
خرید کتاب های کنکور
با تخفیف ویژه
و
ارسال رایگان
Medabook.com
مدابوک
یک جلسه تماس تلفنی رایگان
با مشاوران رتبه برتر
برای انتخاب بهترین منابع
دبیرستان و کنکور
۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰

فصل ۸ مثلثات

قسمت ششم: تناوب و توابع مثلثاتی

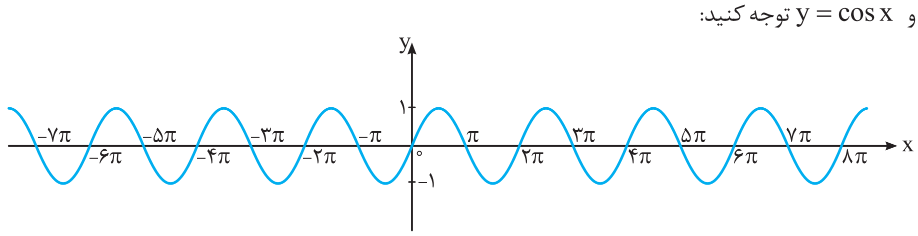
این قسمت معجونی از حسابان (۱) و (۲) هس. تو این قسمت با مفهوم تابع متناوب و فرمولای دورهٔ تناوب آشنا می‌شیم و یاد می‌گیریم چجوری ماکسیمم و مینیمم توابع مثلثاتی شامل سینوس و کسینوس رو به‌دست بیاریم. آخر سر هم خواص تابع تانژانت و نمودار اون رو مورد بررسی قرار می‌دیم.

تناوب

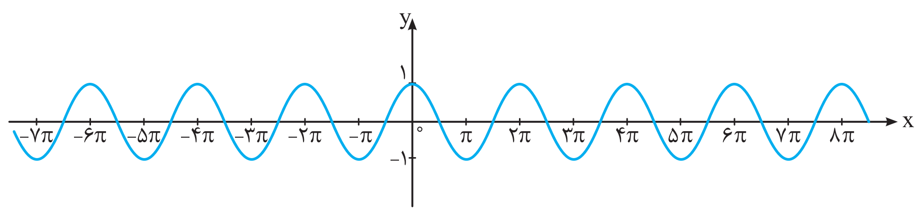
برخی از پدیده‌ها خاصیت تکرارشوندگی دارند مانند روزهای هفته، ماه‌های سال، حرکت عقربه‌های ساعت، حرکت آونگ، حرکت زمین به دور خورشید و ... به چنین پدیده‌هایی متناوب می‌گوییم خاصیت تکرارشوندگی در رفتار بسیاری از توابع و به خصوص توابع مثلثاتی نیز دیده می‌شود. در توابع متناوب، اگر رفتار تابع را در یک دورهٔ تناوب بررسی کنیم، مانند آن است که رفتار تابع را در تمام دامنهٔ آن بررسی کرده‌ایم.

به نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ توجه کنید:

$y = \sin x$



$y = \cos x$



با توجه به نمودارهای فوق، مقادیر توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ برای هر دو نقطه به فاصلهٔ ۲π روی محور xها، یکسان است. در واقع اگر k عددی صحیح باشد، داریم $\sin(x \pm ۲k\pi) = \sin x$ و $\cos(x \pm ۲k\pi) = \cos x$، بنابراین اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در یک بازه به طول ۲π یا ۴π یا ... داشته باشیم، با تکرار این تکه، می‌توانیم این توابع را رسم نماییم.

اکنون به طور دقیق‌تر، به بررسی تابع متناوب و دورهٔ تناوب می‌پردازیم:

توابع متناوب و دورهٔ تناوب

تابع متناوب: تابع f را متناوب می‌گوییم، هرگاه عدد حقیقی غیر صفر c موجود باشد که اولاً برای هر $x \in D_f$، مقدار $x \pm c$ نیز متعلق به دامنهٔ تابع f باشد و ثانیاً $\mathbf{f(x \pm c) = f(x)}$. به عدد c دورهٔ تناوب تابع f می‌گوییم.

دورهٔ تناوب اصلی: به **کوچک‌ترین** عدد حقیقی و **مثبت** c که در تعریف فوق صدق کند، دورهٔ تناوب اصلی و یا به اختصار دورهٔ تناوب تابع f می‌گوییم و آن را با **T** نمایش می‌دهیم.

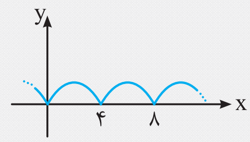
به طور مثال، تابع $f(x) = \sin x$ متناوب بوده و $T = ۲\pi$ دورهٔ تناوب آن است، زیرا از آن‌جایی‌که دامنهٔ تابع $f(x) = \sin x$ برابر $\mathbb{R}$ است، پس برای هر $x \in D_f$، $x \pm ۲\pi$ نیز متعلق به D_f می‌باشد. هم‌چنین داریم:

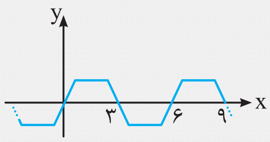
$$f(x + ۲\pi) = \sin(۲\pi + x) = \sin x = f(x)$$

بدیهی است که به جای $c = ۲\pi$، هر یک از اعداد $\pm ۲\pi$، $\pm ۴\pi$ و ... را نیز می‌توان قرار داد اما از این میان کوچک‌ترین عدد مثبت همان ۲π است، پس $T = ۲\pi$

تعبیر هندسی دورهٔ تناوب: اگر f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب T باشد، آن‌گاه نمودار تابع f در هر بازه به طول T **تکرار** می‌شود. به عبارت دیگر، اگر نمودار تابع f را در یک دورهٔ تناوب مثلاً بازهٔ $[۰, T]$ در اختیار داشته باشیم، با تکرار این قسمت از نمودار f، می‌توان نمودار f را در همهٔ بازه‌ها رسم نمود. در واقع T، طول کوچک‌ترین بازه‌ای است که نمودار f تکرار می‌شود.

مثال: با توجه به نمودارهای زیر، دورهٔ تناوب اصلی تابع مربوط به این نمودارها را تعیین کنید.

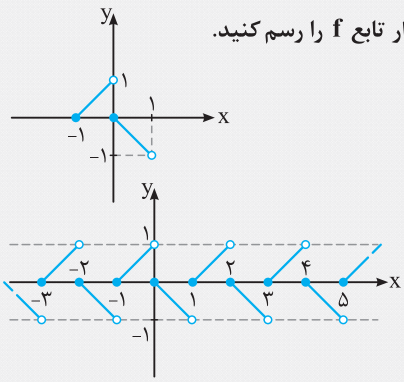
آ)


ب)


پاسخ: آ) طول کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع تکرار می‌شود، ۴ واحد است، پس $T=۴$

ب) طول کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع تکرار می‌شود، ۶ واحد است، پس $T=۶$

مثال: اگر قسمتی از نمودار تابع متناوب f با دورهٔ تناوب $T=۲$ مطابق شکل مقابل باشد، نمودار تابع f را رسم کنید.



پاسخ: کافی است نمودار داده‌شده در بازهٔ $(-۱,۱]$ را در بازه‌های $(۱,۳]$، $(۳,۵]$، $(۵,۷]$ و ... و $(-۳,-۱]$ و ... تکرار کنیم:

نکته اگر a، b، c و d اعداد حقیقی و $a,b\neq ۰$ باشند، در این‌صورت:

$$\begin{cases} y=a\sin(bx+c)+d \\ y=a\cos(bx+c)+d \end{cases} \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|} \quad , \quad \begin{cases} y=a\tan(bx+c)+d \\ y=a\cot(bx+c)+d \end{cases} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$$

تذکر در نکتهٔ فوق، ضرایب a، c و d تأثیری روی دورهٔ تناوب ندارند. در واقع ضرب یک عدد در تابع متناوب و نیز انتقال تابع متناوب، در دورهٔ تناوب آن تأثیری ندارد ولی در برد تابع مؤثر هستند.

مثال: دورهٔ تناوب اصلی توابع زیر را به‌دست آورید.

آ) $y=\sin(۳x-\frac{\pi}{۶})$ ب) $y=۲-۳\cos(\frac{\pi}{۲}x)$ پ) $y=-۵\sin(\frac{۱}{۴}(۳-x))+۱$

ت) $y=۲\tan(\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۵}x)$ ث) $y=۱-۵\tan(۲\pi x)$ ج) $y=۷\cot(\frac{\pi}{۶}-\frac{۲x}{۵})$

پاسخ: با استفاده از نکتهٔ قبل، دورهٔ تناوب توابع داده‌شده را می‌یابیم:

آ) $T=\frac{۲\pi}{|۳|}=\frac{۲\pi}{۳}$ ب) $T=\frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{۲}|}=۴$ پ) $T=\frac{۲\pi}{|-\frac{۱}{۴}|}=۸\pi$

ت) $T=\frac{\pi}{|-\frac{\pi}{۵}|}=۵$ ث) $T=\frac{\pi}{|۲\pi|}=\frac{۱}{۲}$ ج) $T=\frac{\pi}{|-\frac{۲}{۵}|}=\frac{۵\pi}{۲}$

تست: اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۲\sin(\frac{mx}{۳}-\frac{\pi}{۴})$ برابر دورهٔ تناوب تابع $g(x)=۱-\cos\frac{x}{۲}$ باشد، مقدار منفی m کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) -۴ ۴) -۶

پاسخ: دورهٔ تناوب تابع f برابر $T_۱=\frac{۲\pi}{|\frac{m}{۳}|}=\frac{۶\pi}{|m|}$ و دورهٔ تناوب تابع g برابر $T_۲=\frac{۲\pi}{|\frac{۱}{۲}|}=۴\pi$ است. لذا طبق فرض داریم:

$$T_۱=T_۲ \Rightarrow \frac{۶\pi}{|m|}=۴\pi \Rightarrow |m|=\frac{۶}{۴} \xrightarrow{m<۰} m=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

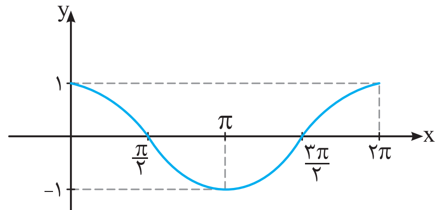
توابع مثلثاتی

توابعی که فقط شامل نسبت‌های مثلثاتی با ضرایب حقیقی باشند، توابع مثلثاتی نامیده می‌شوند. به طور مثال، هر یک از توابع $y=۲\sin x+۵$، $y=\cos ۳x$ و $y=۲\sin^۲ x+۵\cos ۲x-۱$ یک تابع مثلثاتی می‌باشند.

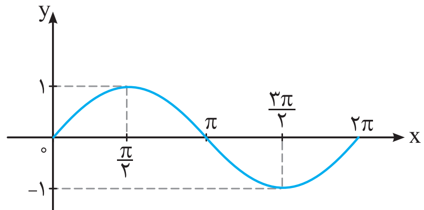
نکته توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$، ساده‌ترین توابع مثلثاتی می‌باشند. از آن‌جایی که برای هر عدد حقیقی x، $\sin x$ و $\cos x$ تعریف می‌شوند، پس **دامنهٔ** این توابع برابر $\mathbb{R}$ است و چون مقادیر $\sin x$ و $\cos x$ همواره اعدادی در بازهٔ $[-۱,۱]$ می‌باشند، پس **بُرد** این توابع برابر $[-۱,۱]$ خواهد بود.

نمودار توابع مثلثاتی $y = \sin x$ و $y = \cos x$

نمودار توابع مثلثاتی $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در یک دوره تناوب یعنی در بازهٔ $[0, 2\pi]$ به‌صورت زیر می‌باشد:

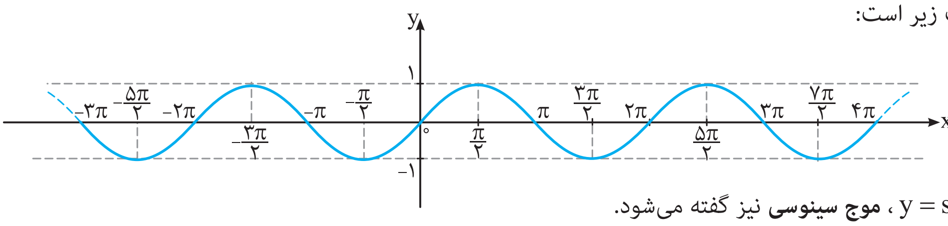


$y = \cos x$



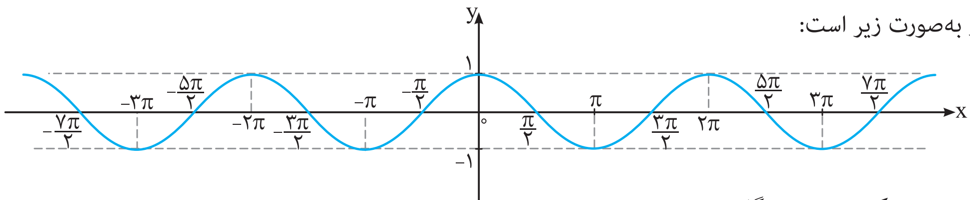
$y = \sin x$

همان‌طور که گفته شد، تابع $y = \sin x$ متناوب بوده و دورهٔ تناوب آن $T = 2\pi$ است. بنابراین اگر نمودار به‌دست آمده برای $y = \sin x$ را در بازه‌هایی به طول 2π، مانند $[2\pi, 4\pi]$، $[4\pi, 6\pi]$، ... ، $[-2\pi, 0]$، $[-4\pi, -2\pi]$ و ... تکرار کنیم، نمودار تابع $y = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ رسم می‌شود. این نمودار به‌صورت زیر است:



به نمودار $y = \sin x$، **موج سینوسی** نیز گفته می‌شود.

مشابه آن‌چه در مورد $y = \sin x$ گفته شد، تابع $y = \cos x$ نیز متناوب بوده و $T = 2\pi$ دورهٔ تناوب آن است. بنابراین اگر نمودار $y = \cos x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ را در بازه‌هایی به طول 2π، مانند $[2\pi, 4\pi]$، $[4\pi, 6\pi]$، ... ، $[-2\pi, 0]$، $[-4\pi, -2\pi]$ و ... تکرار کنیم، نمودار $y = \cos x$ روی $\mathbb{R}$ رسم می‌شود. این نمودار به‌صورت زیر است:



به نمودار $y = \cos x$، **موج کسینوسی** نیز گفته می‌شود.

رسم نمودار برخی توابع به کمک نمودارهای $y = \sin x$ ، $y = \cos x$

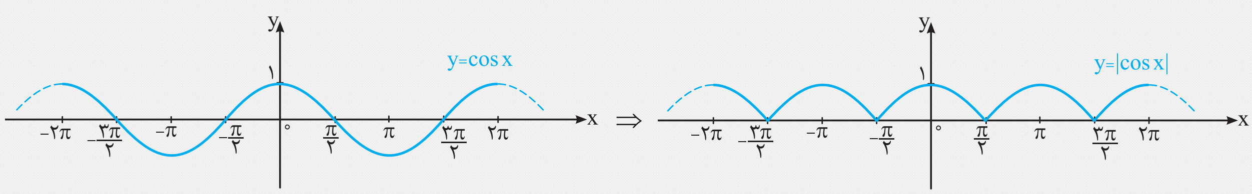
با استفاده از توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$، می‌توان توابع جدیدی ساخت و نمودار آن‌ها را به کمک نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ رسم نمود. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید. (برگرفته از کتاب درسی)

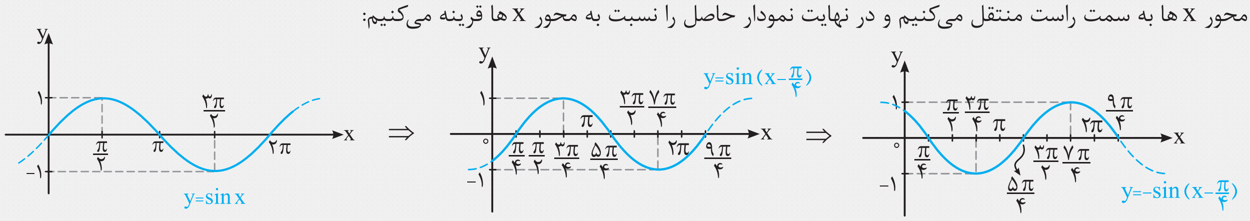
آ) $y = |\cos x|$

ب) $y = -\sin(x - \frac{\pi}{4})$

پاسخ: آ) برای رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$، ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس بخش‌هایی از نمودار تابع f که زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. بنابراین نمودار $y = |\cos x|$ به‌صورت زیر رسم می‌شود:



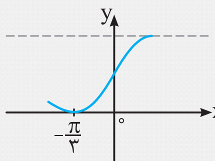
ب) با استفاده از انتقال، این نمودار را رسم می‌کنیم. برای این منظور ابتدا نمودار $y = \sin x$ را رسم کرده و سپس آن را $\frac{\pi}{4}$ واحد در راستای محور xها به سمت راست منتقل می‌کنیم و در نهایت نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:



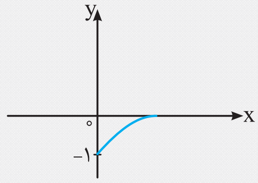
مثال: در هر یک از نمودارهای زیر، بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم‌شده، توابع مثلثاتی داده‌شده در زیر را به نمودارها نظیر کرده و سپس نمودار را کامل کنید. (برگرفته از کتاب درسی)

آ) $y = 1 - \cos(x + \frac{\pi}{3})$

ب) $y = |\sin x| - 1$



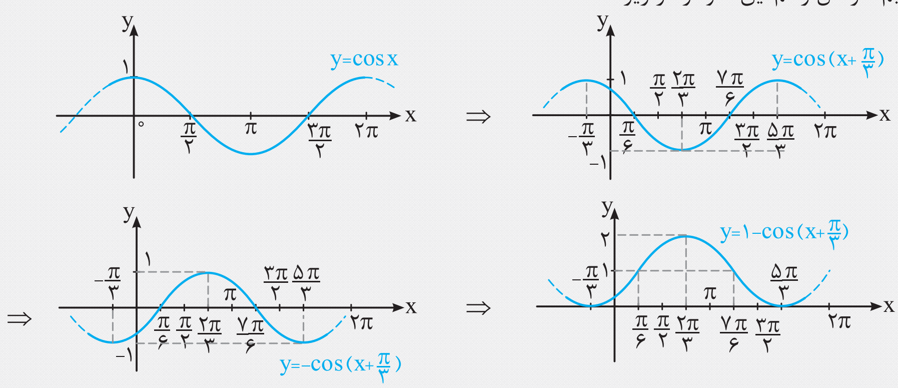
نمودار (۲)



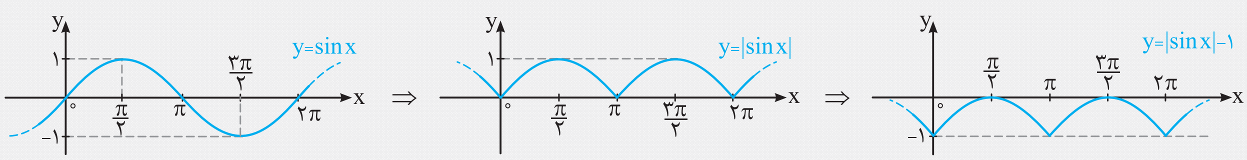
نمودار (۱)

پاسخ: نقطهٔ $(0, -1)$ روی نمودار (۱) قرار دارد. این نقطه در معادلهٔ $y = |\sin x| - 1$ صدق می‌کند. پس نمودار (۱) مربوط به تابع $y = |\sin x| - 1$ و نمودار (۲) مربوط به تابع $y = 1 - \cos(x + \frac{\pi}{3})$ می‌باشد.

آ) برای رسم نمودار $y = 1 - \cos(x + \frac{\pi}{3})$، ابتدا نمودار $y = \cos x$ را رسم کرده و سپس آن را $\frac{\pi}{3}$ واحد در راستای محور xها، به سمت چپ منتقل می‌کنیم. پس از آن، نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه نموده و در نهایت نمودار به‌دست آمده را یک واحد در راستای محور yها به سمت بالا منتقل می‌کنیم. مراحل رسم این نمودار در زیر آمده است:



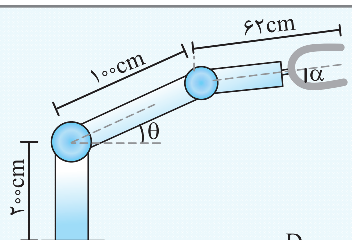
ب) برای رسم نمودار $y = |\sin x| - 1$، ابتدا $y = \sin x$ را رسم کرده و سپس بخش‌هایی از نمودار را که زیر محور xها قرار دارد، نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = |\sin x|$ به‌دست آید. در نهایت نمودار حاصل را یک واحد در راستای محور yها به سمت پایین منتقل می‌کنیم:



کاربرد توابع مثلثاتی در حل مسئله

توابع مثلثاتی در بسیاری از علوم به‌خصوص علم فیزیک کاربرد فراوان دارند. بسیاری از حرکت‌های متناوب مانند حرکت رفت و برگشت آونگ، حرکت دایره‌ای مانند حرکت سیّارات، حرکت نوسانی مانند حرکت نوسانی یک فنر یا حرکت موجی یک موج الکترومغناطیسی همه بر حسب توابع مثلثاتی بیان می‌شوند.

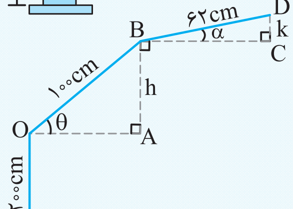
تست: شکل مقابل، یک روبات صنعتی را که در صنایع خودروسازی کاربرد دارد، نمایش می‌دهد. اگر برای گرفتن یک شیء در ارتفاع ۲۱۹ سانتی‌متری، این روبات مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -30^\circ$ قرار دهد، زاویهٔ θ در این وضعیت چند درجه خواهد بود؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) 30° ۲) 45°

۳) 60° ۴) 90°

پاسخ: شکل ساده‌تری از روبات را رسم می‌کنیم. بنابراین داریم:



$$\overset{\Delta}{OAB}: \sin\theta = \frac{h}{100} \Rightarrow h = 100\sin\theta$$

$$\overset{\Delta}{BCD}: \sin\alpha = \frac{k}{62} \Rightarrow k = 62\sin\alpha$$

ارتفاع نوک گیره از زمین: $y = 200 + h + k \Rightarrow y = 200 + 100\sin\theta + 62\sin\alpha$

طبق فرض $\alpha = -30^\circ$ و $y = 219$، پس:

$$219 = 200 + 100\sin\theta + 62\sin(-30^\circ) \Rightarrow 19 = 100\sin\theta + 62(-\frac{1}{2}) \Rightarrow 19 = 100\sin\theta - 31 \Rightarrow 100\sin\theta = 50 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

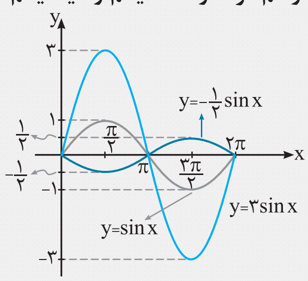
یعنی در این وضعیت باید مفصل اول با خط افقی زاویهٔ 30° بسازد. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

ماکسیمم و مینیمم توابع $y = a\sin(bx)+c$ و $y = a\cos(bx)+c$

می‌دانیم مقادیر ماکسیمم و مینیمم توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ به ترتیب برابر ۱ و ۱- می‌باشند. حال می‌خواهیم تأثیر ضرایب a، b و c را در توابع $y=a\sin(bx)+c$ و $y=a\cos(bx)+c$، بر مقادیر ماکسیمم و مینیمم این توابع بررسی نماییم. ابتدا مثال زیر را ببینید:

مثال: آ) نمودار توابع $y=\sin x$، $y=۳\sin x$ و $y=-\frac{۱}{۲}\sin x$ را در یک دستگاه مختصات و در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم کرده و ماکسیمم و مینیمم این توابع را مشخص نمایید. چه نتیجه‌ای در مورد مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x$ می‌گیرید؟

ب) نمودار توابع $y=\sin x$، $y=\sin ۲x$ و $y=\sin(-\frac{۱}{۲}x)$ را در یک دستگاه مختصات و در بازهٔ $[۰,۴\pi]$ رسم کرده و ماکسیمم و مینیمم این توابع را مشخص نمایید. چه نتیجه‌ای در مورد مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $y=\sin bx$ می‌گیرید؟



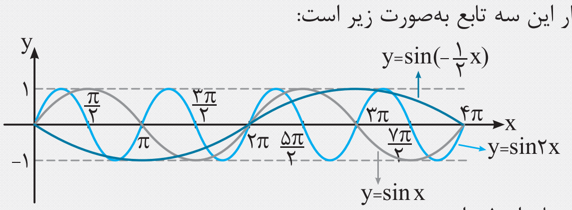
پاسخ: آ) برای رسم $y=۳\sin x$ کافی است عرض همهٔ نقاط نمودار $y=\sin x$ را در عدد ۳ ضرب کنیم. همچنین برای رسم نمودار $y=-\frac{۱}{۲}\sin x$ کافی است عرض همهٔ نقاط نمودار $y=\sin x$ را در عدد $-\frac{۱}{۲}$ ضرب کنیم. بنابراین نمودار این سه تابع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت مقابل است:

با توجه به نمودار، جدول زیر را داریم:

تابع \ وضعیت	ماکسیمم	مینیمم
$y=\sin x$	۱	۱-
$y=۳\sin x$	۳	۳-
$y=-\frac{۱}{۲}\sin x$	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$

بنابراین با توجه به جدول، به طور کلی می‌توان نتیجه گرفت مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x$ به ترتیب برابر $|a|$ و $-|a|$ است.

ب) برای رسم $y=\sin ۲x$، کافی است طول همهٔ نقاط نمودار $y=\sin x$ را بر ۲ تقسیم کنیم، همچنین برای رسم نمودار تابع $y=\sin(-\frac{۱}{۲}x)$، کافی است طول همهٔ نقاط نمودار $y=\sin x$ را در ۲- ضرب کنیم. بنابراین نمودار این سه تابع به‌صورت زیر است:



با توجه به نمودار، معلوم می‌شود که ماکسیمم هر سه تابع فوق برابر ۱ و مینیمم آن‌ها برابر ۱- است.

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $y=\sin bx$ به ترتیب برابر ۱ و ۱- است.

همان‌طور که در مثال قبل ملاحظه نمودید، انبساط و انقباض‌های عمودی روی ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x)=\sin x$ مؤثر بود ولی انبساط و انقباض‌های افقی، مقادیر ماکسیمم و مینیمم این تابع را عوض نکرد. در حالت کلی نکتهٔ زیر را داریم:

نکته به طور کلی در توابع $y=a\sin(bx+d)+c$ و $y=a\cos(bx+d)+c$ $(a,b\neq ۰)$ داریم:

$$\max=|a|+c \quad , \quad \min=-|a|+c$$

همچنین عدد c همواره **میانگین** مقادیر ماکسیمم و مینیمم است. یعنی:

$$c=\frac{\max+\min}{۲}$$

مثال: دورهٔ تناوب و مقادیر ماکسیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید. (برگرفته از کتاب درسی)

آ) $y=-۲\sin(۳x)+۱$ ب) $y=\sqrt{۲}-\cos(\frac{\pi}{۳}x)$ پ) $y=\pi\sin(۲x-۳)-۲$ ت) $y=۴-\frac{۳}{۵}\cos(۱-\frac{۲x}{۵})$

پاسخ: بنابر نکتهٔ قبل و این‌که دورهٔ تناوب توابع $y=a\sin(bx+d)+c$ و $y=a\cos(bx+d)+c$ برابر $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است، مقادیر خواسته‌شده را می‌یابیم:

آ) $\min=-|-۲|+۱=-۱$ ، $\max=|-۲|+۱=۳$ ، $T=\frac{۲\pi}{|۳|}=\frac{۲\pi}{۳}$

ب) $\min=-|-۱|+\sqrt{۲}=\sqrt{۲}-۱$ ، $\max=|-۱|+\sqrt{۲}=\sqrt{۲}+۱$ ، $T=\frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{۳}|}=۶$

پ) $\min = -|\pi| - ۲ = -\pi - ۲$ ، $\max = |\pi| - ۲ = \pi - ۲$ ، $T = \frac{۲\pi}{|۲|} = \pi$

ت) $\min = -|-\frac{۳}{۵}| + ۴ = -\frac{۳}{۵} + ۴ = \frac{۱۷}{۵}$ ، $\max = |-\frac{۳}{۵}| + ۴ = \frac{۳}{۵} + ۴ = \frac{۲۳}{۵}$ ، $T = \frac{۲\pi}{|-\frac{۲}{۵}|} = ۵\pi$

تست: ضابطهٔ تابع مثلثاتی که دورهٔ تناوب آن $T = \frac{\pi}{۳}$ و مقادیر ماکسیمم و مینیمم آن برابر $\max = ۲$ و $\min = -۴$ است، کدام می‌تواند باشد؟

(برگرفته از کتاب درسی)

۱) $y = -۳\sin(۶x) + ۱$ ۲) $y = ۳\cos(۱ - ۶x) - ۱$ ۳) $y = -۳\cos(۶x) + ۱$ ۴) $y = ۳\sin(۶\pi x - \frac{\pi}{۳}) - ۱$

پاسخ: ضابطهٔ تابع مثلثاتی می‌تواند به یکی از شکل‌های $y = a\sin(bx + d) + c$ یا $y = a\cos(bx + d) + c$ باشد. می‌دانیم $\max = |a| + c$ و $\min = -|a| + c$ و c میانگین مقادیر ماکسیمم و مینیمم است. پس:

$$c = \frac{\max + \min}{۲} = \frac{۲ + (-۴)}{۲} = -۱$$

$$\max = |a| + c \xrightarrow{c=-۱} ۲ = |a| - ۱ \Rightarrow |a| = ۳ \Rightarrow a = \pm ۳$$

از طرفی:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \xrightarrow{T=\frac{\pi}{۳}} \frac{\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = ۶ \Rightarrow b = \pm ۶$$

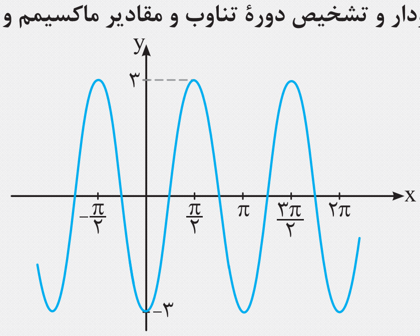
با اطلاعات سؤال، در مورد مثبت یا منفی بودن a و b چیزی نمی‌دانیم. بنابراین ضابطهٔ تابع مورد نظر به یکی از صورت‌های $y = \pm ۳\sin(\pm ۶x + d) - ۱$ یا $y = \pm ۳\cos(\pm ۶x + d) - ۱$ می‌تواند باشد که با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ (۲) صحیح است.

نکته آ) نمودار تابع به شکل $y = a\cos(bx) + c$، همواره دارای مینیمم یا ماکسیمم روی محور yها است. همچنین اگر تابع روی محور yها دارای ماکسیمم باشد، $a > ۰$ و چنانچه روی محور yها دارای مینیمم باشد، $a < ۰$ خواهد بود.

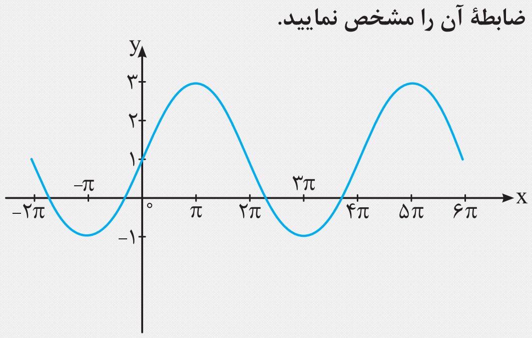
ب) اگر نمودار تابع به شکل $y = a\sin(bx) + c$، در سمت راست محور yها و از چپ به راست، ابتدا دارای ماکسیمم و سپس دارای مینیمم باشد، در این صورت a و b هم‌علامت هستند و چنانچه ابتدا دارای مینیمم و سپس دارای ماکسیمم باشد، آن‌گاه a و b مختلف‌العلامه می‌باشند.

مثال: هر یک از نمودارهای داده‌شده در زیر، مربوط به تابعی با ضابطهٔ $f(x) = a\sin(bx) + c$ یا $f(x) = a\cos(bx) + c$ است. با دقت در شکلِ نمودار و تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع، ضابطهٔ آن را مشخص نمایید.

آ)



ب)



پاسخ: آ) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر روی محور yها دارای مینیمم است، پس مربوط به تابع $y = a\cos(bx) + c$ می‌باشد. مقدار ماکسیمم و مینیمم این تابع به ترتیب برابر ۳ و ۳- است. چون مقادیر ماکسیمم و مینیمم به ترتیب برابر $|a| + c$ و $-|a| + c$ بوده و c میانگین این دو مقدار می‌باشد، پس:

$$c = \frac{\max + \min}{۲} = \frac{۳ + (-۳)}{۲} = ۰$$

$$\max = |a| + c \Rightarrow ۳ = |a| + ۰ \Rightarrow |a| = ۳$$

با توجه به نمودار، تابع روی محور yها دارای مینیمم است، پس طبق نکتهٔ قبل $a = -۳$

از سوی دیگر دورهٔ تناوب تابع با توجه به نمودار آن، برابر $T = \pi$ است. پس:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \xrightarrow{T=\pi} \pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = ۲$$

واضح است که در این حالت مثبت یا منفی بودن b تأثیری در ضابطه ندارد (زیرا $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$) پس می‌توان گفت $b = ۲$ و لذا ضابطهٔ این نمودار به‌صورت $f(x) = -۳\cos ۲x$ است.

ب) با توجه به نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به‌صورت $y=a\sin(bx)+c$ باشد.
مقادیر ماکسیمم و مینیمم این تابع به ترتیب برابر ۳ و ۱- است. پس داریم:

$$c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۳+(-۱)}{۲}\Rightarrow c=۱$$

$$\max=|a|+c\Rightarrow ۳=|a|+۱\Rightarrow |a|=۲$$

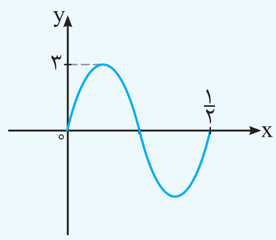
نمودار تابع، در سمت راست محور yها، ابتدا دارای ماکسیمم و سپس دارای مینیمم است. پس a و b هم‌علامت هستند. پس $a=۲$ و $b=\frac{۱}{۲}$ یا $a=-۲$ و $b=-۱$. از طرفی دورهٔ تناوب این تابع از روی نمودار برابر $T=۴\pi$ است. پس داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}\xrightarrow{T=۴\pi}۴\pi=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow |b|=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین ضابطهٔ این تابع عبارت است از:

$$f(x)=۲\sin(\frac{۱}{۲}x)+۱$$

تست: شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)=a\sin(b\pi x)+c$ در یک دورهٔ تناوب می‌باشد. $f(\frac{۱}{۱۲})$ کدام است؟ $(b>۰)$



۱) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: با توجه به شکل، دورهٔ تناوب تابع f برابر $T=\frac{۱}{۲}$ است. از طرفی دورهٔ تناوب تابع $f(x)=a\sin(b\pi x)+c$ برابر $T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}$ است. پس:

$$\frac{۲\pi}{|b\pi|}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{b>۰}\frac{۲}{b}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=۴$$

از سوی دیگر، نمودار از مبدأ عبور کرده است. پس:

$$f(۰)=۰\Rightarrow a\sin ۰+c=۰\Rightarrow c=۰$$

مطابق شکل، بیش‌ترین مقدار تابع f برابر ۳ است. پس $|a|=۳$ است. با توجه به شکل، نمودار تابع ابتدا دارای ماکسیمم و سپس دارای مینیمم است. پس a و b هم‌علامت هستند و چون $b>۰$، باید $a>۰$ باشد، پس $a=۳$. در نتیجه داریم:

$$f(x)=۳\sin ۴\pi x\Rightarrow f(\frac{۱}{۱۲})=۳\sin(\frac{۴\pi}{۱۲})=۳\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

نکاتی در مورد تابع متناوب و دورهٔ تناوب (ویژهٔ علاقمندان)

نکتهٔ ۱ اگر f تابعی متناوب و T دورهٔ تناوب اصلی آن باشد، آن‌گاه برای هر عدد طبیعی n داریم: $f(x\pm nT)=f(x)$

تست: فرض کنید f تابعی متناوب با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و دورهٔ تناوب $T=۴$ و ضابطهٔ آن در بازهٔ $[۰,۴)$ به‌صورت $f(x)=\sqrt{x}$ باشد. مقدار $f(-۱/۷۵)$ کدام است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۵ ۳) ۱/۶ ۴) تعریف نشده

پاسخ: چون دامنهٔ تابع f برابر $\mathbb{R}$ است، پس تابع f به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ تعریف می‌شود. با توجه به این‌که ضابطهٔ تابع متناوب f در بازهٔ $[۰,۴)$ به‌صورت $f(x)=\sqrt{x}$ بوده و دورهٔ تناوب آن $T=۴$ است، پس طبق نکتهٔ قبل می‌توان نوشت:

$$f(-۱/۷۵)=f(-۱/۷۵+۴)=f(۲/۲۵)=\sqrt{۲/۲۵}=۱/۵\Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست: اگر f تابعی متناوب با دامنهٔ $\mathbb{R}$ بوده و به ازای هر $x\in\mathbb{R}$، داشته باشیم $f(x+۲)=-f(x)$، آن‌گاه کدام عدد زیر الزاماً دورهٔ تناوب f است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: نشان می‌دهیم $T=۴$ یک دورهٔ تناوب تابع f است. در واقع نشان می‌دهیم $f(x+۴)=f(x)$

$$f(x+۴)=f((x+۲)+۲)\underset{\text{طبق فرض}}{=}-f(x+۲)\underset{\text{طبق فرض}}{=}-(-f(x))=f(x)\Rightarrow f(x+۴)=f(x)$$

بنابراین $T=۴$ یک دورهٔ تناوب f بوده و گزینهٔ (۲) صحیح است.

نکتهٔ ۲ به طور کلی اگر a، b، c و d اعداد حقیقی و $a,b\neq ۰$ باشند و n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases}y=a\sin^{۲n}(bx+c)+d\\y=a\cos^{۲n}(bx+c)+d\\y=a\tan^{n}(bx+c)+d\\y=a\cot^{n}(bx+c)+d\end{cases}\Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}\quad,\quad\begin{cases}y=a\sin^{۲n-۱}(bx+c)+d\\y=a\cos^{۲n-۱}(bx+c)+d\end{cases}\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|}$$

تست: اگر دورهٔ تناوب توابع $y_1 = 4\sin^2(\frac{3x}{5})$ و $y_2 = \tan^3(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}) + 2$ به ترتیب برابر T_1 و T_2 باشد، حاصل $3T_1 - T_2$ کدام است؟

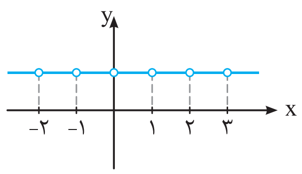
۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) 2π ۴) 3π

پاسخ: بنابر نکتهٔ قبل داریم:

$$T_1 = \frac{\pi}{|\frac{3}{5}|} = \frac{5\pi}{3} \ , \ T_2 = \frac{\pi}{|-\frac{1}{3}|} = 3\pi \Rightarrow 3T_1 - T_2 = 5\pi - 3\pi = 2\pi \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) درست است.

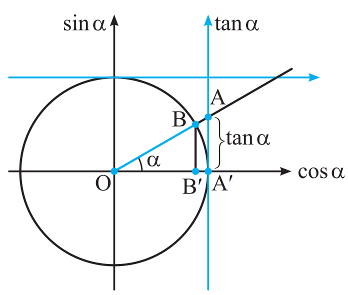
نکتـهٔ۳ تابع ثابت $f(x) = c$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ متناوب است ولی دورهٔ تناوب اصلی ندارد. توجه کنید که اگر دامنهٔ تابع ثابت f، برابر $\mathbb{R}$ نباشد و نمودار آن دارای نقاط توخالی با فاصله‌های یکسان باشد، آن‌گاه تابع f دارای دورهٔ تناوب اصلی بوده و همان فاصلهٔ مساوی بین دو نقطهٔ توخالی، دورهٔ تناوب اصلی آن است.

به طور مثال، تابع ثابت شکل مقابل متناوب و دارای دورهٔ تناوب اصلی $T = 1$ است:



تابع تانژانت

در دایرهٔ مثلثاتی مقابل، زاویهٔ α و نیز محور سینوس‌ها و محور کسینوس‌ها مشخص شده‌اند. حال اگر در نقطهٔ A' عمودی بر محور xها رسم کنیم تا امتداد OB را در نقطهٔ A قطع کند، آن‌گاه خط AA' بر دایرهٔ مثلثاتی در نقطهٔ A' مماس بوده و مقدار AA' برابر $\tan\alpha$ است. زیرا داریم:



$$\overset{\Delta}{OBB'} : \tan\alpha = \frac{BB'}{OB'} \qquad (*)$$

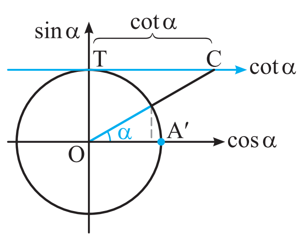
$$\overset{\Delta}{OBB'} \sim \overset{\Delta}{OAA'} \Rightarrow \frac{BB'}{OB'} = \frac{AA'}{OA'} \xrightarrow{OA'=1} \frac{BB'}{OB'} = AA' \xrightarrow{(*)} \tan\alpha = AA'$$

محور تانژانت‌ها و محور کتانژانت‌ها

محور عمودی شامل AA' که در نقطهٔ A' بر دایره مماس می‌باشد، **محور تانژانت‌ها** نام دارد. زیرا اندازهٔ جبری محل تقاطع ضلع پایانی زاویهٔ α با آن محور تا نقطهٔ A' بیانگر $\tan\alpha$ است. در واقع در دایرهٔ مثلثاتی شکل قبل داریم:

$\boldsymbol{AA' = \tan\alpha}$

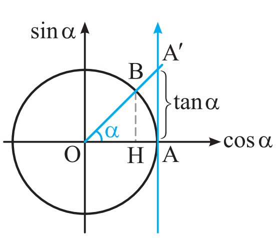
تـذکـر به طریق مشابه در دایرهٔ مثلثاتی مقابل می‌توان ثابت کرد $\cot\alpha = TC$. از این رو به **محور افقی** شامل TC که در نقطهٔ T بر دایرهٔ مثلثاتی مماس است، **محور کتانژانت‌ها** می‌گویند.



مقایسهٔ تانژانت و سینوس

در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی، علامت سینوس مثبت و علامت تانژانت منفی است، پس اگر $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ باشد، $\tan\alpha < \sin\alpha$، همچنین در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی، تانژانت مثبت و سینوس منفی بوده و لذا اگر $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ باشد، $\sin\alpha < \tan\alpha$. پس در این دو ربع تکلیف مشخص است. حال می‌خواهیم در ربع‌های اول و چهارم که سینوس و تانژانت هم‌علامت هستند، آن‌ها را مقایسه کنیم.

با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، می‌توان سینوس و تانژانت یک زاویه را در ربع‌های اول و چهارم مقایسه نمود. دایرهٔ مثلثاتی مقابل را در نظر بگیرید، اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$، آن‌گاه داریم:



$$\sin\alpha = \frac{BH}{OB} \xrightarrow{OB=1} \sin\alpha = BH$$

همچنین $AA' = \tan\alpha$. با توجه به شکل بدیهی است که $BH < AA'$. پس وقتی $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$، آن‌گاه $\sin\alpha < \tan\alpha$

حال اگر $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ باشد، آن‌گاه $0 < -\alpha < \frac{\pi}{2}$ بنابراین داریم:

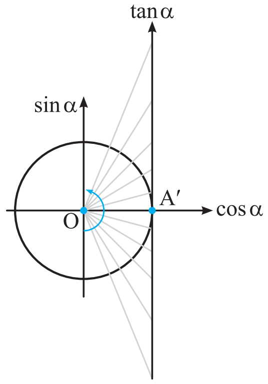
$\boldsymbol{\sin(-\alpha) < \tan(-\alpha) \Rightarrow -\sin\alpha < -\tan\alpha \Rightarrow \tan\alpha < \sin\alpha}$

بنابراین نکتهٔ زیر را داریم:

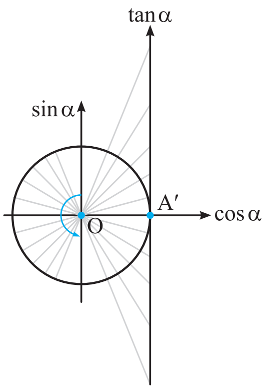
نکتـه آ) اگر α در **ربع اول** باشد، آن‌گاه: $\boldsymbol{\sin\alpha < \tan\alpha}$

ب) اگر α در **ربع چهارم** باشد، آن‌گاه: $\boldsymbol{\tan\alpha < \sin\alpha}$

تغییرات تانژانت



با توجه به شکل مقابل، وقتی زاویهٔ α از $-\frac{\pi}{۲}$ تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر می‌کند، مقدار $\tan\alpha$ افزایش می‌یابد و روند صعودی را طی می‌کند. در واقع $\tan\alpha$ در $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$ تعریف نمی‌شود، اما وقتی زاویهٔ α (در ناحیهٔ چهارم) نزدیک $-\frac{\pi}{۲}$ است، مقدار تانژانت α نزدیک $-\infty$ است، با افزایش α از $-\frac{\pi}{۲}$ به $\frac{\pi}{۲}$، مقدار تانژانت α نیز رفته رفته افزایش می‌یابد و در نزدیکی $\frac{\pi}{۲}$ (در ناحیهٔ اول) به $+\infty$ نزدیک می‌شود.

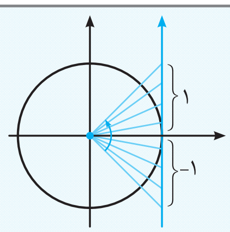


به طریق مشابه مطابق شکل مقابل، وقتی زاویهٔ α از $\frac{\pi}{۲}$ تا $\frac{۳\pi}{۲}$ تغییر می‌کند، باز هم مقدار $\tan\alpha$ از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند.

پس نکتهٔ زیر را داریم:

نکته تابع $f(x)=\tan x$ در نقاط $x=\frac{\pi}{۲}$، $x=\frac{۳\pi}{۲}$ و به طور کلی در $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ $(k\in\mathbb{Z})$ **تعریف نشده** است. همچنین در هر یک از بازه‌های $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$، $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ و به طور کلی در بازهٔ $(k\pi-\frac{\pi}{۲}, k\pi+\frac{\pi}{۲})$ که در آن $k\in\mathbb{Z}$، **صعودی اکید** است و در این بازه‌ها از $-\infty$ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد.

تست: اگر $\tan ۲\alpha = ۲m-۳$ و $-\frac{\pi}{۸}<\alpha<\frac{\pi}{۸}$، حدود m کدام است؟



۱) $-۱<m<۱$ ۲) $-۲<m<-۱$

۳) $۱<m<۲$ ۴) $۲<m<۳$

پاسخ:

$$-\frac{\pi}{۸}<\alpha<\frac{\pi}{۸}\xrightarrow{\times ۲}-\frac{\pi}{۴}<۲\alpha<\frac{\pi}{۴}$$

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی وقتی زاویهٔ ۲α از $-\frac{\pi}{۴}$ تا $\frac{\pi}{۴}$ تغییر می‌کند، مقدار $\tan ۲\alpha$ از -۱ شروع شده و با یک روند افزایشی به عدد ۱ نزدیک می‌شود، سپس می‌توان نوشت:

$$-\frac{\pi}{۴}<۲\alpha<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow -۱<\tan ۲\alpha<۱\Rightarrow -۱<۲m-۳<۱\Rightarrow ۲<۲m<۴\Rightarrow ۱<m<۲\Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) درست است.

نمودار تابع $f(x)=\tan x$

همان‌طور که گفتیم، تابع $f(x)=\tan x$ به ازای $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ $(k\in\mathbb{Z})$ تعریف نمی‌شود و در هر بازه که تعریف شده باشد، صعودی اکید است. با توجه به این مطلب، می‌توان به کمک نقطه‌یابی، نمودار آن را رسم کرد. برای آشنایی با نمودار $y=\tan x$ و روش رسم آن، به مثال زیر توجه نمایید:

مثال: تابع $y=\tan x$ را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ در نظر بگیرید.

آ) جدول زیر را کامل کنید. $(\sqrt{۳}\simeq ۱/۷$ ، $\frac{\sqrt{۳}}{۳}\simeq ۰/۵۸)$

x (رادیان)	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
$y=\tan x$	۰	۰/۵۸													

ب) نقاط به‌دست آمده در جدول فوق را در دستگاه مختصات مشخص کرده و با توجه به این‌که تابع $y=\tan x$ در $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ از این بازه تعریف نشده است، تابع $y=\tan x$ را رسم کنید.

پ) با توجه به نمودار، تعیین کنید آیا تابع $y=\tan x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ یکنوا است؟

پاسخ: آ)

$x=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow y=\tan\frac{\pi}{۴}=۱$ ، $x=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow y=\tan\frac{\pi}{۳}=\sqrt{۳}\simeq ۱/۷$

$x=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow y=\tan\frac{۲\pi}{۳}=\tan(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\tan\frac{\pi}{۳}=-\sqrt{۳}\simeq -۱/۷$

$x=\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow y=\tan\frac{۳\pi}{۴}=\tan(\pi-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$

$x=\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow y=\tan\frac{۵\pi}{۶}=\tan(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\tan\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\simeq -۰/۵۸$

$x=\pi\Rightarrow y=\tan\pi=۰$

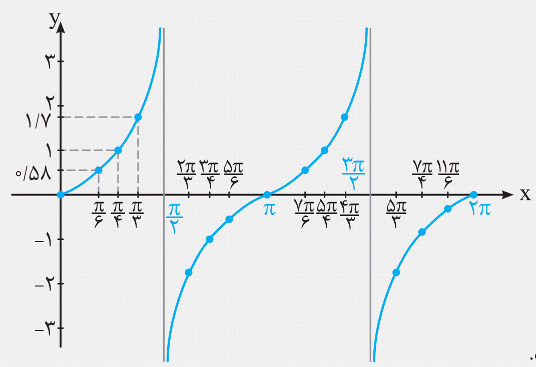
به همین ترتیب داریم:

$\tan(\frac{۷\pi}{۶})\simeq ۰/۵۸$ ، $\tan\frac{۵\pi}{۴}=۱$ ، $\tan\frac{۴\pi}{۳}\simeq ۱/۷$ ، $\tan\frac{۵\pi}{۳}\simeq -۱/۷$ ، $\tan\frac{۷\pi}{۴}=-۱$ ، $\tan\frac{۱۱\pi}{۶}\simeq -۰/۵۸$ ، $\tan ۲\pi=۰$

بنابراین جدول داده‌شده به‌صورت زیر تکمیل می‌شود:

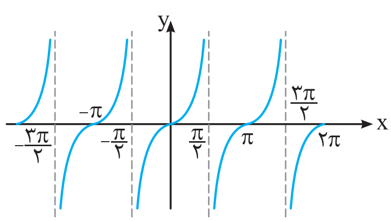
x (رادیان)	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
$y=\tan x$	۰	۰/۵۸	۱	۱/۷	-۱/۷	-۱	-۰/۵۸	۰	۰/۵۸	۱	۱/۷	-۱/۷	-۱	-۰/۵۸	۰

ب) با توجه به این‌که تابع $y=\tan x$ در هر بازه صعودی اکید و در $x=\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ تعریف نشده است، لذا نمودار این تابع به‌صورت مقابل درمی‌آید:

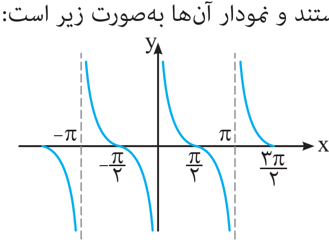


پ) با توجه به نمودار معلوم می‌شود که تابع $y=\tan x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ غیریکنوا است.

نکته با توجه به رابطهٔ $\tan(x+\pi)=\tan x$ و $\cot(x+\pi)=\cot x$، معلوم می‌شود که توابع $f(x)=\tan x$ و $g(x)=\cot x$ متناوب با دورهٔ تناوب $T=\pi$ هستند و نمودار آن‌ها به‌صورت زیر است:



f(x)=tan x



g(x)=cot x

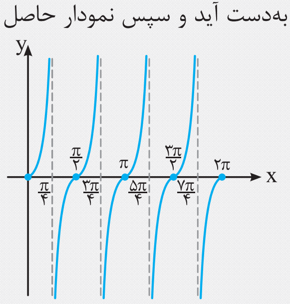
با توجه به نمودارهای فوق، داریم:

$f(x)=\tan x\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{۲}\mid k\in\mathbb{Z}\}$ ، $R_f=\mathbb{R}$, $g(x)=\cot x\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ ، $R_f=\mathbb{R}$

مثال: نمودار توابع زیر را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

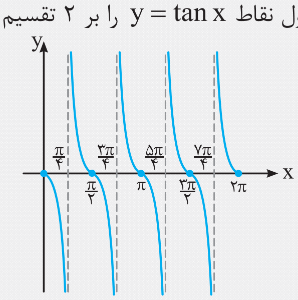
آ) $y=-\tan ۲x$ ب) $y=\frac{۱}{۲}\cot\frac{x}{۲}$

پاسخ: آ) ابتدا طول نقاط $y=\tan x$ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نمودار $y=\tan ۲x$ به‌دست آید و سپس نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



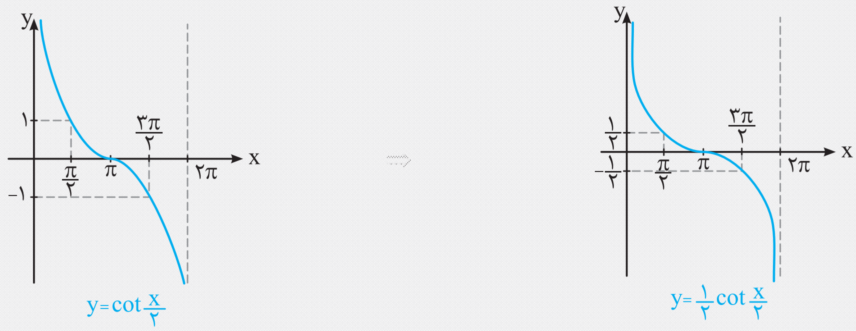
y=tan ۲x

$\Rightarrow$



y=-tan ۲x

ب) ابتدا طول نقاط $y=\cot x$ را در عدد ۲ ضرب کرده و سپس عرض همهٔ نقاط حاصل را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم:



خلاصه فصل هشتم: قسمت ششم: «تناوب و توابع مثلثاتی»

توابع متناوب و دورهٔ تناوب

تابع متناوب: تابع f را متناوب می‌گوییم، هرگاه عدد حقیقی غیرصفر c موجود باشد که اولاً برای هر $x\in D_f$، مقدار $x\pm c$ نیز متعلق به دامنهٔ تابع f باشد و ثانیاً $f(x\pm c)=f(x)$. به عدد c دورهٔ تناوب تابع f می‌گوییم.

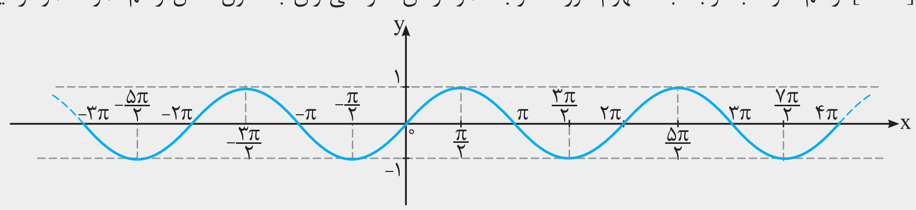
دورهٔ تناوب اصلی: به **کوچک‌ترین** عدد حقیقی و **مثبت** c که در تعریف فوق صدق کند، دورهٔ تناوب اصلی و یا به اختصار دورهٔ تناوب تابع f می‌گوییم و آن را با T نمایش می‌دهیم.

نکته اگر a، b، c و d اعداد حقیقی و $a,b\neq 0$ باشند، در این‌صورت:

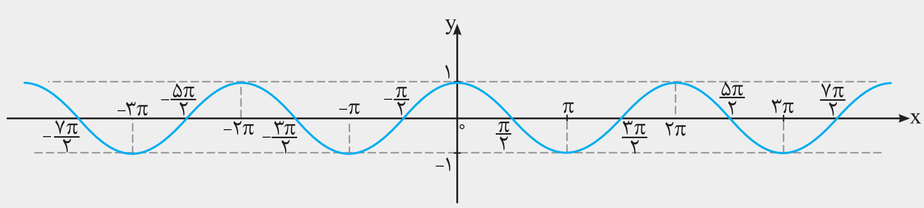
$$\begin{cases} y=a\sin(bx+c)+d \\ y=a\cos(bx+c)+d \end{cases} \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|b|} \quad , \quad \begin{cases} y=a\tan(bx+c)+d \\ y=a\cot(bx+c)+d \end{cases} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$$

نمودار توابع مثلثاتی $y=\sin x$ و $y=\cos x$

$y=\sin x$ و $y=\cos x$، ساده‌ترین توابع مثلثاتی هستند. از آن‌جایی که دوره تناوب این دو تابع برابر $T=2\pi$ است، لذا اگر نمودار این توابع در یک بازه به طول 2π، مثلاً بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم شود، با توجه به مفهوم دوره تناوب، نمودار آن‌ها را می‌توان به طول کامل رسم نمود. نمودار این توابع به‌صورت زیر است:



$y=\sin x$



$y=\cos x$

به نمودارهای $y=\sin x$ و $y=\cos x$ به ترتیب، موج سینوسی و موج کسینوسی هم گفته می‌شود.

کاربرد توابع مثلثاتی

توابع مثلثاتی در بسیاری از علوم به خصوص علم فیزیک کاربرد فراوان دارند. نمونه‌هایی از این کاربردها که مربوط به روبات‌های صنعتی در صنایع خودروسازی است، در متن درس دیدیم.

نکته به طور کلی در توابع $y=a\sin(bx+d)+c$ و $y=a\cos(bx+d)+c$ $(a,b\neq 0)$ داریم:

$$\max=|a|+c \quad , \quad \min=-|a|+c$$

هم‌چنین عدد c همواره **میانگین** مقادیر ماکسیمم و مینیمم است. یعنی:

$$c=\frac{\max+\min}{2}$$

نکته آ) نمودار تابع به شکل $y=a\cos(bx)+c$، همواره دارای مینیمم یا ماکسیمم روی محور yها است. هم‌چنین اگر تابع روی محور yها دارای ماکسیمم باشد، $a>0$ و چنانچه روی محور yها دارای مینیمم باشد، $a<0$ خواهد بود.

ب) اگر نمودار تابع به شکل $y=a\sin(bx)+c$، در سمت راست محور yها و از چپ به راست، ابتدا دارای ماکسیمم و سپس دارای مینیمم باشد، در این صورت a و b هم‌علامت هستند و چنانچه ابتدا دارای مینیمم و سپس دارای ماکسیمم باشد، آنگاه a و b مختلف‌العلامه می‌باشند.

نکته اگر f تابعی متناوب و T دورهٔ تناوب اصلی آن باشد، آن‌گاه برای هر عدد طبیعی n داریم: $f(x\pm nT)=f(x)$

نکته (ویژهٔ علاقمندان) به طور کلی اگر a، b، c و d اعداد حقیقی و $a,b\neq 0$ باشند و n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} y=a\sin^{2n}(bx+c)+d \\ y=a\cos^{2n}(bx+c)+d \\ y=a\tan^{n}(bx+c)+d \\ y=a\cot^{n}(bx+c)+d \end{cases} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$$

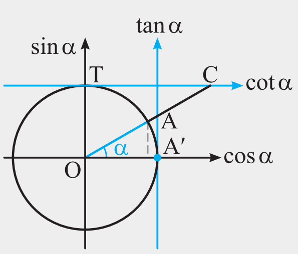
$$\begin{cases} y=a\sin^{2n-1}(bx+c)+d \\ y=a\cos^{2n-1}(bx+c)+d \end{cases} \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|b|}$$

نکته (ویژهٔ علاقمندان) تابع ثابت $f(x)=c$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ متناوب است ولی دورهٔ تناوب اصلی ندارد. توجه کنید که اگر دامنهٔ تابع ثابت f، $\mathbb{R}$ نباشد و نمودار آن دارای نقاط توخالی با فاصله‌های یکسان باشد، آن‌گاه تابع f دارای دورهٔ تناوب اصلی بوده و همان فاصلهٔ مساوی بین دو نقطهٔ توخالی، دورهٔ تناوب اصلی آن است.

محور تانژانت‌ها و محور کتانژانت‌ها

به **محور عمودی** شامل AA' که در نقطهٔ A' بر دایره مماس می‌باشد، **محور تانژانت‌ها** می‌گویند. زیرا اندازهٔ جبری محل تقاطع ضلع پایانی زاویهٔ α با آن محور تا نقطهٔ A' (یعنی AA') بیانگر $\tan\alpha$ است.

تذکر به طریق مشابه در دایرهٔ مثلثاتی مقابل می‌توان ثابت کرد $\cot\alpha = TC$. از این رو به **محور افقی** شامل TC که در نقطهٔ T بر دایرهٔ مثلثاتی مماس است، **محور کتانژانت‌ها** می‌گویند.

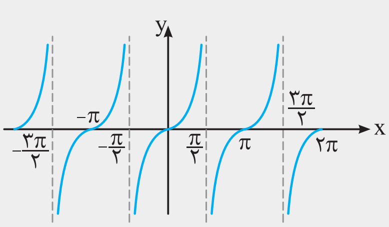


نکته آ) اگر α در **ربع اول** باشد، آن‌گاه: $\sin\alpha<\tan\alpha$

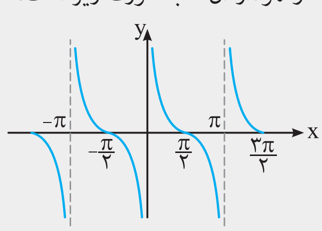
ب) اگر α در **ربع چهارم** باشد، آن‌گاه: $\tan\alpha<\sin\alpha$

نکته تابع $f(x)=\tan x$ در نقاط $x=\frac{\pi}{2}$، $x=\frac{3\pi}{2}$ و به طور کلی در $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ **تعریف نشده** است. هم‌چنین در هر یک از بازه‌های $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$، $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ و به طور کلی در بازهٔ $(k\pi-\frac{\pi}{2}\,,\,k\pi+\frac{\pi}{2})$ که در آن $k\in\mathbb{Z}$، **صعودی اکید** است و در این بازه‌ها از $-\infty$ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد.

نکته با توجه به رابطهٔ $\tan(x+\pi)=\tan x$ و $\cot(x+\pi)=\cot x$ معلوم می‌شود که توابع $f(x)=\tan x$ و $g(x)=\cot x$ متناوب با دورهٔ تناوب $T=\pi$ هستند و نمودار آن‌ها به‌صورت زیر است:



$f(x)=\tan x$



$g(x)=\cot x$

با توجه به نمودارهای فوق، داریم:

$$f(x)=\tan x \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\}\,,\,R_f=\mathbb{R} \quad , \quad g(x)=\cot x \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}\,,\,R_f=\mathbb{R}$$