرگ‌تر و یکی از $\frac{1}{2}$ کوچک‌تر است. ۴) هر دو ریشه برابر $\frac{1}{2}$ هستند.

۱۰- اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $6ax^2-3(a+1)x-36=0$ برابر ۳ باشد، جواب دیگر این معادله کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۱ ۴) -1

۱۱- معادلهٔ $x^2-5|x|-14=0$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲- اگر $a>0$ و معادلات $x^2+2x+a=0$ و $x^2-x-2a=0$ دارای یک ریشهٔ مشترک باشند، این ریشهٔ مشترک کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳- ۴ برابر مربع عددی از ۱۲ برابر آن عدد، ۹ واحد کم‌تر است. معکوس آن عدد کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۱۴- عدد ۲۴ را به دو قسمت طوری تقسیم کرده‌ایم که حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۴۳ شده است. قدرمطلق اختلاف دو عدد کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵- مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی ۹۲۵ است. مجموع این دو عدد کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۴۱ ۲) ۴۳ ۳) ۴۵ ۴) ۴۷

۱۶- محیط و مساحت یک مستطیل به ترتیب ۵۴ متر و ۱۸۰ مترمربع است. طول آن چه‌قدر از عرض آن بیشتر است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۷- طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای $2x+1$، $2x-1$ و x است $(x>1)$. طول ضلع متوسط آن کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۱۸- علی از پدرش ۲۰ سال کوچک‌تر است. اگر ۶ سال دیگر حاصل‌ضرب سن علی و پدرش ۳۰۰ باشد، سن علی چه‌قدر است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۴ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) ۳

۱۹- فاصلهٔ هر طرف قالی از کنار دیوار یک اتاق مستطیل‌شکل، ثابت است. اگر مساحت اتاق ۲۴، محیط اتاق ۲۰ و محیط قالی ۱۲ باشد، مساحت قالی کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

درسنامه ۲

تعیین علامت دوجمله‌ای درجه اول

منظور از تعیین علامت یک عبارت جبری این است که مشخص کنیم این عبارت در **چه فاصله‌ای** از اعداد حقیقی، **مثبت** و در **چه فاصله‌ای** از اعداد حقیقی، **منفی** و در کجاها **صفر** می‌باشد.

۱) تعیین علامت عبارت درجه اول:

برای تعیین علامت عبارت درجه اول به صورت $P = ax + b$ $(a \neq 0)$، ابتدا عبارت را مساوی صفر قرار می‌دهیم و ریشهٔ (جواب) آن را به دست می‌آوریم که به صورت مقابل می‌شود:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

حال برای تعیین علامت از جدول روبه‌رو استفاده می‌کنیم:

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$P = ax + b$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

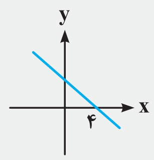
مثال عبارت $P = 2x + 4$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ $a = 2 > 0$، بنابراین:

$$2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

x		-2	
$P = 2x + 4$	$-$ (مخالف علامت a)	۰	$+$ (موافق علامت a)

مثال اگر m عددی طبیعی و نمودار عبارت $y = mx + n - 2 - 2x$ به صورت مقابل باشد، n کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۶
۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ گزینهٔ (۲). ابتدا عبارت درجه اول را ساده کنیم:

$$y = mx + n - 2 - 2x = (m-2)x + n - 2$$

با توجه به نمودار نتیجه می‌گیریم که $x = 4$ ریشهٔ عبارت y است:

$$y(4) = 0 \Rightarrow (m-2)(4) + n - 2 = 0 \Rightarrow 4m - 8 + n - 2 = 0 \Rightarrow 4m + n = 10 \qquad (*)$$

از طرفی چون قبل از ریشه، نمودار بالای محور xها (یعنی مثبت) است و می‌دانیم علامت y قبل از ریشه، مخالف علامت ضریب x است، پس $(m-2)$ منفی است. بنابراین:

$$m - 2 < 0 \Rightarrow m < 2 \xrightarrow[\text{طبیعی}]{m \text{ عددی}} m = 1 \xrightarrow{(*)} 4(1) + n = 10 \Rightarrow n = 6$$

نکته اگر بالا سر عبارات درجه اولِ $ax + b$، توان زوج، قدرمطلق یا رادیکال با فرجهٔ زوج بیاید، دیگر هیچ جا در جدول، علامت منفی نخواهیم داشت.

مثال جدول تعیین علامت $(-4x+8)^2$ و $\left|-\frac{1}{2}x + 5\right|$ و $\sqrt{x-1}$ را رسم کنید.

پاسخ

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\sqrt{x-1}$		غ‌ق‌ق	۰	$+$	

ریشه: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
قبل از $x = 1$ زیر رادیکال را منفی کرده پس غلط است.

x	$-\infty$		10		$+\infty$
$\left\|-\frac{1}{2}x + 5\right\|$		$+$	۰	$+$	

ریشه: $-\frac{1}{2}x + 5 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 5 \xrightarrow{\times 2} x = 10$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$(-4x+8)^2$		$+$	۰	$+$	

ریشه: $-4x + 8 = 0 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$

نکته اگر بالا سر عبارات درجه اولِ $ax + b$، توان فرد یا رادیکال با فرجهٔ فرد بیاید، هیچ تأثیری در جدول تعیین علامت $ax + b$ نمی‌گذارد.

مثال جدول تعیین علامت $(5x-10)^3$ یا $\sqrt[3]{5x-10}$ مانند جدول تعیین علامت $P = 5x - 10$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
P		$-$	۰	$+$	

۲) تعیین علامت عبارات به فرم $\frac{ax+b}{cx+d}$ یا $(ax+b)(cx+d)$:

جدول تعیین علامت دو عبارت که در هم ضرب یا بر هم تقسیم می‌شوند، تفاوت خاصی با هم ندارند. این یعنی این‌که شما می‌توانید تقسیم دو عبارت را مثل ضرب آن‌ها تعیین علامت کنید. تنها تفاوت در این است که عبارت به ازای ریشهٔ مخرج تعریف‌نشده است.

سؤال *دانش‌پژوه (بهرام چلچله):* **آقا یعنی شما می‌گید ۲ ÷ ۶، همون ۲ × ۶ می‌شه!**

پاسخ *بهرام برو دهنتو با مایع ظرف‌شویی بشور! بچه من گفتم علامت اونا یکی میشه نه جواب اونا! یعنی هم ۲ ÷ ۶، علامتش مثبت میشه، هم ۲ × ۶ علامتش مثبت میشه.*

مثال **به ازای چه مقادیری از x عبارت $P=\frac{x+۱}{۲x-۱}$ کوچک‌تر یا مساوی صفر است؟**

پاسخ طبق آن‌چه گفته شده تعیین علامت P، مثل تعیین علامت عبارت $(x+۱)(۲x-۱)$ می‌باشد. فقط ریشهٔ مخرج نامعین است.

ریشهٔ صورت $x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$

ریشهٔ مخرج $۲x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$

x		-۱		$\frac{۱}{۲}$	
$x+۱$	$-$	۰	$+$		$+$
$۲x-۱$	$-$		$-$	۰	$+$
$P=\frac{x+۱}{۲x-۱}$	$+$	۰	$-$	✗	$+$

به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ عبارت نامعین می‌شود. بنابراین برای این‌که $\frac{x+۱}{۲x-۱}\le ۰$ باشد، باید $-۱\le x<\frac{۱}{۲}$ قرار بگیرد.

نامعادلات کسری

برای حل چنین نامعادلاتی مراحل زیر را طی می‌کنیم:

مرحلهٔ اول: تمامی عبارات را به یک طرف نامعادله انتقال داده و با مخرج مشترک‌گیری و ساده‌سازی به یک نامعادله مانند $\frac{P(x)}{Q(x)}\le ۰$ یا $\frac{P(x)}{Q(x)}<۰$ یا $\frac{P(x)}{Q(x)}\ge ۰$ و یا $\frac{P(x)}{Q(x)}>۰$ می‌رسیم.

مرحلهٔ دوم: ریشه‌های $P(x)$ و $Q(x)$ را به دست آورده و سپس جدول تعیین علامت عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را رسم می‌کنیم.

مرحلهٔ سوم: با توجه به علامت نامعادله، محدودهٔ مناسبی از جدول را انتخاب می‌کنیم.

مثال **مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x}{x-۱}>۲$ کدام است؟**

۱) $۱<x<۲$ ۲) $۰<x<۱$ ۳) $x<۰$ یا $x>۱$ ۴) $x<۱$ یا $x>۲$

پاسخ $\frac{x}{x-۱}>۲ \xRightarrow{-۲} \frac{x}{x-۱}-۲>۰ \Rightarrow \frac{x-۲x+۲}{x-۱}>۰ \Rightarrow \frac{-x+۲}{x-۱}>۰$

$\Rightarrow \begin{cases} -x+۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \end{cases} \Rightarrow$

x		۱		۲	
$-x+۲$	$+$		$+$	۰	$-$
$x-۱$	$-$	۰	$+$		$+$
$P=\frac{-x+۲}{x-۱}$	$-$	✗	$+$ (جواب)	۰	$-$

$\Rightarrow ۱<x<۲ \Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

نامعادله‌های دوگانه و دستگاه نامعادله

۱) برای حل نامعادلات دوگانهٔ $a\le bx+c\le d$، ابتدا طرفین نامعادله را با $(-c)$ جمع می‌کنیم و سپس طرفین نامعادله را به ضریب x (یعنی b) تقسیم می‌کنیم.

مثال **نامعادلهٔ $۴<۳x-۲<۷$ را حل کنید.**

پاسخ $۴<۳x-۲<۷ \xRightarrow{+۲} ۶<۳x<۹ \xRightarrow{\div ۳} ۲<x<۳$

۲) برای حل نامعادلات دوگانه به صورت $ax+b\le cx+d\le ex+f$، ابتدا دو نامعادلهٔ $ax+b\le cx+d$ و $cx+d\le ex+f$ را جداگانه حل کرده و سپس بین جواب‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم.

مثال **نامعادلهٔ $4-x<2x-2<x+1$ را حل کنید.**

پاسخ

$$\begin{cases}4-x<2x-2\Rightarrow 6<3x\Rightarrow 2<x\\ 2x-2<x+1\Rightarrow x<3\end{cases}\xRightarrow{\text{اشتراک}} 2<x<3$$

۲۰- جدول تعیین علامت مقابل، مربوط به کدام عبارت زیر است؟

x		$-\frac{3}{7}$	
عبارت	+	0	−

۱) $7x+3$ ۲) $7x-3$ ۳) $-7x+3$ ۴) $-7x-3$

۲۱- به ازای کدام مقدار برای a، جدول تعیین علامت عبارت $P=2ax+a^2-27$ به صورت مقابل است؟

x		a	
P	+	0	−

۱) -2 ۲) 3 ۳) 2 ۴) -3

۲۲- اگر جدول تعیین علامت $y=ax+b+x+a$ به صورت مقابل باشد، کدام گزینه صحیح است؟

x		0	
y	−	0	+

۱) $a>-1$، $b>1$ ۲) $a>1$، $b>-1$ ۳) $a>-1$، $b<1$ ۴) $a>1$، $b>1$

۲۳- در بازهٔ $[x_0,+\infty)$ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{2}x+2$ بالاتر از خط به معادلهٔ $y=3(x-1)$ قرار نمی‌گیرد. کم‌ترین مقدار $f(x_0)$ کدام است؟ تجربی داخل ۸۲

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۴- اگر بازهٔ $(-6,1)$، مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{3x+b}{ax-1}<0$ باشد، مقدار $6a+b$ کدام است؟

۱) 24 ۲) -4 ۳) $-\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{19}{6}$

۲۵- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{4x+7}{2x-1}>5$، به کدام صورت است؟

۱) $x>\frac{1}{2}$ ۲) $x<2$ ۳) $\frac{1}{2}<x<2$ ۴) $-1<x<\frac{1}{2}$

۲۶- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{1}{x-1}>\frac{1}{x-3}$، به کدام صورت است؟ تجربی داخل ۸۳

۱) $x<3$ ۲) $1<x<3$ ۳) $2<x<3$ ۴) $-2<x<3$

۲۷- کسر $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$ در کدام فاصلهٔ زیر، همواره منفی است؟

۱) $(-\infty,1)$ ۲) $(2,3)$ ۳) $(3,4)$ ۴) $(2,+\infty)$

۲۸- مجموعه جواب نامعادلهٔ $-4x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}\right)\ge -2x-\frac{1}{x}-1$ با شرط $x>0$ کدام است؟

۱) $[3,+\infty)$ ۲) $(0,3]$ ۳) $[0,+\infty)$ ۴) $(0,3)$

۲۹- دنبالهٔ $a_n=\frac{2n-7}{5n-14}$، چند جملهٔ منفی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۳۰- حدود m برای آن‌که عبارت $\frac{m(m^3+m)}{m-2}$ همواره مثبت باشد، کدام است؟

۱) $0<m<2$ ۲) $m\le 2$ ۳) $1<m<2$ ۴) $m>2$

۳۱- نامساوی $\frac{x^5|x+1|}{(x-1)^3(x+2)^2}<0$، به ازای چه مقادیری از x برقرار است؟

۱) $x>1$ ۲) $0<x<1$ ۳) $x<0$ ۴) $-1<x<0$

۳۲- جواب مشترک دو نامعادلهٔ $\frac{x}{2}<\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$ و $\frac{x^2-x}{2x-2}+\frac{x^2-x}{3x-3}<\frac{5}{6}$ به کدام صورت است؟

۱) $0<x<1$ ۲) $x<1$ ۳) $1<x<3$ ۴) $x>1$

۳۳- اگر $-\frac{1}{2} < x \le \frac{2}{3}$ باشد، عبارت $6x-1$ در چه فاصله‌ای قرار دارد؟

۱) $[-3,4)$ ۲) $[-4,3)$ ۳) $(-3,4]$ ۴) $(-4,3]$

۳۴- مجموعه جواب نامعادلهٔ $2 \le \frac{6-4x}{5} < 3$ کدام است؟

۱) $[-1,\frac{9}{4})$ ۲) $[-\frac{9}{4},-1)$ ۳) $(1,\frac{9}{4}]$ ۴) $[-\frac{9}{4},1)$

۳۵- مجموعه جواب نامعادلهٔ $5-2x < \frac{5-7x}{2} < 3+4x$ کدام است؟

۱) $(-\frac{1}{15},\frac{5}{3})$ ۲) $(-\frac{5}{3},-\frac{1}{15})$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}-[-\frac{5}{3},\frac{-1}{15}]$

۳۶- دو سهمی به معادلات $y_1=a(x+2)(x+3)$ و $y_2=a'(x+2)(x+3)$ مفروض‌اند. اگر به ازای هر $x\in(-3,-2)$، $y_2<y_1$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $a<a'$ ۲) $a>a'$ ۳) $a<-a'$ ۴) $a>-a'$

۳۷- نمودار عبارت $y=x^3-4x^2-x+4$ ، $x>-1$ ، در بازهٔ (a,b) زیر محور xها است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ ریاضی داخل ۸۸

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

درسنامه ۳

تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم $P=ax^2+bx+c$

برای تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم $P=ax^2+bx+c$، ابتدا عبارت را مساوی صفر قرار می‌دهیم و بر حسب علامت Δ، سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) اگر $\Delta>0$ باشد، معادله دارای دو ریشهٔ متمایز x_1 و x_2 می‌باشد. در این صورت برای تعیین علامت عبارت فوق از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

x		x_1		x_2	
$P=ax^2+bx+c$	موافق علامت a		مخالف علامت a		موافق علامت a

۲) اگر $\Delta=0$ باشد، معادله دارای ریشهٔ مضاعف $x_1=\frac{-b}{2a}$ می‌باشد. در این صورت برای تعیین علامت عبارت فوق از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

x		x_1	
$P=ax^2+bx+c$	موافق علامت a		موافق علامت a

۳) اگر $\Delta<0$ باشد، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد. در این صورت برای تعیین علامت عبارت فوق از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

x	
$P=ax^2+bx+c$	موافق علامت a

مثال اشتراک مجموعه جواب نامعادله‌های $x^2>-25$ و $x(x-5)\ge 6$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-1)\cup(6,+\infty)$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $(-\infty,-1]\cup[6,+\infty)$ ۴) $[-1,6]$

پاسخ گزینهٔ (۳). ابتدا ظاهر نامعادله‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$x^2>-25 \Rightarrow x^2+25>0\ ,\ x(x-5)\ge 6 \Rightarrow x^2-5x\ge 6 \Rightarrow x^2-5x-6\ge 0$$

حال جدول تعیین علامت عبارات x^2-5x-6 و x^2+25 را رسم می‌کنیم:

$$P(x)=x^2+25 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=0^2-4(1)(25)=-100<0 \xrightarrow[\text{ضریب } x^2 \text{ مثبته}]{\text{ریشهٔ حقیقی ندارد}}$$

x	$-\infty$		$+\infty$
P		$+$	

$\xrightarrow{P>0} x\in\mathbb{R}$

$$P(x)=x^2-5x-6=(x-6)(x+1) \xrightarrow[\text{ضریب } x^2 \text{ مثبته}]{\text{ریشه‌ها } = 6 \text{ و } -1}$$

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
P		$+$		$-$		$+$	

$\xrightarrow{P\ge 0} x\in(-\infty,-1]\cup[6,+\infty)$

حال اشتراک جواب‌ها را به کمک محور به دست می‌آوریم که برابر $(-\infty,-1]\cup[6,+\infty)$ می‌شود.

مثال معادلهٔ $a(x^۲+۱)+۲x(x+۲)=۱$، به ازای کدام مقادیر a دارای ۲ جواب حقیقی متمایز است؟

۱) $-۳<a<۲$ ۲) $-۳\le a\le ۲$ ۳) $-۲<a<۳$ ۴) $-۲\le a\le ۳$

پاسخ گزینهٔ (۱).

ابتدا ظاهر معادله را مرتب می‌کنیم: $a(x^۲+۱)+۲x(x+۲)=۱\Rightarrow ax^۲+a+۲x^۲+۴x-۱=۰\Rightarrow (a+۲)x^۲+۴x+a-۱=۰$

حال برای آن‌که معادله دارای ۲ جواب حقیقی متمایز باشد، باید $\Delta>۰$ باشد. بنابراین:

$$۴^۲-۴(a+۲)(a-۱)>۰\Rightarrow ۱۶-۴(a^۲+a-۲)>۰\xRightarrow{\div ۴}۴-(a^۲+a-۲)>۰\Rightarrow ۴-a^۲-a+۲>۰$$

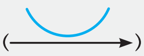
$$-a^۲-a+۶>۰\xRightarrow[\text{جهت عوض}]{\times(-۱)}\underbrace{a^۲+a-۶}_{(a+۳)(a-۲)}<۰\xRightarrow[\text{ضریب } a^۲ \text{ مثبته}]{\text{ریشه‌ها: } ۲,-۳}$$

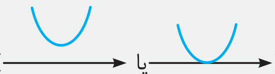
a	$-\infty$		-۳		۲		$+\infty$
P		+	۰	−	۰	+	

$$\xRightarrow{P<۰}-۳<a<۲$$

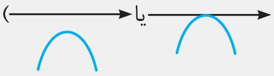
تذکر برای حل نامعادله‌ها حتماً باید بعد از ساده‌سازی، همهٔ عبارت‌ها را یک طرف نامساوی برده و طرف دیگر نامساوی صفر باشد!

چهارحالت مهم نامعادلهٔ درجه دوم:

۱) اگر بخواهیم همواره $ax^۲+bx+c>۰$ باشد، باید نمودار تابع درجه دوم همواره بالای محور xها باشد () که در این صورت باید $\Delta<۰$ و $a>۰$ باشد.

۲) اگر بخواهیم همواره $ax^۲+bx+c\ge ۰$ باشد، باید نمودار تابع درجه دوم زیر محور xها نرود () که در این صورت باید $\Delta\le ۰$ و $a>۰$ باشد.

۳) اگر بخواهیم همواره $ax^۲+bx+c<۰$ باشد، باید نمودار تابع درجه دوم همواره زیر محور xها باشد () که در این صورت باید $\Delta<۰$ و $a<۰$ باشد.

۴) اگر بخواهیم همواره $ax^۲+bx+c\le ۰$ باشد، باید نمودار تابع درجه دوم بالای محور xها نرود () که در این صورت باید $\Delta\le ۰$ و $a<۰$ باشد.

مثال اگر عبارت $(m-۱)x^۲+(m-۱)x+۱$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، m به کدام مجموعه تعلق دارد؟ ریاضی داخل ۹۱

۱) $(۱,۵)$ ۲) $(۰,۱)$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

پاسخ برای آن‌که عبارت مذکور همواره منفی باشد یعنی همواره داشته باشیم $(m-۱)x^۲+(m-۱)x+۱<۰$ باید $\Delta<۰$ و $a<۰$ باشد. بنابراین:

شرط (۱): $\Delta=b^۲-۴ac=(m-۱)^۲-۴(m-۱)(۱)<۰\Rightarrow (m-۱)^۲-۴m+۴<۰\Rightarrow m^۲-۲m+۱-۴m+۴<۰\Rightarrow \underbrace{m^۲-۶m+۵}_{(m-۵)(m-۱)}<۰$

$$\xRightarrow[\text{ضریب } m^۲ \text{ مثبته}]{\text{ریشه‌ها: } ۱,۵}$$

x	$-\infty$		۱		۵		$+\infty$
P		+	۰	−	۰	+	

$$\xRightarrow{P<۰}m\in(۱,۵)$$

شرط (۲): ضریب $x^۲<۰\Rightarrow m-۱<۰\Rightarrow m<۱$

اشتراک جواب‌های به دست آمده، $\varnothing$ است. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

تعیین علامت عبارات جبری در حالت کلی

فرض کنید بخواهیم یک کسر بزرگ مانند $P=\dfrac{(x^۲-۵x-۶)(x^۲+۱)}{(x-۱)^۲(۲x-۴)}$ را تعیین علامت کنیم. برای این منظور مراحل زیر را طی می‌کنیم:

مرحلهٔ اول: ریشه‌های عبارات داخل پرانتزها را پیدا کرده و سپس آن‌ها را از کوچک به بزرگ در جدول قرار می‌دهیم و برای ریشه‌های عبارات صورت کسر صفر و برای ریشه‌های مخرج کسر علامت ✗ (یعنی غیرقابل قبول) قرار می‌دهیم:

$(x-۱)^۲=۰\Rightarrow x-۱=۰\Rightarrow x=۱$, $x^۲-۵x-۶=(x-۶)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۶,-۱$

$۲x-۴=۰\Rightarrow ۲x=۴\Rightarrow x=۲$, $x^۲+۱=۰\Rightarrow \Delta=۰^۲-۴(۱)(۱)=-۴<۰$ ریشه ندارد

جدول را به صورت مقابل می‌کشیم:

x	$-\infty$	-۱	۱	۲	۶	$+\infty$
P		۰	✗ ریشهٔ مخرج	✗ ریشهٔ مخرج	۰	

مرحلهٔ دوم: حال علامت P را به ازای هر عدد دلخواهی که دوست دارید پیدا کنید. مثلاً به ازای $x=۰$ علامت P مثبت می‌شود:

$P(۰)=\dfrac{(۰^۲-۵(۰)-۶)(۰^۲+۱)}{(۰-۱)^۲(۲(۰)-۴)}=\dfrac{-۶\times ۱}{۱\times(-۴)}=\dfrac{۶}{۴}>۰$. خب، حال دنبال بازه‌ای بگردید که $x=۰$ در آن بازه قرار دارد. یعنی بازهٔ $(-۱,۱)$. در آن بازه، علامت جدول را مثبت قرار دهید.

مرحلهٔ سوم: با عبور از ریشه‌ها علامت‌ها را عوض کنید به‌جز ریشه‌های عامل‌های با توان زوج مانند $(x-۱)^۲$ یا ریشه‌های داخل قدرمطلق مانند $|x-۱|$ یا ... که در این مثال علامت‌ها در جدول به صورت زیر درمی‌آیند:

x	$-\infty$		-۱		۱		۲		۶		$+\infty$
P		$-$	۰	$+$	×	$+$	×	$-$	۰	$+$	

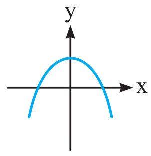
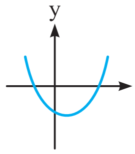
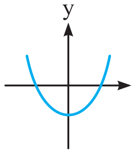
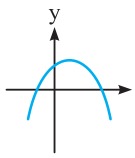
ریشهٔ مضاعف

عوض شد عوض نشد عوض شد عوض شد

۳۸- اگر جدول تعیین علامت سهمی $y=ax^۲+bx+c$ به صورت

x		-۲		۲	
y	$+$	۰	$-$	۰	$+$

باشد، نمودار آن کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۳۹- اگر جدول تعیین علامت سهمی $y=ax^۲+bx+c$ به صورت مقابل باشد، کدام گزینه صحیح است؟

x		۰	
y	$-$	۰	$-$

۱) $a>۰$ و $b=۰$ و $c\neq ۰$
۲) $a<۰$ و $b=۰$ و $c=۰$
۳) $a>۰$ و $b=c=۰$
۴) $a<۰$ و $b\neq ۰$ و $c=۰$

۴۰- با توجه به جدول تعیین علامت عبارت $y=ax^۲+bx+c$ ، کدام گزینه نادرست است؟

x		۳	
y	$-$	۰	$-$

۱) طول رأس سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ ، ۳ است.
۲) نمودار سهمی بر محور x ها مماس بوده و زیر آن قرار دارد.
۳) بیشترین مقدار عبارت $ax^۲+bx+c$ برابر صفر است.
۴) نمودار سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند.

۴۱- نامساوی $x^۲+۴>۴x$:

۱) به ازای همهٔ مقادیر x برقرار است.
۲) به ازای هر مقدار به‌جز $x=۲$ برقرار است.
۳) فقط به ازای $-۲<x<۲$ برقرار است.
۴) فقط به ازای $x>۲$ یا $x<-۲$ برقرار است.

۴۲- عبارت $y=x^۲-۷x+۱۰$ ، با افزایش x از ۳ تا $+\infty$:

۱) ابتدا منفی است و سپس مثبت می‌شود.
۲) ابتدا مثبت است و سپس منفی می‌شود.
۳) همواره مثبت است.
۴) همواره منفی است.

۴۳- مقادیر تابع $f(x)=-\frac{۱}{۲}x^۲+۲x+۶$ در بازهٔ (a,b) بزرگ‌تر از $\frac{۷}{۲}$ می‌باشد. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ تجربی داخل ۸۹

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۵/۵
۴) ۶

۴۴- دنباله با جملهٔ عمومی $a_n=n^۲-۱۰n+۱۶$ ، چند جملهٔ منفی دارد؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) صفر

۴۵- نامساوی $\dfrac{x^۲-۲x}{\sqrt{x}+۱}>۰$ به ازای چه مقادیری از x ، همواره برقرار است؟

۱) $x\geq ۲$
۲) $x<۰$ یا $x>۲$
۳) $۰<x<۲$
۴) $x>۲$

۴۶- مجموعه جواب نامعادلهٔ $(۳x^۲+۷x-۶)\sqrt{x}\leq ۰$ ، کدام است؟

۱) $۰\leq x\leq \frac{۲}{۳}$
۲) $۰\leq x\leq \frac{۱}{۳}$
۳) $-۲\leq x\leq \frac{۲}{۳}$
۴) $-۱<x<\frac{۴}{۳}$

۴۷- مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x|(x^۲-۳x+۲)\leq ۰$ ، کدام است؟

۱) $[۱,۲]$
۲) $\{۰\}\cup[۱,۲]$
۳) $[-۲,-۱]$
۴) $\{۰\}\cup[-۲,-۱]$

۴۸- به ازای چه مقادیری از x، نامساوی $\frac{x^۳-۳x^۲+۳x-۱}{x-۱}\geq ۰$ همواره برقرار است؟

۱) همهٔ مقادیر x ۲) $-۱<x<۱$ ۳) $x<۱$ ۴) $x\neq ۱$

۴۹- حدود تغییرات x در نامعادلهٔ $(x^۲+x+۲)(x^۲-۴x+۳)>۰$، کدام است؟

۱) $x<۱$ یا $x>۳$ ۲) $۱<x<۳$ ۳) $x<-۳$ یا $x>-۱$ ۴) $-۱<x<۴$

۵۰- نخستین جملهٔ دنبالهٔ $\left\{\frac{n}{n^۲+۱}\right\}$ که کوچک‌تر از ۰/۱ است، کدام می‌باشد؟

۱) جملهٔ هشتم ۲) جملهٔ نهم ۳) جملهٔ دهم ۴) جملهٔ یازدهم

۵۱- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x-۱}{x+۱}>۲x$، کدام مجموعه است؟ تجربی داخل ۸۴

۱) $\{x:x<-۱\}$ ۲) $\{x:x>-۱\}$ ۳) $\{x:-۱<x<۱\}$ ۴) $\{x:-۲<x<-۱\}$

۵۲- مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x+۱)(x^۲+۲x-۲)>x+۱$، کدام است؟

۱) $x<-۵$ یا $x>۲$ ۲) $x<-۳$ یا $x>۲$ ۳) $-۴<x<-۲$ ۴) $-۳<x<-۱$ یا $x>۱$

۵۳- اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{۱}{۲x^۲+x+۱}\geq\frac{۱}{x^۲+۱}$ بازهٔ $[a,b]$ باشد، حاصل ab کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۲

۵۴- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{۳}{x-۴}+\frac{۵}{x+۴}>\frac{۸}{x^۲-۱۶}$ کدام است؟

۱) $(-۴,+\infty)-[۲,۴)$ ۲) $(-\infty,-۴)\cup(۲,۴)$ ۳) $(-۴,+\infty)-[۲,۴]$ ۴) $(-\infty,-۴)-(۲,۴)$

۵۵- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{۳x^۲-۳x}{x^۳-۱}>۱$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{۱\}$ ۲) $\varnothing$ ۳) $\{x\,|\,x>۱\}$ ۴) $\{x\,|\,x<۱\}$

۵۶- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x^۲-۵x+۶}{x^۲+۲x-۸}>\frac{x^۲-x-۲}{x^۲-۲x-۳}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۲)\cup(۳,۴)$ ۲) $(-۴,\frac{۱۷}{۸})\cup(۳,+\infty)$ ۳) $(-\infty,-۴)\cup(۲,۳)$ ۴) $(-\infty,-۴)\cup(\frac{۱۷}{۸},۳)$

۵۷- به‌ازای چند عدد طبیعی x، حاصل عبارت $\frac{x^۲+x+۲}{x^۲-۳x+۲}$ کم‌تر از ۱ می‌باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۸- چند عدد به صورت $\frac{k}{۲}$ که در آن k عددی صحیح است، در مجموعه جواب نامعادلهٔ $۲(x^۲-۱)-\frac{۱}{۱-x^۲}\leq x^۲+x-\frac{۱}{۱-x^۲}$ قرار دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵۹- اگر مساحت مستطیلی به اضلاع $(۳x-۲)$ و $(x-۱)$ از مساحت مربعی به ضلع x بیشتر باشد، x در کدام بازهٔ زیر می‌تواند قرار داشته باشد؟

۱) $۰<x<\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}<x<۵$ ۳) $\frac{۳}{۲}<x<۴$ ۴) $\frac{۱}{۲}<x<۲$

۶۰- فروش هفتگی S هزار واحد از یک نوع کالای مرغوب و جدید، t هفته بعد از معرفی بـه بـازار از رابطـهٔ $S(t)=\frac{۲۰۰t}{t^۲+۱۰۰}$ بـه دسـت می‌آید. در چه بازهٔ زمانی فروش هفتگی کالای معرفی‌شده ۸ هزار واحد یا بیشتر در هر هفته است؟

۱) $[۵,۱۰]$ ۲) $[۵,۱۵]$ ۳) $[۱۵,۲۰]$ ۴) $[۵,۲۰]$

۶۱- اگر $x_۱$ و $x_۲$ $(x_۲>x_۱)$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-mx-۳x-۳=۰$ باشند، حدود m کدام باشد تا رابطهٔ $x_۱<-۱<x_۲$ برقرار شود؟

۱) $m<۲$ ۲) $m>۲$ ۳) $m<-۲$ ۴) $m>-۲$

۶۲- اگر جدول تعیین علامت عبارت $y = x^۲ - bx + c$ به شکل مقابل باشد، مقدار $c + ۲b$ کدام است؟

x		۱		۲	
y	+	۰	−	۰	+

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۶۳- اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $x^۲ + bx + c < ۰$ برابر $\{x \mid -۱ < x < ۲\}$ باشد، مجموعه جواب نامعادلهٔ $x^۲ + ۱ + b(x-۱) + c > ۲x$ کدام است؟

۱) $(-\infty, -۲) \cup (۱, +\infty)$ ۲) $(-۲, ۳)$ ۳) $(۱, ۳)$ ۴) $(-\infty, ۰) \cup (۳, +\infty)$

۶۴- اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $x^۲ - ۸x + c < ۰$ را به صورت $|x + n| < ۲$ بنویسیم، آن‌گاه $n + c$ کدام است؟

۱) ۸- ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۱۲-

۶۵- اگر عبارت $(a-۱)x^۲ + (a-۱)x + ۱$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟ ریاضی داخل ۹۱

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\{a : a < ۱\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\{a : ۱ < a < ۵\}$

۶۶- به ازای کدام مقادیر m، عبارت $(m-۱)x^۲ + ۶x + ۲m + ۱$، برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟ ریاضی خارج ۹۰

۱) $m < -۲$ ۲) $m > ۲/۵$ ۳) $۱ < m < ۲$ ۴) $۱ < m < ۲/۵$

۶۷- به ازای کدام مقادیر m، سهمی $y = (m-۱)x^۲ + \sqrt{۳}x + m$، همواره در زیر محور xها است؟ ریاضی داخل ۸۵

۱) $m < -\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲} < m < ۱$ ۳) $۱ < m < \frac{۳}{۲}$ ۴) $m > \frac{۳}{۲}$

۶۸- به ازای کدام مقادیر m، نمودار سهمی $y = (m+۲)x^۲ - ۲mx + ۱$ همواره بالای محور xها است؟ ریاضی خارج ۸۵ و مشابه خارج ۸۹

۱) $m > -۲$ ۲) $-۲ < m < -۱$
۳) $-۲ < m < ۲$ ۴) $-۱ < m < ۲$

۶۹- به ازای کدام مقدار m، نمودار سهمی $y = (m-۲)x^۲ - ۳x + m + ۲$ بالای محور xها و مماس بر آن است؟ ریاضی داخل ۸۲

۱) ۳- ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۷۰- اگر نامساوی $\dfrac{mx^۲ - \frac{m}{۲}x - ۳}{-x^۲ - x - ۱} \leq ۳$ به‌ازای همهٔ مقادیر x برقرار باشد، m کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۶- ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۷۱- نمودارِ $f = \dfrac{۳x^۲ - ۲x}{x^۲ + ۴}$ در بازهٔ (a, b) پایین‌تر از خط به معادلهٔ $y = ۲$ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟ ریاضی خارج ۸۸

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) $+\infty$

۷۲- به ازای کدام مقادیر a، معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲ + ax + a - \frac{۳}{۲} = ۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است؟ تجربی داخل ۸۱

۱) $a > ۶$ یا $a < ۲$ ۲) $a > ۴$ یا $a < ۳$ ۳) $۲ < a < ۶$ ۴) $۳ < a < ۴$

۷۳- به ازای چه مقادیری از m منحنی درجه دوم $f(x) = mx^۲ + ۴x + m - ۳$ محورxها را در دو نقطه قطع می‌کند؟

۱) $-۱ < m < ۳$ ۲) $-۱ < m < ۴$ و $m \neq ۰$ ۳) $-۳ < m < ۱$ ۴) $-۴ < m < ۱$

۷۴- اگر معادلهٔ درجه دوم $(m+۲)x^۲ + ۴x + (m-۱) = ۰$ دارای جواب حقیقی باشد، مقادیر m کدام است؟

۱) $-۲ < m \leq ۱$ ۲) $۱ \leq m \leq ۲$ ۳) $-۲ \leq m \leq ۲$ ۴) $-۳ \leq m \leq ۲$ و $m \neq -۲$

۷۵- به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲ + (m+۱)x + \frac{۱}{۲}m + ۲ = ۰$، فاقد ریشهٔ حقیقی است؟ تجربی خارج ۸۹

۱) $-۳ < m < ۵$ ۲) $-۳ < m < ۴$ ۳) $-۲ < m < ۴$ ۴) $-۱ < m < ۵$

۷۶- منحنی به معادلهٔ $y = (x-۱)(x^۲ - ax + a)$ محور xها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعهٔ مقادیر a، به کدام صورت است؟ ریاضی داخل ۸۳

۱) $-۴ < a < ۰$ ۲) $۰ < a < ۲$ ۳) $۰ < a < ۴$ ۴) $a > ۴$

۷۷- اگر منحنی $y = (۶ + ۳x)(x^۲ + bx + b)$ محور xها را فقط در یک نقطه قطع کند، مجموعه مقادیر b، کدام است؟

۱) $(۴, +\infty)$ ۲) $(۰, ۴)$ ۳) $(۰, ۴]$ ۴) $(-\infty, ۴]$

۷۸- خط به معادلهٔ $y = mx + ۴$ با منحنی به معادلهٔ $y = -x^۲ + ۲x$ هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند. مجموعه مقادیر m کدام است؟ تجربی خارج ۸۱

۱) $m < ۰$ ۲) $m > ۴$ ۳) $-۱ < m < ۴$ ۴) $-۲ < m < ۶$

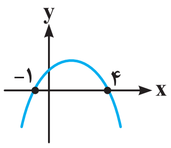
۷۹- منحنی به معادلهٔ $y = (۲x + ۱)(x + ۸)$ با خطوط $y = mx$ نقطهٔ مشترک ندارد. مجموعه مقادیر m، چگونه است؟ ریاضی داخل ۸۸

۱) $۵ < m < ۱۳$ ۲) $۱۵ < m < ۲۳$ ۳) $۷ < m < ۱۵$ ۴) $۹ < m < ۲۵$

۸۰- اگر رأس سهمی به معادلهٔ $y = x^۲ + mx + ۱$ در ربع سوم محورهای مختصات قرار داشته باشد، محدودهٔ m کدام است؟

۱) $-۲ < m < ۲$ ۲) $m > ۲$ ۳) $m < -۲$ ۴) $m > ۲$ یا $m < -۲$

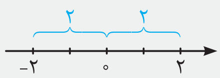
۸۱- اگر شکل مقابل، نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ باشد، مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x}{ax^۲ + bx + c} > ۰$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

درسنامه ۴

نامعادلات قدرمطلقی



می‌دانیم $|x|$ همان فاصله x از مبدأ، روی خط اعداد حقیقی است. به عنوان مثال، اعداد ۲ و ۲- هر دو فاصله‌شان از مبدأ ۲ واحد است، پس می‌نویسیم $|-۲| = |۲| = ۲$.

دو فرمول زیر در نامعادلات قدرمطلقی خیلی مهم است. حتماً آن‌ها را به یاد داشته باشید:

۱) $\boxed{|x| \le a \overset{a>۰}{\Longrightarrow} -a \le x \le a}$ مثال: $|x| \le ۳ \Rightarrow -۳ \le x \le ۳$

۲) $\boxed{|x| \ge a \overset{a>۰}{\Longrightarrow} x \ge a \text{ یا } x \le -a}$ مثال: $|x| \ge ۲ \Rightarrow x \ge ۲ \text{ یا } x \le -۲$

در حالت کلی‌تر می‌تواند به جای x در فرمول‌های فوق، یک عبارت جبری قرار بگیرد.

مثال $|۲x - ۱| < ۳ \xRightarrow{\text{فرمول (۱)}} -۳ < ۲x - ۱ < ۳ \xRightarrow{+۱} -۲ < ۲x < ۴ \xRightarrow{\div ۲} -۱ < x < ۲$

نکته اگر مجموعه جواب یک نامعادلهٔ قدرمطلقی به صورت (a, b) باشد، آن نامعادله را می‌توان به صورت $\left|x - \frac{a+b}{۲}\right| < \frac{b-a}{۲}$ نوشت.

مثال اگر $(۲, ۴)$ مجموعه جواب یک نامعادلهٔ قدرمطلقی باشد، آن نامعادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left|x - \frac{۴+۲}{۲}\right| < \frac{۴-۲}{۲} \Rightarrow |x - ۳| < ۱$$

نکته اگر مجموعه جواب یک نامعادلهٔ قدرمطلقی به صورت $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ باشد، آن نامعادله را می‌توان به صورت $\left|x - \frac{a+b}{۲}\right| > \frac{b-a}{۲}$ نوشت.

مثال اگر $(-\infty, ۲) \cup (۴, +\infty)$ مجموعه جواب یک نامعادلهٔ قدرمطلقی باشد، آن نامعادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left|x - \frac{۴+۲}{۲}\right| > \frac{۴-۲}{۲} \Rightarrow |x - ۳| > ۱$$

۸۲- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\left|۱ + \frac{۳x}{۲}\right| \le \frac{۵}{۲}$ شامل کدام عدد زیر نیست؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{-\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

۸۳- مجموعه جواب نامعادلهٔ $|۲x + ۱| > ۵$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $[-۳, ۲]$ ۲) $[-۳, +\infty)$ ۳) $\mathbb{R} - (-۳, ۲)$ ۴) $\mathbb{R} - [-۳, ۲]$

۸۴- مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x^۲ - x - ۴| > ۲$ شامل چند عدد صحیح نمی‌باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۸۵- مجموعه جواب کدام نامعادله نادرست بیان شده است؟

۱) $|x| > -۲ \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ ۲) $|x - ۱| < -۳ \Rightarrow x \in \varnothing$ ۳) $|x + ۵| \le ۰ \Rightarrow x = -۵$ ۴) $|x + ۲| > ۰ \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

۸۶- مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x-۲|<x^۲+x+۲$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-(-۲,۱]$ ۲) $\mathbb{R}-[-۲,۰]$ ۳) $\mathbb{R}-(-۱,۲)$ ۴) $\mathbb{R}-[-۱,۲]$

۸۷- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\sqrt{x^۲-۶x+۹}<۳۶$، بازهٔ (a,b) است. در این صورت $\frac{b-a}{۲}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۳۶ ۴) ۳۹

۸۸- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{|۲x-۱|-۵}{|۵x+۷|+۶}\geq ۰$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-(-۲,۳)$ ۲) $\mathbb{R}-(-۳,۲)$ ۳) $\mathbb{R}-[-۲,۳]$ ۴) $\mathbb{R}-[-۳,۲]$

۸۹- مجموعه جواب نامعادلهٔ $||x+۳|-۲|<۱$ کدام است؟

۱) $[-۲,۰)\cup(-۴,-۲)$ ۲) $(-۲,۰)\cup(-۶,-۴)$ ۳) $(۴,۶)\cup(۰,۲)$ ۴) $(-۳,-۲)\cup(-۶,-۳)$

۹۰- اگر نامعادلهٔ $\left|\frac{۲x-۴}{۳x-۲}\right|<۲$ به‌ازای تمام x های متعلق به بازهٔ (a,b) برقرار باشد، بزرگ‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$ مشابه تجربی داخل ۹۵

۹۱- بازهٔ $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$، مجموعه جواب کدام نامعادلهٔ زیر است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $|۱۲x+۱|<۵$ ۲) $|۱۲x+۱|<۱۰$ ۳) $|۶x+۱|<۵$ ۴) $|-۱۲x-۱|>۵$

۹۲- مجموعهٔ $(۵,+\infty)\cup(-\infty,۳)$، مجموعه جواب کدام نامعادله است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $|x-۵|<۲$ ۲) $|x-۴|>۱$ ۳) $|x-۵|>۲$ ۴) $|x-۴|<۱$

یادداشت

پاسخ تشریحی

۱ | ۲

$$(x-1)^2=(1-\sqrt{3})^2 \Rightarrow \begin{cases} x-1=1-\sqrt{3} \Rightarrow x=2-\sqrt{3} \\ x-1=-(1-\sqrt{3}) \Rightarrow x-1=-1+\sqrt{3} \Rightarrow x=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=(2-\sqrt{3})+\sqrt{3}=2$$

۲ | ۳ در یک معادلهٔ درجه دوم، پس از آن‌که معادله به صورت $x^2+bx=c$ درآمد، برای حل به روش مربع کامل باید $(\frac{b}{2})^2$ را به طرفین معادله اضافه کنیم. در این تست داریم:

$$x^2+\frac{x}{4}=\frac{7}{4} \Rightarrow b=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{b}{2}=\frac{1}{8} \Rightarrow (\frac{b}{2})^2=\frac{1}{64}$$

پس باید $\frac{1}{64}$ رو به طرفین معادله اضافه کنیم.

سؤال دانش‌پژوه *(ناصر اخته‌پاری)*: **آقا جواب‌های معادله چی میشن؟**

پاسخ *به‌به! درود بر تو! یعنی ناصرخان تو اونقدر درسخون شدی که می‌خوای اضافه کاری کنی؟ ببین جواب‌ها اصلاً مهم نیستند و ما اصلاً لازم نیست دنبال اونا باشیم ولی اگه دوست داری می‌تونی با ادامه‌دادن روش مربع کامل اونا رو پیدا کنی که* $\frac{-1\pm\sqrt{113}}{8}$ *میشن.*

۳ | ۴

$$4x^2+5x-3=0 \xRightarrow{\div 4} x^2+\frac{5}{4}x=\frac{3}{4} \quad (*)$$

حال باید مربع نصف ضریب x را به طرفین معادلهٔ $(*)$ اضافه کنیم.

$$\Rightarrow x^2+\frac{5}{4}x+(\frac{5}{8})^2=\frac{3}{4}+(\frac{5}{8})^2 \Rightarrow (x+\frac{5}{8})^2=\frac{3}{4}+\frac{25}{64} \Rightarrow (x+\frac{5}{8})^2=\frac{48+25}{64}=\frac{73}{64}$$

با مقایسهٔ جواب فوق با معادلهٔ $(x+n)^2=m$ داریم:

$$n=\frac{5}{8}\ ,\ m=\frac{73}{64} \Rightarrow n+8m=\frac{5}{8}+\frac{73}{8}=\frac{78}{8}=\frac{39}{4}$$

۴ | ۲

$$((1-x^2)^2-3)^2=36 \Longrightarrow \begin{cases} (1-x^2)^2-3=+6 \Rightarrow (1-x^2)^2=9 \Longrightarrow \begin{cases} 1-x^2=3 \Rightarrow x^2=-2 & \times \\ 1-x^2=-3 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 & \checkmark \end{cases} \\ (1-x^2)^2-3=-6 \Rightarrow (1-x^2)^2=-3 \quad \times \end{cases}$$

پس حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر $(2)(-2)=-4$ است.

۵ | ۳ **راه اول:** مسأله از ما ریشهٔ مضاعفِ معادلهٔ $x(2x-5)=a$ را می‌خواهد. ابتدا معادله را به صورت $2x^2-5x-a=0$ نوشته و سپس از فرمول ریشهٔ مضاعف استفاده می کنیم:

$$\text{ریشهٔ مضاعف}=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-5)}{2(2)}=\frac{5}{4}$$

راه دوم:

$$x(2x-5)=a \Rightarrow 2x^2-5x-a=0 \xRightarrow{\Delta=0\ \text{شرط ریشهٔ مضاعف}} \Delta=(-5)^2-4(2)(-a)=0 \Rightarrow 25+8a=0 \Rightarrow a=-\frac{25}{8}$$

حال با به دست آمدن $a=-\frac{25}{8}$، معادلهٔ $2x^2-5x-a=0$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$\Rightarrow \text{معادله}:\ 2x^2-5x+\frac{25}{8}=0 \xRightarrow{\times 8} 16x^2-40x+25=0 \xRightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} (4x-5)^2=0 \Rightarrow 4x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

۶ | ۳ فرض کنید ریشه‌های معادله x_1 و x_2 باشند. اگر تفاضل آن‌ها برابر صفر باشد، داریم:

$$x_1-x_2=0 \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow \text{(یکسان هستند) ریشه‌ها با هم برابرند} \Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow b^2-4ac=0$$

$$\xRightarrow{ax^2-12x+9=0} (-12)^2-4(a)(9)=0 \Rightarrow 144-36a=0 \Rightarrow 36a=144 \Rightarrow a=\frac{144}{36}=4$$

با قراردادن $a=4$ در معادلهٔ $ax^2-12x+9=0$ داریم:

$$4x^2-12x+9=0 \xRightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} (2x-3)^2=0 \Rightarrow 2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

۷ | ۱ می‌دانیم اگر $b=a+c$ باشد، در این‌حالت یکی از ریشه‌ها -1 و دیگری $-\frac{c}{a}$ می‌باشد. در معادلهٔ داده‌شده، $a=1$ می‌باشد و داریم:

$$b=c+1 \xRightarrow{b=a+c} x=-1 \ \text{یا}\ x=-\frac{c}{a}=-\frac{c}{1}=-c$$

سؤال دانش‌پژوه (شهرام هرهری): **آقا این سؤال برای کنکور کمی آسون نبود؟**

پاسخ *درود بر مؤلفین تست‌های کنکور! ببین این تست مربوط به کنکورهای قدیم بوده و شاید اون زمان خیلی‌ها ایـن نکـته‌ها رو راحـت نمی‌دونستن. الان بچه‌ها به جز چند مورد خاص خیلی باهوش‌تر شدن!*

۸ **۳** وقتی که ضرایب معادلهٔ درجه دوم خیلی بزرگ می‌شوند احساسی به افراد دست می‌دهد که نکند کلکی در کار باشد. بهتر است جمع ضـرایب را با هم چک کنیم:

$$a+c+b=۱۵۰-۱۴۸-۲=۰ \Rightarrow x=۱ \text{ ، } x=\frac{c}{a}=-\frac{۱۴۸}{۱۵۰}=-\frac{۷۴}{۷۵}$$

۹ **۳** با توجه به ظاهر کج و معوج معادله، احتمالاً شما هم باید متوجه شده باشید که کلکی در کار است. مشخص است که حل تست از راه‌هایی مثل تجزیه یا حتی روش کلی، کار راحتی به نظر نمی‌رسد. بهتر است جمع ضرایب را امتحان کنیم:

$$a+c+b=(\sqrt{۲}+۱)+(\sqrt{۲}-۱)+(-۲\sqrt{۲})=۲\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}+۱-۱=۰$$

$$\Rightarrow \text{یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری } \frac{c}{a} \text{ است} \Rightarrow x=۱ \text{ ، } x=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}+۱}$$

بهتر است ریشهٔ دوم را گویا کنیم:

$$\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}+۱}\times\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{۲+۱-۲\sqrt{۲}}{۲-۱}=۳-۲\sqrt{۲}$$

مشخص است که $۳-۲\sqrt{۲}$ از $\frac{۱}{۲}$ کم‌تر است، زیرا $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$ و لذا داریم:

$$۳-۲\sqrt{۲}\simeq ۳-۲(۱/۴)=۰/۲<\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

پس یکی از ریشه‌ها بزرگ‌تر از $\frac{۱}{۲}$ و دیگری کوچک‌تر از $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

۱۰ **۲** ابتدا بهتر است از عدد ۳ فاکتور بگیریم تا کار ساده‌تر شود:

$$۶ax^۲-۳(a+۱)x-۳۶=۰ \Rightarrow ۳(۲ax^۲-(a+۱)x-۱۲)=۰ \Rightarrow ۲ax^۲-(a+۱)x-۱۲=۰$$

چون یکی از جواب‌های معادله ۳ $x=$ است، پس این جواب در معادله صدق می‌کند:

$$۲ax^۲-(a+۱)x-۱۲=۰ \xrightarrow{x=۳} ۲a(۳)^۲-(a+۱)(۳)-۱۲=۰ \Rightarrow ۱۸a-۳a-۳-۱۲=۰ \Rightarrow ۱۵a-۱۵=۰ \Rightarrow a=۱$$

با بازنویسی معادله به ازای $a=۱$، داریم:

$$۲(۱)x^۲-(۱+۱)x-۱۲=۰ \Rightarrow ۲x^۲-۲x-۱۲=۰ \Rightarrow ۲(x^۲-x-۶)=۰ \Rightarrow x^۲-x-۶=۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۳ \text{ یا } x=-۲$$

پس جواب دیگر $x=-۲$ می‌باشد.

۱۱ **۲** تمام نکتهٔ کار این‌جاست که $x^۲$ را به صورت $|x|^۲$ بنویسید و سپس $|x|$ را u بگیرید:

$$x^۲-۵|x|-۱۴=۰ \xrightarrow{|x|^۲=x^۲} |x|^۲-۵|x|-۱۴=۰ \xrightarrow{|x|=u} u^۲-۵u-۱۴=۰$$

$$\Rightarrow (u-۷)(u+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} u=۷ \xrightarrow{u=|x|} |x|=۷ \Rightarrow x=\pm ۷ \\ u=-۲ \Rightarrow |x|=-۲ \text{ این معادله جواب ندارد. چون قدرمطلق هیچ عددی برابر عددی منفی نمی‌شود.} \end{cases}$$

پس جواب‌های معادله ۷ و ۷− هستند و معادله دو جواب دارد.

۱۲ **۲** فرض کنید ریشهٔ مشترک دو معادله $x=k$ باشد. پس $x=k$ در هر دو معادله صدق می‌کند. داریم:

$$x=k \Rightarrow \begin{cases} k^۲+۲k+a=۰ \\ k^۲-k-۲a=۰ \end{cases} \xrightarrow[\text{از هم کم می‌کنیم}]{\text{طرفین دو تساوی را}} ۳k+۳a=۰ \Rightarrow ۳k=-۳a \Rightarrow k=-a$$

پس ریشهٔ مشترک دو معادله $x=-a$ می‌باشد. با قراردادن $x=-a$ در یکی از معادلات، مثلاً در معادلهٔ $x^۲+۲x+a=۰$، داریم:

$$x=-a \Rightarrow (-a)^۲+۲(-a)+a=۰ \Rightarrow a^۲-a=۰ \Rightarrow a(a-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۰ \\ a=۱ \end{cases}$$

چون طبق فرض سؤال $a>۰$ می‌باشد، پس $a=۰$ قابل قبول نیست. به ازای $a=۱$ داریم:

$$x^۲+۲x+a=۰ \xrightarrow{a=۱} x^۲+۲x+۱=۰ \Rightarrow (x+۱)^۲=۰ \Rightarrow x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$$

۱۳ **۱** مثل همیشه فرض کنید عدد موردنظر x باشد. ۴ برابر مربع عدد، $۴x^۲$ و ۱۲ برابر آن عدد، $۱۲x$ می‌شود. طبق صورت تست داریم:

$$۱۲x-۴x^۲=۹ \Rightarrow ۰=۴x^۲-۱۲x+۹ \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} (۲x-۳)^۲=۰ \Rightarrow ۲x-۳=۰ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \text{معکوس عدد}=\frac{۲}{۳}$$

۱۴ ۲ دو قسمت حاصل از عدد ۲۴ را x و $24-x$ می‌نامیم. طبق صورت سؤال داریم:

$$(24-x)x=143 \Rightarrow 24x-x^2-143=0 \xRightarrow{\text{مرتب‌سازی}} -x^2+24x-143=0 \xRightarrow{\times(-1)} x^2-24x+143=0$$

$$\Rightarrow (x-11)(x-13)=0 \Rightarrow x=11 \text{ یا } x=13 \Rightarrow \text{قدرمطلق اختلاف دو عدد}=|13-11|=2$$

۱۵ ۲ دو عدد صحیح متوالی را k و $k+1$ می‌گیریم. داریم:

$$k^2+(k+1)^2=925 \Rightarrow k^2+k^2+2k+1=925 \Rightarrow 2k^2+2k-924=0 \xRightarrow{\div 2} k^2+k-462=0$$

درست است که k^2، ضریب ۱ دارد، ولی پیداکردن دو عدد که حاصل‌ضربشان ۴۶۲ و جمعشان ۱ شود کار آسانی نیست و بهتر است بدون چونه زدن، سراغ روش دلتا برویم: $\Delta=1-4(1)(-462)=1+1848=1849$

سؤال دانش‌پژوه (شاهرخ شهری): **آقا جذرگیری از ۱۸۴۹ خیلی سخت‌تره که! بهتر نیست شانسمون رو توی همون روش از اتحاد یک جمله مشترک امتحان می‌کردیم؟**

پاسخ *درود بر شانست! درود بر صبر ایوب! پسر یه کم وایسا تا من روشم رو بگم بعداً اگه بر بود تو تا صبح به شانس بر من لعنت بفرست! ادامهٔ حل رو ببین.*

می‌دانیم $40^2=1600$ و $50^2=2500$. پس جواب جذر که قاعدتاً عددی صحیح باید باشد بین ۴۰ و ۵۰ و عددی فرد است. (چون عدد زوج به توان ۲، عددی زوج می‌شود.) با توجه به این‌که عدد ۱۸۴۹ به ۱۶۰۰ نزدیک‌تر از ۲۵۰۰ بوده و آخر عدد ۹ شده و می‌دانیم 43^2 به عدد ۹ ختم می‌شود، پس احتمالاً $\sqrt{1849}=43$. امتحان می‌کنیم:

$$43\times 43=1849 \Rightarrow k=\frac{-1\pm 43}{2} \Rightarrow \begin{cases} k=\frac{42}{2}=21 \Rightarrow k+1=22 \Rightarrow (k)+(k+1)=21+22=43 \\ k=-\frac{44}{2}=-22 \Rightarrow k+1=-21 \Rightarrow (k)+(k+1)=-43 \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها، چون عدد ۴۳− در گزینه‌ها وجود ندارد، ۴۳− بدبخت سوخته و گزینهٔ (۲) انتخاب می‌شود.

۱۶ ۲ اگر یکی از اضلاع مستطیل را x و دیگری را y بگیریم، داریم:

$$\text{محیط}=54 \Rightarrow 2(x+y)=54 \Rightarrow x+y=27 \Rightarrow y=27-x \quad (*)$$

$$\text{مساحت}=180 \Rightarrow xy=180 \xRightarrow{(*)} x(27-x)=180 \Rightarrow 27x-x^2=180 \Rightarrow x^2-27x+180=0$$

سعی می‌کنیم به کمک روش اتحاد جمله مشترک دو عدد بیابیم که جمعشان ۲۷− و ضربشان ۱۸۰ شود. این دو عدد ۱۵− و ۱۲− هستند. پس داریم:

$$x^2-27x+180=0 \Rightarrow (x-12)(x-15)=0 \Rightarrow x=12 \text{ یا } x=15$$

$$\begin{cases} x=12 \xRightarrow{(*)} y=27-12=15 \\ x=15 \xRightarrow{(*)} y=27-15=12 \end{cases} \Rightarrow$$ در هر دو حالت، اختلاف طول و عرض $15-12=3$ می‌شود.

سؤال دانش‌پژوه (احمد بنلو): **آقا میشه بگید چطور ۱۵− و ۱۲− رو حدس زدین! آخه این همه عدد ...**

پاسخ *سؤال خوبی بود. ببین به خاطر ۱۸۰ بود که من این روش رو انتخاب کردم. چون باید جمع دو عدد ۲۷− و ضرب آن‌ها ۱۸۰ بشه، یکی از اعداد باید آخرش صفر یا ۵ باشه. خوب ۲۰− و ۷− یا ۲۵− و ۲− علی‌رغم این‌که جمعشون ۲۷− میشه ولی ضربشون ۱۸۰ نمیشه، پس ۱۵− و ۱۲− رو امتحان کردم و به جواب رسیدم. شاید اگه عدد ۱۸۰ نبود بهتر بود از روش Δ بریم.*

۱۷ ۲ تا اسم مثلث قائم‌الزاویه به میان می‌آید، نام مرحوم فیثاغورس می‌درخشد. *(البته شاید هم از دست بعضی‌ها در گور بلرزد!)* مشخص است که ضلع بزرگ‌تر (وتر) برابر $2x+1$ می‌باشد، پس طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$x^2+(2x-1)^2=(2x+1)^2 \Rightarrow x^2+4x^2-4x+1=4x^2+4x+1 \Rightarrow x^2-8x=0 \Rightarrow x(x-8)=0 \Rightarrow x=8$$

اگر از این مطلب که طراح آن‌قدر ذوق نداشته که حتی $x=8$ را در بین گزینه‌ها قرار دهد که شاید کسی به اشتباه بیفتد بگذریم، داریم:

$$\text{ضلع متوسط}=2x-1=2(8)-1=15$$

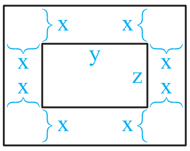
۱۸ ۱ سن فعلی علی را x و سن فعلی پدرش را y فرض می‌کنیم. چون علی از پدرش ۲۰ سال کوچک‌تر است. پس $x=y-20$. از طرفی ۶ سال دیگر، سن علی $x+6$ و سن پدرش $y+6$ می‌شود که طبق فرض، حاصل‌ضرب سن‌ها در آن موقع برابر ۳۰۰ است. پس:

$$(x+6)(y+6)=300 \xRightarrow{x=y-20} (y\overbrace{-20+6}^{-14})(y+6)=300 \Rightarrow y^2+6y-14y-84-300=0 \Rightarrow y^2-8y-384=0$$

$$\Delta=(-8)^2-4(-384)=64+1536=1600 \Rightarrow y=\frac{-(-8)\pm\sqrt{1600}}{2(1)}=\frac{8\pm 40}{2}=\begin{cases} y=24 & ✓ \\ y=-16 & ✗ \end{cases}$$

پس $y=24$ شده و لذا سن فعلی علی برابر $x=24-20=4$ می‌شود.

۱۹ | ۱ بزارید یه شکل براتون بکشم که مسائی شیرفهم بشید. فرض کنید:



محیط قالی $=۱۲ \Rightarrow ۲(y+z)=۱۲ \Rightarrow y+z=۶ \quad (*)$

محیط اتاق $=۲۰ \Rightarrow ۲[(y+۲x)+(z+۲x)]=۲۰ \Rightarrow y+z+۴x=۱۰ \xrightarrow[y+z=۶]{(*)} ۶+۴x=۱۰ \Rightarrow ۴x=۴ \Rightarrow x=۱$

همچنین از رابطهٔ (*) می‌توانیم z را برحسب y بنویسیم:

$$y+z=۶ \Rightarrow z=۶-y \quad (**)$$

مساحت اتاق $=۲۴ \Rightarrow (z+۲x)(y+۲x)=۲۴ \xrightarrow[(**)]{x=۱} (۶-y+۲)(y+۲)=۲۴$

$$\Rightarrow (۸-y)(y+۲)-۲۴=۰ \Rightarrow ۸y+۱۶-y^۲-۲y-۲۴=۰ \Rightarrow -y^۲+۶y-۸=۰$$

$$\xrightarrow{\times(-۱)} y^۲-۶y+۸=۰ \Rightarrow (y-۴)(y-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} y=۴ \xrightarrow{(**)} z=۶-۴=۲ \\ y=۲ \xrightarrow{(**)} z=۶-۲=۴ \end{cases}$$

با توجه به این‌که y طول قالی در نظر گرفته شده، $y=۴$ و $z=۲$ می‌باشند و داریم:

مساحت قالی $= yz = ۴\times۲=۸$

۲۰ | ۴ جدول تعیین علامت عبارت $ax+b$ به صورت

x		$-\frac{b}{a}$	
$ax+b$	مخالف علامت a		موافق علامت a

می‌باشد.

پس با توجه به جدول داده‌شده، $-\frac{۳}{۷}$ ریشهٔ عبارت درجه اول بوده و چون سمت راست جدول موافق علامت a است، پس علامت ضریب x باید منفی باشد. تنها در گزینه‌های (۳) و (۴) ضریب x منفی است و از بین این دو گزینه $-\frac{۳}{۷}$ ریشهٔ عبارت $-۷x-۳$ می‌باشد. پس گزینهٔ (۴) جواب است.

۲۱ | ۴ با توجه به جدول تعیین علامت، a ریشهٔ عبارت P می‌باشد. پس با قراردادن $x=a$ داریم:

$$۲a(a)+a^۲-۲۷=۰ \Rightarrow ۳a^۲=۲۷ \Rightarrow a^۲=۹ \Rightarrow a=\pm۳$$

به ازای $a=۳$، عبارت P به صورت $P=۶x-۱۸$ درمی‌آید و جدول تعیین علامت آن به صورت مقابل است:

x		۳	
P	−	۰	+

به ازای $a=-۳$، عبارت P به صورت $P=-۶x-۱۸$ درمی‌آید و جدول آن به صورت مقابل است:

x		−۳	
P	+	۰	−

پس فقط به ازای $a=-۳$، جدول تعیین علامت به صورت جدول داده‌شده در صورت تست در می‌آید.

سؤال دانش‌پژوه (تبسابه امیری): **ببخشید چرا $a=۳$ را قبول نکردید؟ به نظرم اونم درسته!**

پاسخ *نظر شما بسیار محترمه ولی نادرسته! اگه به جدول صورت تست نگاه کنی، سمت چپ توی جدول مثبته ولی تو جدول ما برای ۳، سمت چپ منفیه. پس به ازای $a=۳$ ما به جدول درست نمی‌رسیم.*

۲۲ | ۳ ابتدا عبارت داده‌شده را کمی مرتب می‌کنیم:

$$y=\underline{ax}+b+\underline{x}+a=(a+۱)x+(b+a)$$

با توجه به جدول می‌فهمیم که اولاً: $x=۰$ ریشهٔ معادلهٔ $(a+۱)x+(b+a)=۰$ است. پس:

$$\underbrace{(a+۱)(۰)}_{۰}+(b+a)=۰ \Rightarrow b+a=۰ \Rightarrow a=-b \quad (*)$$

ثانیاً: چون قبل از ریشه، علامت عبارت منفی است، پس ضریب x باید مثبت باشد:

$$a+۱>۰ \Rightarrow a>-۱ \quad (**)$$

با توجه به (*) و (**) داریم:

$$a>-۱ \xrightarrow{a=-b} -b>-۱ \xrightarrow{\times(-۱)} b<۱$$

پس $a>-۱$ و $b<۱$ است.

۲۳ | ۳ با توجه به صورت سؤال وقتی نمودار f در بازهٔ $[x_۰,+\infty)$ بالاتر از خط قرار ندارد، پس نمودار f یا پایین‌تر از نمودار خط مفروض قرار دارد و یا هم‌ارتفاع با آن. به عبارت دیگر داریم:

$$f(x)\le ۳(x-۱) \xrightarrow{f(x)=\frac{۱}{۲}x+۲} \frac{۱}{۲}x+۲\le ۳x-۳ \Rightarrow ۲+۳\le ۳x-\frac{x}{۲} \Rightarrow ۵\le\frac{۶x-x}{۲} \xrightarrow{\times۲} ۱۰\le ۲\left(\frac{۵x}{۲}\right)$$

$\Rightarrow ۱۰\le ۵x \xrightarrow{\div۵} ۲\le x$ یا $x\in[۲,+\infty) \Rightarrow$ کم‌ترین مقدار $=f(x_۰=۲)=\frac{۱}{۲}(۲)+۲=۳$

۲۴ | **۱**

نکته اگر بازهٔ (n,m) جواب نامعادلهٔ $\frac{ax+b}{cx+d}<0$ یا $(ax+b)(cx+d)<0$ باشد، آن‌گاه اولاً باید a و c (ضرائب x) هم‌علامت باشند، ثانیاً n و m ریشه‌های عبارات $ax+b$ و $cx+d$ هستند.

بازهٔ $(-6,1)$، مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{3x+b}{ax-1}<0$ است. پس طبق نکتهٔ بیان‌شده، ۱ و ۶- ریشه‌های عبارت‌های $3x+b$ و $ax-1$ هستند. اما کدام عدد ریشهٔ کدام عبارت است؟

پس دو حالت زیر را باید در نظر بگیریم:

حالت (۱): $\begin{cases} \text{عدد ۱ ریشهٔ } 3x+b \text{ باشد.} \\ \text{عدد ۶- ریشهٔ } ax-1 \text{ باشد.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(1)+b=0 \Rightarrow b=-3 \\ a(-6)-1=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{6} \end{cases}$

حالت (۲): $\begin{cases} \text{عدد ۱ ریشهٔ } ax-1 \text{ باشد.} \\ \text{عدد ۶- ریشهٔ } 3x+b \text{ باشد.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1)-1=0 \Rightarrow a=1 \\ 3(-6)+b=0 \Rightarrow b=18 \end{cases}$

از طرفی با توجه به نکتهٔ فوق، باید علامت ضرائب x در صورت و مخرج کسر یکسان باشد. چون ضریب x صورت کسر مثبت است، پس ضریب x مخرج هم باید مثبت باشد پس $a=1$ صحیح و $a=-\frac{1}{6}$ غلط است. بنابراین:

$$6a+b=6(1)+18=24$$

۲۵ | **۳**

$$\frac{4x+7}{2x-1}>5 \Rightarrow \frac{4x+7}{2x-1}-5>0 \xRightarrow{\text{مخرج مشترک‌گیری}} \frac{4x+7-5(2x-1)}{2x-1}>0 \Rightarrow \frac{4x+7-10x+5}{2x-1}>0 \Rightarrow \frac{-6x+12}{2x-1}>0$$

حال عبارت $P=\frac{-6x+12}{2x-1}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$\begin{cases} -6x+12=0 \Rightarrow x=2 \\ 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

x		$\frac{1}{2}$		۲	
$-6x+12$	+		+	۰	−
$2x-1$	−	۰	+		+
P	−	✗	+	۰	−
			جواب		

بنابراین برای برقراری نامعادلهٔ فوق باید $\frac{1}{2}<x<2$ باشد.

۲۶ | **۲**

راه اول: برای حل ابتدا عبارت سمت راست را به سمت چپ می‌بریم و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{x-1}>\frac{1}{x-3} \Rightarrow \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}>0 \Rightarrow \frac{(x-3)-(x-1)}{(x-1)(x-3)}>0 \Rightarrow \frac{x-3-x+1}{(x-1)(x-3)}>0 \Rightarrow \frac{-2}{(x-1)(x-3)}>0$$

حال با توجه به این‌که صورت کسر، عددی منفی است برای آن‌که کسر فوق، مثبت شود باید داشته باشیم:

$$(x-1)(x-3)<0 \Rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x=1, x=3$$

x		۱		۳	
$x-1$	−	۰	+		+
$x-3$	−		−	۰	+
$(x-1)(x-3)$	+	۰	−	۰	+
			جواب		

$$\Rightarrow 1<x<3$$

(توجه کنید که در نامعادلهٔ $\frac{1}{x-3}<\frac{1}{x-1}$، عبارات $\frac{1}{x-1}$ و $\frac{1}{x-3}$ در $x=1$ و $x=3$ تعریف‌نشده هستند.)

سؤال *دانش‌پژوه (حسن پور پور):* **من برای حل، طرفین ـ وسطین کردم و به نامعادلهٔ $x-1>x-3$ رسیدم.**

پاسخ *خیلی کار خطرناکی کردی حسن! ما تو نامعادله‌ها حق نداریم عبارات رو طرفین ـ وسطین کنیم مگر در شرایطی که علامت هر دو عبارت کاملاً مشخص باشه. مثلاً یکیشون x^2+1 باشه که بگیم همواره مثبته.*

راه دوم (علی کنکوری): با امتحان‌کردن $x=0$ در نامعادلهٔ داده‌شده داریم:

به ازای $x=0$ نامعادله برقرار نیست. ⇐ نادرست $\frac{1}{0-1}>\frac{1}{0-3} \Rightarrow -1>-\frac{1}{3}$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۴) که مجموعه جواب آن‌ها شامل صفر است، جواب نیستند. به ازای $x=2$ داریم:

گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۲) صحیح است. ⇐ $x=2$ در مجموعه جواب نامعادله هست. ⇐ درست $\frac{1}{2-1}>\frac{1}{2-3} \Rightarrow 1>-1$

۲۷ **۳**

$P = \dfrac{(x-۱)(x-۲)}{(x-۳)(x-۴)} < ۰$

$\begin{cases} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ & \text{ریشهٔ صورت} \\ x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ & \text{ریشهٔ صورت} \\ x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ & \text{ریشهٔ مخرج} \\ x-۴=۰ \Rightarrow x=۴ & \text{ریشهٔ مخرج} \end{cases}$

x		۱		۲		۳		۴	
x − ۱	−	۰	+		+		+		+
x − ۲	−		−	۰	+		+		+
x − ۳	−		−		−	۰	+		+
x − ۴	−		−		−		−	۰	+
P	+	۰	−	۰	+	∄	−	∄	+
			جواب				جواب		

$\Rightarrow ۱ < x < ۲$ یا $۳ < x < ۴ = (۱,۲) \cup (۳,۴)$

حال با توجه به این‌که گزینهٔ (۳) به صورت $(۳,۴)$ می‌باشد، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۲۸ **۱**

$-۴x(\dfrac{۱}{۲} + \dfrac{۱}{x^۲}) \geq -۲x - \dfrac{۱}{x} - ۱ \Rightarrow \cancel{-۲x} - \dfrac{۴}{x} + \cancel{۲x} + \dfrac{۱}{x} + ۱ \geq ۰ \Rightarrow -\dfrac{۳}{x} + ۱ \geq ۰$

$\Rightarrow \dfrac{x-۳}{x} \geq ۰ \Rightarrow$

x		۰		۳	
x − ۳	−		−	۰	+
x	−	۰	+		+
P	+	∄	−	۰	+
	جواب				جواب

با توجه به شرط $x > ۰$ در صورت سؤال، $x \geq ۳$ یا به عبارتی $x \in [۳,+\infty)$ جواب است.

۲۹ **۱**

$a_n = \dfrac{۲n-۷}{۵n-۱۴} < ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲n-۷=۰ \Rightarrow n=\dfrac{۷}{۲} & \text{ریشهٔ صورت} \\ ۵n-۱۴=۰ \Rightarrow n=\dfrac{۱۴}{۵} & \text{ریشهٔ مخرج} \end{cases}$

n		۱۴/۵		۷/۲	
۲n − ۷	−		−	۰	+
۵n − ۱۴	−	۰	+		+
(۲n − ۷)/(۵n − ۱۴)	+	∄	−	۰	+
			جواب		

پس $\dfrac{۱۴}{۵} < n < \dfrac{۷}{۲} \Rightarrow ۲/۸ < n < ۳/۵$. چون $n \in \mathbb{N}$، این دنباله فقط **یک** جملهٔ منفی به ازای $n=۳$ دارد.

۳۰ **۴**

$P = \dfrac{\overbrace{m(m^۳+m)}^{\text{فاکتور از } m}}{m-۲} > ۰ \Rightarrow \dfrac{m^۲(m^۲+۱)}{m-۲} > ۰$

$\begin{cases} m^۲(m^۲+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m^۲=۰ \Rightarrow m=۰ & \text{عبارت نامنفی است} \\ m^۲+۱ \neq ۰ & \text{عبارت همواره مثبت می‌باشد.} \end{cases} \\ m-۲=۰ \Rightarrow m=۲ \end{cases}$

m		۰		۲		
$m^۲$	+	۰	+		+	← همواره نامنفی
$m^۲+۱$	+		+		+	← همواره مثبت
m − ۲	−		−	۰	+	
P	−	۰	−	∄	+	
					جواب	

$\Rightarrow m > ۲$

سؤال *دانش‌پژوه (رومینا مرآتی)*: **ببخشید آقا! می‌تونیم بگیم چون صورت کسر $\dfrac{m^۲(m^۲+۱)}{m-۲}$ نامنفیه پس برای این‌که کسر فوق مثبت باشه، باید مخرج رو بزرگ‌تر از صفر بگیریم، یعنی: $m-۲>۰ \Rightarrow m>۲$، بعد دیگه جدول تعیین علامت نکشیم؟**

پاسخ *آره، اتفاقاً راه شما کوتاه‌تره.*

۳۱ **۲**

نکته ۱ همواره علامت عبارت‌هایی که توان زوج دارند، مانند $(x+۲)^۲$ و عبارت‌هایی که به صورت قدرمطلقی هستند، مانند $|x+۱|$ و عبارت‌هایی که زیر رادیکال با فرجهٔ زوج هستند مانند $\sqrt{x+۱}$، بزرگ‌تر یا مساوی صفر (نامنفی) هستند.

نکته ۲ وقتی یک عبارت با توان فرد در عبارتی دیگر ضرب شده است، توان فرد در تعیین علامت یک عبارت **تأثیری ندارد**. مثلاً تعیین علامت $(x-۱)^۳(x+۲)$ همان تعیین علامت $(x-۱)(x+۲)$ می‌باشد.

بنابراین داریم:

$P = \dfrac{x^۵|x+۱|}{(x-۱)^۳(x+۲)^۲} : \begin{cases} x^۵=۰ \Rightarrow x=۰ \\ |x+۱|=۰ \Rightarrow x=-۱ \\ x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \\ x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \end{cases} \Rightarrow$

x		−۲		−۱		۰		۱		
$x^۵$	−		−		−	۰	+		+	← تعیین علامت مثل x
$\|x+۱\|$	+		+	۰	+		+		+	← همواره مثبت یا صفر
$(x-۱)^۳$	−		−		−		−	۰	+	← تعیین علامت مثل x−۱
$(x+۲)^۲$	+	۰	+		+		+		+	← همواره مثبت یا صفر
P	+	∄	+	۰	+	۰	−	∄	+	
							جواب			

$\Rightarrow ۰ < x < ۱$

سؤال *دانش‌پژوه (سعیده آزاد):* **ببخشید! میشه چون $(x+۲)^۲$ و $|x+۱|$ همواره نامنفی‌اند، اونا رو اصلاً تو جدول ننویسیم و به جاش $\frac{x^۵}{(x-۱)^۳}$ رو تعیین علامت کنیم؟**

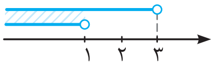
پاسخ *آره ولی چون اونارو نمی‌نویسی، باید حواست به جاهایی که صفر میشن باشه. در ضمن می‌تونی اصلاً $\frac{x}{x-۱}$ رو تعیین علامت کنی.*

۳۲ **۲** هر کدام از نامعادلات را جداگانه حل نموده و سپس بین جواب‌های حاصل اشتراک می‌گیریم:

$$\frac{x}{۲}<\frac{۱}{۲}+\frac{x}{۳} \xrightarrow[\text{جهت عوض نمی‌شه}]{\times ۶} ۶\left(\frac{x}{۲}\right)<۶\left(\frac{۱}{۲}+\frac{x}{۳}\right) \Rightarrow ۳x<۳+۲x \Rightarrow ۳x-۲x<۳ \Rightarrow x<۳$$

$$\frac{x^۲-x}{۲x-۲}+\frac{x^۲-x}{۳x-۳}<\frac{۵}{۶} \Rightarrow \frac{x(\cancel{x-۱})}{۲(\cancel{x-۱})}+\frac{x(\cancel{x-۱})}{۳(\cancel{x-۱})}<\frac{۵}{۶} \xRightarrow{x\neq ۱} \frac{x}{۲}+\frac{x}{۳}<\frac{۵}{۶} \xRightarrow{\times ۶} ۳x+۲x<۵ \Rightarrow ۵x<۵ \Rightarrow x<۱$$

پس جواب نهایی برابر است با:



$\Rightarrow x<۱$

۳۳ **۱** ابتدا طرفین نامساوی $-\frac{۱}{۲}<x\le\frac{۲}{۳}$ را در ۶- ضرب می‌کنیم که در این صورت جهت نامعادله عوض می‌شود؛ یعنی داریم:

$$-\frac{۱}{۲}<x\le\frac{۲}{۳} \xrightarrow[\text{جهت عوض می‌شود}]{\times(-۶)} ۳>-۶x\ge -۴ \xRightarrow{+۱} ۴>-۶x+۱\ge -۳ \Rightarrow -۳\le -۶x+۱<۴$$

بنابراین $(-۶x+۱)\in[-۳,۴)$.

۳۴ **۲**

$$۲\le\frac{۶-۴x}{۵}<۳ \xRightarrow{\times ۵} ۱۰\le ۶-۴x<۱۵ \xRightarrow{-۶} ۴\le -۴x<۹ \xRightarrow{\div(-۴)} -۱\ge x>-\frac{۹}{۴}$$

۳۵ **۳**

$$۵-۲x<\frac{۵-۷x}{۲}<۳+۴x \Rightarrow \begin{cases} ۱)\ ۵-۲x<\frac{۵-۷x}{۲} \xRightarrow{\times ۲} ۱۰-۴x<۵-۷x \Rightarrow ۳x<-۵ \Rightarrow x<-\frac{۵}{۳} \quad (*) \\ ۲)\ \frac{۵-۷x}{۲}<۳+۴x \xRightarrow{\times ۲} ۵-۷x<۶+۸x \Rightarrow -۱۵x<۱ \xRightarrow{\div(-۱۵)} x>\frac{-۱}{۱۵} \quad (**) \end{cases}$$

پس جواب آخر، اشتراک جواب‌های $(*)$ و $(**)$ است که برابر $\varnothing$ می‌شود.

۳۶ **۱** $x\in(-۳,-۲) \Rightarrow y_۲<y_۱ \Rightarrow y_۱-y_۲>۰ \Rightarrow a(x+۲)(x+۳)-a'(x+۲)(x+۳)>۰$

$\Rightarrow (a-a')(x+۲)(x+۳)>۰ \quad (*)$

عبارت $(x+۲)(x+۳)$ را تعیین علامت می‌کنیم.

$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$

$x+۳=۰ \Rightarrow x=-۳$

x		-۳		-۲	
x+۲	−		−	۰	+
x+۳	−	۰	+		+
(x+۲)(x+۳)	+	۰	−	۰	+

با توجه به جدول تعیین علامت در بازهٔ $(-۳,-۲)$، عبارت $(x+۲)(x+۳)$ همواره منفی است. پس با توجه به $(*)$ به ازای $x\in(-۳,-۲)$ داریم:

$(a-a')\,(\text{یک عبارت منفی})>۰ \Rightarrow a-a'<۰ \Rightarrow a<a'$

۳۷ **۲** اگر به دنبال بازهٔ (a,b) هستیم که در آن، نمودار عبارت $y=x^۳-۴x^۲-x+۴$ زیر محور xها قرار گیرد، پس باید ببینیم در کجا $y<۰$ می‌شود.

ابتدا y را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=x^۲(x-۴)-(x-۴) \xrightarrow[(x-۴)]{\text{فاکتورگیری از}} y=(x-۴)(x^۲-۱) \xlongequal{\text{اتحاد مزدوج}} (x-۴)(x-۱)(x+۱)$$

حال عبارت را تعیین علامت می‌کنیم:

$x-۴=۰ \Rightarrow x=۴$

$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$

$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$

x		-۱		۱		۴	
x+۱	−	۰	+		+		+
x−۱	−		−	۰	+		+
x−۴	−		−		−	۰	+
y	−	۰	+	۰	−	۰	+

همان‌طور که از جدول مشخص است y به ازای $x>-۱$، در بازهٔ $(۱,۴)$ منفی می‌شود. (زیر محور xها قرار می‌گیرد.) لذا بیشترین مقدار $b-a=۴-۱=۳$ می‌شود.

۳۸ **۳** از جدول مقابل متوجه می‌شویم که اولاً ریشه‌های معادله دو عدد قرینهٔ هم ۲ و ۲- است. پس نمودار باید محور xها را در ۲ نقطهٔ قرینهٔ هم قطع کند. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) غلط‌اند، زیرا محل‌های برخورد سهمی با محور xها قرینهٔ هم نیستند. ثانیاً چون علامت بین دو ریشه منفی و خارج دو ریشه مثبت است، پس نمودار سهمی در محدودهٔ بین ریشه‌ها باید زیر محور xها و در سایر نقاط بالای محور xها باشد، لذا گزینهٔ (۳) صحیح است.

x		-۲		۲	
y	+	۰	−	۰	+

۳۹ **۲** با توجه به جدول تعیین علامت متوجه می‌شویم که:

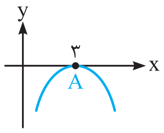
۱) معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ ریشهٔ مضاعف صفر دارد. پس: $a(۰)^۲+b(۰)+c=۰ \Rightarrow ۰+۰+c=۰ \Rightarrow c=۰ \quad (*)$

۲) دلتای معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ برابر صفر است. پس: $b^۲-۴ac=۰ \xRightarrow{(*)} b^۲-۴a(۰)=۰ \Rightarrow b^۲=۰ \Rightarrow b=۰$

۳) چون علامت داخل جدول منفی است، پس ضریب $x^۲$، منفی بوده یعنی $a<۰$. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۴۰ **۴** نمودار سهمی $y=ax^۲+bx+c$ با توجه به جدول داده‌شده به صورت مقابل است:

x		۳	
y	−	۰	−



همان‌طور که از نمودار مشخص است $x=۳$ طول رأس سهمی بوده (گزینهٔ (۱) صحیح است) و نمودار بر محور xها مماس بوده و همواره زیر آن قرار دارد (گزینهٔ (۲) صحیح است) از طرفی نقطهٔ $A(۳,۰)$ رأس سهمی بوده که چون شاخه‌های نمودار رو به پایین است، عرض نقطهٔ A یعنی صفر، بیشترین مقدار سهمی است. (گزینهٔ (۳) صحیح است) اما با توجه به شکل، سهمی محور yها را در بالای محور xها اصلاً قطع نمی‌کند! پس گزینهٔ (۴) غلط است.

۴۱ **۲**

$$x^۲+۴>۴x \Rightarrow \underbrace{x^۲-۴x+۴}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}}>۰ \Rightarrow (x-۲)^۲>۰$$

نامعادلهٔ فوق به ازای همهٔ مقادیر x به جز $x=۲$ برقرار است، بنابراین **گزینهٔ (۲)** صحیح است.

۴۲ **۱** عبارت داده‌شده را تعیین علامت می‌کنیم. برای این منظور ابتدا ریشه‌ها را می‌یابیم:

$$x^۲-۷x+۱۰=۰ \Rightarrow (x-۵)(x-۲)=۰ \Rightarrow x=۵\,,x=۲$$

x		۲		۵	
$y=x^۲-۷x+۱۰$	+	۰	−	۰	+

با توجه به جدول تعیین علامت، y در بازهٔ $[۳,۵)$ منفی و در بازهٔ $(۵,+\infty)$ مثبت است. پس با افزایش x از ۳ تا $+\infty$، عبارت ابتدا منفی است و سپس مثبت می‌شود.

۴۳ **۴**

$$f(x)>\frac{۷}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲+۲x+۶>\frac{۷}{۲} \xRightarrow{\times ۲} -x^۲+۴x+۱۲>۷ \xRightarrow[\text{یه ور}]{\text{همه}} ۰>۷+x^۲-۴x-۱۲$$

$$\Rightarrow ۰>x^۲-۴x-۵ \Rightarrow x^۲-۴x-۵<۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۱)<۰$$

ریشه‌های عبارت $x^۲-۴x-۵$ با توجه به تجزیهٔ فوق ۵ و ۱− هستند و ضریب $x^۲$ مثبت است، پس جدول آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$		−۱		۵		$+\infty$
$x^۲-۴x-۵$		+	۰	−	۰	+	

$$\xRightarrow[\text{می‌خوایم}]{\text{منفی‌ها رو}} x\in(-۱,۵) \Rightarrow a=-۱,b=۵ \Rightarrow b-a=۵-(-۱)=۶$$

دقت: بازهٔ $(-۱,۵)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که در آن نامعادلهٔ $f(x)>\frac{۷}{۲}$ برقرار است. به عبارت دیگر نامعادلهٔ مذکور در هر بازه‌ای که زیرمجموعهٔ بازهٔ $(-۱,۵)$ باشد نیز برقرار است مانند $(\underset{a}{۰},\underset{b}{۴})$ یا $(\underset{a}{۱},\underset{b}{۳})$ یا ... بنابراین a و b مقادیر مختلفی می‌توانند داشته باشند. بیشترین مقدار $b-a$ یعنی a و b از هم بیشترین فاصلهٔ ممکن را داشته باشند، پس باید بزرگ‌ترین بازه را انتخاب کنیم که همان $(-۱,۵)$ است.

۴۴ **۲**

$$n^۲-۱۰n+۱۶<۰\,;\, n^۲-۱۰n+۱۶=۰ \Rightarrow (n-۸)(n-۲)=۰ \Rightarrow n=۲\,,n=۸$$

n		۲		۸	
$n^۲-۱۰n+۱۶$	+	۰	− جواب	۰	+

$$\Rightarrow ۲<n<۸ \Rightarrow n=۳,۴,۵,۶,۷$$

با توجه به جدول بالا در دنبالهٔ فوق، جملات $a_۳$، $a_۴$، $a_۵$، $a_۶$ و $a_۷$ که **پنج** جمله می‌باشند، منفی هستند.

۴۵ **۴** **راه اول:**

$$P=\frac{x^۲-۲x}{\sqrt{x}+۱}>۰\,;\begin{cases} x^۲-۲x=۰ \Rightarrow x(x-۲)=۰ \Rightarrow x=۰\,,x=۲ \\ \sqrt{x}+۱>۰ \Rightarrow \text{همواره برقرار است.} \end{cases}$$

x		۰		۲		
$x^۲-۲x$	+	۰	−	۰	+	
$\sqrt{x}+۱$			+		+	← همواره مثبت
$P=\frac{x^۲-۲x}{\sqrt{x}+۱}$		۰	−	۰	+ جواب	$\Rightarrow x>۲$

دام آموزشی: بچه‌ها اگه حواسمون رو جمع نکنیم جواب رو به صورت $x<۰$ یا $x>۲$ قبول می‌کنیم و میره پی کارش، اما باید بدونیم که در $\sqrt{x}+۱$ عبارت زیر رادیکال یعنی x باید به صورت $x\ge ۰$ در نظر گرفته بشه و با شرط $x<۰$ غلطه، پس جواب کلی $x>۲$ میشه. در واقع دامنهٔ عبارت برای منفی نبودن رادیکال، $x\ge ۰$ هست که در این صورت باید جدول رو از صفر شروع کنیم؛ یعنی:

x	۰		۲	
$x^۲-۲x$	۰	$-$	۰	$+$
$\sqrt{x}+۱$		$+$		$+$
P	۰	$-$	۰	$+$
				جواب

راه دوم: با به‌کارگیری فن علی کنکوری تست را «کله‌پا» می‌کنیم! به ازای $x=۲$ به نامساوی $۰>۰$ و به ازای $x=۱$ به نامساوی $-\frac{۱}{۲}>۰$ می‌رسیم که هر دو نادرست‌اند، لذا **گزینه‌های (۱) و (۳)** رد می‌شوند. به ازای $x=-۱$ نامعادله به صورت $\frac{(-۱)^۲-(-۲)}{\sqrt{-۱}+۱}>۰$ در می‌آید که در آن $\sqrt{-۱}$ بی‌معنی است، پس فقط $x>۲$ جواب است. دقت کنید در این روش انتخاب اعداد بسیار مهم است. (بهتر است اعدادی انتخاب شوند که چند بازه را حذف کنند و یا محاسبه، راحت‌تر با آن‌ها انجام شود.)

۴۶ | **۱** می‌دانیم که هر رادیکال با فرجهٔ زوج بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، بنابراین:

$$(۳x^۲+۷x-۶)\sqrt{x}\le ۰$$

$$\sqrt{x}\ge ۰\Rightarrow x\ge ۰ \quad (I)$$

حال برای آن‌که $(۳x^۲+۷x-۶)\sqrt{x}\le ۰$ باشد، باید $۳x^۲+۷x-۶\le ۰$ باشد، که در این صورت داریم:

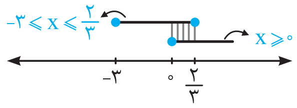
$$۳x^۲+۷x-۶\le ۰\,;\ ۳x^۲+۷x-۶=۰\Rightarrow \Delta=۴۹-۴(۳)(-۶)=۴۹+۷۲=۱۲۱$$

$$\Rightarrow x=\frac{-۷\pm\sqrt{۱۲۱}}{۲(۳)}\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}\\ x=\frac{-۱۸}{۶}=-۳\end{cases}$$

x		-۳		$\frac{۲}{۳}$	
$۳x^۲+۷x-۶$	$+$	۰	$-$	۰	$+$
			جواب		

$$\Rightarrow -۳\le x\le \frac{۲}{۳} \quad (II)$$

$$(I)\cap(II)\Rightarrow (x\ge ۰)\cap(-۳\le x\le \frac{۲}{۳}):$$



$$\Rightarrow ۰\le x\le \frac{۲}{۳}$$

۴۷ | **۲**

$$x^۲-۳x+۲\le ۰\,;\ x^۲-۳x+۲=۰\Rightarrow (x-۲)(x-۱)=۰\Rightarrow x=۲\,,\ x=۱$$

x		۰		۱		۲	
$\lvert x\rvert$	$+$	۰	$+$		$+$		$+$
$x^۲-۳x+۲$	$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$
عبارت	$+$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$
					جواب		

بنابراین جواب به صورت $۱\le x\le ۲$ است. که باید صفر را نیز شامل شود (به علت این‌که صفر ریشهٔ $\lvert x\rvert$ است)، یعنی $x\in[۱,۲]\cup\{۰\}$.

۴۸ | **۴**

یادآوری اتحاد روبه‌رو را به خاطر بیاورید: $(a-b)^۳=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳$ (اتحاد مکعب تفاضل دو جمله)

$$\frac{\overbrace{x^۳-۳x^۲+۳x-۱}^{\text{اتحاد مکعب تفاضل دو جمله}}}{x-۱}\ge ۰\Rightarrow \frac{(x-۱)^۳}{x-۱}\ge ۰ \xrightarrow[\text{تعریف نشده، دامنهٔ } x\ne ۱ \text{ است.}\ \ x=۱]{\text{با توجه به این‌که این کسر برای}} (x-۱)^۲\ge ۰$$

نامساوی $(x-۱)^۲\ge ۰$ همواره برقرار است، بنابراین نامساوی فوق به ازای $x\ne ۱$ برقرار است.

سؤال *دانش‌پژوه (زهرا معیری):* **به ازای $x=۱$ داریم $(x-۱)^۲=۰$، پس $(x-۱)^۲\ge ۰$ برقرار است. چرا میگین $x\ne ۱$؟**

پاسخ *دقت کن که ما در اصل با $\frac{(x-۱)^۳}{x-۱}\ge ۰$ مواجه بودیم که می‌دونیم به ازای $x=۱$ (ریشهٔ مخرج) تعریف‌نشده است.*

۴۹ | **۱**

$$P=(x^۲+x+۲)(x^۲-۴x+۳)=۰\Rightarrow \begin{cases} x^۲+x+۲=۰\Rightarrow \Delta=۱-۴(۱)(۲)=-۷ \\ x^۲-۴x+۳=۰\Rightarrow (x-۱)(x-۳)=۰\Rightarrow x=۱,x=۳\end{cases}$$

چون $\Delta<۰$ و ضریب $x^۲$ مثبت است، علامت عبارت همواره مثبت است.

x		۱		۳	
$x^۲+x+۲$	$+$		$+$		$+$ ⟵ همواره مثبت
$x^۲-۴x+۳$	$+$	۰	$-$	۰	$+$
P	$+$		$-$		$+$
	جواب				جواب
	$x<۱$		یا		$x>۳$

۵۰ | ۳

روش Δ'

در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، هرگاه b عددی زوج باشد، به جای روش Δ می‌توان از روش Δ' استفاده نمود. استفاده از این روش سرعت محاسبه را بالا می‌برد. در این روش $b'=\frac{b}{2}$ بوده و داریم:

$$\boxed{\Delta'=b'^2-ac \Rightarrow x_1=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a} \quad , \quad x_2=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}}$$

مثال معادلهٔ $-x^2+8x+48=0$ را به روش Δ' حل کنید.

پاسخ

$$b=8 \Rightarrow b'=\frac{8}{2}=4 \Rightarrow \Delta'=b'^2-ac=16-(-1)(48)=16+48=64$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{-4+\sqrt{64}}{-1}=-4 \ , \ x_2=\frac{-4-\sqrt{64}}{-1}=12$$

$$\frac{n}{n^2+1}<0/1 \Rightarrow \frac{n}{n^2+1}<\frac{1}{10} \xrightarrow[\text{با معکوس کردن آن‌ها جهت نامعادله عوض می‌شود.}]{\text{چون طرفین نامعادله هر دو مثبت‌اند}} \frac{n^2+1}{n}>10$$

$$\xRightarrow{\times n>0} n^2+1>10n \Rightarrow n^2-10n+1>0 \ ; \ n^2-10n+1=0 \xRightarrow[\text{روش } \Delta']{\text{زوج } b} \Delta'=\left(\frac{10}{2}\right)^2-1=24 \Rightarrow n=5\pm\sqrt{24}$$

n		$5-\sqrt{24}$		$5+\sqrt{24}$	
$n^2-10n+1$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

با توجه به این‌که n عددی طبیعی است و $5 > \sqrt{24} > 4$، لذا فقط می‌توان $n>5+\sqrt{24}$ را قبول کرد. در نتیجه:

$$n>5+\sqrt{24} \xRightarrow[n\in\mathbb{N}]{\sqrt{24}=4/...} n\geq 10 \Rightarrow$$ نخستین جملهٔ مطلوب، جملهٔ دهم است.

۵۱ | ۱ **راه اول:** برای حل، عبارت سمت راست را به طرف دیگر می‌بریم و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x-1}{x+1}>2x \Rightarrow \frac{x-1}{x+1}-2x>0 \Rightarrow \frac{x-1-2x(x+1)}{x+1}>0 \Rightarrow \frac{x-1-2x^2-2x}{x+1}>0$$

$$\Rightarrow \overbrace{\frac{-2x^2-x-1}{x+1}}^{P}>0 \ ;$$

$-2x^2-x-1=0 \Rightarrow \Delta=(-1)^2-4(-2)(-1)=-7$

با توجه به این‌که دلتای عبارت فوق منفی است و ضریب x^2 یعنی عدد (-2) نیز منفی است، این عبارت همواره منفی است. بنابراین برای آن‌که کل کسر مثبت باشد باید مخرج کسر منفی باشد، یعنی:

$x+1<0 \Rightarrow x<-1$

x		-1	
$-2x^2-x-1$	$-$		$-$
$x+1$	$-$	۰	$+$
P	$+$ (جواب)	$\times$	$-$

$\Rightarrow x<-1$

سؤال *دانش‌پژوهان (جلال شریف‌زاده، رضا کاغذی، مسعود سه‌دهی):* **آقا، بریم از راه علی کنکوری حل کنیم؟**

پاسخ *کنکور بیشتر فن و الان تو کنکور، بیشتر سؤال‌ها را جوری می‌دن که کم‌تر میشه این‌جوری جوابو پیدا کرد. ولی به خاطر این‌که شما خوب متوجهٔ این فن (فن علی کنکوری) شرید به نظر من باید ۳ امتیاز به خاطر اجرای فن و ۳ امتیاز هم به خاطر زیبایی اجرای فن بهوتون بدن.*

راه دوم (راه علی کنکوری): به ازای $x=-2$ در نامعادلهٔ داده‌شده داریم:

$x=-2 \Rightarrow \frac{-2-1}{-2+1}>2(-2) \Rightarrow 3>(-4)$ درست $\Rightarrow$ مجموعه جواب شامل $x=-2$ است

فقط **گزینهٔ (۱)** است که در مجموعه جواب داده‌شده -2 را دارد.

۵۲ | ۴ برای حل ابتدا تمام جملات را به سمت چپ نامعادله می‌بریم:

$$\underbrace{(x+1)(x^2+2x-2)-(x+1)}_{\text{از } (x+1) \text{ فاکتور می‌گیریم.}}>0 \Rightarrow (x+1)\left[(x^2+2x-2)-1\right]>0 \Rightarrow \underbrace{(x+1)(x^2+2x-3)}_{P}>0$$

$$\begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x^2+2x-3=0 \Rightarrow (x+3)(x-1)=0 \Rightarrow x=-3, x=1 \end{cases}$$

x		-3		-1		1	
$x+1$	$-$		$-$		$+$		$+$
x^2+2x-3	$+$		$-$		$-$		$+$
P	$-$		$+$		$-$		$+$
			جواب				جواب

$-3 < x < -1$ یا $x > 1$

۵۳ **۳** مخرج‌های کسرها همواره عباراتی مثبت هستند، زیرا در آن‌ها $\Delta < 0$ و ضریب x^2 آن‌ها مثبت است. بنابراین اجازهٔ طرفین ـ وسطین کردن را داریم و جهت نامعادله هم عوض نمی‌شود:

x		-1		0	
x^2+x	$+$		$-$		$+$

$$\frac{1}{2x^2+x+1} \geq \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1 \geq 2x^2+x+1 \Rightarrow x^2+x \leq 0 \Longrightarrow \text{مجموعه جواب} = [\underbrace{-1}_{a}, \underbrace{0}_{b}] \Rightarrow ab=0$$

۵۴ **۳**

$$\xrightarrow[\text{چپ}]{\text{همه برن}} \frac{3}{x-4}+\frac{5}{x+4}-\frac{8}{\underbrace{x^2-16}_{(x-4)(x+4)}} > 0 \Rightarrow \frac{3(x+4)+5(x-4)-8}{(x-4)(x+4)} > 0 \Rightarrow \frac{3x+12+5x-20-8}{(x-4)(x+4)} > 0 \Rightarrow \frac{8x-16}{x^2-16} > 0$$

حال عبارت $A = \frac{8x-16}{x^2-16}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$8x-16=0 \Rightarrow x=2$$
$$x^2-16=0 \Rightarrow x=\pm 4$$

x	$-\infty$		-4		2		4		$+\infty$
$8x-16$		$-$		$-$		$+$		$+$	
x^2-16		$+$		$-$		$-$		$+$	
A		$-$		$+$		$-$		$+$	

$$\xrightarrow{A>0} \text{مجموعه جواب} = (-4,+\infty)-[2,4]$$

۵۵ **۲** ابتدا با تجزیهٔ صورت و مخرج کسر متوجه می‌شویم آن‌ها عامل $(x-1)$ دارند، پس $(x-1)$ را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم. فقط حواستان باشد ریشهٔ عبارت ساده‌شده یعنی $x=1$ را باید از مجموعه جواب به دست آمده، حذف کنید.

$$\frac{3x^2-3x}{x^3-1} > 1 \Rightarrow \frac{3x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)} > 1 \xRightarrow{x\neq 1} \frac{3x}{x^2+x+1} > 1 \quad (*)$$

عبارت x^2+x+1 همواره مثبت است (زیرا $\Delta=-3<0$ و $a=1>0$). لذا اجازهٔ طرفین ـ وسطین کردن را داریم، بدون آن‌که جهت نامساوی عوض شود:

$$\frac{3x}{x^2+x+1} > 1 \Rightarrow 3x > x^2+x+1 \Rightarrow x^2-2x+1<0 \Rightarrow (x-1)^2<0 \quad (**)$$

سمت چپ نامعادله، عبارتی با توان زوج وجود دارد که هیچ‌گاه منفی نمی‌شود. پس نامعادلهٔ $(**)$ جواب ندارد ($\varnothing =$ مجموعه جواب).

۵۶ **۴**

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8} > \frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3} \Rightarrow \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x+4)} > \frac{(x-2)\cancel{(x+1)}}{(x-3)\cancel{(x+1)}} \xrightarrow{x\neq 2,-1} \frac{x-3}{x+4} > \frac{x-2}{x-3}$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{x+4}-\frac{x-2}{x-3} > 0 \Rightarrow \frac{(x-3)^2-(x+4)(x-2)}{(x+4)(x-3)} > 0 \Rightarrow \frac{x^2-6x+9-(x^2+2x-8)}{x^2+x-12} > 0 \Rightarrow \frac{-8x+17}{x^2+x-12} > 0$$

x		-4		$\frac{17}{8}$		3	
$-8x+17$	$+$		$+$		$-$		$-$
x^2+x-12	$+$		$-$		$-$		$+$
$\frac{-8x+17}{x^2+x-12}$	$+$		$-$		$+$		$-$

$$\xrightarrow{\frac{-8x+17}{x^2+x-12}>0} \text{مجموعه جواب} = (-\infty,-4)\cup(\frac{17}{8},3)$$

مجموعه جواب فوق شامل ۲ و ۱- نمی‌باشد، پس قابل قبول است. حواستان باشد اگر ۲ و ۱- در مجموعه جواب به دست آمده وجود داشت، باید آن‌ها را از مجموعه جواب حذف می‌کردیم.

۵۷ **۱** منظور از تست، به دست آوردن اعداد طبیعی x است که به ازای آن‌ها داشته باشیم $\frac{x^2+x+2}{x^2-3x+2} < 1$. بنابراین نامعادلهٔ به دست آمده را حل می‌کنیم:

$$\frac{x^2+x+2}{x^2-3x+2}-1<0 \Rightarrow \frac{x^2+x+2-(x^2-3x+2)}{x^2-3x+2} < 0 \Rightarrow \frac{4x}{(x-2)(x-1)} < 0$$

$\Rightarrow$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$4x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-3x+2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\frac{4x}{x^2-3x+2}$		$-$	0	$+$	$\times$	$-$	$\times$	$+$	

$$\xRightarrow{\frac{4x}{x^2-3x+2}<0} x\in(-\infty,0)\cup(1,2)$$

در مجموعه جواب به دست آمده اعداد طبیعی وجود ندارند، به عبارت دیگر حاصل عبارت $\frac{x^2+x+2}{x^2-3x+2}$ به ازای هیچ عددی که طبیعی باشد، کم‌تر از یک نخواهد شد.

۵۸ **۳** ابتدا نامعادلهٔ داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$2(x^2-1)-\frac{1}{1-x^2}\le x^2+x-\frac{1}{1-x^2}\Rightarrow 2x^2-2-\cancel{\frac{1}{1-x^2}}-x^2-x+\cancel{\frac{1}{1-x^2}}\le 0$$

$$\Rightarrow x^2-x-2\le 0\Rightarrow (x-2)(x+1)\le 0\Rightarrow$$

x		-1		2	
x^2-x-2	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow x\in[-1,2]$$

امّا باید دقت کنیم که عبارت $\frac{1}{1-x^2}$ که در حین حل نامعادله ساده شد، به ازای ریشه‌های مخرجش یعنی $x=\pm1$ تعریف‌نشده است. لذا باید $x=\pm1$ را از مجموعه جواب به دست آمده حذف کنیم. بنابراین مجموعه جواب نامعادله برابر می‌شود با $(-1,1)\cup(1,2]$ یا $[-1,2]-\{\pm1\}$. حال با امتحان‌کردن اعداد صحیح k، اعداد به صورت $\frac{k}{2}$ در مجموعه جواب نامعادله را به دست می‌آوریم:

$k=-2\Rightarrow\frac{k}{2}=-1$ ✗ ، $k=-1\Rightarrow\frac{k}{2}=\frac{-1}{2}$ ✓ ، $k=0\Rightarrow\frac{k}{2}=0$ ✓ ، $k=1\Rightarrow\frac{k}{2}=\frac{1}{2}$ ✓

$k=2\Rightarrow\frac{k}{2}=1$ ✗ ، $k=3\Rightarrow\frac{k}{2}=\frac{3}{2}$ ✓ ، $k=4\Rightarrow\frac{k}{2}=2$ ✓ ، $k=5\Rightarrow\frac{k}{2}=\frac{5}{2}$ ✗

پس ۵ عدد به صورت $\frac{k}{2}$ که $k\in\mathbb{Z}$ می‌باشد، در مجموعه جواب نامعادله قرار دارد.

۵۹ **۲** مساحت مستطیل برابر $S_{\text{مستطیل}}=(x-1)(3x-2)$ و مساحت مربع برابر $S_{\text{مربع}}=x^2$ می‌باشند. چون مساحت مستطیل باید از مساحت مربع بیشتر باشد، باید جواب نامعادلهٔ زیر را بیابیم:

$$(x-1)(3x-2)>x^2\Rightarrow 3x^2-2x-3x+2>x^2\Rightarrow 2x^2-5x+2>0$$

$$2x^2-5x+2=0\xRightarrow{\text{حل معادله}} x=2\,,\,x=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

x		$\frac{1}{2}$		2	
$2x^2-5x+2$	$+$ جواب	0	$-$	0	$+$ جواب

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله به صورت $(-\infty,\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$ می‌باشد. اما دقت کنید، اضلاع مربع و مستطیل باید اعدادی مثبت باشند، لذا داریم:

$$\begin{cases}\text{ضلع مربع}>0\Rightarrow x>0\\ \text{اضلاع مستطیل}>0\Rightarrow x-1>0\,,\,3x-2>0\Rightarrow x>1\,,\,x>\frac{2}{3}\end{cases}\xRightarrow{\text{اشتراک}} x>1\Rightarrow x\in(1,+\infty)$$

با اشتراک‌گیری بین مجموعه جواب حاصل از نامعادله و مجموعه جواب حاصل از معنی‌دار بودن طول اضلاع، داریم:

$$\left[(-\infty,\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)\right]\cap(1,+\infty)=(2,+\infty)$$

تنها **گزینهٔ (۲)** زیرمجموعه‌ای از مجموعه جواب نهایی است. $\left((\frac{5}{2},5)\subseteq(2,+\infty)\right)$ پس این گزینه جواب است.

۶۰ **۴** منظور از تست، حل نامعادلهٔ $S(t)\ge 8$ است، بنابراین با توجه به ضابطهٔ $S(t)$ داریم:

$$S(t)=\frac{200t}{t^2+100}\xRightarrow{S(t)\ge 8}\frac{200t}{t^2+100}\ge 8\xRightarrow[\text{حق طرفین ـ وسطین داریم.}]{t^2+100>0} 200t\ge 8(t^2+100)$$

$$\xRightarrow{\div 8} 25t\ge t^2+100\Rightarrow t^2-25t+100\le 0\Rightarrow (t-5)(t-20)\le 0\Rightarrow$$

t	0		5		20		$+\infty$
$(t-5)(t-20)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\Rightarrow 5\le t\le 20$$

بنابراین در بازهٔ زمانی ۵ تا ۲۰ هفته بعد از معرفی کالای مربوطه به بازار، فروش هفتگی، ۸ هزار واحد یا بیشتر در هر هفته است.

۶۱ **۳** می‌دانیم جدول تعیین علامت عبارت درجه دوم $P = 2x^2 - mx - 3x - 3$ به صورت زیر است:

x		x_1		x_2	
P	+		−		+

پس از آن‌جا که $x_1 < -1 < x_2$، لذا به ازای $x = -1$ عبارت منفی خواهد بود. داریم:

$$2(-1)^2 - m(-1) - 3(-1) - 3 < 0 \Rightarrow 2 + m + 3 - 3 < 0 \Rightarrow m < -2$$

یعنی اگر $m < -2$، آن‌گاه حتماً $x_1 < -1 < x_2$ خواهد بود.

سؤال دانش‌پژوه *(رضا ژیان)*: **آقا از کجا معلومه به ازای هر $m < -2$ معادله ریشه داشته باشه؟**

پاسخ *اگه Δ رو محاسبه کنی، $\Delta = (m+3)^2 + 24$ میشه، که همواره مثبته. پس حتماً معادله دو تا ریشه داره و وجود ریشه‌ها به m بستگی نداره.*

۶۲ **۳** با توجه به جدول تعیین علامت می‌توان فهمید که $x = 1, 2$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - bx + c = 0$ هستند. پس داریم:

$$\begin{cases} 1^2 - b(1) + c = 0 \\ 2^2 - b(2) + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - b + c = 0 \\ 4 - 2b + c = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{حل دستگاه}} b = 3, c = 2 \Rightarrow c + 2b = 2 + 2(3) = 8$$

۶۳ **۴** در تعیین علامت عبارت $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ وقتی تابع دو ریشه داشته باشد، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

x		x_1		x_2	
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a		مخالف علامت a		موافق علامت a

در این تست جواب نامعادلهٔ $x^2 + bx + c < 0$ به صورت $-1 < x < 2$ است، پس $x_1 = -1$ و $x_2 = 2$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + bx + c = 0$ هستند. لذا $x^2 + bx + c$ را می‌توان به صورت $(x+1)(x-2)$ یا به عبارتی $x^2 - x - 2$ نوشت. بنابراین $b = -1$ و $c = -2$ می‌باشد. با بازنویسی نامعادلهٔ صورت تست داریم:

$$x^2 + 1 + b(x-1) + c > 2x \Rightarrow x^2 + 1 + (-1)(x-1) + (-2) > 2x$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x > 0 \xrightarrow[\text{می‌یابیم}]{\text{ریشه‌ها را}} x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3 \Rightarrow$$

x		۰		۳	
$x^2 - 3x$	+		−		+
	جواب				جواب

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله به صورت $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ می‌باشد.

۶۴ **۳**

نکتهٔ ۱ اگر بازهٔ (n, m)، مجموعه جواب نامعادلهٔ $ax^2 + bx + c < 0$ یا $ax^2 + bx + c > 0$ باشد، آن‌گاه n و m ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ هستند.

نکتهٔ ۲ اگر n و m ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه جمع و ضرب ریشه‌ها از فرمول‌های زیر به دست می‌آیند:

$$n + m = -\frac{b}{a}, \quad n \times m = \frac{c}{a}$$

مجموعه جواب نامعادلهٔ $x^2 - 8x + c < 0$ به صورت $|x + n| < 2$ داده شده، ابتدا آن را ساده می‌کنیم:

$$|x + n| < 2 \Rightarrow -2 < x + n < 2 \Rightarrow -2 - n < x < 2 - n$$

با توجه به نکتهٔ بیان‌شده، $2 - n$ و $-2 - n$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 8x + c = 0$ هستند. پس جمع این ریشه‌ها برابر می‌شود با:

$$(2 - n) + (-2 - n) = \frac{-b}{a} = \frac{-(-8)}{1} \Rightarrow -2n = 8 \Rightarrow n = -4 \quad (*)$$

از طرفی ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است. داریم:

$$(2 - n)(-2 - n) = \frac{c}{a} = \frac{c}{1} = c \xRightarrow{(*)} (2 - (-4))(-2 - (-4)) = c \Rightarrow 6(2) = c \Rightarrow c = 12$$

و لذا $n + c = -4 + 12 = 8$.

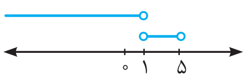
۶۵ **۳** برای این‌که عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$، همواره منفی باشد، باید دو شرط زیر را داشته باشد:

$$\begin{cases} 1)\ \text{ضریب}\ x^2 < 0 \\ 2)\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 1 < 0 \Rightarrow a < 1 \quad (I) \\ (a-1)^2 - 4(a-1)(1) < 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 - 4a + 4 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 - 6a + 5 < 0 \xRightarrow{a_1 = 1, a_2 = 5}$$

a		۱		۵	
$a^2 - 6a + 5$	+		−		+
			جواب		

$$\Rightarrow 1 < a < 5 \quad (II)$$

$(I) \cap (II) =$  $\Rightarrow (I) \cap (II) = \varnothing$

۶۶ **۲** برای آن‌که به ازای همهٔ مقادیر x، عبارت $(m-۱)x^۲+۶x+۲m+۱>۰$ باشد، باید $\Delta<۰$ (یا به طور مشابه $\Delta'<۰$) و ضریب $x^۲$، مثبت باشد:

$$\begin{cases} m-۱>۰ \Rightarrow m>۱ \quad (I) \\ \Delta'<۰ \xrightarrow[b'=\frac{b}{۲}]{\Delta'=b'^۲-ac} ۳^۲-(m-۱)(۲m+۱)<۰ \Rightarrow ۹-(۲m^۲-m-۱)<۰ \\ \Rightarrow -۲m^۲+m+۱۰<۰ \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}:\, m_۱=-۲,\, m_۲=\frac{۵}{۲}} \begin{array}{c|ccccc} m & & -۲ & & \frac{۵}{۲} & \\ \hline -۲m^۲+m+۱۰ & - & | & + & | & - \\ & \text{جواب} & & & & \text{جواب} \end{array} \Rightarrow m<-۲ \ \text{یا}\ m>\frac{۵}{۲} \quad (II) \end{cases}$$

$$(I)\cap(II): \quad \Rightarrow m>۲/۵$$

تذکر چون ضریب $x^۲$، برحسب m است، باید وضعیت عبارت به ازای $m=۱$ نیز بررسی شود. به ازای $m=۱$ عبارت تبدیل به عبارت خطی $۶x+۳$ می‌شود که همواره مثبت **نیست**.

۶۷ **۱** اگر نمودار همواره زیر محور xها باشد، باید همواره $y<۰$ باشد. می‌دانیم اگر عبارت $y=ax^۲+bx+c$ همواره منفی باشد، آن‌گاه $a<۰$ و $\Delta<۰$ است. بنابراین:

$$(m-۱)x^۲+\sqrt{۳}x+m<۰ \Rightarrow \begin{cases} m-۱<۰ \\ \Delta<۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<۱ \\ ۳-۴m(m-۱)<۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<۱ & (۱) \\ ۳-۴m^۲+۴m<۰ \end{cases}$$

پس کافی است ببینیم نامعادلهٔ $-۴m^۲+۴m+۳<۰$ به ازای کدام مقادیر m برقرار است و جواب این نامعادله را با $m<۱$ اشتراک بگیریم.

$$-۴m^۲+۴m+۳<۰ \Rightarrow \text{ریشه‌ها}: m=\frac{۳}{۲}, m=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} m & & -\frac{۱}{۲} & & \frac{۳}{۲} & \\ \hline -۴m^۲+۴m+۳ & - & | & + & | & - \\ & \text{جواب} & & & & \text{جواب} \end{array}$$

$$\text{مجموعه جواب}: (-\infty,-\frac{۱}{۲})\cup(\frac{۳}{۲},+\infty) \quad (۲)$$

در نتیجه جواب نهایی به صورت زیر می‌شود:

$$(۲)\cap(۱)=\left[(-\infty,-\frac{۱}{۲})\cup(\frac{۳}{۲},+\infty)\right]\cap(-\infty,۱)=(-\infty,-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow m<-\frac{۱}{۲}$$

۶۸ **۴** اگر نمودار همواره بالای محور xها باشد، باید همواره $y>۰$ باشد. می‌دانیم اگر عبارت $ax^۲+bx+c$ همواره مثبت باشد، آن‌گاه باید $\Delta<۰$ و $a>۰$ باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} a=m+۲>۰ \Rightarrow m>-۲ \\ \Delta'=m^۲-(m+۲)<۰ \Rightarrow m^۲-m-۲<۰ \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}:\, m=-۱,۲} \begin{array}{c|ccccc} m & & -۱ & & ۲ & \\ \hline m^۲-m-۲ & + & | & - & | & + \\ & & & \text{جواب} & & \end{array} \end{cases}$$

پس جواب نهایی برابر $\{m \mid m>-۲\}\cap\{m \mid -۱<m<۲\}=\{m \mid -۱<m<۲\}$ می‌شود.

۶۹ **۳** برای این‌که نمودار سهمی $y=ax^۲+bx+c$ بالای محور xها و مماس بر آن باشد، باید $a>۰$ و $\Delta=۰$ باشد.

$$y=(m-۲)x^۲-۳x+m+۲ \Rightarrow \begin{cases} a>۰ \Rightarrow m-۲>۰ \\ \Delta=۰ \Rightarrow ۹-۴(m-۲)(m+۲)=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>۲ \\ ۹-۴(m^۲-۴)=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>۲ \\ -۴m^۲+۲۵=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m>۲ \\ m^۲=\frac{۲۵}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>۲ \\ m=\frac{۵}{۲}, m=-\frac{۵}{۲} \end{cases} \Rightarrow m=\frac{۵}{۲}$$

۷۰ **۱**

یادآوری عبارت $ax^۲+bx+c$ همواره مثبت و یا مساوی صفر است $(ax^۲+bx+c\geq ۰)$، هرگاه داشته باشیم: $a>۰$ و $\Delta\leq ۰$

چون عبارت $-x^۲-x-۱$ همواره منفی است (زیرا $\Delta=-۳<۰$ و $a=-۱<۰$)، حق طرفین ـ وسطین را داریم و جهت نامساوی را نیز تغییر می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$\frac{mx^۲-\frac{m}{۲}x-۳}{-x^۲-x-۱}\leq ۳ \Rightarrow mx^۲-\frac{m}{۲}x-۳\geq ۳(-x^۲-x-۱) \Rightarrow mx^۲-\frac{m}{۲}x-۳\geq -۳x^۲-۳x-۳$$

$$\xrightarrow{\text{همه برن چپ}} mx^۲+۳x^۲-\frac{m}{۲}x+۳x\geq ۰ \Rightarrow (m+۳)x^۲+(۳-\frac{m}{۲})x\geq ۰$$

حال برای آن‌که عبارت حاصل همواره مثبت یا مساوی صفر باشد، با توجه به یادآوری بیان‌شده باید دو شرط زیر هم‌زمان برقرار باشند:

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac=(3-\frac{m}{2})^2-\underbrace{4(m+3)(0)}_{0}\le 0\Rightarrow \overbrace{(3-\frac{m}{2})^2}^{\text{همواره مثبت یا صفر}}\le 0 \xrightarrow[\text{ممکن است.}]{\text{فقط حالت تساوی}} (3-\frac{m}{2})^2=0\Rightarrow 3-\frac{m}{2}=0\Rightarrow \frac{m}{2}=3\Rightarrow m=6\\ a>0\Rightarrow m+3>0\Rightarrow m>-3\end{cases}$$

که اشتراک دو جواب به دست آمده، $m=6$ می‌باشد.

۷۱ **۲** اگر نمودارِ f پایین‌تر از خط $y=2$ باشد، یعنی باید داشته باشیم، $\frac{3x^2-2x}{x^2+4}<2$. داریم:

$$\frac{3x^2-2x}{x^2+4}-2<0\Rightarrow \frac{3x^2-2x-2(x^2+4)}{x^2+4}<0\Rightarrow \frac{x^2-2x-8}{(x^2+4)}<0$$

$$x^2-2x-8=0\Rightarrow (x-4)(x+2)=0\Rightarrow x=4\,,x=-2$$

$x^2+4=0 \xrightarrow{\Delta<0}$ معادله ریشه ندارد.

x		-2		4	
x^2-2x-8	$+$		$-$		$+$
x^2+4	$+$		$+$		$+$
$\frac{x^2-2x-8}{x^2+4}$	$+$		$-$ جواب		$+$

بنابراین بازهٔ $(-2,4)$ جواب است، لذا بیشترین مقدار $b-a$ برابر $4-(-2)=6$ می‌شود.

۷۲ **۱** معادلهٔ $2x^2+ax+a-\frac{3}{2}=0$ وقتی دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است، که $\Delta>0$ باشد، بنابراین:

$$\Delta=a^2-4(2)(a-\frac{3}{2})>0\Rightarrow a^2-8a+12>0$$

حال باید عبارت $a^2-8a+12$ را تعیین علامت کنیم:

$$a^2-8a+12=0\Rightarrow (a-2)(a-6)=0\Rightarrow a=2,a=6\Rightarrow$$

a		2		6	
$a^2-8a+12$	$+$ جواب		$-$		$+$ جواب

$a<2$ یا $a>6$ $\Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

۷۳ **۲** اگر منحنی درجه دوم f بخواهد محور xها را در ۲ نقطه قطع کند، به عبارت دیگر بخواهد ۲ ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد، باید $\Delta>0$ باشد. پس داریم:

$$\xrightarrow[c=m-3]{a=m,b=4}\Delta=4^2-4(m)(m-3)>0\Rightarrow 16-4(m^2-3m)>0\xrightarrow{\div 4}4-m^2+3m>0$$

$$\xrightarrow[\text{جهت عوض}]{\times(-1)}\underbrace{m^2-3m-4}_{(m-4)(m+1)}<0\xrightarrow[\text{ضریب } m^2 \text{ مثبته}]{\text{ریشه‌ها: } 4,-1}$$

m	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
P	$+$		$-$		$+$

$$\xrightarrow[\text{منفیه؟}]{\text{کجاها}}-1<m<4$$

از طرفی طبق فرض تست f، تابعی درجه دوم است پس باید $m\neq 0$ باشد، لذا جواب $-1<m<4$ و $m\neq 0$ خواهد بود.

۷۴ **۴** می‌دانیم شرط این‌که معادلهٔ درجه دوم دارای ریشهٔ حقیقی باشد، این است که $\Delta\ge 0$ یا معادلاً هنگامی که ضریب x زوج است، $\Delta'\ge 0$.

$$\Delta'=(\frac{4}{2})^2-(m+2)(m-1)\ge 0\Rightarrow 4-(m^2+m-2)\ge 0\Rightarrow -m^2-m+6\ge 0$$

$$\xrightarrow{\times(-1)}m^2+m-6\le 0\ ;\ m^2+m-6=0\xrightarrow{\text{حل معادله}}m=2\,,\,m=-3$$

m		-3		2	
m^2+m-6	$+$		$-$ جواب		$+$

$-3\le m\le 2$

تذکر دقت کنید، از آن‌جا که اگر ضریب x^2 صفر باشد، معادلهٔ داده‌شده در صورت مسأله، دیگر معادلهٔ درجه دوم نیست، لذا باید ضریب x^2 یعنی $m+2$ مخالف صفر باشد. بنابراین $m\neq -2$ و در نتیجه جواب نهایی به صورت $\{-3\le m\le 2;m\neq -2\}$ می‌شود.

۷۵ **۱** برای آن‌که معادلهٔ درجه دوم فاقد ریشهٔ حقیقی باشد، باید $\Delta<0$ باشد:

$$(m+1)^2-4(2)(\frac{1}{2}m+2)<0\Rightarrow m^2+2m+1-4m-16<0\Rightarrow m^2-2m-15<0\xrightarrow[m=-3,5]{\text{ریشه‌ها}}$$

m		-3		5	
$m^2-2m-15$	$+$		$-$ جواب		$+$

$$\Rightarrow -3<m<5$$

۷۶ **۳** برای به دست آوردن طول محل تقاطع منحنی $y=(x-1)(x^2-ax+a)$ با محور xها، باید معادلهٔ $y=0$ را حل کنیم.

$(x-1)(x^2-ax+a)=0\Rightarrow x=1$ یا $x^2-ax+a=0$

با توجه به این‌که $x=1$ قطعاً یک جواب معادله است، پس عبارت درجه دوم x^2-ax+a باید فاقد ریشه باشد تا $(x-1)(x^2-ax+a)$ تنها یک ریشه داشته باشد. داریم:

$$x^2-ax+a=0\xrightarrow[\text{معادله فاقد ریشه}]{\Delta<0}a^2-4a<0\xrightarrow{\text{ریشه‌ها: } a=0,a=4}$$

a		0		4	
a^2-4a	$+$		$-$ جواب		$+$

بنابراین $0<a<4$ باید باشد.

تذکر به این نکته دقت کنید که اگر $x=1$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ x^2-ax+a باشد، در آن صورت باز هم y تنها در یک نقطه محور xها را قطع می‌کند و باید a متناظر با این جواب را به دست آوریم. اما در این تست $x=1$ ریشهٔ معادلهٔ $x^2-ax+a=0$ نیست، زیرا به ازای $x=1$ داریم:

$x=1$ نمی‌تواند ریشهٔ این معادله باشد. $x=1 \Rightarrow 1^2-a+a=0 \Rightarrow 1=0$ غ‌ق‌ق $\Rightarrow$

سؤال *دانش‌پژوه (مسعود سه‌دهی):* **آقا ما از این جریان $x=1$ چیز زیادی متوجه نشدیم.**

پاسخ *باشه. به تست بعدی دقت کن.*

۷۷ **۳**

$$(6+3x)(x^2+bx+b)=0 \Rightarrow x=-2\,,\, x^2+bx+b=0$$

چون $x=-2$ ریشهٔ معادله است، پس معادلهٔ $x^2+bx+b=0$ یا نباید ریشه داشته باشد **یا این‌که $x=-2$ ریشهٔ مضاعف آن باشد.** اگر معادله ریشه نداشته باشد، داریم:

$$\Delta<0 \Rightarrow b^2-4b<0\;;\; b^2-4b=0 \Rightarrow b=0\,,\, b=4$$

b		0		4	
b^2-4b	$+$		$-$ (جواب)		$+$

$$\Rightarrow 0<b<4$$

اما اگر $x=-2$ ریشهٔ مضاعف معادله باشد، باید این ریشه در معادلهٔ $x^2+bx+b=0$ صدق کند. به ازای $x=-2$ داریم:

$(-2)^2+b(-2)+b=0 \Rightarrow 4-b=0 \Rightarrow b=4 \xrightarrow{b=4} x^2+4x+4=0 \Rightarrow (x+2)^2=0 \Rightarrow$ $x=-2$ ریشهٔ مضاعف است.

بنابراین مجموعه جواب برابر است با:

$$(0<b<4)\cup\{b=4\} \Rightarrow 0<b\le 4 \Rightarrow b\in(0,4]$$

سؤال *دانش‌پژوه (سعیده آزاد):* **میشه بگید در حالت دوم چه اتفاقی افتاد؟ چه‌طور $b=4$ هم جواب شد؟**

پاسخ *ببین، اگه $b=4$ باشه داریم:*

$$y=(6+3x)(x^2+4x+4) \Rightarrow y=3(x+2)(x+2)^2 \Rightarrow y=3(x+2)^3$$

حالا قبول داری معادلهٔ $y=3(x+2)^3$ فقط در نقطهٔ $x=-2$ محور xها رو قطع می‌کنه؟

۷۸ **۴** نقاط تقاطع دو منحنی از برابر قراردادن معادله‌های آن‌ها حاصل می‌شود، بنابراین حال که دو منحنی هیچ نقطهٔ تقاطعی (مشترکی) ندارند، معادلهٔ حاصل از برابر قراردادن معادلهٔ آن‌ها نباید جوابی داشته باشد. داریم:

$$-x^2+2x=mx+4 \Rightarrow x^2-2x+mx+4=0 \Rightarrow x^2+(m-2)x+4=0$$

$$\xrightarrow[\text{لذا } \Delta<0 \text{ است.}]{\text{معادله نباید جواب داشته باشد}} \underbrace{(m-2)^2-4(1)(4)}_{\Delta}<0 \Rightarrow m^2-4m+4-16<0 \Rightarrow m^2-4m-12<0$$

$$m^2-4m-12=0 \xrightarrow{\text{حل معادله}} m=-2\,,\, m=6 \Rightarrow$$

m		-2		6	
$m^2-4m-12$	$+$		$-$ (جواب)		$+$

$$\Rightarrow -2<m<6$$

۷۹ **۴** معادلهٔ حاصل از برابر قراردادن ضابطه‌های دو تابع نباید جوابی داشته باشد، لذا داریم:

$$(2x+1)(x+8)=mx \Rightarrow 2x^2+17x+8-mx=0$$

$$2x^2+(17-m)x+8=0 \xrightarrow[\Delta<0]{\text{معادله جواب ندارد.}} (17-m)^2-4(2)(8)<0 \Rightarrow 289+m^2-34m-64<0 \Rightarrow m^2-34m+225<0$$

پس باید عبارت $m^2-34m+225$ را تعیین علامت کنیم:

$$\Rightarrow m^2-34m+225=0 \Rightarrow \Delta'=\left(\frac{34}{2}\right)^2-225=289-225=64 \Rightarrow m=17+8=25\;,\; m=17-8=9$$

m		9		25	
$m^2-34m+225$	$+$		$-$ (جواب)		$+$

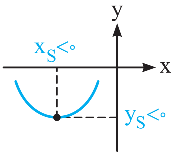
$$\Rightarrow 9<m<25$$

سؤال *دانش‌پژوه (شاهین راد):* **من معادله رو از راه Δ حل کردم ولی به دست آوردن جواب خیلی طول کشید.**

پاسخ *درود بر دلتا، ولی بهتره در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، وقتی‌که b زوجه از روش Δ' که قبلاً اشاره شد، استفاده کنین.*

توجه برای حل معادلهٔ $m^2-34m+225=0$ می‌توان آن را به صورت $(m-9)(m-25)=0$ نوشت. گرچه پیدا کردن دو عدد که حاصل جمع آن‌ها ۳۴ و حاصل‌ضربشان ۲۲۵ می‌شود دشوار است، اما گزینه‌ها این دو عدد را به ما معرفی می‌کنند! در بین گزینه‌ها تنها ۹ و ۲۵ هستند که مجموعشان ۳۴ می‌شود، پس می‌توان حدس زد که این دو عدد ۹ و ۲۵ باشند.

۸۰ **۲** ابتدا مختصات رأس سهمی $y=x^۲+mx+۱$ را به دست می‌آوریم:



$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-m}{۲}\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادله}}y_S=\left(\frac{-m}{۲}\right)^۲+m\left(\frac{-m}{۲}\right)+۱$$

$$\Rightarrow y_S=\frac{m^۲}{۴}-\frac{m^۲}{۲}+۱=\frac{-m^۲}{۴}+۱=\frac{۴-m^۲}{۴}$$

با توجه به نمودار چون رأس سهمی در ربع سوم قرار دارد، پس $x_S<۰$ و $y_S<۰$. بنابراین:

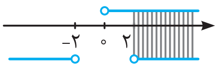
$$x_S<۰\Rightarrow\frac{-m}{۲}<۰\xrightarrow{\times(-۲)}m>۰$$

$$y_S<۰\Rightarrow\frac{۴-m^۲}{۴}<۰\Rightarrow\underbrace{۴-m^۲}_{(۲-m)(۲+m)}<۰\Rightarrow$$

m		-۲		۲	
$۴-m^۲$	−	۰	+	۰	−

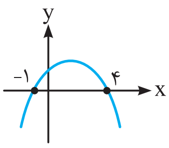
$\Rightarrow m<-۲$ یا $m>۲$

حال بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:



$\Rightarrow$ اشتراک : $m>۲$

۸۱ **۳** می‌خواهیم جواب نامعادلهٔ $\frac{x}{ax^۲+bx+c}>۰$ را بیابیم. با توجه به نمودار، جدول تعیین علامت زیر را رسم می‌کنیم:



x		-۱		۰		۴	
$ax^۲+bx+c$	−	۰	+		+	۰	−
x	−		−	۰	+		+
$\frac{x}{ax^۲+bx+c}$	+ جواب	×	−	۰	+ جواب	×	−

پس جواب نامعادله برابر $(-\infty,-۱)\cup(۰,۴)$ است که شامل سه عدد صحیح نامنفی ۱، ۲ و ۳ می‌باشد.

۸۲ **۴**

$$\left|۱+\frac{۳x}{۲}\right|\le\frac{۵}{۲}\Rightarrow-\frac{۵}{۲}\le۱+\frac{۳x}{۲}\le\frac{۵}{۲}\Rightarrow-\frac{۷}{۲}\le\frac{۳x}{۲}\le\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\times\frac{۲}{۳}}-\frac{۷}{۳}\le x\le۱$$

از بین اعداد داده‌شده $\frac{\sqrt{۵}}{۲}>۱$ بوده و در بازهٔ فوق قرار نمی‌باشد.

۸۳ **۴** با توجه به درسنامه داریم:

$$|۲x+۱|>۵\Rightarrow\begin{cases}۲x+۱>۵\Rightarrow۲x>۴\Rightarrow x>۲\\ \text{یا}\\ ۲x+۱<-۵\Rightarrow۲x<-۶\Rightarrow x<-۳\end{cases}$$

با اجتماع گرفتن بین جواب‌های حاصل داریم:

$\{x>۲\}\cup\{x<-۳\}=$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=\mathbb{R}-[-۳,۲]$

۸۴ **۳**

$|x^۲-x-۴|>۲\Rightarrow x^۲-x-۴>۲$ یا $x^۲-x-۴<-۲$

حال هر کدام از نامعادلات فوق را جداگانه حل کرده و سپس بین جواب‌ها اجتماع می‌گیریم:

۱) $x^۲-x-۴>۲\Rightarrow x^۲-x-۶>۰\Rightarrow(x-۳)(x+۲)>۰$

x		-۲		۳	
x − ۳	−		−	۰	+
x + ۲	−	۰	+		+
(x − ۳)(x + ۲)	+	۰	−	۰	+

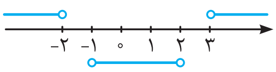
$\Rightarrow x<-۲$ یا $x>۳$ (*)

۲) $x^۲-x-۴<-۲\Rightarrow x^۲-x-۲<۰\Rightarrow(x-۲)(x+۱)<۰$

x		-۱		۲	
x − ۲	−		−	۰	+
x + ۱	−	۰	+		+
(x − ۲)(x + ۱)	+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow -۱<x<۲$ (**)

حال برای محاسبهٔ اجتماع دو جواب (*) و (**) از محور زیر استفاده می‌کنیم:



$\xrightarrow{\text{اجتماع}}$ جواب : $(-\infty,-۲)\cup(-۱,۲)\cup(۳,+\infty)$

جواب حاصل شامل اعداد صحیح ۲-، ۱-، ۲ و ۳ نمی‌باشد.

۸۵ | ۴

بررسی گزینه‌ها:

۱) می‌دانیم $|x|$ همواره نامنفی است. پس همیشه از عدد منفی مانند ۲- بزرگ‌تر است. لذا مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x|>-۲$، همهٔ اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ می‌شود.

۲) عبارت $|x-۱|$ همواره نامنفی بوده و نمی‌تواند از یک عدد منفی مانند ۳- کوچک‌تر باشد، لذا مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x-۱|<-۳$ تهی است.

۳) عبارت $|x+۵|$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. پس در نامعادلهٔ $|x+۵|\le ۰$ تنها حالت تساوی آن یعنی $|x+۵|=۰$ می‌تواند رخ دهد که در این حالت $x=-۵$ می‌شود. پس:

$$|x+۵|\le ۰ \Rightarrow |x+۵|=۰ \Rightarrow x+۵=۰ \Rightarrow x=-۵$$

۴) عبارت $|x+۲|$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. ما فقط xهایی را می‌خواهیم که به ازای آن‌ها $|x+۲|>۰$ شود. پس جواب، همهٔ اعداد حقیقی می‌شود به‌جز $x=-۲$. زیرا به ازای $x=-۲$، عبارت $|x+۲|$ برابر صفر می‌شود که غلط است. پس:

$$|x+۲|>۰ \Rightarrow x\in \mathbb{R}-\{-۲\}$$

لذا گزینهٔ (۴) جواب تست است.

۸۶ | ۲

$$|x-۲|<x^۲+x+۲ \Rightarrow \underbrace{-(x^۲+x+۲)<x-۲}_{(**)}\overbrace{<x^۲+x+۲}^{(*)}$$

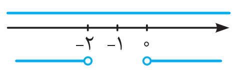
حال هر کدام از نامعادله‌های (*) و (**) را جداگانه حل کرده و سپس بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$(*):\ \cancel{x}-۲<x^۲+\cancel{x}+۲ \Rightarrow x^۲+۴>۰ \xRightarrow{\Delta=۰^۲-۴(۱)(۴)=-۱۶<۰} \begin{array}{c|c} x & \\ \hline x^۲+۴ & + \end{array} \Rightarrow x\in\mathbb{R}$$

$$(**):\ -(x^۲+x+۲)<x-۲ \Rightarrow -x^۲-x-\cancel{۲}<x-\cancel{۲} \Rightarrow ۰<\underbrace{x^۲+۲x}_{x(x+۲)}$$

$$\xRightarrow{\text{ریشه‌ها: ۰، ۲-}} \begin{array}{c|ccccc} x & & -۲ & & ۰ & \\ \hline x^۲+۲x & + & | & - & | & + \end{array} \Rightarrow x<-۲ \ \text{یا}\ x>۰$$

برای محاسبهٔ اشتراک جواب‌های دو نامعادلهٔ (*) و (**) از محور زیر استفاده می‌کنیم:



$$\xRightarrow{(**)\cap(*)} x<-۲ \ \text{یا}\ x>۰ \Rightarrow x=\mathbb{R}-[-۲,۰]$$

۸۷ | ۳

$$\sqrt{x^۲-۶x+۹}<۳۶ \Rightarrow \sqrt{(x-۳)^۲}<۳۶ \Rightarrow |x-۳|<۳۶$$

$$\Rightarrow -۳۶<x-۳<۳۶ \xRightarrow{+۳} \underbrace{-۳۳}_{a}<x<\underbrace{۳۹}_{b} \Rightarrow \frac{b-a}{۲}=\frac{۳۹-(-۳۳)}{۲}=\frac{۷۲}{۲}=۳۶$$

۸۸ | ۱

در نامعادلهٔ $\frac{|۲x-۱|-۵}{|۵x+۷|+۶}\ge ۰$ عبارت مخرج کسر یعنی $|۵x+۷|+۶$ همواره مثبت است. پس برای آن‌که کل کسر مثبت یا صفر باشد، باید صورت کسر هم مثبت یا صفر باشد، داریم:

$$|۲x-۱|-۵\ge ۰ \Rightarrow |۲x-۱|\ge ۵ \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۱\ge ۵ \Rightarrow ۲x\ge ۶ \Rightarrow x\ge ۳ \\ \text{یا} \\ ۲x-۱\le -۵ \Rightarrow ۲x\le -۴ \Rightarrow x\le -۲ \end{cases}$$

پس مجموعه جواب برابر $\mathbb{R}-(-۲,۳)$ است.

۸۹ | ۲

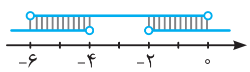
$$||x+۳|-۲|<۱ \Rightarrow -۱<|x+۳|-۲<۱ \Rightarrow ۱<|x+۳|<۳$$

حال باید با دو قسمت کردن نامعادلهٔ فوق و در نهایت اشتراک‌گیری بین جواب‌های حاصل در هر قسمت، جواب نهایی را بیابیم.

$$\begin{cases} |x+۳|>۱ \Rightarrow \begin{cases} x+۳>۱ \Rightarrow x>-۲ \\ \text{یا} \\ x+۳<-۱ \Rightarrow x<-۴ \end{cases} \quad (*) \\ \\ |x+۳|<۳ \Rightarrow -۳<x+۳<۳ \Rightarrow -۶<x<۰ \quad (**) \end{cases}$$

با اشتراک‌گیری بین (*) و (**) داریم:

$$\{x>-۲ \ \text{یا}\ x<-۴\}\cap\{-۶<x<۰\}=$$



$$=(-۲,۰)\cup(-۶,-۴)$$

۹۰ **۲** راه اول:

یادآوری

$$|x|>a \xrightarrow{a>0} x>a \text{ یا } x<-a$$

با توجه به یادآوری فوق داریم:

$$\left|\frac{2x-4}{3x-2}\right|>2 \Rightarrow \frac{2x-4}{3x-2}>2 \quad \text{یا} \quad \frac{2x-4}{3x-2}<-2$$

حال کافی است هر کدام از نامعادله‌های حاصل را جداگانه حل نموده و بین جواب‌ها اجتماع بگیریم:

$$1)\ \frac{2x-4}{3x-2}>2 \Rightarrow \frac{2x-4}{3x-2}-2>0 \Rightarrow \frac{2x-4-2(3x-2)}{3x-2}>0 \Rightarrow \frac{-4x}{3x-2}>0 \xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{\text{با توجه به جدول}} x\in\left(0,\frac{2}{3}\right)$$

$$2)\ \frac{2x-4}{3x-2}<-2 \Rightarrow \frac{2x-4}{3x-2}+2<0 \Rightarrow \frac{2x-4+2(3x-2)}{3x-2}<0 \Rightarrow \frac{8x-8}{3x-2}<0 \xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{\text{با توجه به جدول}} x\in\left(\frac{2}{3},1\right)$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادلهٔ داده‌شده برابر $\left(0,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},1\right)$ می‌باشد. به عبارت دیگر نامعادلهٔ $\left|\frac{2x-4}{3x-2}\right|>2$ بـه ازای تمـام xهـای متعلق به دو بازهٔ $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ و $\left(\frac{2}{3},1\right)$ برقرار می‌باشد و چون طول بازهٔ $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ بزرگ‌تر از طـول بـازهٔ $\left(\frac{2}{3},1\right)$ می‌باشـد، لـذا بـا فـرض $a=0$ و $b=\frac{2}{3}$، به بزرگ‌ترین مقدار $b-a$ که برابر $\frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}$ است، دست می‌یابیم.

راه دوم:

نکته

$$|x|>a \xrightarrow{a>0} x^2>a^2$$

با توجه به نکتهٔ فوق داریم:

$$\left|\frac{2x-4}{3x-2}\right|>2 \Rightarrow \left(\frac{2x-4}{3x-2}\right)^2>2^2 \Rightarrow \frac{(2x-4)^2}{(3x-2)^2}>4 \Rightarrow \frac{(2(x-2))^2}{(3x-2)^2}>4 \Rightarrow \frac{4(x-2)^2}{(3x-2)^2}>4$$

حال با فرض آن‌که $(3x-2)^2\neq 0$ و در نتیجه $x\neq\frac{2}{3}$، طرفین نامعادله را در عبارت مثبت $(3x-2)^2$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \cancel{4}(x-2)^2>\cancel{4}(3x-2)^2 \Rightarrow (x-2)^2-(3x-2)^2>0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} ((x-2)-(3x-2))((x-2)+(3x-2))>0$$

$$\Rightarrow (-2x)(4x-4)>0 \Rightarrow -2x(4(x-1))>0 \Rightarrow -8x(x-1)>0 \xrightarrow[\text{جهت عوض}]{\div(-8)} x(x-1)<0 \xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{\text{با توجه به جدول}} x\in(0,1)$$

اما چون باید $x\neq\frac{2}{3}$ باشد، مجموعه جواب نامعادله برابر می‌شود با:

$$(0,1)-\left\{\frac{2}{3}\right\} \quad \text{یا} \quad \left(0,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},1\right)$$

ادامهٔ حل مشابه روش اول است.

۹۱ **۱**

$$\left(\underbrace{-\frac{1}{2}}_{a},\underbrace{\frac{1}{3}}_{b}\right) \Rightarrow \left|x-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{b-a}{2} \xrightarrow[b=\frac{1}{3}]{a=-\frac{1}{2}} \left|x-\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2}\right|<\frac{\frac{1}{3}-(-\frac{1}{2})}{2}$$

$$\Rightarrow \left|x-\frac{\frac{-3+2}{6}}{2}\right|<\frac{\frac{2+3}{6}}{2} \Rightarrow \left|x-\frac{-\frac{1}{6}}{2}\right|<\frac{\frac{5}{6}}{2} \Rightarrow \left|x+\frac{1}{12}\right|<\frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{12x+1}{12}\right|<\frac{5}{12} \Rightarrow \frac{|12x+1|}{12}<\frac{5}{12} \xrightarrow{\times 12} |12x+1|<5$$

۹۲ **۲**

$$(-\infty,\underbrace{3}_{a})\cup(\underbrace{5}_{b},+\infty) \Rightarrow \left|x-\frac{a+b}{2}\right|>\frac{b-a}{2} \Rightarrow \left|x-\frac{3+5}{2}\right|>\frac{5-3}{2} \Rightarrow |x-4|>1$$

جمع‌بندی فصل چهارم

حل معادلهٔ درجه دوم به کمک روش کلی

با توجه به معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ داریم:

$$\Delta=b^۲-۴ac \xrightarrow{\Delta\geq۰} \text{جواب‌ها}: x_۱, x_۲=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

نکته۱ اگر در معادلهٔ فوق $a+b+c=۰$ باشد، بدون حل معادله می‌توان گفت یکی از جواب‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

نکته۲ اگر در معادلهٔ فوق $a+c=b$ باشد، بدون حل معادله می‌توان گفت یکی از جواب‌ها -۱ و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

دیدویژه برای حل یک معادلهٔ درجه دوم، ابتدا باید دو نکتهٔ فوق را در مورد آن بررسی کنیم، اگر حل نشد، روش تجزیه و در نهایت اگر روش‌های فوق نتیجه نداد از روش کلی آن را حل کنیم. رعایت این ترتیب خیلی مهم است.

تعداد جواب‌های معادلهٔ درجه دوم با توجه به علامت Δ

حالت‌های مختلف معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ با توجه به علامت $\Delta=b^۲-۴ac$، به صورت زیر است:

(۱) $\Delta>۰ \Leftrightarrow$ معادله **دو ریشهٔ متمایز حقیقی** دارد (۲) $\Delta=۰ \Leftrightarrow$ معادله، **یک ریشهٔ مضاعف** دارد (۳) $\Delta<۰ \Leftrightarrow$ معادله **ریشهٔ حقیقی ندارد**

وضعیت نمودار توابع f و g نسبت به هم

نمودار توابع f و g نسبت به هم سه حالت زیر را دارند:

(۱) هم‌دیگر را **قطع نمی‌کنند** (هیچ اشتراکی با هم ندارند). در این حالت معادلهٔ $f=g$ **ریشه ندارد**.

(۲) هم‌دیگر را **قطع می‌کنند** (با یک‌دیگر در یک یا چند نقطه اشتراک دارند.). در این حالت معادلهٔ $f=g$، یک یا چند **ریشه دارد**.

(۳) بر هم **مماس هستند** در این حالت معادلهٔ $f=g$ **ریشهٔ مضاعف دارد**.

مثال **حدود m را طوری تعیین کنید که معادلهٔ خط‌های $y=x+m$ و $y=x^۲-۲x$ هیچ نقطهٔ مشترکی نداشته باشند.**

پاسخ خودمانیم! خب وقتی می‌گویند هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند، یعنی معادلهٔ تقاطع دو تابع نباید ریشه داشته باشد. پس ابتدا معادلهٔ تقاطع را تشکیل داده و سپس شرط ریشه‌نداشتن معادله را اعمال می‌کنیم:

$$\begin{cases}y_۱=x+m\\ y_۲=x^۲-۲x\end{cases}\xrightarrow[y_۱=y_۲]{\text{معادلهٔ تقاطع}} x^۲-۲x=x+m\Rightarrow x^۲-۳x-m=۰\xrightarrow[\Delta<۰]{\text{شرط ریشه‌نداشتن}}(-۳)^۲-۴(۱)(-m)<۰\Rightarrow ۹+۴m<۰\Rightarrow m<-\frac{۹}{۴}$$

چند نکتهٔ مهم:

(۱) محل برخورد تابع f با **محور xها** از حل معادلهٔ $f(x)=۰$ به دست می‌آید. مختصات هر نقطه روی محور xها به صورت $(k,۰)$ می‌باشد.

(۲) محل برخورد تابع f با **محور yها** با قراردادن $x=۰$ در تابع $f(x)$ به دست می‌آید. مختصات هر نقطه روی محور yها به صورت $(۰,k)$ می‌باشد.

(۳) اگر مختصات نقطه‌ای در ضابطهٔ $y=f(x)$ صدق کند، آن‌گاه آن نقطه روی نمودار تابع $f(x)$ قرار دارد. **مثلاً** نقطهٔ $A(۱,۳)$ روی نمودار تابع $f(x)=x^۲+x+۱$ قرار دارد، زیرا $f(۱)=۱^۲+۱+۱=۳$.

(۴) اگر $A(x_A,y_A)$ محل **تقاطع** نمودار دو تابع f و g باشد، آن‌گاه مختصات این نقطه در **ضابطهٔ هر دو تابع** صدق می‌کند.

(۵) معادلهٔ **نیمساز ربع اول و سوم** به صورت $y=x$ و **نیمساز ربع دوم و چهارم** به صورت $y=-x$ می‌باشد.

مثال نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{۲}-۳x+۲$ در چه نقاطی محورهای مختصات را قطع می‌کند؟ در چه نقاطی نیمساز ربع سوم را قطع می‌کند؟

پاسخ برای یافتن محل برخورد با محور xها، باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$x^{۲}-۳x+۲=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۲)=۰ \Rightarrow x=۱$ یا $x=۲ \Rightarrow$ نقاط برخورد با محور xها: $(۱,۰),(۲,۰)$

برای یافتن محل برخورد با محور yها باید به‌جای x در ضابطهٔ تابع صفر قرار دهیم:

$f(۰)=۰^{۲}-۳(۰)+۲=۲ \Rightarrow$ محل برخورد با محور yها: $(۰,۲)$

برای یافتن محل تقاطع با نیمساز ربع سوم، باید معادلهٔ $x^{۲}-۳x+۲=x$ را حل کنیم. دقت کنید در ربع سوم $x<۰$ می‌باشد. داریم:

$$x^{۲}-۳x+۲=x \Rightarrow x^{۲}-۴x+۲=۰ \xRightarrow{\text{حل معادله}} x=۲\pm\sqrt{۲}$$

در ربع سوم $x<۰$ می‌باشد، اما هر دو مقدار $۲+\sqrt{۲}$ و $۲-\sqrt{۲}$ بزرگ‌تر از صفر هستند. پس نمودار این تابع با نیمساز ربع سوم تقاطع ندارد.

نامعادله و تعیین علامت

نامعادلهٔ درجهٔ اول: روش حل: در این حالت اعداد را به یک سمت و متغیر را به سمت دیگر می‌بریم و آن را حل می‌کنیم.

مثلاً: $۵x-۷<۲+x \Rightarrow ۵x-x<۲+۷ \Rightarrow ۴x<۹ \Rightarrow x<\frac{۹}{۴}$

نامعادلهٔ درجهٔ دوم: روش حل: در این حالت ابتدا همهٔ عبارات را به یک سمت آورده و پس از ساده‌سازی و به دست آوردن ریشه‌ها، به کمک جدول تعیین علامت، جواب را می‌یابیم. جدول تعیین علامت عبارت درجه دوم $P=ax^{۲}+bx+c$ به ضریب $x^{۲}$ یعنی a وابسته بوده و بر حسب علامت Δ به یکی از صورت‌های زیر است:

($\Delta<۰$؛ ریشهٔ حقیقی نداریم.)

x	
P	موافق علامت a

($\Delta=۰$؛ ریشهٔ مضاعف)

x		$x_۱=x_۲$	
P	موافق علامت a		موافق علامت a

($\Delta>۰$؛ ریشه‌ها $x_۱$ و $x_۲$ که $x_۱<x_۲$)

x		$x_۱$		$x_۲$	
P	موافق علامت a		مخالف علامت a		موافق علامت a

مثال نامعادلهٔ $x^{۲}+x<۲$ را حل کنید.

پاسخ

$$x^{۲}+x<۲ \Rightarrow \underbrace{x^{۲}+x-۲}_{(x+۲)(x-۱)}<۰ \xRightarrow[a>۰]{x_۱=-۲,x_۲=۱}$$

x		-۲		۱	
$x^{۲}+x-۲$	+		−		+

$\Rightarrow$ مجموعه جواب: $-۲<x<۱$

نکته عبارات دارای **توان زوج** یا **قدرمطلق**، مانند $|x-۱|$ و $(x-۳)^{۴}$ همواره **نامنفی** هستند.

روش حل نامعادلات کسری گویا: برای حل این نوع مسائل، ابتدا تمام عبارات را به یک سمت آورده و پس از مخرج مشترک گرفتن و ساده‌سازی به یک کسر می‌رسیم. حال با تعیین علامت عبارات صورت و مخرج و در نهایت علامت خود کسر، جواب را می‌یابیم.

مثلاً: $$\frac{x^{۲}-۶}{x}\le -۱ \xRightarrow[\text{یک سمت می‌بریم}]{\text{همه را به}} \frac{x^{۲}-۶}{x}+۱\le ۰ \xRightarrow{\text{مخرج مشترک می‌گیریم}} \frac{\overbrace{x^{۲}-۶+x}^{(x+۳)(x-۲)}}{x}\le ۰$$

$$\xRightarrow[\text{ریشهٔ مخرج: } x=۰]{\text{ریشه‌های صورت: } x=-۳ \text{ و } x=۲}$$

x		-۳		۰		۲	
$x^{۲}+x-۶$	+		−		−		+
x	−		−		+		+
P	−		+	×	−		+
	جواب				جواب		

$\Rightarrow x\in(-\infty,-۳]\cup(۰,۲]$

فرار از اشتباه: در حل نامعادلات حق طرفین ـ وسطین **نداریم**، مگر این‌که علامت عبارت‌های مخرج دو طرف همواره معلوم باشد. **مثلاً** اگر $\frac{۱}{x-۱}>\frac{۱}{x-۲}$ غلط است که بگوییم $x-۱>x-۲$.

دیدویژه از کلمات نترسید! بعضاً در برخی سؤالات تعیین علامت، طراحان کنکور صورت سؤال را به شکل پیچیده‌تری مطرح می‌کنند. **مثلاً** می‌گویند «اگر تابع f پایین‌تر از تابع g **نباشد**»، این عبارت، یعنی f همه‌جا بالاتر یا نهایتاً مساوی g است. در واقع، به زبان ریاضی یعنی $f\ge g$.

معادلات و نامعادلات قدرمطلقی خاص

یادآوری قدرمطلق x به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$|x|=\begin{cases} x\ ;\ x\geq \circ \\ -x\ ;\ x<\circ \end{cases}$$

حالت‌های مهم معادلات و نامعادلات قدرمطلقی:

$$|u|=a \xRightarrow{a\geq\circ} u=\pm a$$

مثلاً : $|x-۱|=۲ \Rightarrow x-۱=\pm ۲ \Rightarrow x=۳,-۱$

$$|u|\leq a \xRightarrow{a\geq\circ} -a\leq u\leq a$$

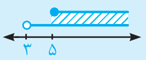
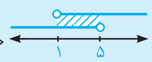
مثلاً : $|x-۲|\leq ۴ \Rightarrow -۴\leq x-۲\leq ۴ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۶$

$$|u|\geq a \xRightarrow{a\geq\circ} u\geq a \text{ یا } u\leq -a$$

مثلاً : $|x|\geq ۲ \Rightarrow x\geq ۲ \text{ یا } x\leq -۲$

دیدویژه خواص ذکرشده در بالا حتی اگر به صورت مجزا در خود این بخش مورد سؤال واقع نشوند، در بخش‌های دیگر خیلی به کار می‌روند.

حل نامعادلات قدرمطلقی در حالت کلی

روش ویژهٔ حل نامعادلهٔ قدرمطلقی در حالت کلی	مثال: نامعادلهٔ $۳x+|x-۵|>۷$ را حل کنید.
۱) **ریشه‌یابی:** ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها را بیابید.	$x-۵=\circ \Rightarrow x=۵$
۲) **بازه‌بندی:** با توجه به ریشه‌ها، بازه‌بندی مناسب را انجام دهید.	$\begin{cases} x\geq ۵ \\ x<۵ \end{cases}$
۳) **تعیین علامت:** با توجه به بازه‌ها، عبارات داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت کرده و قدرمطلق‌ها را برمی‌داریم. سپس نامعادلات را در هر بازه، جداگانه حل می‌کنیم.	$\begin{cases} (I): x\geq ۵ \xrightarrow{|x-۵|=x-۵} ۳x+(x-۵)>۷ \Rightarrow ۴x>۱۲ \Rightarrow x>۳\quad (*) \\ (II): x<۵ \xrightarrow{|x-۵|=-(x-۵)} ۳x-(x-۵)>۷ \Rightarrow ۲x>۲ \Rightarrow x>۱\quad (**) \end{cases}$
۴) **اشتراک و سپس اجتماع:** جواب‌های به دست آمده در هر بازه را با بازهٔ ابتدایی اشتراک می‌گیریم. در نهایت بین جواب‌های حاصل اجتماع می‌گیریم.	$(I)\bigcap(*) \Rightarrow \{x\geq ۵\}\bigcap\{x>۳\} \Rightarrow$  $\Rightarrow x\geq ۵$ $(II)\bigcap(**) \Rightarrow \{x<۵\}\bigcap\{x>۱\} \Rightarrow$  $\Rightarrow ۱<x<۵$ $\xRightarrow{\text{اجتماع}} x>۱$

تذکر برای حل معادلات قدرمطلقی در حالت کلی نیز مانند نامعادلات قدرمطلقی، چهار مرحلهٔ فوق را طی کرده و جواب را می‌یابیم.

دیدویژه یک نکتهٔ بسیار مهم! تا الان همهٔ تست‌های کنکور مربوط به این بخش، با عددگذاری قابل حل بوده‌اند! تسلط در عددگذاری برای بچه‌های متوسط و حتی قوی خیلی خوب است.