خرید کتاب های کنکور
با تخفیف ویژه
و
ارسال رایگان
Medabook.com
مدابوک
یک جلسه تماس تلفنی رایگان
با مشاوران رتبه برتر
برای انتخاب بهترین منابع
دبیرستان و کنکور
۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰

فصل ۱

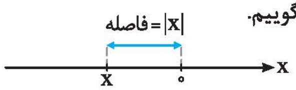
قسمت چهارم
قدرمطلق و ویژگی‌های آن

قدرمطلق

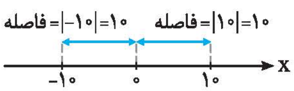
قدرمطلق: تعریف جبری قدرمطلق عدد حقیقی x، به‌صورت مقابل است:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

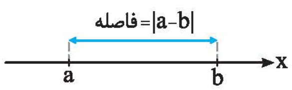
به تعبیر هندسی، به فاصلهٔ نقطهٔ متناظر با عدد حقیقی x، روی محور اعداد حقیقی تا مبدأ مختصات، قدرمطلق x می‌گوییم.



به طور مثال؛ فاصلهٔ نقاط به طول‌های ۱۰ و ۱۰- روی محور اعداد حقیقی تا مبدأ مختصات برابر ۱۰ واحد است. لذا $|-۱۰| = |۱۰| = ۱۰$



به طور کلی فاصلهٔ نقاط متناظر با اعداد حقیقی a و b روی محور اعداد حقیقی از یکدیگر برابر $|a-b|$ است.



نکته قدرمطلق عدد حقیقی x را به‌صورت روبه‌رو نیز می‌توان تعریف کرد:

$$|x| = \sqrt[2k]{x^{2k}} = \mathrm{Max}\{x, -x\} \quad , \quad (k \in \mathbb{N})$$

مثال حاصل هر یک از عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

آ) $|۱-\sqrt{۳}| + |\sqrt{۳}-۳|$ ب) $\sqrt{۴x^2 - ۴x + ۱}$ پ) $\sqrt{۹ - ۴\sqrt{۵}}$ ت) $\sqrt{a^4 + ۶a^2 + ۹}$

پاسخ: آ) $|۱-\sqrt{۳}| + |\sqrt{۳}-۳| \xrightarrow[\sqrt{۳}-۳<۰]{۱-\sqrt{۳}<۰} \sqrt{۳} - ۱ + ۳ - \sqrt{۳} = ۲$

ب) $\sqrt{۴x^2 - ۴x + ۱} = \sqrt{(۲x-۱)^2} = |۲x - ۱|$

پ) $\sqrt{۹ - ۴\sqrt{۵}} = \sqrt{۴ - ۴\sqrt{۵} + ۵} = \sqrt{(۲-\sqrt{۵})^2} = |۲ - \sqrt{۵}| \xrightarrow{۲-\sqrt{۵}<۰} \sqrt{۵} - ۲$

ت) $\sqrt{a^4 + ۶a^2 + ۹} = \sqrt{(a^2+۳)^2} = |a^2 + ۳| \xrightarrow{a^2+۳>۰} a^2 + ۳$

مثال اگر $x^2 \leq x$ باشد، حاصل $A = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - ۲x + ۱}$ را به‌دست آورید.

پاسخ: $x^2 \leq x \Rightarrow x^2 - x \leq ۰ \Rightarrow x(x-۱) \leq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ \leq x \leq ۱$

از رابطهٔ $۰ \leq x \leq ۱$ نتیجه می‌شود که $x - ۱ \leq ۰$ و $x \geq ۰$ و در نتیجه $|x-۱| = ۱ - x$ و $|x| = x$ است. پس:

$$A = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-۱)^2} = |x| + |x-۱| = x + ۱ - x = ۱$$

تست اگر $b < ۰ < a$ و $|a| > |b|$، آن‌گاه حاصل عبارت $A = |a+b| + |a| + |b|$ کدام است؟

۱) $-۲b$ ۲) $-۲a$ ۳) $۲a$ ۴) $۲b$

پاسخ: چون $a > ۰$ و $b < ۰$ است، پس $|a| = a$ و $|b| = -b$. پس داریم: $|a| > |b| \Rightarrow a > -b \Rightarrow a + b > ۰$

بنابراین می‌توان نوشت:

$A = |a+b| + |a| + |b| = a + b + a - b = ۲a \Rightarrow$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

ویژگی‌های قدرمطلق

با استفاده از تعریف قدرمطلق، می‌توان ویژگی‌های مهمی را برای قدرمطلق ارائه نمود. ابتدا در زیر مهم‌ترین ویژگی‌های قدرمطلق را آورده و در ادامه به اثبات برخی از این ویژگی‌ها خواهیم پرداخت.

۱) می‌دانیم فاصلهٔ هر عدد حقیقی از مبدأ مختصات، عددی نامنفی است. پس برای هر عدد حقیقی x داریم: $|x| \geq 0$

۲) از آن‌جایی که $x^2 \geq 0$، پس برای هر عدد حقیقی x داریم: $|x^2| = x^2$

۳) برای هر عدد حقیقی x داریم: $|x| = |-x|$

و برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم: $|a-b| = |b-a|$

۴) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $|xy| = |x| \cdot |y|$

و به طورکلی برای هر $x \in \mathbb{R}$ و هر $n \in \mathbb{N}$ می‌توان نوشت: $|x^n| = |x|^n$

۵) برای هر دو عدد حقیقی x و y به طوری‌که $y \neq 0$، داریم: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

۶) برای هر عدد حقیقی x داریم: $-|x| \leq x \leq |x|$

۷) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$

۸) اگر $a > 0$، آن‌گاه به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم: $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$

۹) اگر $a > 0$، آن‌گاه برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

۱۰) برای هر عدد حقیقی x و هر عدد حقیقی و نامنفی a داریم: $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ یا $x < -a$

توجه کنید که اگر $a < 0$، آن‌گاه رابطهٔ $|x| > a$ همواره برقرار است، یعنی $x \in \mathbb{R}$ می‌باشد.

۱۱) برای هر دو عدد حقیقی a و b به طوری‌که $b > 0$ و هر عدد حقیقی x داریم:

$$a < |x| < b \Leftrightarrow \begin{cases} a < x < b \\ \text{یا} \\ -b < x < -a \end{cases}$$

۱۲) **(نامساوی مثلث)** برای هر دو عدد حقیقی x و y: $|x+y| \leq |x| + |y|$

در نامساوی مثلث حالت تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که x و y هم‌علامت باشند. به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$|x+y| < |x| + |y| \Leftrightarrow xy < 0 \quad , \quad |x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$$

تذکر نامساوی مثلث برای هر تعداد عدد حقیقی نیز قابل تعمیم است. به عبارت دیگر اگر x_1، x_2، $\cdots$ و x_n، اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

بدیهی است که حالت تساوی باز هم زمانی برقرار است که x_iها هم‌علامت باشند.

نتایج نامساوی مثلث

۱) اگر در نامساوی مثلث، به جای y، عبارت $-y$ را جایگزین کنیم، خواهیم داشت: $|x-y| \leq |x| + |y|$

۲) اگر در نامساوی مثلث، به جای x، عبارت $x-y$ را جایگزین کنیم، خواهیم داشت: $|x| - |y| \leq |x-y|$

۳) اگر در نامساوی مثلث، به جای y، عبارت $y-x$ را جایگزین کنیم، خواهیم داشت: $|y| - |x| \leq |x-y|$

۴) از روابط (۲) و (۳) می‌توان نتیجه گرفت: $||x| - |y|| \leq |x-y|$

۵) با تبدیل y به $-y$ در روابط $|x| - |y| \leq |x-y|$ و $||x| - |y|| \leq |x-y|$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$||x| - |y|| \leq |x+y| \quad , \quad |x| - |y| \leq |x+y|$$

اکنون برخی از ویژگی‌های قدرمطلق را ثابت می‌کنیم:

مثال برای هر دو عدد دلخواه x و y ثابت کنید $|xy| = |x||y|$ و سپس نتیجه بگیرید که اگر $y \neq 0$، آن‌گاه $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

پاسخ: می‌دانیم $|a| = \sqrt{a^2}$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$$

در رابطهٔ $|xy| = |x||y|$، با تبدیل y به $\frac{1}{y}$ $(y \neq 0)$، خواهیم داشت:

$$\left|x \times \frac{1}{y}\right| = |x| \times \left|\frac{1}{y}\right| \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

مثال اگر $a>0$ باشد، ثابت کنید: $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$

پاسخ: با توجه به تعریف قدرمطلق، می‌دانیم اگر $x \geq 0$، آن‌گاه $|x|=x$ و چنان‌چه $x<0$، آن‌گاه $|x|=-x$. پس داریم:

$$|x|<a \Leftrightarrow (x\geq 0 , x<a) \text{ یا } (x<0 , -x<a) \Leftrightarrow (0\leq x<a) \text{ یا } (-a<x<0) \Leftrightarrow -a<x<a$$

مثال برای هر عدد حقیقی x، ثابت کنید: $-|x|\leq x\leq |x|$

پاسخ: می‌دانیم اگر $a\geq 0$ باشد، آن‌گاه $-a\leq x\leq a \Leftrightarrow |x|\leq a$. بنابراین از رابطهٔ بدیهی $|x|\leq |x|$ نیز نتیجه می‌شود که:

$$-|x|\leq x\leq |x|$$

مثال نامساوی مثلث را ثابت کنید. یعنی برای هر x و y ثابت کنید: $|x+y|\leq |x|+|y|$

پاسخ: می‌دانیم $-|x|\leq x\leq |x|$ و $-|y|\leq y\leq |y|$، بنابراین با جمع طرفین این دو نامساوی هم‌جهت خواهیم داشت:

$$-(|x|+|y|)\leq x+y\leq |x|+|y| \xrightarrow{-a\leq x\leq a \Leftrightarrow |x|\leq a} |x+y|\leq |x|+|y|$$

تست کم‌ترین مقدار عبارت $A=|x+2|+|x-3|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ: می‌دانیم $|x-3|=|3-x|$. بنابراین با استفاده از نامساوی مثلث خواهیم داشت:

$$A=|x+2|+|3-x|\geq |(x+2)+(3-x)|=5 \Rightarrow A\geq 5$$

پس کم‌ترین مقدار A برابر ۵ بوده و گزینهٔ (۳) صحیح است.

نکتهٔ STP ماکسیمم و مینیمم دو عدد a و b را می‌توان از روابط زیر تعیین کرد:

$$\max\{a,b\}=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2} \quad , \quad \min\{a,b\}=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}$$

نتیجه به کمک روابط فوق می‌توان نشان داد: $\max\{a,b\}+\min\{a,b\}=a+b$

تست کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ $A=\{4x-1, 7-4x\}$ کدام است؟

۱) $1-|x-1|$ ۲) $3-4|x-1|$ ۳) $1+|x-1|$ ۴) $3+4|x-1|$

پاسخ: با استفاده از رابطهٔ $\min\{a,b\}=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}$ داریم:

$$\min A=\min\{4x-1,7-4x\}=\frac{4x-1+7-4x}{2}-\frac{|4x-1-7+4x|}{2}=3-4|x-1| \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

معادلات شامل قدرمطلق

معادلات قدرمطلقی: جواب‌های معادلهٔ $|f(x)|=|g(x)|$، همان جواب‌های $f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$ روی هم هستند. به معادلاتی نظیر این معادله که شامل عبارت قدرمطلق هستند، معادلات قدرمطلقی گویند.

روش حل معادلات قدرمطلقی: در حالت کلی برای حل معادلات شامل قدرمطلق به روش جبری، ابتدا عبارات درون قدرمطلق‌ها را در همسایگی ریشه‌های درون قدرمطلق‌ها تعیین علامت کرده و قدرمطلق‌ها را برمی‌داریم، سپس معادلهٔ حاصل که فاقد قدرمطلق می‌باشد را حل کرده و مقدار متغیر را به‌دست می‌آوریم. جواب یا جواب‌های به‌دست آمده وقتی قابل قبول هستند که در ناحیهٔ مورد نظر باشند.

نکته علاوه‌بر روش فوق، در حل معادلات شامل قدرمطلق می‌توان از روابط زیر استفاده نمود:

۱) $|u|=|v| \Rightarrow u=\pm v$ ۲) $|u|=a \xrightarrow{a\geq 0} u=\pm a$

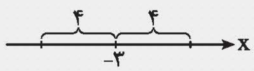
۳) $|u|=u \Rightarrow u\geq 0$ ۴) $|u|=-u \Rightarrow u\leq 0$

۵) $|u|+|v|=|u+v| \Rightarrow u.v\geq 0$

مثال نقاطی روی محور اعداد حقیقی بیابید که فاصلهٔ آن نقاط از نقطهٔ ۳- روی محور اعداد حقیقی برابر ۴ باشد؟

(مشابه مسئلهٔ صفحهٔ ۲۶ کتاب درسی)

پاسخ : می‌دانیم فاصلهٔ نقاط متناظر با اعداد حقیقی a و b روی محور اعداد حقیقی از یکدیگر برابر $|a-b|$ است. بنابراین اگر طول نقطهٔ جواب مسئله را x بنامیم، بنابر فرض داریم:



$$|x-(-۳)|=۴ \Rightarrow |x+۳|=۴ \xrightarrow[\;]{|u|=a \xrightarrow{a>۰} u=\pm a} \begin{cases} x+۳=۴ \\ x+۳=-۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ \text{یا} \\ x=-۷ \end{cases}$$

مثال معادلات زیر را حل کنید.

آ) $||x-۲|-۳|=۱$ ب) $|x-۱|=۲x$ پ) $|x^۲-۳x|+x^۲-۳x=۰$

ت) $|۳x-۲|+|۳-x|=|۲x+۱|$ ث) $|۳x+۱|-|x|=x+۲$

پاسخ : آ) با استفاده از رابطهٔ $|u|=a \xrightarrow{a\geq ۰} u=\pm a$، داریم:

$$||x-۲|-۳|=۱ \Rightarrow \begin{cases} |x-۲|-۳=۱ \\ |x-۲|-۳=-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-۲|=۴ \\ |x-۲|=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-۲=\pm ۴ \\ x-۲=\pm ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۶ \text{ یا } x=-۲ \\ x=۴ \text{ یا } x=۰ \end{cases}$$

ب) با فرض $۲x\geq ۰$ یا $x\geq ۰$ داریم:

$$|x-۱|=۲x \Rightarrow \begin{cases} x-۱=۲x \\ x-۱=-۲x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

توجه کنید که باید $x\geq ۰$، لذا $x=-۱$ نمی‌تواند جواب معادله باشد و $x=\frac{۱}{۳}$ تنها جواب این معادله است.

پ) می‌دانیم اگر $|u|=-u$، آن‌گاه $u\leq ۰$. پس داریم:

$$|x^۲-۳x|+x^۲-۳x=۰ \Rightarrow |x^۲-۳x|=-(x^۲-۳x) \Rightarrow x^۲-۳x\leq ۰ \Rightarrow x(x-۳)\leq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰\leq x\leq ۳$$

ت) اگر قرار دهیم $u=۳x-۲$ و $v=۳-x$، آن‌گاه $u+v=۲x+۱$. در نتیجه در این معادله رابطهٔ $|u|+|v|=|u+v|$ برقرار است و این یعنی این‌که در نامساوی مثلث، حالت تساوی اتفاق افتاده است. پس باید u و v هم‌علامت باشند. به عبارت دیگر داریم:

$$uv\geq ۰ \Rightarrow (۳x-۲)(۳-x)\geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{۲}{۳}\leq x\leq ۳$$

ث) این معادله را به کمک تعیین علامت عبارات درون قدرمطلق‌ها حل می‌کنیم.

x	$-\infty$ $\quad -\frac{۱}{۳}$	$\quad ۰$	$+\infty$
۳x+۱	− ۰	+	+
x	−	− ۰	+

با توجه به جدول مقابل، به کمک حالت‌بندی، معادله را حل می‌کنیم:

حالت اول: $x<-\frac{۱}{۳}$، در این حالت هر دو عبارت $۳x+۱$ و x منفی هستند. پس:

$$-(۳x+۱)-(-x)=x+۲ \Rightarrow -۳x=۳ \Rightarrow x=-۱$$

چون $x=-۱$ در محدودهٔ $x<-\frac{۱}{۳}$ قرار دارد، پس $x=-۱$ یکی از جواب‌های این معادله است.

حالت دوم: $-\frac{۱}{۳}\leq x<۰$، در این حالت عبارت $۳x+۱$ مثبت ولی x منفی است. پس:

$$۳x+۱-(-x)=x+۲ \Rightarrow ۳x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

چون $x=\frac{۱}{۳}$ در محدودهٔ $-\frac{۱}{۳}\leq x<۰$ قرار ندارد، پس $x=\frac{۱}{۳}$ قابل قبول نیست.

حالت سوم: $x\geq ۰$، در این حالت هر دو عبارت $۳x+۱$ و x مثبت هستند. پس:

$$۳x+۱-x=x+۲ \Rightarrow x=۱$$

چون $x=۱$ در محدودهٔ $x\geq ۰$ قرار دارد، پس $x=۱$ نیز جواب معادله بوده و در نتیجه در کل این معادله دو جواب دارد.

مثال معادلهٔ $|۲x-۳|=|x+۱|$ را به دو روش جبری حل کنید.

(مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۲۶ کتاب درسی)

پاسخ : روش اول: با استفاده از ویژگی $|u|=|v| \Rightarrow u=\pm v$، داریم:

$$|۲x-۳|=|x+۱| \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۳=x+۱ \\ ۲x-۳=-x-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ ۳x=۲ \Rightarrow x=\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

روش دوم: طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم. از آن‌جایی که $|u^۲|=u^۲$ است، داریم:

$$|۲x-۳|=|x+۱| \xrightarrow{\text{توان ۲}} (۲x-۳)^۲=(x+۱)^۲ \Rightarrow (۲x-۳)^۲-(x+۱)^۲=۰$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (۲x-۳-x-۱)(۲x-۳+x+۱)=۰ \Rightarrow (x-۴)(۳x-۲)=۰ \Rightarrow x=۴ \text{ یا } x=\frac{۲}{۳}$$

مثال

معادلهٔ $\dfrac{۳-۲x}{|x-۲|}=۱$ را به سه روش حل کنید. (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۲۶ کتاب درسی)

پاسخ : با فرض $x \neq ۲$، معادله را می‌توان به‌صورت $|x-۲|=۳-۲x$ نوشت.

روش اول: با استفاده از تعریف قدرمطلق، عبارت درون قدرمطلق را تعیین علامت کرده و سپس معادله را حل می‌کنیم، با توجه به جدول دو حالت را در نظر می‌گیریم:

x		۲	
x-۲	-	۰	+

حالت اول: $x<۲$، در این حالت $x-۲$ منفی است. پس $|x-۲|=۲-x$ می‌باشد، در نتیجه:
$$|x-۲|=۳-۲x \Rightarrow ۲-x=۳-۲x \Rightarrow x=۱$$

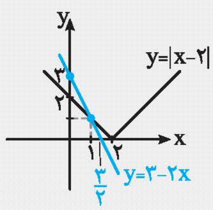
با توجه به این‌که $x=۱$ در شرط $x<۲$ صدق می‌کند، آن را می‌پذیریم.

حالت دوم: $x \geq ۲$، در این حالت $x-۲$ مثبت است. پس $|x-۲|=x-۲$. در نتیجه:
$$|x-۲|=۳-۲x \Rightarrow x-۲=۳-۲x \Rightarrow ۳x=۵ \Rightarrow x=\frac{۵}{۳}$$

چون $x=\frac{۵}{۳}$ در شرط $x \geq ۲$ صدق نمی‌کند، پس این جواب قابل قبول نیست.

روش دوم: با استفاده از ویژگی $|u|=a \xrightarrow{a\geq ۰} u=\pm a$ داریم:
$$|x-۲|=۳-۲x \xrightarrow{۳-۲x\geq ۰} \begin{cases} x-۲=۳-۲x \\ x-۲=۲x-۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳x=۵ \\ -x=-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۵}{۳} \\ x=۱ \end{cases}$$

به ازای $x=\frac{۵}{۳}$، عبارت $۳-۲x$ منفی می‌شود و در نتیجه معادلهٔ $|x-۲|=۳-۲x$ برقرار نمی‌باشد.



روش سوم: از روش هندسی حل معادله استفاده می‌کنیم. برای این منظور نمودار $y=|x-۲|$ را به کمک انتقال نمودار $y=|x|$، به اندازهٔ دو واحد در جهت مثبت محور xها، به همراه نمودار $y=۳-۲x$، در یک دستگاه رسم می‌کنیم.

با توجه به شکل، دو نمودار همدیگر را فقط در یک نقطه و آن هم در $x=۱$ که در روش‌های قبل به‌دست آوردیم، قطع می‌کنند. پس این معادله تنها یک جواب $x=۱$ را دارد.

تست

مجموعه جواب نامعادلهٔ $\max\{x,-x\}+|۲-x|=۲$ برابر بازهٔ $[a,b]$ است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ : می‌دانیم $|x|=\max\{x,-x\}$. بنابراین باید معادلهٔ $|x|+|۲-x|=۲$ را حل کنیم. اگر قرار دهیم $u=x$ و $v=۲-x$، آن‌گاه $u+v=۲$ است، چون $|۲|=۲$، بنابراین رابطهٔ $|u|+|v|=|u+v|$ برقرار است. پس در نامساوی مثلث حالت تساوی اتفاق افتاده است. لذا باید داشته باشیم:
$$uv \geq ۰ \Rightarrow x(۲-x)\geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰\leq x \leq ۲ \Rightarrow x\in[۰,۲]$$

پس بیش‌ترین مقدار $b-a$ برابر ۲ بوده و در نتیجه گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست

معادلهٔ $|x^۲-x-۲|=-|x^۳+x-۱۰|$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ : معادلهٔ داده شده را می‌توان به‌صورت $|x^۲-x-۲|+|x^۳+x-۱۰|=۰$ نوشت. چون مجموع دو عبارت نامنفی صفر شده است، پس لازم است هر یک از دو عبارت صفر شود. بنابراین $x=a$ وقتی جواب این معادله است که جواب مشترک هر دو معادلهٔ $|x^۲-x-۲|=۰$ و $|x^۳+x-۱۰|=۰$ باشد. در نتیجه کافی است، معادلهٔ ساده‌تر را حل کرده و پس از یافتن جواب‌های آن در دیگری امتحان کنیم. اگر در معادلهٔ دیگری صدق کند، جواب معادله محسوب می‌شود. در این سؤال معادلهٔ $|x^۲-x-۲|=۰$ را که ساده‌تر است، حل می‌کنیم:
$$|x^۲-x-۲|=۰ \Rightarrow x^۲-x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \text{ یا } x=-۱$$

از این میان فقط $x=۲$ در معادلهٔ $|x^۳+x-۱۰|=۰$ صدق می‌کند. پس معادله تنها یک جواب دارد. در نتیجه گزینهٔ (۲) صحیح است.

نامعادلات شامل قدرمطلق

در حالت کلی برای حل نامعادلات شامل قدرمطلق، ابتدا عبارات درون قدرمطلق‌ها را با توجه به ریشهٔ آن‌ها تعیین علامت نموده، سپس در هر بازه پس از برداشتن قدرمطلق‌ها، نامعادله را حل می‌کنیم. مجموعه جواب به‌دست‌آمده در هر حالت را با شرایط اولیهٔ آن حالت، یعنی شرطی که اعمال کرده‌ایم تا قدرمطلق‌ها را برداریم، اشتراک گرفته و در نهایت از مجموعه جواب‌های حالت‌هایی که در نظر گرفته‌ایم اجتماع می‌گیریم.

نکته در حل نامعادلات شامل قدرمطلق، علاوه‌بر روش فوق، استفاده از روابط زیر می‌تواند مفید واقع شود:

۱) $|u|<a \xrightarrow{a>۰} -a<u<a$

۲) $|u|>a \xrightarrow{a\geq ۰} u>a$ یا $u<-a$

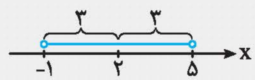
۳) $|u|<|v| \Leftrightarrow u^۲<v^۲ \Leftrightarrow (u-v)(u+v)<۰$

۴) $a<|u|<b \xrightarrow{b>۰} a<u<b$ یا $-b<u<-a$

۵) $|u+v|<|u|+|v| \Leftrightarrow uv<۰$

مثال عبارت «فاصلهٔ بین x و عدد ۲ روی محور اعداد حقیقی کم‌تر از ۳ است.» را با استفاده از نماد قدرمطلق به‌صورت یک نامساوی بنویسید و سپس جواب آن را روی محور اعداد نمایش دهید. (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی)

پاسخ: می‌دانیم فاصلهٔ x تا عدد ۲ روی محور اعداد حقیقی برابر $|x-۲|$ است. طبق فرض، این فاصله کم‌تر از ۳ می‌باشد. پس $|x-۲|<۳$. با استفاده از ویژگی $|u|<a \xleftrightarrow{a>۰} -a<u<a$، داریم:



$$|x-۲|<۳ \Rightarrow -۳<x-۲<۳ \Rightarrow -۱<x<۵$$

مثال نامعادلات زیر را حل کنید.

آ) $|۳x-۱|\leq ۲$ ب) $|x+۱|>۲x$ پ) $|۳x+۲|\leq|۲x-۱|$

ت) $x<|۲x-۱|<۳$ ث) $|۲x-۳|<|x-۵|+|x+۲|$ ج) $۲|x-۱|+|x|<۳$

پاسخ: آ) با استفاده از رابطهٔ $|u|\leq a \xrightarrow{a\geq ۰} -a\leq u\leq a$، داریم:

$$|۳x-۱|\leq ۲ \Rightarrow -۲\leq ۳x-۱\leq ۲ \Rightarrow -۱\leq ۳x\leq ۳ \Rightarrow -\frac{۱}{۳}\leq x\leq ۱$$

ب) اگر $x\leq ۰$ باشد که رابطه همواره برقرار است. لذا با فرض $x>۰$ و براساس ویژگی $|u|>a \xrightarrow{a\geq ۰} u>a$ یا $u<-a$، می‌توان نوشت:

$$|x+۱|>۲x \Rightarrow \begin{cases} x+۱>۲x \\ x+۱<-۲x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<۱ \\ x<-\frac{۱}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع می‌گیریم}} x<۱$$

این جواب شامل $x\leq ۰$ نیز هست.

پ) چون طرفین نامعادله نامنفی است، لذا طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$|۳x+۲|\leq|۲x-۱| \xrightarrow{\text{توان ۲}} (۳x+۲)^۲\leq(۲x-۱)^۲ \Rightarrow (۳x+۲)^۲-(۲x-۱)^۲\leq ۰$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}} ((۳x+۲)+(۲x-۱))((۳x+۲)-(۲x-۱))\leq ۰ \Rightarrow (۵x+۱)(x+۳)\leq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۳\leq x\leq -\frac{۱}{۵}$$

ت) بنابر رابطهٔ $a<|u|<b \xrightarrow{b>۰} a<u<b$ یا $-b<u<-a$ می‌توان نوشت:

$$x<|۲x-۱|<۳ \Rightarrow \begin{cases} x<۲x-۱<۳ \\ \text{یا} \\ -۳<۲x-۱<-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱<x<۲ \\ \text{یا} \\ -۱<x<\frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow x\in(-۱,\frac{۱}{۳})\cup(۱,۲)$$

ث) اگر قرار دهیم $u=x-۵$ و $v=x+۲$، آن‌گاه $u+v=۲x-۳$. لذا رابطهٔ $|u+v|<|u|+|v|$ برقرار است. بنابراین در نامساوی مثلث حالت تساوی حذف شده است. پس لازم است u و v مختلف‌العلامت باشند. به عبارت دیگر باید داشته باشیم:

$$uv<۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۵)<۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۲<x<۵$$

ج) این نامعادله را به کمک تعیین علامت عبارات درون قدرمطلق‌ها و با استفاده از حالت‌بندی حل می‌کنیم:

x	$-\infty$ ۰	۱	$+\infty$
x-۱	−	− ۰	+
x	− ۰	+	+

حالت اول: $x<0$؛ در این حالت عبارات x و $x-1$ منفی‌اند. پس: $-2(x-1)-x<3 \Rightarrow -3x<1 \Rightarrow x>-\frac{1}{3}$

حال باید بین شرط اولیهٔ $x<0$ و مجموعه جواب $x>-\frac{1}{3}$ اشتراک بگیریم که به‌دست می‌آید: $-\frac{1}{3}<x<0 \quad (1)$

حالت دوم: $0\le x<1$؛ در این حالت داریم: $-2(x-1)+x<3 \Rightarrow -x<1 \Rightarrow x>-1$

با اشتراک‌گیری بین مجموعه جواب نامعادلات $0\le x<1$ و $x>-1$، به‌دست می‌آید: $0\le x<1 \quad (2)$

حالت سوم: $x\ge 1$؛ در این حالت هر دو عبارت x و $x-1$ مثبت‌اند. پس: $2(x-1)+x<3 \Rightarrow 3x<5 \Rightarrow x<\frac{5}{3}$

اگر بین مجموعه جواب نامعادلات $x\ge 1$ و $x<\frac{5}{3}$، اشتراک بگیریم، خواهیم داشت: $1\le x<\frac{5}{3} \quad (3)$

اکنون بین مجموعه جواب روابط (۱)، (۲) و (۳) اجتماع می‌گیریم که در این صورت مجموعه جواب معادله با بازهٔ $(-\frac{1}{3},\frac{5}{3})$ برابر خواهد بود.

تست

اگر نامعادلات $|2x+3|<x+2$ و $a<3x+2<b$ معادل یکدیگر باشند، $a+b$ کدام است؟

۱) -5 ۲) -4 ۳) 1 ۴) 3

پاسخ: اگر $x+2\le 0$، نامعادلهٔ اول نادرست است. بنابراین با فرض $x+2>0$، داریم:

$$|2x+3|<x+2 \Rightarrow -x-2<2x+3<x+2 \Rightarrow \begin{cases}2x+3<x+2\\ -x-2<2x+3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<-1\\ -\frac{5}{3}<x\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک می‌گیریم}} -\frac{5}{3}<x<-1$$

چون مجموعه جواب به‌دست‌آمده در شرط $x+2>0$ و یا $x>-2$ صدق می‌کند، لذا قابل قبول بوده و داریم:

$$-\frac{5}{3}<x<-1 \xrightarrow{\times 3} -5<3x<-3 \xrightarrow{+2} -3<3x+2<-1$$

بنابراین $a=-3$ و $b=-1$ و در نتیجه $a+b=-4$. پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

نکته STP اگر $a<x<b$، آن‌گاه $|x|<\max\{|a|,|b|\}$

به طور مثال، اگر $-5<x<2$ باشد، آن‌گاه $|-5|=5$ و $|2|=2$ و در نتیجه $|x|<5$. در واقع داریم:

$$-5<x<2 \Rightarrow -5<x<2<5 \Rightarrow -5<x<5 \Rightarrow |x|<5$$

هم‌چنین عدد ۵ کوچک‌ترین مقداری است که $|x|$ از آن کم‌تر است.

تست

اگر از رابطهٔ $2x^2<5-3x$ نتیجه شود $|x|<k$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار k کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ:

$$2x^2<5-3x \Rightarrow 2x^2+3x-5<0 \Rightarrow (x-1)(2x+5)<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -\frac{5}{2}<x<1$$

$$\xrightarrow{\text{بنابر نکتهٔ قبل}} |x|<\max\{|-\frac{5}{2}|,|1|\}=\frac{5}{2} \Rightarrow |x|<\frac{5}{2}$$

بنابراین کم‌ترین مقدار k برابر $\frac{5}{2}$ است و لذا گزینهٔ (۳) صحیح است.

نکته به کمک تعریف قدرمطلق و با استفاده از تعیین علامت عبارت‌های درون قدرمطلق‌ها، یک تابع شامل قدرمطلق را می‌توان بدون استفاده از نماد قدرمطلق و به‌صورت یک تابع چندضابطه‌ای نوشت.

مثال

با استفاده از تعیین علامت، ضابطهٔ هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی)

آ) $f(x)=x|x-1|$ ب) $f(x)=|x+1|+|x-2|$

پاسخ: آ) عبارت درون قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$ ۱ $+\infty$
x-1	− ۰ +

با توجه به جدول، عبارت $x-1$ برای $x<1$، منفی است. پس در این حالت $|x-1|=1-x$ و برای هر $x\ge 1$، $x-1$ نامنفی است. پس در این حالت $|x-1|=x-1$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(x)=\begin{cases}x(x-1) & x\ge 1\\ x(1-x) & x<1\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^2-x & x\ge 1\\ x-x^2 & x<1\end{cases}$$

ب) عبارت‌های درون قدرمطلق‌ها را در یک جدول تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x+۱		−	۰	+		+	
x−۲		−		−	۰	+	

با توجه به جدول می‌توان نوشت:

$$f(x)=\begin{cases}(-x-1)+(2-x) & x<-1\\ (x+1)+(2-x) & -1\le x\le 2\\ (x+1)+(x-2) & x>2\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}1-2x & x<-1\\ 3 & -1\le x\le 2\\ 2x-1 & x>2\end{cases}$$

رسم نمودار توابع شامل قدرمطلق

در حالت کلی، برای رسم نمودار توابع شامل قدرمطلق می‌توان به کمک تعیین علامت عبارات درون قدرمطلق‌ها، تابع مفروض را به یک تابع چندضابطه‌ای تبدیل نموده و در نهایت نمودار هر یک از ضابطه‌ها را روی دامنهٔ مربوط به آن رسم نمود.

مثال

نمودار توابع زیر را رسم کنید.

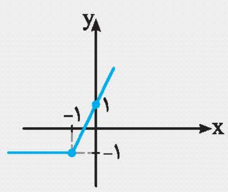
آ) $f(x)=x+|x+1|$ ب) $f(x)=2x-|x-1|+\dfrac{|x|}{x}$

پاسخ: آ) با توجه به جدول زیر، ابتدا تابع f را به‌صورت یک تابع دوضابطه‌ای نوشته و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
x+۱		−	۰	+	

$$f(x)=\begin{cases}x-x-1 & x<-1\\ x+x+1 & x\ge -1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-1 & x<-1\\ 2x+1 & x\ge -1\end{cases}$$

برای رسم نمودار f، کافی است نمودار $y=-1$ را در بازهٔ $(-\infty,-1)$ و نمودار $y=2x+1$ را در بازهٔ $[-1,+\infty)$ رسم کنیم. بنابراین نمودار f به‌صورت مقابل خواهد بود:

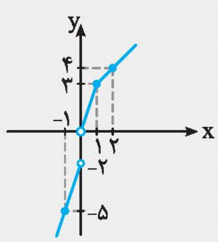


ب) با توجه به جدول زیر، تابع f را به‌صورت یک تابع چندضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x−۱		−		−	۰	+	
x		−	۰	+		+	

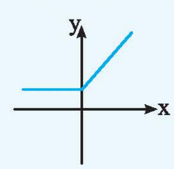
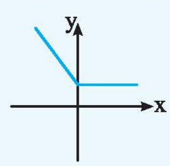
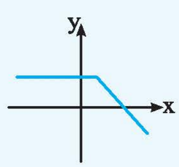
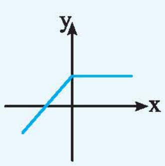
$$f(x)=\begin{cases}2x+x-1+\dfrac{-x}{x} & x<0\\ 2x+x-1+\dfrac{x}{x} & 0<x<1\\ 2x-(x-1)+\dfrac{x}{x} & x\ge 1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}3x-2 & x<0\\ 3x & 0<x<1\\ x+2 & x\ge 1\end{cases}$$

اکنون برای رسم نمودار تابع f کافی است، نمودار $y=3x-2$ را در بازهٔ $(-\infty,0)$، نمودار $y=3x$ را در بازهٔ $(0,1)$ و نمودار $y=x+2$ را در بازهٔ $[1,+\infty)$ رسم کنیم. پس نمودار f به‌صورت مقابل خواهد بود:



تست

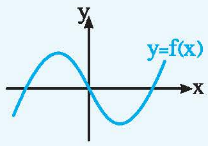
نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-|x||+1$ به کدام صورت است؟

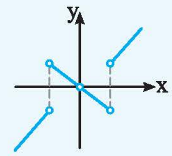
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

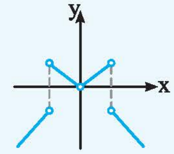
پاسخ: به ازای هر $x\ge 0$، داریم $f(x)=1$. لذا یکی از گزینه‌های (۲) یا (۴) درست است. همچنین به ازای هر $x<0$ داریم $f(x)=-2x+1$. یعنی تابع f برای $x<0$ یک تابع خطی با شیب منفی است و لذا گزینهٔ (۲) صحیح است.

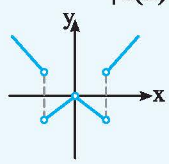
تست

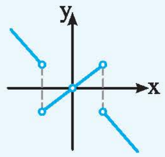
اگر نمودار $f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\dfrac{xf(x)}{|f(x)|}$ به کدام صورت است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ : در بازه‌هایی که $f(x)>۰$ است، یعنی نمودار تابع f بالای محور xها قرار دارد، باید نمودار $y=x$ را رسم کنیم. همچنین در بازه‌هایی که نمودار f زیر محور xها قرار دارد، داریم $|f(x)|=-f(x)$ و لذا باید نمودار $y=-x$ را رسم کنیم. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

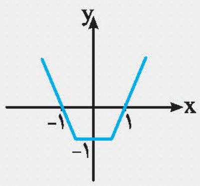
روش رسم نمودار $y=|f(x)|$ به کمک نمودار $y=f(x)$

با توجه به این‌که $y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq ۰ \\ -f(x) & f(x)<۰ \end{cases}$، برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس با توجه به این‌که نمودار $y=-f(x)$ قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور xها است، بخش‌هایی از نمودار $y=f(x)$ که زیر محور xها واقع است را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

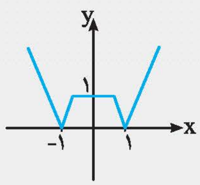
مثال

شکل مقابل نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ است. نمودار $y=|f(x)|$ را رسم کنید.

(مشابه فعالیت ۵ صفحهٔ ۲۷ کتاب درسی)



پاسخ : بخش‌هایی از نمودار f که زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. پس نمودار $y=|f(x)|$ به‌صورت مقابل خواهد بود:

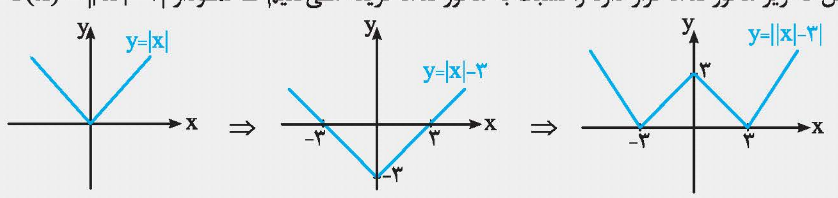


مثال

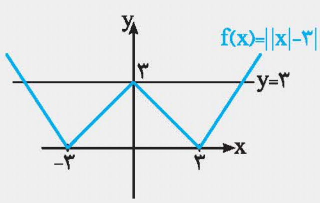
ابتدا نمودار $f(x)=||x|-۳|$ را رسم کنید و سپس معادلهٔ $f(x)=۳$ را به روش هندسی و جبری حل کنید.

(مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی)

پاسخ : برای رسم $f(x)=||x|-۳|$، ابتدا $y=|x|-۳$ را به کمک انتقال نمودار $y=|x|$ به اندازهٔ سه واحد در راستای محور yها به سمت پایین رسم کرده و سپس بخش‌هایی از نمودار حاصل که زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $f(x)=||x|-۳|$ حاصل شود. مراحل رسم در روبه‌رو آمده است:



اکنون نمودارهای $f(x)=||x|-۳|$ و $y=۳$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



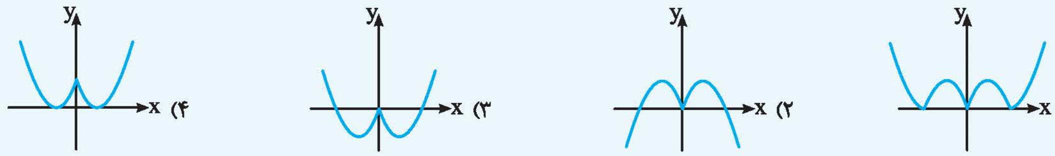
با توجه به شکل، نمودار تابع $f(x)=||x|-۳|$، خط $y=۳$ را در سه نقطه قطع کرده است، پس معادلهٔ $||x|-۳|=۳$ سه ریشه دارد. برای یافتن این ریشه‌ها، به روش جبری عمل می‌کنیم:

$$||x|-۳|=۳ \Rightarrow \begin{cases} |x|-۳=۳ \\ |x|-۳=-۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x|=۶ \\ |x|=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm ۶ \\ x=۰ \end{cases}$$

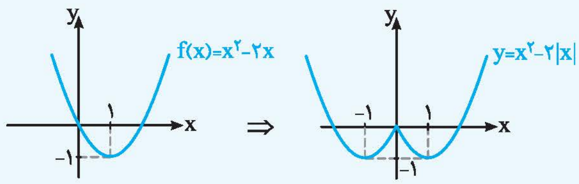
روش رسم نمودار $y=f(|x|)$ به کمک نمودار $y=f(x)$ — ویژهٔ علاقه‌مندان

با توجه به این‌که $y=f(|x|)=\begin{cases} f(x) & x\geq ۰ \\ f(-x) & x<۰ \end{cases}$، برای رسم نمودار $y=f(|x|)$، ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس بخش‌هایی از نمودار $y=f(x)$ که در سمت چپ محور yها قرار دارد را حذف کرده و به جای آن، قرینهٔ آن قسمت از نمودار f که در سمت راست محور yها واقع است را در سمت چپ محور yها نیز رسم می‌کنیم. در واقع باید نمودار تابع $y=f(|x|)$ نسبت به محور yها متقارن باشد.

تست **نمودار تابع $y = x^2 - 2|x|$ به کدام صورت زیر است؟**

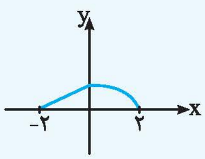


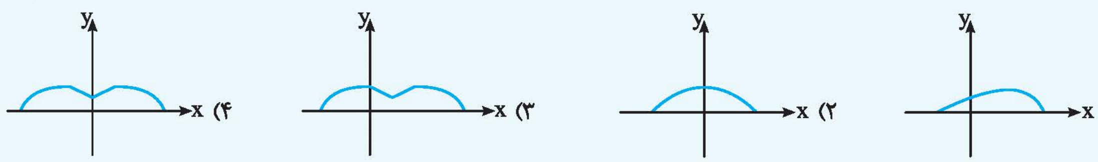
پاسخ: ابتدا نمودار $f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ را رسم کرده، سپس با توجه به توضیحات داده‌شده در مورد نمودار $y = f(|x|)$، نمودار $f(|x|) = x^2 - 2|x|$ را رسم می‌نماییم.



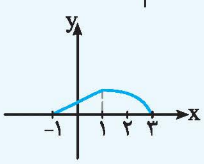
گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست **اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = f(|x|-1)$ به کدام صورت است؟**





پاسخ: نمودار تابع $g(x) = f(x-1)$ به‌صورت مقابل است:



در واقع در این نمودار، نمودار تابع $y = f(x)$ یک واحد به راست منتقل شده است.

بنابراین نمودار تابع $g(|x|) = f(|x|-1)$ به‌صورت نمودار ارائه‌شده در گزینهٔ (۴) درمی‌آید.

روش رسم نمودار توابع به فرم $y = m_1|x-a_1| + m_2|x-a_2| + \cdots + m_n|x-a_n|$

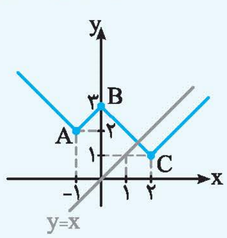
برای رسم نمودار تابع مذکور، ابتدا نقاط به طول‌های $x = a_1$، $x = a_2$، $\cdots$ و $x = a_n$ (ریشه‌های درون قدرمطلق‌ها) را در دستگاه مختصات مشخص نموده و آن‌ها را به ترتیب طول‌هایشان به یکدیگر وصل می‌کنیم. سپس از آخرین نقطهٔ سمت راست خطی به شیب $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ و از اولین نقطهٔ سمت چپ خطی به شیب $m' = -(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)$ رسم می‌کنیم، به گونه‌ای که نمودار حاصل مربوط به یک تابع باشد.

نکته تابع فوق همواره دارای ماکسیمم یا مینیمم (و یا هر دو) می‌باشد که به ازای ریشه‌های درون قدرمطلق‌ها به‌دست می‌آید.

تست **معادلهٔ $|x+1| + |x-2| - |x| = x$ چند جواب دارد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: معادله را به روش هندسی حل می‌کنیم. یعنی نمودار توابع $y_1 = |x+1| + |x-2| - |x|$ و $y_2 = x$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم و تعداد نقاط تلاقی آن‌ها را تعیین می‌نماییم.



برای رسم نمودار $y_1 = |x+1| + |x-2| - |x|$، نقاط به مختصات $A(-1,2)$، $B(0,3)$ و $C(2,1)$ را به ترتیب طول آن‌ها به هم وصل می‌کنیم. توجه کنید که اگر قدرمطلق‌ها برداشته شود، شیب تابع به‌دست آمده، $m = 1$ خواهد بود. پس آخرین نقطهٔ سمت راست را با شیب $m = 1$ و اولین نقطهٔ سمت چپ را با شیب $m = -1$ امتداد می‌دهیم.

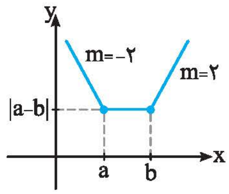
مطابق نمودار رسم‌شده، خط $y_2 = x$ نمودار $y_1 = |x+1| + |x-2| - |x|$ را در یک نقطه قطع می‌کند و لذا معادلهٔ $y_1 = y_2$ فقط یک جواب دارد. پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

در ادامه به بررسی دو تابع مهم و معروف به توابع گلدانی و سرسره‌ای می‌پردازیم که حالت‌های خاصی از تابع به فرم $y = m_1|x-a_1| + m_2|x-a_2| + \cdots + m_n|x-a_n|$ می‌باشند.

آ) بررسی تابع $y=|x-a|+|x-b|$

از آن‌جایی که نمودار این تابع شبیه گلدان است، این تابع به تابع **گلدانی** معروف است.

برای رسم آن، مانند آن‌چه در حالت کلی فوق گفته شد، نقاط به طول‌های $x=a$ و $x=b$ را به یکدیگر وصل نموده و ابتدا و انتهای آن را به ترتیب با شیب $m=-۲$ و $m=۲$ امتداد می‌دهیم. بنابراین با فرض $a<b$ ، نمودار این تابع به‌صورت مقابل خواهد بود:



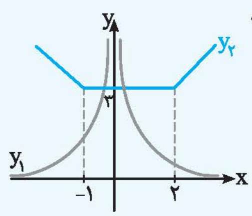
با توجه به نمودار، مینیمم مقدار تابع (کف گلدان) برابر $|a-b|$ است و بنابراین برد این تابع برابر است با: $R_f=[|a-b|,+\infty)$

هم‌چنین خط $x=\frac{a+b}{۲}$ محور تقارن تابع می‌باشد. بدیهی است که اگر $a+b=۰$ باشد، آن‌گاه محور yها محور تقارن تابع خواهد شد.

تست

معادلهٔ $\frac{۱}{x^۲}=|x-۲|+|x+۱|$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳



پاسخ: نمودار توابع $y_۱=\frac{۱}{x^۲}$ و $y_۲=|x-۲|+|x+۱|$ را رسم کرده و تعداد نقاط تلاقی آن‌ها را می‌شماریم. با توجه به نمودار، معادلهٔ داده‌شده دارای دو جواب است. پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

نکته فرض کنید $k\in\mathbb{R}$، در این صورت برای حل معادلهٔ $|x-a|+|x-b|=k$، می‌توان نمودار تابع گلدانی $y=|x-a|+|x-b|$ را با خط $y=k$ تلاقی داد. با توجه به این‌که مینیمم مقدار تابع گلدانی (کف گلدان) برابر $|a-b|$ است، یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد:

آ) اگر $k<|a-b|$، معادله جواب ندارد.

ب) اگر $k=|a-b|$، معادله دارای بی‌شمار جواب است و در واقع مجموعه جواب آن برابر $[a,b]$ است $(a<b)$.

پ) اگر $k>|a-b|$، آن‌گاه معادله دارای دو جواب است و در این حالت جواب‌ها عبارت‌اند از: $x=\frac{a+b\pm k}{۲}$

تست

مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x+۱|+|x-۲|=۵$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: داریم $a=۲$ و $b=-۱$. بنابراین کف گلدان برابر $|a-b|=۳$ و نیز $k=۵$ است. چون $|a-b|<k$، به عبارت دیگر چون کف گلدان پایین‌تر از خط $y=۵$ قرار گرفته است، پس معادله دو جواب دارد که از رابطهٔ $x=\frac{a+b\pm k}{۲}$ به‌دست می‌آید. لذا داریم:

$x=\frac{a+b\pm k}{۲}=\frac{۲-۱\pm ۵}{۲}\Rightarrow x_۱=۳$ یا $x_۲=-۲\Rightarrow x_۱+x_۲=۱\Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست

به ازای کدام مقدار m معادلهٔ $|x+۱|+|x|=۲m-۳$ بی‌شمار جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: داریم $|a-b|=۱$ و $k=۲m-۳$. برای آن‌که معادله دارای بی‌شمار جواب باشد، باید داشته باشیم:

$k=|a-b|\Rightarrow ۲m-۳=۱\Rightarrow m=۲\Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست

به ازای چند مقدار صحیح m، معادلهٔ $|x-m|+|x+۲m-۱|=۲m+۱$ جواب <u>ندارد</u>؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

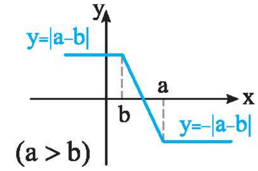
پاسخ: داریم $a=m$ و $b=-۲m+۱$. بنابراین کف گلدان برابر $|a-b|=|۳m-۱|$ و $k=۲m+۱$ است. شرط آن‌که معادله فاقد جواب باشد، آن است که داشته باشیم:

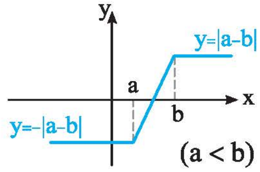
$$|a-b|>k\Rightarrow|۳m-۱|>۲m+۱\Rightarrow\begin{cases}۳m-۱>۲m+۱\\ ۳m-۱<-۲m-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>۲\\ m<۰\end{cases}$$

بنابراین اگر $m\in(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)$، آن‌گاه معادلهٔ فوق جواب ندارد. لذا به ازای بی‌شمار مقدار صحیح m، معادله فاقد جواب است. پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

ب) بررسی تابع $y=|x-a|-|x-b|$

برای رسم این تابع، نقاط به طول‌های $x=a$ و $x=b$ را در دستگاه مختصات به هم وصل کرده و ابتدا و انتهای آن را با شیب $m=۰$ طوری امتداد می‌دهیم که نمودار حاصل، یک تابع را توصیف کند. با فرض مثبت بودن a و b، نمودار این تابع به یکی از دو صورت زیر است:





همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، نمودار این تابع به‌صورت آبشار یا سرسره می‌باشد، لذا این تابع به تابع **آبشاری** یا **سرسره‌ای** نیز معروف است.

با توجه به نمودار، بیش‌ترین مقدار و کم‌ترین مقدار این تابع به ترتیب برابر $|a-b|$ و $-|a-b|$ است و لذا برد این تابع برابر $R_f=[-|a-b|,|a-b|]$ است.

هم‌چنین نقطهٔ $W(\frac{a+b}{۲},۰)$ مرکز تقارن تابع است. بدیهی است که اگر $a+b=۰$ باشد، مبدأ مختصات مرکز تقارن تابع خواهد شد.

تست

برد تابع $f(x)=|x+۲|-|x-۱|$ کدام است؟

۱) $[-۲,۱]$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $[-۲,۲]$ ۴) $[-۳,۳]$

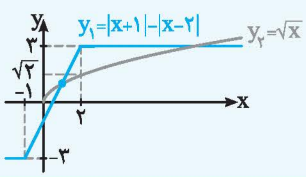
پاسخ: داریم $a=-۲$ و $b=۱$، لذا $|a-b|=۳$ است. بنابراین برد تابع f برابر است با:

$R_f=[-|a-b|,|a-b|]=[-۳,۳]\Rightarrow$ گزینهٔ (۴) صحیح است.

تست

معادلهٔ $|x+۱|-|x-۲|=\sqrt{x}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳



پاسخ: نمودار هر یک از توابع $y_1=|x+۱|-|x-۲|$ و $y_2=\sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار، معادله دارای دو جواب بوده و لذا گزینهٔ (۳) صحیح است.

نکته برای حل معادلهٔ $|x-a|-|x-b|=k$، $(k\in\mathbb{R})$، می‌توان نمودار تابع آبشاری $y=|x-a|-|x-b|$ را با خط $y=k$ تلاقی داد. با توجه به این‌که بیش‌ترین مقدار و کم‌ترین مقدار تابع آبشاری به ترتیب برابر $|a-b|$ و $-|a-b|$ است، یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد:

آ) اگر $-|a-b|<k<|a-b|$ یا $|k|<|a-b|$، معادله یک جواب دارد.

ب) اگر $k=|a-b|$ یا $k=-|a-b|$ و یا به طور معادل اگر $|k|=|a-b|$، آن‌گاه معادله بی‌شمار جواب دارد.

پ) اگر $k<-|a-b|$ یا $k>|a-b|$ و یا به طور معادل اگر $|k|>|a-b|$، معادله جواب ندارد.

تست

معادلهٔ $|x-۲|-|x|=۱$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ: داریم $k=۱$، $a=۲$ و $b=۰$، پس $|a-b|=۲$. چون $-|a-b|<k<|a-b|$، لذا معادله یک جواب دارد و گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست

اگر معادلهٔ $|x+۱|-|x-۲|=m+۱$ بی‌شمار جواب داشته باشد، مجموع مقادیر m کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: داریم $a=-۱$، $b=۲$ و $k=m+۱$. برای این‌که معادله دارای بی‌شمار جواب باشد، باید داشته باشیم:

$$|a-b|=|k|\Rightarrow|m+۱|=۳\Rightarrow\begin{cases}m+۱=۳\\ m+۱=-۳\end{cases}\Rightarrow m=۲ \text{ یا } m=-۴$$

پس مجموع مقادیر m برابر -۲ بوده و لذا گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست

حدود m برای آن‌که معادلهٔ $|x+m+۱|-|x-m|=m$ فاقد جواب باشد، کدام است؟

۱) $-۱<m<-\frac{۱}{۳}$ ۲) $۰<m<\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}<m<۱$ ۴) $-\frac{۱}{۳}<m<۰$

پاسخ: داریم $a=-m-۱$، $b=m$ و $k=m$. برای این‌که معادله فاقد جواب باشد، باید داشته باشیم:

$$|k|>|a-b|\Rightarrow|m|>|۲m+۱|\xrightarrow{\text{توان ۲}}m^۲>(۲m+۱)^۲\Rightarrow(۲m+۱)^۲-m^۲<۰$$

$$\Rightarrow(۲m+۱-m)(۲m+۱+m)<۰\Rightarrow(m+۱)(۳m+۱)<۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}-۱<m<-\frac{۱}{۳}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۷۹. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\sqrt{2x-1+\sqrt{5x^2+4}} = x+1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) صفر

۱۸۰. معادلهٔ $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}=2$ دارای چند ریشه است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☆۱۸۱. معادلهٔ $\sqrt{x^8+1}+\sqrt{x^6+4}+\sqrt{x^2+9}=6$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

☆۱۸۲. معادلهٔ $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

☆۱۸۳. معادلهٔ $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}+x^2-3x+2=0$ چند ریشه دارد؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸۴. حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $\sqrt{x^2+4x+5}=x^2+4x+3$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۴)

۱) -2 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

☆۱۸۵. معادلهٔ $\sqrt{x^2+7x-\sqrt{2x^2+14x}}=2$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☆۱۸۶. معادلهٔ $\sqrt{x^2+x-2}+1=1-\sqrt{2x^3+5x^2-4}$ چند جواب دارد؟

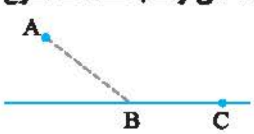
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☆۱۸۷. مجموع ارقام جواب معادلهٔ $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

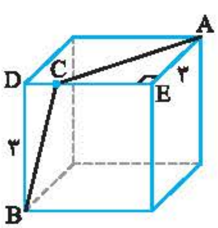
حل مسئله به کمک معادلات گنگ

☆۱۸۸. یک مرغ دریایی در نقطهٔ A به ارتفاع ۳ متر از سطح آب قرار دارد. فاصلهٔ تصویر مرغ روی آب از ماهی که در نقطهٔ C قرار دارد، ۱۰ متر است. مرغ ابتدا از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رود و سپس در سطح آب از B به C می‌رود تا ماهی را شکار کند. اگر مرغ دریایی برای طی هر متر در هوا، ۱۴ کیلوکالری و برای طی هر متر در آب، ۱۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند، نقطهٔ B در چه فاصله‌ای از C می‌تواند باشد تا مرغ روی هم ۱۳۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند؟ (مشابه مسئلهٔ صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی)



۱) ۸/۲۵ ۲) ۷/۷۵ ۳) ۵ ۴) ۴

☆۱۸۹. مطابق شکل، یک عنکبوت در گوشهٔ A از سقف اتاق مکعب شکل که هر ضلع آن ۳ متر است، قرار دارد و می‌خواهد یک حشره را که در گوشهٔ مقابل او (B) روی کف اتاق خوابیده است، شکار کند. عنکبوت مجبور است روی سقف یا کف اتاق و یا دیوارها راه برود و نمی‌تواند پرواز کند، لذا او ابتدا به نقطهٔ C و از آن‌جا به نقطهٔ B می‌رود. اگر عنکبوت $3\sqrt{5}$ متر برای این مسیر طی کرده باشد، فاصلهٔ C از D چند متر است؟



۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۱/۵

قسمت چهارم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن

مفهوم قدرمطلق

☆۱۹۰. بیش‌ترین مقدار مجموعهٔ $\{a, -a\}$ کدام است؟

۱) a ۲) $-a$ ۳) $|a|$ ۴) صفر

☆۱۹۱. اگر $b<0<a$ باشد، حاصل $|a-b|+|a+1|-|1-b|$ چقدر است؟

۱) $2a$ ۲) $2b$ ۳) $2a+2b$ ۴) $2a+2b+2$

☆۱۹۲. کدام رابطه همواره درست نیست؟

۱) $|a+b|\le|a|+|b|$ ۲) $|a|-|b|\ge|a-b|$ ۳) $|a|-|b|\le|a-b|$ ۴) $|a-b|\le|a|+|b|$

☆۱۹۳. اگر رابطهٔ $|x+y+z| \le |x|+|y|+|z|$ به رابطهٔ تساوی تبدیل شود، الزاماً سه عدد غیرصفر x، y و z چگونه‌اند؟ (سراسری تجربی- ۸۶)

۱) مساوی هم ۲) هم‌علامت ۳) مثبت ۴) منفی

۱۹۴. اگر $x^2 \ge 2x$ باشد، حاصل $A=\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-4x+4}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) $2-2x$ ۴) $2x-2$

☆۱۹۵. اگر $2 \ge 3x-x^2$ باشد، حاصل $A=|4x-1|+|x-3|$ برابر کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

☆۱۹۶. اگر فاصلهٔ عدد حقیقی x روی محور اعداد حقیقی تا ۱-، کم‌تر از ۲ باشد، حاصل $A=|x+3|+|x-1|$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۵

۱۹۷. کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=|x-5|+|x+1|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۹۸. کم‌ترین مقدار عبارت $A=|x-1|+|x+2|+2|x-3|$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۹۹. بیش‌ترین مقدار عبارت $A=|x+2|-|x-1|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

★۲۰۰. در بازهٔ $[a,b]$ رابطهٔ $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$ همواره برقرار است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

معادلات قدرمطلق

☆۲۰۱. مجموع مربعات طول نقاطی روی محور اعداد حقیقی که فاصلهٔ آن نقاط روی محور، از عدد ثابت ۳- برابر ۲ باشد، کدام است؟ (مشابه مسئلهٔ صفحهٔ ۲۶ کتاب درسی)

۱) ۱۰ ۲) ۱۳ ۳) ۲۶ ۴) ۲۹

☆۲۰۲. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $||x-1|-2|=3$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰۳. مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x^2+x|=|x^2+3x-2|$ کدام است؟ (مشابه کار در کلاس ۶ صفحهٔ ۲۷ کتاب درسی)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

☆۲۰۴. معادلهٔ $x|x|=kx$ ؛ $(k\neq 0)$، همواره برای x:

۱) حداقل یک جواب دارد. ۲) دو جواب دارد. ۳) جواب ندارد. ۴) سه جواب دارد.

۲۰۵. به ازای کدام مقادیر k، معادلهٔ $||x+2|-2|=k^2-7$ دارای سه جواب است؟

۱) ± 1 ۲) ± 3 ۳) ± 5 ۴) ± 9

★۲۰۶. اگر مجموعه جواب معادلهٔ $|x+1|+|2x+5|=|x+4|$ یک بازه باشد، طول بازه کدام است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$

☆۲۰۷. در مورد معادلهٔ $2|x|+|x-2|=3x-2$ کدام گزینه درست است؟

۱) فقط یک جواب دارد. ۲) فقط دو جواب دارد. ۳) فقط سه جواب دارد. ۴) بی‌شمار جواب دارد.

۲۰۸. از معادلهٔ $2x^2+x+|2x^2+x-3|=3$ نتیجه می‌شود $|x|\le k$. کوچک‌ترین مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

★۲۰۹. اگر اختلاف دو ریشهٔ معادلهٔ $|x+1|+|x-2|=k$ برابر ۷ باشد، k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

★۲۱۰. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $2\max\{x,2\}+\max\{x,-x\}=x+6$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۴

☆۲۱۱. حدود m برای آن‌که معادلهٔ $|x+2|-|x-1|=m-1$ دارای یک جواب باشد، کدام است؟

۱) $0<m<1$ ۲) $-1<m<0$ ۳) $-3<m<-1$ ۴) $-2<m<4$

☆۲۱۲. به ازای چند مقدار m معادلهٔ $|x-m|+|x+m-1|=m+1$ بی‌شمار جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☆۲۱۳. معادلهٔ $\max\{|x|,1-x^2\}=1$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

نامعادلات قدرمطلقی

☆۲۱۴. مجموعه جواب نامعادلهٔ $|2x+3|<5$ به‌صورت بازهٔ (a,b) است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

☆۲۱۵. مجموعه جواب نامعادلهٔ $|2x-3|>x$، شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

☆۲۱۶. اگر معادلهٔ $|x^2-x|+x^2=|x|$ و نامعادلهٔ $|x-\alpha|\le\beta$ معادل باشند، $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) صفر ۴) ۲

☆۲۱۷. در بازه‌ای مقادیر تابع با ضابطهٔ $y=x^2$ کم‌تر از مقادیر تابع با ضابطهٔ $y=|x-2|$ است. آن بازه کدام است؟

۱) $(-2,1)$ ۲) $(-1,0)$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(0,1)$

☆۲۱۸. مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x^2-2x|<x$ کدام بازه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

۱) $(0,1)$ ۲) $(0,3)$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(1,3)$

۲۱۹. از رابطهٔ $|x+1|<1$ نتیجه می‌شود $|3x+2|<k$، کوچک‌ترین مقدار k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۲۰. اگر $|x-1|<2$ باشد، کم‌ترین مقدار k که $\left|\frac{-4}{x+3}\right|<k$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{4}{3}$

۲۲۱. اگر از نامساوی $|x-2|<0/01$، نامساوی $|x^2-4|<m$ نتیجه شود، کم‌ترین مقدار m کدام است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۰/۰۳۰۱ ۲) ۰/۰۳۹۹ ۳) ۰/۰۴۰۱ ۴) ۰/۰۴۹۹

☆۲۲۲. نامعادلهٔ $|x^2-x|<|x|$ با کدام نامعادلهٔ زیر معادل است؟

۱) $|x+1|<1$ ۲) $|x-1|<1$ ۳) $|x|<1$ ۴) $|x|>1$

☆۲۲۳. مجموعه جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{x-2}{2x+1}\right|>1$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۴)

۱) $(-3,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ ۲) $(-2,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},1)$ ۳) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ ۴) $(-3,-\frac{1}{2})$

☆۲۲۴. مجموعه جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{2-x}{2x-3}\right|>1$ به‌صورت کدام بازه است؟ (سراسری تجربی- ۹۵ با کمی تغییر)

۱) $(1,\frac{3}{2})$ ۲) $(1,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},\frac{5}{3})$ ۳) $(\frac{3}{2},\frac{5}{3})$ ۴) $(\frac{5}{3},2)$

۲۲۵. اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $|2x-|x-1||<3$ به‌صورت بازهٔ (a,b) باشد، بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۲

☆۲۲۶. مجموعه جواب نامعادلهٔ $|2x-1|+|x+2|>|3x+1|$ برابر بازهٔ (a,b) است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۳/۵

☆۲۲۷. نمودار تابع $y=4-|x|$ در بازهٔ (a,b) بالاتر از خط به معادلهٔ $x+2y=5$ قرار دارد. بزرگ‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

☆۲۲۸. مجموعه جواب نامعادلهٔ $x+|x|\le\frac{1}{2}x+3$ به کدام صورت است؟

۱) $[-4,2]$ ۲) $[-6,1]$ ۳) $[-6,2]$ ۴) $[-2,6]$

☆۲۲۹. مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x|(x-1)>2x-2$ شامل چند عدد صحیح منفی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

☆۲۳۰. مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x-4)|x|<2x-5$، به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی- ۹۴)

۱) $(1,5)$ ۲) $(1-\sqrt{6},1+\sqrt{6})$ ۳) $(1,5)\cup(1+\sqrt{6},+\infty)$ ۴) $(-\infty,1-\sqrt{6})\cup(1,5)$

۲۳۱☆. مجموعه جواب نامعادلهٔ $x^2-2x<|x-2|$، به‌صورت کدام بازه است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۲)

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(1,2)$

۲۳۲☆. مجموعه جواب نامعادلهٔ $2x+1-|x-2|>|x^2+1|$ به‌صورت کدام بازه است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۵)

۱) $(-2,1)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(1,2)$

۲۳۳☆. جواب نامعادلهٔ $|x-1|+|x-2|>x$ کدام مجموعه است؟

۱) $(-\infty,3)$ ۲) $(1,3)$ ۳) $[0,+\infty)$ ۴) $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

۲۳۴. اگر $|x-2|<||x|-4|$ باشد، آن‌گاه $|x|$ همواره از چه عددی کوچک‌تر است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

۲۳۵★. مجموعه جواب نامعادلهٔ $|2x-1|>|x-3|$ به‌صورت $|3x+a|>b$ بیان شده است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟

۱) $(5,1)$ ۲) $(1,5)$ ۳) $(3,4)$ ۴) $(4,3)$

۲۳۶☆. اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x^2-2|<|x+1|-1$، بازهٔ (a,b) باشد، طول وسط این بازه کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

۲۳۷. مجموعه جواب دستگاه معادلات $\begin{cases}|x|<2\\ 2x-1<|x|\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\{x:-1<x<1\}$ ۲) $\{x:-2<x<2\}$ ۳) $\{x:0<x<2\}$ ۴) $\{x:-2<x<1\}$

۲۳۸★. چند عدد صحیح در دستگاه نامعادلات $\begin{cases}x^2+3|x|-4\le 0\\ \left|\dfrac{x}{x+1}\right|>2\end{cases}$ صدق می‌کند؟

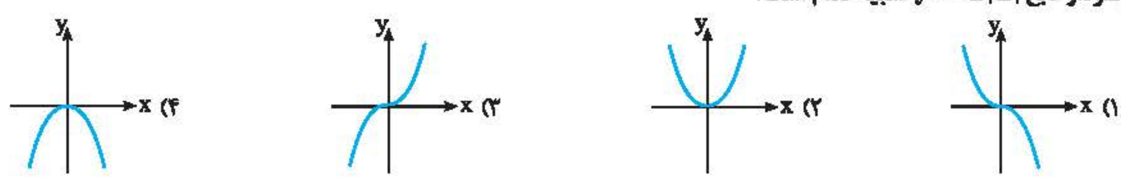
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

نمودار توابع شامل قدرمطلق

۲۳۹☆. نمودار تابع $y=||x|-|4x||-|2x|$ بر نمودار کدام تابع منطبق است؟

۱) $-|x|$ ۲) $|x|$ ۳) $|3x|$ ۴) $|2x|$

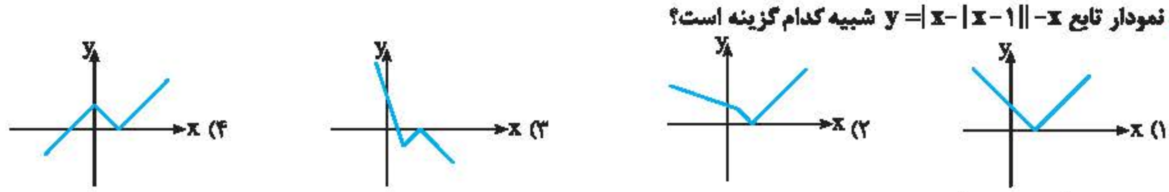
۲۴۰☆. نمودار تابع $y=-x|x|$ شبیه کدام است؟



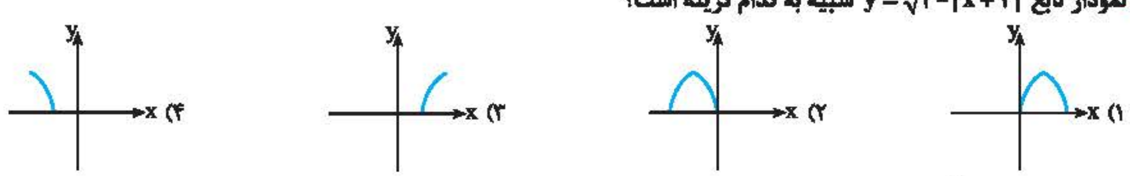
۲۴۱☆. نمودار تابع $y=|x^2-1|+\sqrt{2}$ در کدام نواحی محورهای مختصات قرار دارد؟

۱) اول و سوم ۲) اول و چهارم ۳) دوم و سوم ۴) اول و دوم

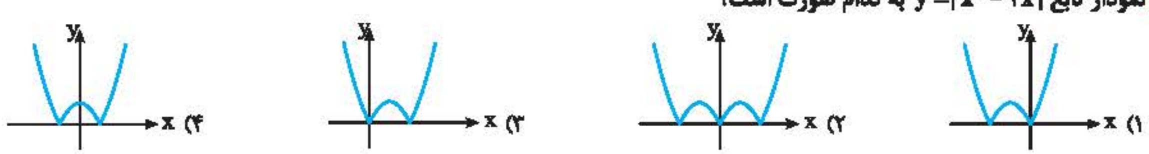
۲۴۲☆. نمودار تابع $y=|x-|x-1||-x$ شبیه کدام گزینه است؟



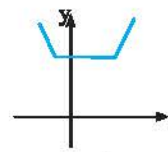
۲۴۳. نمودار تابع $y=\sqrt{2-|x+2|}$ شبیه به کدام گزینه است؟

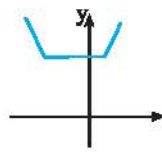


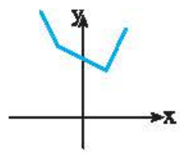
۲۴۴☆. نمودار تابع $y=|x^2-2x|$ به کدام صورت است؟

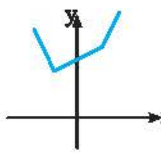


☆۲۴۵. نمودار تابع $f(x)=|x+3|+|x-1|$ به کدام صورت زیر است؟

۱) 

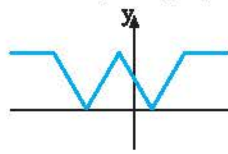
۲) 

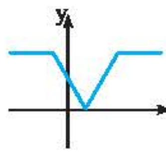
۳) 

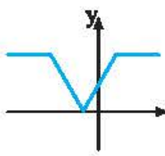
۴) 

۲۴۶. نمودار تابع $y=\big||x+1|-|x-2|\big|$ به کدام صورت زیر است؟

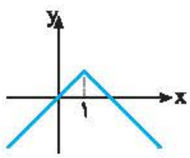
۱) 

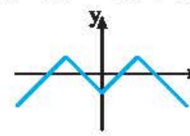
۲) 

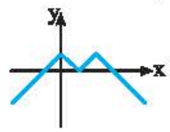
۳) 

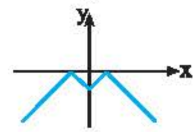
۴) 

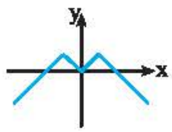
☆۲۴۷. اگر نمودار $y=f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y=f(|x-1|)$ کدام است؟



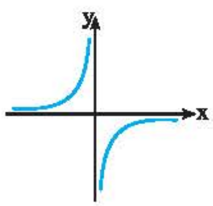
۱) 

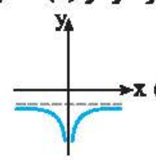
۲) 

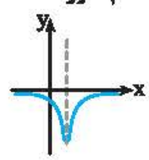
۳) 

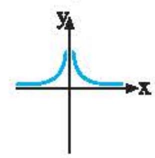
۴) 

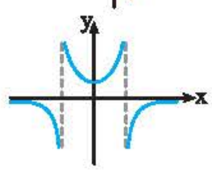
☆۲۴۸. اگر نمودار $y=f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y=f(|x|-1)$ به کدام صورت است؟



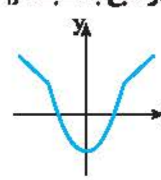
۱) 

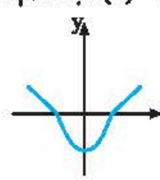
۲) 

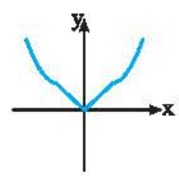
۳) 

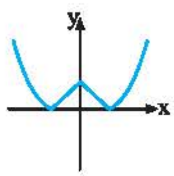
۴) 

☆۲۴۹. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\min\{x^2-1, |x|\}$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

☆۲۵۰. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $y=3|x|+x-4$ و محور xها کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

☆۲۵۱. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=|x|-x$ و $y=2-\frac{3}{2}x$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۵)

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{16}{3}$ ۴) ۶

☆۲۵۲. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=x+|x|$ و $y=2-|x|$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۵)

۱) ۲ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) ۳

۲۵۳. مساحت ناحیهٔ محدود بین منحنی تابع $f(x)=x+|2x|$ و خط $y=3$ چند واحد سطح است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۵۴. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $f(x)=|x-1|+|x+1|$ و خط $y=4$ چند واحد سطح است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

☆۲۵۵. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $f(x)=|x+2|-|x|$ و خط $y=x$ چند واحد سطح است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۸۶

$$\sqrt{x^2+x-2}+1=1-\sqrt{2x^3+5x^2-4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{2x^3+5x^2-4}=0$$

مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر است. پس هر یک از آن‌ها صفر هستند. چون جواب مشترک مدنظر است، پس قسمت ساده‌تر را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow x=1 \text{ یا } x=-2$$

از بین $x=-2$ و $x=1$، فقط $x=-2$ ریشهٔ $2x^3+5x^2-4=0$ می‌باشد.
پس $x=-2$ تنها ریشهٔ معادله است.

۱۸۷

با فرض $\sqrt{2x-5}=t$، به‌دست می‌آید $x=\frac{t^2+5}{2}$. پس داریم:

$$\sqrt{\frac{t^2+5}{2}-2+t}+\sqrt{\frac{t^2+5}{2}+2+3t}=7\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{t^2+2t+1}{2}}+\sqrt{\frac{t^2+6t+9}{2}}=7\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{t+1}{\sqrt{2}}+\frac{t+3}{\sqrt{2}}=7\sqrt{2}$$

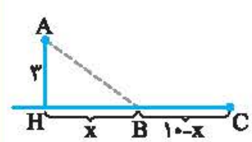
$$\Rightarrow t+1+t+3=14 \Rightarrow 2t=10 \Rightarrow t=5$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x-5}=5 \Rightarrow 2x-5=25 \Rightarrow 2x=30 \Rightarrow x=15$$

مجموع ارقام عدد ۱۵ برابر ۶ = ۵ + ۱ است.

۱۸۸

با توجه به شکل، فاصلهٔ B از تصویر A (یعنی H) را x می‌گیریم. پس $AB=\sqrt{x^2+9}$ و $BC=10-x$.



بنابر فرض می‌توان نوشت:

$$14\sqrt{x^2+9}+10(10-x)=130$$

$$\xrightarrow{\div 2} 7\sqrt{x^2+9}+50-5x=65 \Rightarrow 7\sqrt{x^2+9}=5x+15$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 49(x^2+9)=25x^2+225+150x \Rightarrow 24x^2-150x+216=0$$

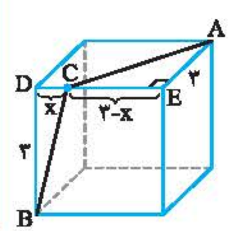
$$\xrightarrow{\div 6} 4x^2-25x+36=0 \Rightarrow (x-4)(4x-9)=0$$

$$\Rightarrow x=4 \text{ یا } x=\frac{9}{4}=2.25$$

پس $BC=10-4=6$ یا $BC=10-2.25=7.75$ که باتوجه به گزینه‌ها، گزینهٔ (۲) صحیح است.

۱۸۹

فرض کنیم $DC=x$ باشد، پس $CE=3-x$ است. طبق فرض و با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$AC+CB=3\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(3-x)^2+3^2}+\sqrt{x^2+3^2}=3\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(3-x)^2+9}=3\sqrt{5}-\sqrt{x^2+9}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (3-x)^2+9=45+x^2+9-6\sqrt{5x^2+45}$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2}-6x+9+\cancel{9}=45+\cancel{x^2}+\cancel{9}-6\sqrt{5x^2+45}$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{5x^2+45}=6x+36 \xrightarrow{\div 6} \sqrt{5x^2+45}=x+6$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 5x^2+45=x^2+36+12x$$

$$\Rightarrow 4x^2-12x+9=0 \Rightarrow (2x-3)^2=0$$

$$\Rightarrow 2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}=1.5$$

۱۹۰

همواره داریم $\max\{a,-a\}=|a|$

۱۹۱

$$b<0<a \Rightarrow \begin{cases} b<0 \Rightarrow -b>0 \Rightarrow 1-b>1 \Rightarrow 1-b>0 \\ 0<a \Rightarrow 0<a+1 \\ b<a \Rightarrow 0<a-b \end{cases}$$

$$|a-b|+|a+1|-|1-b|=a-b+a+1-(1-b)=2a$$

۱۹۲

گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نامساوی مثلث و نتایج آن را بیان می‌کنند، ولی گزینهٔ (۲) نادرست است. به طور مثال به ازای $a=0$ و $b=1$، گزینهٔ (۲) برقرار نیست.

۱۹۳

حالت تساوی در نامساوی مثلث وقتی برقرار است که عبارات درون قدرمطلق‌ها هم‌علامت باشند.

۱۹۴

$$x^2 \le 2x \Rightarrow x^2-2x \le 0 \Rightarrow 0 \le x \le 2 \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 2 \Rightarrow x-2 \le 0 \end{cases}$$

$$A=\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-4x+4}=|x|+|x-2|=x+2-x=2$$

۱۹۵

$$3x-x^2 \ge 2 \Rightarrow x^2-3x+2 \le 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) \le 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 \le x \le 2 \Rightarrow \begin{cases} x-3<0 \\ 4x-1>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A=4x-1+3-x=3x+2$$

چون $1 \le x \le 2$ است، پس $3 \le 3x \le 6$ و در نتیجه $5 \le 3x+2 \le 8$ می‌باشد. بنابراین حاصل A هر عددی از بازهٔ $[5,8]$ می‌تواند باشد. پس حاصل A نمی‌تواند برابر ۹ باشد.

۱۹۶

می‌دانیم فاصلهٔ دو عدد a و b روی محور اعداد حقیقی برابر $|a-b|$ است. بر این اساس می‌توان نوشت:

$$|x+1|<2 \Rightarrow -2<x+1<2 \Rightarrow -3<x<1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x<1 \Rightarrow x-1<0 \\ -3<x \Rightarrow x+3>0 \end{cases}$$

با استفاده از تعریف قدرمطلق داریم:

$$A=|x+3|+|x-1|=x+3+1-x=4$$

۱۹۷

می‌دانیم $|x-5|=|5-x|$. با استفاده از نامساوی مثلث خواهیم داشت:

$$f(x)=|5-x|+|x+1|\ge|(5-x)+(x+1)|=6\Rightarrow f(x)\ge 6$$

۱۹۸

می‌توان نوشت $|2x-6|=|6-2x|=2|x-3|$. لذا بنابر تعمیم نامساوی مثلث داریم:

$$A=|x-1|+|x+2|+|6-2x|\ge|(x-1)+(x+2)+(6-2x)|=7$$
$$\Rightarrow A\ge 7$$

۱۹۹

بنابر یکی از نتایج نامساوی مثلث، یعنی نامساوی $||x|-|y||\le|x-y|$ داریم:

$$A=|x+2|-|x-1|\le|(x+2)-(x-1)|=3\Rightarrow A\le 3$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار A برابر ۳ بوده و لذا گزینهٔ (۴) صحیح است.

۲۰۰

$$\sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}=2$$
$$\Rightarrow\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=2$$
$$\Rightarrow|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|=2\Rightarrow\sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|=2$$

برای این‌که رابطهٔ فوق همواره درست باشد، باید $|\sqrt{x-1}-1|=1-\sqrt{x-1}$ و در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\sqrt{x-1}-1\le 0\Rightarrow\sqrt{x-1}\le 1$$
$$\Rightarrow 0\le x-1\le 1\Rightarrow 1\le x\le 2\Rightarrow \max(b-a)=1$$

۲۰۱

می‌دانیم فاصلهٔ دو نقطهٔ a و b روی محور برابر $|a-b|$ می‌باشد. اگر x طول نقطهٔ مورد نظر روی محور باشد، طبق فرض داریم:

$$|x-(-3)|=2\Rightarrow|x+3|=2\Rightarrow\begin{cases}x+3=2\\x+3=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\x_2=-5\end{cases}$$
$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2=1+25=26$$

۲۰۲

$$||x-1|-2|=3\Rightarrow\begin{cases}|x-1|-2=3\\|x-1|-2=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x-1|=5\\|x-1|=-1\ \text{(غیرممکن)}\end{cases}$$
$$|x-1|=5\Rightarrow\begin{cases}x-1=5\\x-1=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\x=-4\end{cases}\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=2$$

۲۰۳

$$|x^2+x|=|x^2+3x-2|\Rightarrow\begin{cases}x^2+x=x^2+3x-2\\x^2+x=-x^2-3x+2\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=1\\2x^2+4x-2=0\end{cases}$$

می‌دانیم اگر معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ دارای دو جواب باشد، مجموع جواب‌های آن برابر $-\frac{b}{a}$ است. پس مجموع جواب‌های معادلهٔ $2x^2+4x-2=0$ برابر $-\frac{b}{a}=-2$ می‌باشد و لذا مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x^2+x|=|x^2+3x-2|$ برابر ۱- خواهد بود.

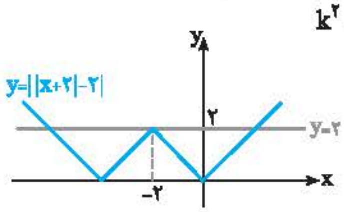
۲۰۴

$$x|x|=kx\Rightarrow x|x|-kx=0\Rightarrow x(|x|-k)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\|x|=k\end{cases}$$

$x=0$ یک جواب معادله است. چون $k\ne 0$، لذا در صورتی‌که $k>0$ باشد، معادلهٔ $|x|=k$ دو جواب خواهد داشت که در این صورت معادلهٔ $x|x|=kx$ سه جواب دارد و چنان‌چه $k<0$، معادلهٔ $|x|=k$ جواب نخواهد داشت که در این صورت معادلهٔ $x|x|=kx$ همان یک جواب $x=0$ را دارد. پس این معادله حداقل یک جواب دارد.

۲۰۵

نمودار $y=||x+2|-2|$ به‌صورت زیر است. برای این‌که معادلهٔ $||x+2|-2|=m$ دارای سه جواب باشد، باید $m=2$ باشد. پس $k^2-7=2\Rightarrow k=\pm 3$



۲۰۶

$$|x+1|+|2x+5|=|x+4|$$
$$\xrightarrow{|-u|=|u|}|-x-1|+|2x+5|=|x+4|$$

می‌دانیم رابطهٔ $|a|+|b|=|a+b|$ وقتی برقرار است که $ab\ge 0$ باشد.

پس:
$$(-x-1)(2x+5)\ge 0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}-\frac{5}{2}\le x\le -1$$
$$\Rightarrow \text{طول بازه}=-1-(-\frac{5}{2})=\frac{3}{2}$$

۲۰۷

چون سمت چپ معادله نامنفی است، پس لازم است، داشته باشیم $3x-2\ge 0$ و در نتیجه $|3x-2|=3x-2$. لذا داریم $|2x|+|x-2|=|3x-2|$. بنابراین رابطهٔ $|a|+|b|=|a+b|$ برقرار است، پس $ab\ge 0$ بنابراین:

$2x(x-2)\ge 0\Rightarrow x\ge 2$ یا $x\le 0$

از طرفی چون $3x-2\ge 0$ بود، پس $x\ge\frac{2}{3}$ و در نتیجه مجموعه جواب معادله برابر است با $[2,+\infty)$. لذا معادله بی‌شمار جواب دارد.

۲۰۸

$$2x^2+x+|2x^2+x-3|=3\Rightarrow|2x^2+x-3|=-(2x^2+x-3)$$
$$\Rightarrow 2x^2+x-3\le 0\Rightarrow(x-1)(2x+3)\le 0\Rightarrow-\frac{3}{2}\le x\le 1$$
$$\xrightarrow{a<x<b\Rightarrow|x|<\max\{|a|,|b|\}}|x|\le\frac{3}{2}$$

۲۰۹

ابتدا یادآوری می‌کنیم در حالتی‌که معادلهٔ $|x-a|+|x-b|=k$ دارای دو ریشه است، ریشه‌ها از رابطهٔ $x=\frac{a+b\pm k}{2}$ به‌دست می‌آیند. پس:

$$x=\frac{2-1\pm k}{2}\Rightarrow x_1=\frac{k+1}{2},\ x_2=\frac{1-k}{2}$$
$$\xrightarrow{x_1-x_2=7}\frac{k+1}{2}-\frac{1-k}{2}=7\Rightarrow k=7$$

۲۱۰

$$2\max\{x,2\}+\max\{x,-x\}=x+6$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{x+2}{2}+\frac{|x-2|}{2}\right)+|x|=x+6 \Rightarrow |x-2|+|x|=4$$

می‌دانیم معادلهٔ $|x-a|+|x-b|=k$، با شرط $k>|a-b|$ دو جواب دارد که از رابطهٔ $x=\frac{a+b\pm k}{2}$ به‌دست می‌آیند. پس جواب‌های معادله برابر است با:

$$x_1,x_2=\frac{2+0\pm 4}{2}\Rightarrow x_1=3 , x_2=-1\Rightarrow x_1+x_2=2$$

۲۱۱

برای آن‌که معادلهٔ $|x-a|-|x-b|=k$ دارای یک جواب باشد، لازم است داشته باشیم $-|a-b|<k<|a-b|$ بنابراین داریم $a=1$، $b=-2$ و $k=m-1$. پس $|a-b|=3$ است، در نتیجه:

$$-3<m-1<3\Rightarrow -2<m<4$$

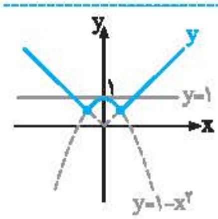
۲۱۲

شرط آن‌که معادلهٔ $|x-a|+|x-b|=k$ دارای بی‌شمار جواب باشد، آن است که $|a-b|=k$. چون $a=m$ و $b=-m+1$ و $k=m+1$، پس:

$$|a-b|=k\Rightarrow|m-(-m+1)|=m+1\Rightarrow|2m-1|=m+1$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2m-1=m+1\\2m-1=-m-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\m=0\end{cases}$$

۲۱۳



نمودار تابع $y=\max\{|x|,1-x^2\}$ به‌صورت روبه‌رو است. مطابق شکل، خط $y=1$ این نمودار را در سه نقطه قطع می‌کند.

۲۱۴

$$|2x+3|<5\Rightarrow -5<2x+3<5\xrightarrow{-3}-8<2x<2$$

$$\xrightarrow{\div 2}-4<x<1\Rightarrow x\in(-4,1)$$

پس $(a,b)=(-4,1)$ و لذا بیش‌ترین مقدار $b-a$ برابر ۵ است.

۲۱۵

$$|2x-3|>x\Rightarrow \begin{cases}2x-3>x\\ \text{یا}\\ 2x-3<-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>3\\ \text{یا}\\ 3x<3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>3\\ \text{یا}\\ x<1\end{cases}$$

$$\Rightarrow x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$$

پس مجموعه جواب این نامعادله شامل سه عدد صحیح، ۱، ۲ و ۳ نیست.

۲۱۶

$$|x^2-x|+x^2=|x|\xrightarrow{|x^2|=x^2}|x-x^2|+|x^2|=|x|$$

با فرض $a=x-x^2$ و $b=x^2$، معلوم می‌شود که $a+b=x$ و لذا رابطهٔ $|a+b|=|a|+|b|$ برقرار است، پس باید $ab\ge 0$

$$ab\ge 0\Rightarrow(x-x^2)x^2\ge 0\Rightarrow x-x^2\ge 0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}0\le x\le 1$$

$$\Rightarrow\left|x-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2} , \beta=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha+\beta=1$$

۲۱۷

$$x^2<|x-2|\Rightarrow x^4<(x-2)^2\Rightarrow x^4-(x-2)^2<0$$

$$\Rightarrow\underbrace{(x^2-x+2)}_{\text{همواره مثبت}}(x^2+x-2)<0\Rightarrow x^2+x-2<0$$

$$\Rightarrow(x-1)(x+2)<0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}x\in(-2,1)$$

۲۱۸

با فرض $x>0$ می‌توان نوشت:

$$|x^2-2x|<x\Rightarrow -x<x^2-2x<x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2-2x<x\\x^2-2x>-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-3x<0\\x^2-x>0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}\begin{cases}0<x<3\\x>1 \text{ یا } x<0\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}1<x<3$$

چون تمام مجموعه جواب در شرط $x>0$ نیز صدق می‌کند، پس مجموعه جواب $(1,3)$ قابل قبول است.

۲۱۹

$$|x+1|<1\Rightarrow -1<x+1<1\Rightarrow -2<x<0\xrightarrow{\times 3}-6<3x<0$$

$$\xrightarrow{+2}-4<3x+2<2$$

می‌دانیم اگر $a<x<b$، آن‌گاه $|x|<\max\{|a|,|b|\}$. پس از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود:

$$|3x+2|<4$$

۲۲۰

$$|x-1|<2\Rightarrow -2<x-1<2\Rightarrow -1<x<3$$

$$\Rightarrow 2<x+3<6\Rightarrow\frac{1}{6}<\frac{1}{x+3}<\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -2<\frac{-4}{x+3}<-\frac{2}{3}\Rightarrow\left|\frac{-4}{x+3}\right|<2$$

توجه کنید که اگر $a<x<b$، آن‌گاه $|x|<\max\{|a|,|b|\}$

۲۲۱

$$|x-2|<0.01\Rightarrow -0.01<x-2<0.01$$

$$\Rightarrow 1.99<x<2.01\Rightarrow 3.9601<x^2<4.0401$$

$$\Rightarrow -0.0399<x^2-4<0.0401$$

$$\xrightarrow{a<x<b\Rightarrow|x|<\max\{|a|,|b|\}}|x^2-4|<0.0401$$

۲۲۲

روش اول:

$$|x^2-x|<|x|\Rightarrow(x^2-x)^2<x^2\Rightarrow(x^2-x)^2-x^2<0$$

$$\Rightarrow(x^2-x-x)(x^2-x+x)<0\Rightarrow x^2(x^2-2x)<0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}0<x<2\Rightarrow -1<x-1<1\Rightarrow|x-1|<1$$

روش دوم: $x=1$ مثال نقض برای گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) است.