

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و
ارسال رایگان

Medabook.com



مدابوک



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



فصل ۲

قسمت سوم

احتمال شرطی

احتمال شرطی (کاهش فضای نمونه)

در بعضی مواقع ممکن است به ما اطلاعاتی بدهند که این اطلاعات در احتمال وقوع پیشامد مورد نظر ما مؤثر باشد. به عنوان مثال، در پرتاب یک تاس احتمال وقوع عدد ۲ برابر $\frac{1}{6}$ است. اما اگر بدانیم عدد رو شده عددی اول است، در واقع عدد ظاهر شده یکی از اعداد ۲ یا ۳ یا ۵ (۳ حالت) می‌باشد، در این صورت احتمال وقوع عدد ۲ برابر $\frac{1}{3}$ خواهد بود. پس گاهی اوقات وقوع یک پیشامد بر احتمال وقوع پیشامد دیگر تأثیر می‌گذارد.

احتمال شرطی: کاهش فضای نمونه

در حالتی که فضای احتمال، هم‌شانس است شرطی کردن یک پیشامد نسبت به پیشامد B مثل این است که فضای نمونه، یعنی S را کنار گذاشته و B را فضای نمونه در نظر بگیریم. احتمال روی این فضای نمونه نیز هم‌شانس است. به این رویکرد «کاهش فضای نمونه» گفته می‌شود.

محاسبه احتمال شرطی در فضاهای نمونه‌ای هم‌شانس

در محاسبه احتمال شرطی، همه حالت‌های ممکن برابر همه حالت‌هایی است که در آن‌ها B رخ داده است. در واقع B فضای نمونه‌ای جدید ما خواهد بود و تمام حالت‌های مطلوب، همه حالت‌هایی از B است که در A باشند.

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

در فضای نمونه‌ای هم‌شانس داریم:

در حل مسائل احتمال شرطی، پیشامد B (پیشامدی که می‌دانیم رخ داده است) را به عنوان فضای نمونه‌ای جدید در نظر می‌گیریم و اعضای پیشامد A را در فضای نمونه‌ای جدید مشخص می‌کنیم (در واقع $A \cap B$) و سپس احتمال را در فضای نمونه‌ای جدید به‌دست می‌آوریم.

مثال در پرتاب دو تاس با هم، اگر مجموع دو عدد رو شده کمتر از ۶ باشد، احتمال آن‌که هر دو عدد رو شده زوج باشد را به‌دست آورید.

پاسخ: فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس (بدون هیچ شرطی)، $6 \times 6 = 36$ عضو به‌صورت زیر دارد:

$$S = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), \dots, (6,1), \dots, (6,6)\}$$

طبق فرض، مجموع دو عدد رو شده کمتر از ۶ است، پس همه حالت‌های ممکن، تمام زوج‌مرتب‌هایی از S است که مجموع آن‌ها کمتر از ۶ باشد،

$$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\} \Rightarrow n(B) = 10$$

داریم:

حالت‌های مطلوب، همه حالت‌هایی از B (فضای نمونه‌ای جدید) است که هر دو عدد رو شده زوج باشند. اگر A پیشامد مطلوب باشد، آن‌گاه:

$$A \cap B = \{(2,2)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{10}$$

تذکر مهم در حل مثال قبل، نیازی به نوشتن فضای نمونه‌ای S نداریم، اما باید از روی S ، پیشامد B را مشخص کنیم.

تست یک تاس را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر هر سه عدد رو شده زوج باشند، احتمال آن‌که هیچ‌یک از اعداد رو شده ۶ نباشند، کدام است؟

$$\frac{4}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{10}{27} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{8}{27} \quad (۱)$$

پاسخ: اگر B پیشامد زوج بودن عدد رو شده در هر سه پرتاب تاس باشد، آن‌گاه عدد رو شده در هر پرتاب یکی از سه عدد زوج است و در نتیجه:

$$n(B) = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

اگر A پیشامدی باشد که هیچ‌یک از سه عدد رو شده ۶ نباشد، آن‌گاه در هر حالت یکی از دو عدد ۲ یا ۴ رو شده است (می‌دانیم عدد رو شده، زوج است):

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 2 \times 2 \times 2 = 8 \Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{8}{27} \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$

مثال

در پرتاب دو تاس، اگر حداقل یکی از اعداد رو شده ۵ باشد، با چه احتمالی عدد ۲ ظاهر می شود؟

پاسخ: اگر B پیشامد رو شدن حداقل یک بار عدد ۵ در پرتاب دو تاس باشد، آن گاه:

$$B = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6)\} \Rightarrow n(B) = 11$$

$$A \cap B = \{(2,5), (5,2)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2 \Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{11}$$

اگر A پیشامد ظاهر شدن عدد ۲ باشد، آن گاه:

مثال

در یک خانواده با سه فرزند، اگر فرزند اول پسر باشد، با چه احتمالی این خانواده دقیقاً ۲ فرزند پسر دارد؟ (مشابه تمرین ۱ صفحه ۶۴ کتاب درسی)

پاسخ: فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان یک خانواده با سه فرزند، ۸ عضو دارد. اگر B پیشامدی باشد که در آن، فرزند اول پسر باشد، آن گاه:

$$B = \{(د, د, پ), (د, پ, پ), (پ, د, پ), (پ, پ, پ)\} \Rightarrow n(B) = 4$$

اگر A پیشامدی باشد که در آن، خانواده دقیقاً ۲ فرزند پسر داشته باشد، آن گاه:

$$A \cap B = \{(د, د, پ), (پ, د, پ)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2 \Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

مثال

از بین ۵ دانش آموز رشته تجربی و ۳ دانش آموز رشته ریاضی، سه نفر به تصادف انتخاب شده‌اند. اگر حداقل دو دانش آموز رشته تجربی در بین انتخاب شدگان باشند، با کدام احتمال دقیقاً دو نفر از انتخاب شدگان از رشته تجربی می باشند؟

پاسخ: می دانیم از بین ۳ نفر انتخاب شده، حداقل ۲ نفر آنان از رشته تجربی هستند، بنابراین اگر B پیشامدی باشد که رخ داده باشد (حداقل دو دانش آموز رشته تجربی، بین انتخاب شدگان وجود دارند)، آن گاه:

$$n(B) = \binom{5}{2} \binom{3}{1} + \binom{5}{3} = 10 \times 3 + 10 = 40$$

$\Rightarrow$ هر سه نفر از رشته تجربی یا ۲ نفر از رشته تجربی و ۱ نفر از رشته ریاضی: B

اگر A پیشامدی باشد که در آن دقیقاً دو نفر از انتخاب شدگان از رشته تجربی باشند، آن گاه:

$$A \cap B : \text{ریاضی} \Rightarrow n(A \cap B) = \binom{5}{2} \binom{3}{1} = 30 \Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

مثال

اعداد ۱ تا ۸ را روی هشت کارت نوشته و سه کارت را به تصادف انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال این که دقیقاً ۲ کارت با شماره زوج باشد به شرط این که مجموع آن ها فرد باشد.

پاسخ: اگر B (شرط) پیشامد آن باشد که مجموع ۳ عدد انتخاب شده فرد و A (پیشامد مطلوب) پیشامد آن باشد که دقیقاً ۲ کارت با شماره زوج انتخاب شده باشد، آن گاه داریم:

انتخاب ۳ عدد فرد از ۴ عدد فرد

$$n(B) = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} \binom{4}{1} = 4 + 6 \times 4 = 28$$

انتخاب ۲ عدد زوج و یک عدد فرد

(اگر هر سه عدد فرد یا دو عدد زوج و دیگری فرد باشد، آن گاه جمع سه عدد فرد است.)

در این صورت $A \cap B$ ، پیشامدی است که باید دو عدد زوج و یک عدد فرد انتخاب شود، داریم:

$$n(A \cap B) = \binom{4}{2} \binom{4}{1} = 24 \Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{24}{28} = \frac{6}{7}$$

تست

از ۹ کلید درون کیسه‌ای، ۴ تای آن ها طلایی رنگ است. قفلی داریم که فقط با کلیدهای طلایی رنگ باز می شود. اگر به تصادف دو کلید از این کیسه خارج کنیم و بتوان قفل را باز کرد، با چه احتمالی با هر دو کلید می توان قفل را باز کرد؟

$$\frac{3}{13} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{13} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{10} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{26} \quad (۱)$$

پاسخ: اگر حداقل یکی از دو کلید طلایی رنگ باشد، آن گاه می توان قفل را باز کرد. پس اگر B پیشامد آن باشد که حداقل یکی از دو کلید

$$n(B) = \binom{4}{1} \binom{5}{1} + \binom{4}{2} = 4 \times 5 + 6 = 26$$

انتخاب شده، طلایی رنگ باشد، آن گاه داریم:

اگر A پیشامدی باشد که بتوان با هر دو کلید، قفل را باز کرد، آن گاه A پیشامدی است که در آن هر دو کلید انتخاب شده طلایی رنگ می باشد، بنابراین داریم:

$$n(A \cap B) = \binom{4}{2} = 6 \Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{6}{26} = \frac{3}{13} \Rightarrow \text{گزینه (۴) صحیح است.}$$

تعریف کلی احتمال شرطی (برای فضاهاى هم‌شانس و فضاهاى غیرهم‌شانس) به‌صورت زیر است:

تعریف فرض کنید A و B دو پیشامد باشند، به قسمی که $P(B) > 0$ ، در این صورت اگر B رخ داده باشد، احتمال وقوع A را با نماد $P(A|B)$ نشان می‌دهیم و آن را احتمال شرطی A به شرط وقوع B می‌گوییم و از دستور مقابل محاسبه می‌شود:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

تذکر در حالتی که $P(B) = 0$ ، احتمال هیچ پیشامدی به شرط B تعریف نمی‌شود.

مثال اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $P(A) = 2P(B) = 0.4$ و $P(A \cup B) = 0.5$ ، مقدار $P(A|B)$ را به‌دست آورید.

پاسخ: با توجه به فرمول $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ و مقدار $P(B) = 0.2$ ، باید مقدار $P(A \cap B)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \xrightarrow{P(A \cup B) = 0.5, P(A) = 0.4, P(B) = 0.2} 0.5 = 0.4 + 0.2 - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.6 - 0.5 = 0.1 \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

مثال یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۴ برآمد a, b, c, d است. اگر $P(a) = P(b) = \frac{1}{3}$ و $P(c) = P(d) = \frac{1}{6}$ ، مطلوب است:

ب) محاسبه $P(\{a, b, c\} | \{b, c, d\})$

آ) محاسبه $P(\{a, b, c\})$

پاسخ: فضای نمونه‌ای به‌صورت $S = \{a, b, c, d\}$ است. S یک فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس است.

آ) طبق محاسبه احتمال در فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس، داریم:

$$P(\{a, b, c\}) = P(a) + P(b) + P(c) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4+1}{6} = \frac{5}{6}$$

ب) برای محاسبه احتمال شرطی داده‌شده، با فرض $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{b, c, d\}$ ، باید مقدار $P(A|B)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{b, c\})}{P(\{b, c, d\})} \quad (1)$$

طبق تعریف احتمال در فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس، داریم:

$$P(\{b, c\}) = P(b) + P(c) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$P(\{b, c, d\}) = P(b) + P(c) + P(d) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{2}{6} = \frac{2}{3} \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow P(A|B) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

تست کارخانه‌ای به هنگام نصب دستگاه‌های جدید به احتمال ۰.۲۵ به متخصصین جدید و به احتمال ۰.۴ به کارگران جدید و به احتمال ۰.۱۵ هم به متخصصین جدید و هم به کارگران جدید نیاز دارد. اگر این کارخانه به متخصصین جدید نیاز داشته باشد، با کدام احتمال به کارگران جدید نیاز دارد؟

$$\frac{2}{5} \quad (4)$$

$$\frac{5}{8} \quad (3)$$

$$\frac{3}{5} \quad (2)$$

$$\frac{3}{8} \quad (1)$$

پاسخ: احتمال مورد نظر، احتمال شرطی است. پیشامدهای A و B را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

A : کارخانه به هنگام نصب دستگاه‌های جدید به متخصصین جدید نیاز داشته باشد.

B : کارخانه به هنگام نصب دستگاه‌های جدید به کارگران جدید نیاز داشته باشد.

طبق فرض $P(A) = 0.25$ ، $P(B) = 0.4$ و $P(A \cap B) = 0.15$ می‌باشد. احتمال مطلوب، $P(B|A)$ است. طبق فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.15}{0.25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \Rightarrow \text{گزینه (2) صحیح است.}$$

مثال

در پخشال یک شیرینی فروشی ۱۴ کیک تولد وجود دارد که وزن هیچ دوتایی برابر نیستند. اگر یکی از این کیک‌ها را به تصادف انتخاب کنیم:

(آ) احتمال این‌که وزن آن کیک از همه بیش‌تر باشد، چقدر است؟
(ب) کیک دیگری را به تصادف انتخاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که از کیک اول سبک‌تر است. احتمال آن‌که وزن کیک اول از همه بیش‌تر باشد چقدر است؟

پاسخ: (آ) با توجه به این‌که یکی از ۱۴ کیک، سنگین‌تر از بقیه است، احتمال آن‌که یکی را که انتخاب کرده‌ایم، سنگین‌ترین باشد برابر $\frac{1}{14}$ است.

(ب) احتمال خواسته‌شده یک احتمال شرطی است. با معرفی پیشامدهای A و B به صورت زیر، مقدار $P(A|B)$ را از فرمول $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ به‌دست می‌آوریم:
 A : کیک اول، سنگین‌ترین کیک باشد.
 B : کیک دوم سبک‌تر از کیک اول باشد.

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{14}$$

در نیمی از حالات، کیک اول سنگین‌تر از کیک دوم است و در نیمی از حالات دیگر، کیک دوم سنگین‌تر از کیک اول است، بنابراین:

$$P(B) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{7}$$

قانون ضرب احتمالات

از رابطه $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ، تساوی $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$ به‌دست می‌آید که به آن قانون ضرب احتمالات می‌گوییم و از این قانون برای به‌دست آوردن احتمال هم‌زمان وقوع دو پیشامد استفاده می‌کنیم.

مثال

درون جعبه‌ای ۴ لامپ سالم و ۱ لامپ معیوب وجود دارد. ۲ لامپ به تصادف و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که لامپ اول سالم و لامپ دوم معیوب باشد را به‌دست آورید.

پاسخ: فرض کنیم A پیشامد سالم بودن لامپ اول و B پیشامد معیوب بودن لامپ دوم باشد. می‌خواهیم $P(A \cap B)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A) = \frac{4}{5} \quad , \quad P(B|A) = P(\text{لامپ اول سالم} | \text{لامپ دوم معیوب}) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

مثال

۵۵ درصد جمعیت جامعه‌ای را که ۶۰ درصد این جامعه باسواد هستند، زنان تشکیل می‌دهند. اگر نیمی از زنان این جامعه باسواد باشند و یک نفر را به تصادف انتخاب کنیم، با چه احتمالی این شخص، زن یا باسواد می‌باشد؟

پاسخ: فرض کنیم A پیشامد زن بودن شخص انتخاب‌شده و B پیشامد باسواد بودن وی باشد. طبق فرض $P(B) = 0.6$ ، $P(A) = 0.55$ و $P(B|A) = 0.5$ (نیمی از زنان جامعه باسواد هستند) می‌باشد. داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow 0.5 = \frac{P(B \cap A)}{0.55} \xrightarrow{A \cap B = B \cap A} P(A \cap B) = 0.5 \times 0.55 = 0.275$$

می‌خواهیم $P(A \cup B)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.55 + 0.6 - 0.275 = 0.875$$

تست

۶۰ درصد کارکنان یک سازمان، مرد هستند. ۲۵ درصد کل کارکنان این سازمان و ۲۰ درصد کارکنان مرد این سازمان، چاق هستند. اگر یک نفر از بین آن‌ها به تصادف انتخاب کنیم، با کدام احتمال مرد یا چاق می‌باشد؟

(۱) ۰/۸۲ (۲) ۰/۷۸ (۳) ۰/۷۳ (۴) ۰/۷

پاسخ: $B \Rightarrow P(B) = 0.25$: پیشامد چاق بودن فرد انتخاب‌شده، $A \Rightarrow P(A) = 0.6$: پیشامد مرد بودن شخص انتخاب‌شده

$$P(\text{مرد بودن} | \text{چاق بودن}) = P(B|A) = 0.2 \Rightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0.2 \Rightarrow \frac{P(B \cap A)}{0.6} = 0.2 \Rightarrow P(B \cap A) = 0.6 \times 0.2 = 0.12$$

گزینه (۳) صحیح است. $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.25 - 0.12 = 0.73 \Rightarrow$

نکته قانون ضرب احتمال را می‌توان برای سه پیشامد نیز نوشت:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

اگر A_1, A_2 و A_3 پیشامدهایی با احتمال مثبت باشند، آن‌گاه:

و می‌توان این قانون را برای هر n پیشامد $A_1, A_2, \dots, A_n$ با احتمال مثبت تعمیم داد:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

مثال در کیسه‌ای ۲ گوی سفید، ۳ گوی سیاه و ۳ گوی سبز وجود دارد. از کیسه سه گوی به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. احتمال این‌که گوی اول سبز، گوی دوم سفید و گوی سوم سیاه باشد را به‌دست آورید.

(مشابه کار در کلاس صفحه ۵۷ کتاب درسی)

پاسخ: پیشامدهای A_1, A_2 و A_3 را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

A_3 : گوی سوم سیاه

A_2 : گوی دوم سفید

A_1 : گوی اول سبز

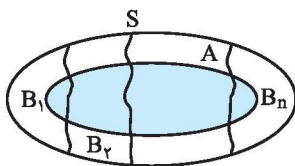
مقدار $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ مطلوب است. طبق قانون ضرب احتمالات برای سه پیشامد داریم:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

در ابتدا ۸ گوی درون کیسه قرار دارد که ۳ تای آن‌ها سبز می‌باشند، بنابراین احتمال آن‌که گوی اول خارج‌شده سبز باشد برابر $P(A_1) = \frac{3}{8}$ می‌باشد. با خارج شدن یک گوی سبز، ۷ گوی درون کیسه باقی می‌ماند که ۲ تای آن‌ها سفید هستند، بنابراین اگر گوی دوم را خارج کنیم، آن‌گاه احتمال سفید بودن آن برابر $P(A_2 | A_1) = \frac{2}{7}$ است و در نهایت با خارج کردن این گوی از کیسه، ۶ گوی درون کیسه باقی می‌ماند که ۳ تای آن‌ها سیاه هستند. پس با خارج کردن گوی سوم، احتمال سیاه بودن آن برابر $P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ است. پس داریم:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{56}$$

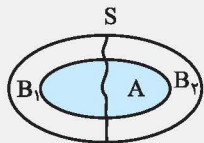
قانون احتمال کل (احتمال‌های چندشاخه‌ای)



فرض کنید $B_1, B_2, \dots, B_n$ پیشامدهایی با احتمال مثبت باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. با این شرایط برای هر پیشامد دلخواه A داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + \dots + P(B_n)P(A | B_n) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)$$

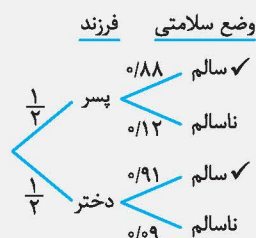
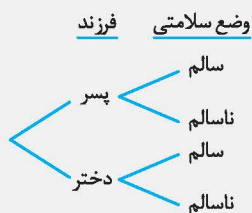
مثال فرض کنید انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۱۲٪ و به فرزند دختر ۹٪ باشد. والدینی که حامل این نوع بیماری هستند، انتظار فرزند را دارند. مطلوب است احتمال آن‌که این فرزند سالم باشد.



پاسخ: فرزندی که به دنیا خواهد آمد یا پسر است یا دختر. پس اگر پسر بودن فرزند را با B_1 و دختر بودن آن را با B_2 نشان دهیم، آن‌گاه B_1 و B_2 ناسازگارند و حتماً یکی از آن‌ها رخ خواهد داد. سالم بودن فرزند را با A نشان می‌دهیم. می‌خواهیم $P(A)$ را حساب کنیم.

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2) = \frac{1}{2} \times (1 - 0.12) + \frac{1}{2} \times (1 - 0.09) = 0.44 + 0.455 = 0.895$$

برای این مسئله اگر سعی می‌کردیم فهرستی از حالات ممکن تشکیل دهیم به‌صورت مقابل دست می‌یافتیم:



اگر روی هر یک از پاره‌خط‌های نمودار بالا احتمال پیشامد نظیر آن خط را بنویسیم، خواهیم نوشت:

حال اگر شاخه‌هایی را که به وضعیت سالم ختم می‌شوند، مشخص کنیم و احتمال‌های روی آن شاخه را در هم ضرب و با نتیجه حاصل از شاخه‌های دیگر جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} \times 0.88 + \frac{1}{2} \times 0.91 = 0.895$$

شاخه اول شاخه دوم

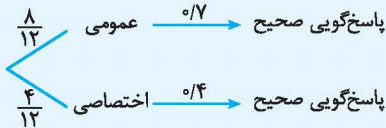
تست

احتمال پاسخ‌گویی صحیح به سؤالات اختصاصی و عمومی در یک آزمون به ترتیب $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{7}$ است. اگر از بین ۴ سؤال اختصاصی و ۸ سؤال عمومی یک سؤال به تصادف انتخاب شود، احتمال پاسخ‌گویی صحیح به این سؤال چقدر است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{2}{15}$ (۴) $\frac{1}{15}$

سؤالات انتخابی

پاسخ: اطلاعات مسئله را در نمودار درختی روبه‌رو، خلاصه می‌کنیم:



$$P(\text{پاسخ‌گویی صحیح}) = \frac{1}{12} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{12} \times \frac{4}{10} = \frac{56+16}{120} = \frac{72}{120} = \frac{3}{5}$$

بنابر احتمال کل داریم:

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

مثال

درون کیسه A، ۳ کارت سفید و ۴ کارت سیاه و درون کیسه B، ۲ کارت سفید و ۵ کارت سیاه وجود دارد. کاردی به تصادف از درون کیسه A انتخاب کرده و بدون نگاه کردن آن را درون کیسه B قرار می‌دهیم. سپس از کیسه B کاردی به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال سفید بودن کارت خارج شده از کیسه B کدام است؟

پاسخ: دو حالت برای کاردی که از کیسه A خارج می‌کنیم وجود دارد:

حالت اول: کارت خارج شده سفید است. احتمال خارج کردن کارت سفید از کیسه A برابر $\frac{3}{7}$ است. با قرار دادن این کارت سفید درون کیسه B، تعداد کارت‌های سفید کیسه B، $3+1=4$ خواهد شد. احتمال انتخاب یک کارت سفید از این کیسه جدید برابر $\frac{4}{8}$ است.

حالت دوم: کارت خارج شده سیاه است. احتمال خارج کردن کارت سیاه از کیسه A برابر $\frac{4}{7}$ است. با قرار دادن این کارت سیاه درون کیسه B، تعداد کارت‌های سفید کیسه A تغییر نمی‌کند ولی تعداد کارت‌های سیاه برابر $5+1=6$ می‌شود و در نتیجه احتمال انتخاب یک کارت سفید از این کیسه جدید برابر $\frac{3}{8}$ می‌شود.

نمودار درختی و احتمال مطلوب به صورت مقابل می‌باشد.



$$\Rightarrow P(\text{سفید بودن کارت}) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{8} = \frac{9+8}{56} = \frac{17}{56}$$

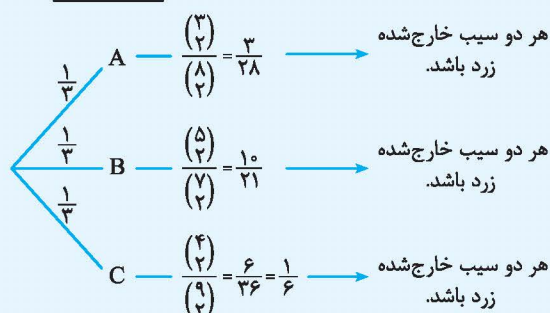
تست

درون ظرف A، ۳ سیب زرد و ۵ سیب قرمز، درون ظرف B، ۵ سیب زرد و ۲ سیب قرمز و در ظرف C، ۴ سیب زرد و ۵ سیب قرمز وجود دارد. یکی از ظرف‌ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس ۲ سیب از آن خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که هر دو سیب خارج شده زرد باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{14}$ (۴) $\frac{1}{6}$

انتخاب ظرف

پاسخ: نمودار درختی به صورت مقابل درمی‌آید:



$$P(\text{هر دو سیب خارج شده زرد باشند}) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{28} + \frac{10}{21} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{9+40+14}{28 \times 3} = \frac{1}{3} \times \frac{63}{84} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$

مثال

درون جعبه‌ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه قرار دارد. یک مهره بدون رؤیت از جعبه خارج می‌کنیم و سپس مهره دیگری از بین ۸ مهره باقی‌مانده خارج می‌کنیم، با کدام احتمال این مهره سفید است؟

پاسخ: مهره اولی که از جعبه خارج می‌کنیم، یا سفید است یا سیاه. پیشامدهای B_1 و B_2 که فضای نمونه‌ای S را به دو مجموعه افراز می‌کنند، به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

B_1 : مهره اول خارج شده سفید است. B_2 : مهره اول خارج شده سیاه است.

$$P(B_1) = \frac{5}{9}, \quad P(B_2) = \frac{4}{9}$$

داریم:

اگر A پیشامد سفید بودن مهره دوم باشد، آن‌گاه با خارج کردن یک مهره سفید، ۴ مهره سفید و ۴ مهره سیاه در جعبه باقی می‌مانند، بنابراین داریم:

$$P(A | B_1) = \frac{4}{8}$$

$$P(A | B_2) = \frac{5}{8}$$

با خارج کردن یک مهره سیاه، ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه در جعبه باقی می‌مانند، بنابراین داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{20+20}{72} = \frac{40}{72} = \frac{5}{9}$$

بنابر قانون احتمال کل داریم:

در مثال قبل، عدد به‌دست‌آمده با حالتی که از ابتدا یک مهره برداریم و احتمال سفید بودن آن را به‌دست آوریم، برابر است. می‌توان این مطلب را به صورت نکته زیر نوشت:

نکته اگر از درون جعبه‌ای، تعدادی مهره بدون رؤیت خارج کنیم و سپس مهره دیگری از این جعبه خارج کنیم، آن‌گاه برای به‌دست آوردن احتمال مطلوب، احتمال حالتی را به‌دست می‌آوریم که اصلاً مهره‌ای از جعبه خارج نکرده‌ایم و این مهره اولین مهره خارج شده از جعبه است.

نکته می‌دانیم که دو پیشامد B و B'، فضای نمونه‌ای S را افراز می‌کنند. بنابراین ساده‌ترین شکل قانون احتمال کل در حالت $n=2$ است که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

فرض کنید B پیشامدی باشد که $0 < P(B) < 1$ ، در این صورت برای هر پیشامد دلخواه A، داریم: $P(A) = P(B)P(A | B) + P(B')P(A | B')$

← قانون بیز

مدیر شرکتی که تولیدکننده پوشاک گرم است، فکر می‌کند به احتمال ۶۰ درصد دمای زمستان امسال بین ۸ تا ۱۰- درجه سانتی‌گراد است و عددی را به عنوان تعداد تولیدی پوشاک گرم در نظر می‌گیرد. حال اگر این مدیر به واسطه اخبار هواشناسی مطلع شود که دمای زمستان امسال خیلی پایین‌تر از سال‌های قبل خواهد بود، ممکن است به احتمالش بیفزاید و آن را مثلاً به عدد ۸۰ درصد برساند و در نتیجه به مقدار تولیدش بیفزاید.

قانون بیز که از قوانین مهم در علم احتمال است، این موضوع را به زبان ریاضی فرمول‌بندی می‌کند.

قانون بیز مشخص می‌کند که «احتمال‌های پیش از مشاهده» چگونه به «احتمال‌های پس از مشاهده» تبدیل می‌شوند. فرضیات قانون بیز کاملاً مشابه فرضیات قانون احتمال کل است. در واقع قانون بیز، نوعی محاسبه احتمال شرطی با فرضیات قانون احتمال کل است.

فرض کنید $B_1, B_2, \dots, B_n$ پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت برای هر پیشامد

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{P(A)} \quad \text{دلخواه A و هر } 1 \leq i \leq n \text{ داریم:}$$

این قانون توضیح می‌دهد که چگونه $P(B_i)$ ها بعد از مشاهده رخ دادن پیشامد A، به $P(B_i | A)$ ها تبدیل می‌شوند.

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A | B_k)}$$

گاهی قانون بیز را به شکل مقابل می‌نویسند:

هدف از این نوع نوشتن قانون بیز این است که تصریح شود در یک مسئله مربوط به قانون بیز معمولاً داده‌های موجود $P(B_k)$ ها و $P(A | B_k)$ ها هستند. توجه کنید که آن‌چه در مخرج عبارت سمت راست آمده است، طبق قانون احتمال کل، همان $P(A)$ است.

مثال

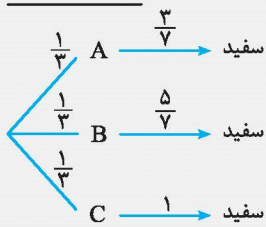
در جعبه‌ای سه ظرف وجود دارد. ظرف A شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه، ظرف B شامل ۵ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و ظرف C شامل تنها تعدادی مهره سفید است. یکی از ظرف‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس مهره‌ای از آن و به تصادف خارج می‌کنیم. اگر مشاهده کنیم مهره خارج شده سفید است، با چه احتمالی این مهره از ظرف C خارج شده است؟

پاسخ: مسئله نوعی احتمال شرطی با فرضیات قانون احتمال کل است. این احتمال را باید از قانون بیز به‌دست آوریم. اگر D پیشامد سفید بودن مهره خارج شده و E پیشامد خارج شدن مهره از ظرف C باشد، آن‌گاه $P(E | D)$ ، احتمال مطلوب است.

$$P(E | D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)}$$

طبق فرمول احتمال شرطی، داریم:

مقدار $P(D)$ را باید از قانون احتمال کل به دست آوریم. اطلاعات در نمودار درختی زیر خلاصه شده است:



$$\Rightarrow P(D) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{7} + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{3}{21} + \frac{5}{21} + \frac{7}{21} = \frac{3+5+7}{21} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

از قانون ضرب احتمالات، داریم:

$$P(E \cap D) = P(E)P(D|E) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow P(E|D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{7}{15}$$

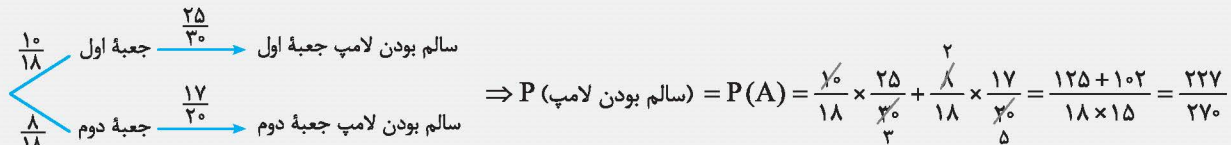
مثال

در دو جعبه به ترتیب ۳۰ و ۲۰ عدد لامپ همانند وجود دارد. در جعبه اول ۵ عدد لامپ معیوب و در جعبه دوم ۳ عدد لامپ معیوب موجود است. از اولی ۱۰ لامپ و از دومی ۸ لامپ به تصادف انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را به صورت درهم در جعبه‌ای جدید قرار می‌دهیم. از این جعبه به تصادف لامپی برمی‌داریم:

(آ) احتمال آن‌که لامپ انتخاب‌شده از جعبه جدید، سالم باشد چقدر است؟

(ب) اگر بدانیم لامپ انتخاب‌شده از جعبه جدید سالم است، با کدام احتمال این لامپ از جعبه اول خارج شده است؟

پاسخ: (آ) جعبه جدید را می‌توان به صورت دو دسته لامپ که یک دسته آن لامپ‌های جعبه اول و دسته دیگر لامپ‌های جعبه دوم است، در نظر گرفت. پس برای لامپی که از جعبه جدید خارج می‌کنیم، دو حالت به وجود می‌آید. در نمودار درختی زیر، اطلاعات نوشته شده است:



(ب) احتمال خواسته شده، احتمال شرطی اما با فرضیات قانون احتمال کل می‌باشد.

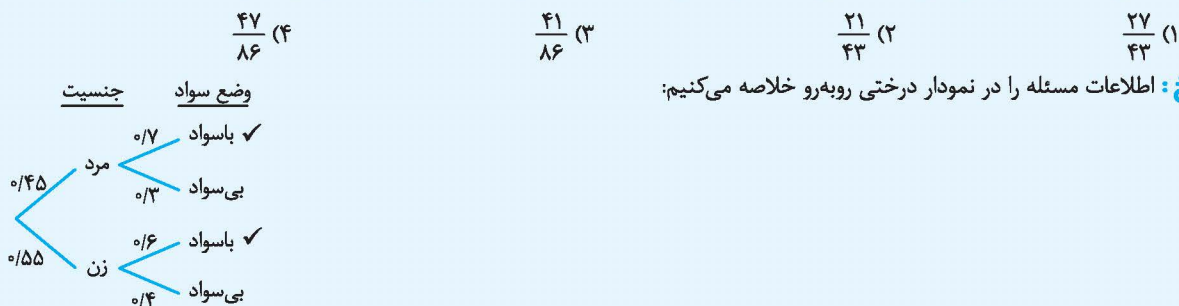
اگر A پیشامد سالم بودن لامپ انتخاب‌شده و B پیشامد خارج شدن لامپ از جعبه اول باشد، باید $P(B|A)$ را با قانون بیز به دست آوریم:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{18} \times \frac{25}{30}}{\frac{261}{27}} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{25}{3}}{\frac{261}{27}} = \frac{125}{261}$$

تست

۵۵ درصد جمعیت کشوری را زنان و ۴۵ درصد بقیه را مردان تشکیل می‌دهند. ۶۰ درصد زنان و ۷۰ درصد مردان باسواد می‌باشند.

شخصی به تصادف از بین آنان انتخاب می‌کنیم، اگر شخص انتخاب‌شده باسواد باشد، آن‌گاه احتمال آن‌که مرد باشد، چقدر است؟



بنابراین احتمال باسواد بودن برابر است با:

احتمال خواسته شده یک احتمال شرطی است. می‌دانیم که شخص انتخاب‌شده باسواد است (B)، می‌خواهیم احتمال مرد بودن وی (A) را به دست

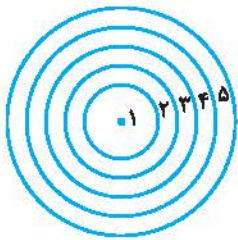
آوریم. داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) = 0.645$$

$$P(A \cap B) = 0.45 \times 0.7 = 0.315 \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.315}{0.645} = \frac{63}{129} = \frac{21}{43} \Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است.}$$

★ ۲۸۴. در پرتاب دارت به صفحه دایره‌ای شکل مقابل، اگر مرز مشترک بین دو ناحیه را جزء ناحیه کوچک‌تر در نظر بگیریم و احتمال اصابت دارت به ناحیه k ام برابر $\frac{k}{8}$ باشد و اگر یک دارت پرتاب شود و بدانیم به یکی از این ۵ ناحیه برخورد کرده است، با کدام احتمال دارت به ناحیه شماره زوج اصابت کرده است؟

(مشابه تمرین ۵ صفحه ۵۱ کتاب درسی)



- (۱) $\frac{2}{3}$
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{2}{5}$
(۴) $\frac{1}{5}$

★ ۲۸۵. بر روی یک تاس اعداد ۱، ۱، ۱، ۱، ۲ و ۳ نوشته شده است. در پرتاب یک بار این تاس، چقدر احتمال دارد که عدد فرد ظاهر شود؟

(مشابه فعالیت صفحه ۴۸ کتاب درسی)

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{5}{6}$

قسمت سوم: احتمال شرطی

احتمال شرطی

★ ۲۸۶. در پرتاب دو تاس سفید و سیاه با هم، می‌دانیم جمع دو عدد رو شده ۸ است. با کدام احتمال تاس سفید ۳ آمده است؟

(مشابه مثال صفحه ۵۴ کتاب درسی)

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{4}$

★ ۲۸۷. در پرتاب دو تاس، اگر هر دو عدد رو شده اول باشند، با کدام احتمال مجموع آن‌ها نیز عددی اول است؟

- (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{5}{9}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{7}{9}$

★ ۲۸۸. یک تاس همگن را انداخته‌ایم. برآمد حاصل، مضرب ۳ نیست. احتمال آن‌که شماره ظاهر شده ۲ باشد، کدام است؟

(سزاسری ریاضی - ۸۶)

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

★ ۲۸۹. تاس همگنی را با چشم بسته انداخته‌ایم و فقط می‌دانیم که برآمد عدد زوج است. احتمال این‌که شماره ۴ یا ۶ ظاهر شده باشد، کدام است؟

(سزاسری ریاضی فارغ از کشور - ۹۱)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

★ ۲۹۰. دو تاس همگن را انداخته‌ایم. اگر حاصل جمع شماره‌های رو شده کم‌تر از ۶ باشد، احتمال آن‌که حداقل شماره یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد، کدام است؟

(سزاسری ریاضی - ۹۱)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{3}{5}$

★ ۲۹۱. در پرتاب دو تاس، اگر حداقل یکی از تاس‌ها ۵ ظاهر شود، احتمال این‌که دو تاس دو عدد متوالی را نشان دهند چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{18}$ (۴) $\frac{4}{11}$

★ ۲۹۲. دو تاس را با هم می‌ریزیم. اگر حداقل یکی از تاس‌ها مضرب ۳ نباشد، با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده مضرب ۳ است؟

(سزاسری ریاضی فارغ از کشور - ۹۳)

- (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{5}{18}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

★ ۲۹۳. یک خانواده چهار فرزندی با کدام احتمال، سه فرزند پسر دارد، در صورتی‌که حداقل یکی از فرزندان آن‌ها پسر است؟

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۶۴ کتاب درسی)

- (۱) $\frac{4}{15}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۲۹۴. در یک خانواده سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر دختر هستند؟ (سراسری تجربی، خارج از کشور - ۸۹)

$$(۱) \frac{3}{8} \quad (۲) \frac{3}{7} \quad (۳) \frac{4}{7} \quad (۴) \frac{5}{8}$$

۲۹۵. یک خانواده سه فرزندی با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد، در صورتی که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان دختر است؟

(سراسری تجربی، خارج از کشور - ۸۷)

$$(۱) \frac{3}{8} \quad (۲) \frac{5}{8} \quad (۳) \frac{2}{7} \quad (۴) \frac{4}{7}$$

۲۹۶☆. در یک خانواده سه فرزندی، می‌دانیم فرزند اول آن‌ها دختر است. با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان پسر است؟ (سراسری تجربی - ۸۷)

$$(۱) \frac{1}{4} \quad (۲) \frac{1}{2} \quad (۳) \frac{5}{8} \quad (۴) \frac{3}{4}$$

۲۹۷☆. در یک خانواده دو فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال، این خانواده دارای فرزند دختر است؟

(سراسری تجربی، خارج از کشور - ۸۵)

$$(۱) \frac{1}{3} \quad (۲) \frac{1}{2} \quad (۳) \frac{2}{3} \quad (۴) \frac{3}{4}$$

۲۹۸. یک تاس و سپس سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر عدد رو شده در پرتاب تاس زوج و فقط ۲ پرتاب از ۳ پرتاب سکه «پشت» بیاید، احتمال آن که عدد رو شده تاس ۲ و پرتاب اول سکه «پشت» بیاید کدام است؟

$$(۱) \frac{7}{9} \quad (۲) \frac{5}{9} \quad (۳) \frac{4}{9} \quad (۴) \frac{2}{9}$$

۲۹۹☆. دانشجویان دانشکده‌ای مطابق جدول زیر توزیع شده‌اند. احتمال آن که دانشجوی زنی در مقطع کارشناسی ارشد مشغول به تحصیل باشد، کدام است؟

		جنسیت			
		زن	مرد		
مقطع تحصیلی	کارشناسی ارشد	۱۵	۲۵	(۲) $\frac{5}{8}$	(۱) $\frac{1}{4}$
	دکترا	۵	۱۵	(۴) $\frac{3}{8}$	(۳) $\frac{3}{4}$

۳۰۰☆. اداره‌ای ۱۲ کارمند دارد که سن هیچ دو نفری یکسان نیست. یکی از کارمندان را به تصادف انتخاب می‌کنیم. سپس کارمند دیگری را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر کارمند دوم مسن‌تر از کارمند اول نباشد، با کدام احتمال کارمند اول مسن‌ترین کارمند است؟

(مشابه مثال صفحه ۵۵ کتاب درسی)

$$(۱) \frac{1}{11} \quad (۲) \frac{1}{6} \quad (۳) \frac{1}{12} \quad (۴) \frac{1}{8}$$

۳۰۱☆. ارقام ۱، ۳، ۴، ۵، ۶ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم. اگر عدد حاصل زوج باشد، احتمال آن که دو رقم یکسان کنار هم باشند، کدام است؟

$$(۱) \frac{1}{4} \quad (۲) \frac{1}{3} \quad (۳) \frac{2}{5} \quad (۴) \frac{3}{5}$$

۳۰۲. از بین اعداد سه‌رقمی، یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر عدد انتخاب شده مضرب ۳ باشد، با کدام احتمال مضرب ۴ می‌باشد؟

$$(۱) \frac{1}{6} \quad (۲) \frac{1}{4} \quad (۳) \frac{1}{3} \quad (۴) \frac{1}{12}$$

۳۰۳☆. درون کیسه‌ای ۴ مهره سفید با شماره‌های ۱ تا ۴ و ۳ مهره سیاه با شماره‌های ۱ تا ۳ قرار دارند. از این کیسه دو مهره به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر حداقل یکی از مهره‌ها سفید و با شماره ۲ باشد، با کدام احتمال مجموع شماره‌های دو مهره برابر ۴ است؟

$$(۱) \frac{1}{8} \quad (۲) \frac{1}{12} \quad (۳) \frac{1}{6} \quad (۴) \frac{1}{4}$$

۳۰۴☆. درون کیسه‌ای ۵ گوی سفید و ۴ گوی سیاه قرار دارد. از این کیسه دو گوی بی‌دری و با جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر دو گوی خارج شده هم‌رنگ باشند، با کدام احتمال سفید می‌باشند؟

$$(۱) \frac{16}{41} \quad (۲) \frac{25}{41} \quad (۳) \frac{3}{8} \quad (۴) \frac{5}{8}$$

۳۰۵☆. درون جعبه‌ای ۳ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۲ مهره آبی وجود دارد. ۳ مهره به تصادف از جعبه بیرون می‌آوریم. اگر حداکثر یکی از مهره‌های خارج شده آبی باشد، با کدام احتمال دو مهره سیاه خارج شده است؟

$$(۱) \frac{5}{28} \quad (۲) \frac{25}{56} \quad (۳) \frac{7}{28} \quad (۴) \frac{13}{56}$$

۳۰۶☆ پنج مهره سفید با شماره‌های ۱ تا ۵ و همچنین ۵ مهره سیاه با شماره‌های ۱ تا ۵ و یکسان را در ظرفی قرار می‌دهیم. به تصادف دو مهره از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم. اگر مجموع شماره‌های دو مهره ۶ باشد، با کدام احتمال، هر دو مهره هم‌رنگ هستند؟ (سراسری ریاضی-۹۲)

$$(1) \frac{2}{5} \quad (2) \frac{4}{9} \quad (3) \frac{5}{9} \quad (4) \frac{3}{5}$$

۳۰۷☆ سه کارت یکسان داریم. دو طرف کارت اول آبی، دو طرف کارت دوم قرمز و یک طرف کارت سوم آبی و طرف دیگر آن قرمز است. کارتی را به تصادف برمی‌داریم و مشاهده می‌کنیم که یک طرف آن آبی است. با کدام احتمال هر دو طرف آن آبی است؟ (مثال صفحه ۵۸ کتاب درسی)

$$(1) \frac{1}{12} \quad (2) \frac{1}{3} \quad (3) \frac{2}{3} \quad (4) \frac{1}{3}$$

۳۰۸ شخصی به تصادف به ۳ سؤال از ۱۰ سؤال پاسخ داده است. اگر این شخص به سؤال اول پاسخ داده باشد، با کدام احتمال این شخص دقیقاً به دو سؤال با شماره فرد پاسخ داده است؟

$$(1) \frac{11}{36} \quad (2) \frac{5}{18} \quad (3) \frac{5}{9} \quad (4) \frac{4}{9}$$

۳۰۹☆ اعداد ۱ تا ۹ را بر روی نه کارت یکسان نوشته و سپس دو کارت به تصادف از بین آنان انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد روی دو کارت کم‌تر از ۶ است، با کدام احتمال عدد روی یکی از کارت‌ها برابر ۴ است؟

$$(1) \frac{1}{4} \quad (2) \frac{1}{3} \quad (3) \frac{1}{5} \quad (4) \frac{1}{6}$$

۳۱۰ از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان، به تصادف یک کارت بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم، سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، هر دو کارت هم‌رنگ هستند؟ (سراسری تجربی-۹۱)

$$(1) \frac{2}{7} \quad (2) \frac{5}{14} \quad (3) \frac{3}{7} \quad (4) \frac{4}{7}$$

۳۱۱ در جعبه‌ای ۸ لامپ موجود است که دوتای آن‌ها معیوب است. به تصادف متوالیاً این لامپ‌ها را آزمایش کرده و لامپ سالم را کنار می‌گذاریم تا اولین لامپ معیوب پیدا شود. با کدام احتمال در آزمایش سوم، اولین لامپ معیوب پیدا می‌شود؟ (سراسری ریاضی)

$$(1) \frac{5}{28} \quad (2) \frac{4}{21} \quad (3) \frac{3}{14} \quad (4) \frac{5}{21}$$

۳۱۲ در کیسه‌ای ۲ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۲ مهره زرد قرار دارد. از این کیسه دو مهره به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل یکی از مهره‌های خارج شده زرد می‌باشد؟

$$(1) \frac{15}{28} \quad (2) \frac{13}{28} \quad (3) \frac{17}{28} \quad (4) \frac{31}{56}$$

۳۱۳ درون ظرفی ۴ سیب و ۵ پرتقال وجود دارد. از این ظرف ۳ عدد از آن‌ها را به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال در ابتدا سیب و سپس دو پرتقال از ظرف خارج می‌شود؟ (مشابه کار در کلاس صفحه ۵۷ کتاب درسی)

$$(1) \frac{25}{126} \quad (2) \frac{8}{63} \quad (3) \frac{2}{9} \quad (4) \frac{10}{63}$$

۳۱۴ بسکتبالیستی هر بار که اقدام به پرتاب می‌کند، اگر روحیه خوبی داشته باشد، پرتابش به احتمال ۹۰ درصد وارد سبد می‌شود و در غیر این صورت به احتمال ۷۰ درصد پرتاب‌هایش وارد سبد می‌شود. اگر این بسکتبالیست به هنگام پرتاب اول روحیه خوبی داشته باشد و سه پرتاب متوالی انجام دهد، با کدام احتمال فقط پرتاب دوم وارد سبد نمی‌شود؟ (مشابه کار در کلاس صفحه ۵۷ کتاب درسی)

$$(1) 0/233 \quad (2) 0/189 \quad (3) 0/063 \quad (4) 0/081$$

۳۱۵☆ شخصی در سه آزمون پی‌در پی شرکت می‌کند. احتمال قبولی وی در آزمون اول برابر ۰/۶ و احتمال قبولی وی در آزمون‌های بعدی به شرط قبولی یا عدم قبولی در آزمون قبل به ترتیب ۰/۸ و ۰/۵۵ است. شرط پذیرش، قبولی در حداقل دو آزمون است. احتمال پذیرش این شخص کدام است؟

$$(1) 0/625 \quad (2) 0/694 \quad (3) 0/722 \quad (4) 0/728$$

۳۱۶☆ دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب نتیجه حاصل می‌شود؟ (سراسری تجربی-۹۱)

$$(1) \frac{27}{64} \quad (2) \frac{37}{64} \quad (3) \frac{19}{32} \quad (4) \frac{39}{64}$$

۳۱۷ اگر ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ درست باشد، احتمال آن‌که مقدم درست باشد، کدام است؟

$$(1) \frac{1}{2} \quad (2) \frac{1}{4} \quad (3) \frac{2}{3} \quad (4) \frac{1}{3}$$

۳۱۸☆ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که $P(A) = 0.3$ ، $P(B) = 0.4$ و $P(A|B) = 0.6$ ، آن‌گاه $P(B|A)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۳۱۹☆ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $P(A) = 0.2$ ، $P(B) = 0.22$ و $P(B|A) = 0.7$ ، آن‌گاه $P(B'|A')$ کدام است؟

(سراسری ریاضی-۹۰)

- (۱) 0.96 (۲) 0.9 (۳) 0.92 (۴) 0.84

۳۲۰☆ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $A \subseteq B$ ، $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{3}{4}$ ، آن‌گاه $P(B|A')$ کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور-۹۰)

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{7}{12}$ (۴) $\frac{5}{8}$

۳۲۱☆ یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۴ برآمد a, b, c, d است. اگر $P(a) = \frac{1}{4}$ ، $P(b) = \frac{1}{6}$ ، $P(c) = 2P(d)$ باشد، حاصل $P(\{a, c, d\} | \{b, c, d\})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{18}$ (۲) $\frac{5}{18}$ (۳) $\frac{5}{9}$ (۴) $\frac{7}{9}$

۳۲۲☆ یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۵ برآمد a, b, c, d, e است. اگر $P(a) = \frac{1}{4}$ و $P(\{a, b, c\}) = \frac{2}{3}$ باشد، احتمال $P(\{b, c, e\} | \{a, b, c\})$ کدام است؟

(سراسری ریاضی-۹۰)

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{5}{12}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$

قانون احتمال کل

۳۲۳☆ پیشامدهای B_1, B_2, B_3 یک افراز از فضای نمونه‌ای S می‌باشند. به طوری که به ازای هر $i = 1, 2, 3$ ، $P(B_i) = \frac{1}{6}$ و $P(A|B_i) = \frac{1}{4}$ ، احتمال وقوع پیشامد A از این فضای نمونه‌ای کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۳۲۴☆ سه ظرف همانند داریم. در اولی و دومی هر کدام ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در ظرف سوم ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. اگر به تصادف یک ظرف انتخاب و یک مهره بیرون آوریم، با کدام احتمال این مهره سیاه است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور)

- (۱) $\frac{9}{20}$ (۲) $\frac{11}{20}$ (۳) $\frac{13}{40}$ (۴) $\frac{17}{40}$

۳۲۵☆ ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده، سفید است؟

(سراسری تجربی-۹۳)

- (۱) $\frac{25}{63}$ (۲) $\frac{26}{63}$ (۳) $\frac{10}{21}$ (۴) $\frac{11}{21}$

۳۲۶☆ در جعبه اول ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه دوم ۳ مهره سفید و ۶ مهره سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب نموده و دو مهره با هم و به تصادف از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور-۹۲)

- (۱) $\frac{31}{168}$ (۲) $\frac{11}{56}$ (۳) $\frac{17}{84}$ (۴) $\frac{13}{56}$

۳۲۷☆ کیسه‌ای شامل دو ظرف است که در ظرف اول ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در ظرف دوم ۶ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است. اگر بخواهیم در برداشتن یک مهره به تصادف از یک ظرف، احتمال سیاه و سفید برابر باشد، چند مهره سیاه باید به ظرف دوم اضافه کنیم؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

۳۲۸☆ دو ظرف داریم. در اولی ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در دومی ۷ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه است. از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون رؤیت در ظرف دوم قرار می‌دهیم. آن‌گاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

(سراسری ریاضی)

- (۱) $\frac{8}{27}$ (۲) $\frac{11}{27}$ (۳) $\frac{34}{81}$ (۴) $\frac{41}{81}$

☆ ۳۲۹. در جعبه‌ای ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه موجود است. ۲ مهره بدون رؤیت از جعبه خارج می‌کنیم. سپس از بین باقی‌مانده مهره‌ها، به تصادف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟
(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۳)

$$(1) \frac{5}{14} \quad (2) \frac{3}{7} \quad (3) \frac{4}{7} \quad (4) \frac{9}{7}$$

☆ ۳۳۰. در ظرفی ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف ۲ مهره از ظرف بدون رؤیت خارج شده است. از ۵ مهره باقی‌مانده، یک مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟
(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۷)

$$(1) \frac{12}{35} \quad (2) \frac{3}{7} \quad (3) \frac{16}{35} \quad (4) \frac{4}{7}$$

☆ ۳۳۱. در دو ظرف به ترتیب ۲۴ و ۱۸ مهره یکسان موجود است. در ظرف اول ۶ مهره سفید و در ظرف دوم ۳ مهره سفید است. از اولی ۷ مهره و از دومی ۵ مهره به تصادف برداشته و در ظرف دیگری می‌ریزیم. سپس از ظرف آخر یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟
(سراسری ریاضی- ۹۴)

$$(1) \frac{13}{77} \quad (2) \frac{7}{36} \quad (3) \frac{15}{77} \quad (4) \frac{31}{144}$$

☆ ۳۳۲. در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ عدد لامپ یکسان موجود است. در جعبه اول ۴ عدد و در جعبه دوم ۳ عدد لامپ معیوب‌اند. از اولی ۸ لامپ و از دومی ۶ لامپ به تصادف برداشته و در یک جعبه جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبه جدید معیوب است؟
(سراسری ریاضی- ۸۹)

$$(1) \frac{17}{105} \quad (2) \frac{19}{105} \quad (3) \frac{6}{25} \quad (4) \frac{8}{25}$$

☆ ۳۳۳. شش مهره با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ در ظرفی قرار دارند. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم و بدون جایگذاری، ۲ مهره دیگر خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره با شماره ۲ خارج شده است؟
(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۵)

$$(1) \frac{1}{3} \quad (2) \frac{2}{5} \quad (3) \frac{3}{5} \quad (4) \frac{2}{3}$$

☆ ۳۳۴. یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد حاصل مضرب ۳ باشد، دو سکه را با هم و در غیر این صورت سه سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که دقیقاً ۲ بار «درو» ظاهر شود، چقدر است؟

$$(1) \frac{1}{5} \quad (2) \frac{2}{3} \quad (3) \frac{1}{2} \quad (4) \frac{1}{3}$$

☆ ۳۳۵. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «درو» بیاید تاس را می‌ریزیم، اگر «پشت» بیاید، سه سکه دیگر را با هم می‌ریزیم. در این آزمایش، احتمال این‌که دقیقاً یک سکه «درو» ظاهر شود، کدام است؟
(سراسری ریاضی- ۸۹)

$$(1) \frac{3}{4} \quad (2) \frac{9}{16} \quad (3) \frac{5}{8} \quad (4) \frac{11}{16}$$

☆ ۳۳۶. در پرتاب یک تاس اگر ۶ ظاهر شود، مجاز به پرتاب تاس دوم هستیم. در غیر این صورت دو سکه پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل یک سکه «رو» ظاهر می‌شود؟
(سراسری ریاضی)

$$(1) \frac{2}{3} \quad (2) \frac{3}{4} \quad (3) \frac{5}{8} \quad (4) \frac{5}{12}$$

☆ ۳۳۷. تاس سالمی را پرتاب می‌کنیم. اگر زوج ظاهر شود، دو تاس دیگر و اگر فرد ظاهر شود، یک تاس دیگر پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که مجموع تاس‌های پرتاب شده برابر ۷ باشد، چقدر است؟

$$(1) \frac{1}{3} \quad (2) \frac{1}{9} \quad (3) \frac{1}{18} \quad (4) \frac{1}{36}$$

☆ ۳۳۸. در شهری ۷۰ درصد از راننده‌ها مرد و ۳۰ درصد زن هستند. احتمال این‌که یک راننده مرد تخلفی مرتکب شده باشد، ۰/۸ و این احتمال برای راننده زن ۰/۴۵ است. احتمال این‌که یک راننده در این شهر تخلفی مرتکب شده باشد، کدام است؟
(مشابه تمرین ۸ صفحه ۶۵ کتاب درسی)

$$(1) ۰/۶۹۵ \quad (2) ۰/۶۶۵ \quad (3) ۰/۶۴ \quad (4) ۰/۶۲$$

☆ ۳۳۹. در آزمون ورودی دانشگاه، درصد شرکت‌کنندگان سه رشته تجربی، ریاضی و انسانی به ترتیب ۵۰، ۲۵ و ۲۵ می‌باشد. هم‌چنین درصد شرکت‌کنندگان دختر در سه رشته به ترتیب ۶۰، ۴۰ و ۴۰ می‌باشد. اگر یک نفر به تصادف از بین آن‌ها انتخاب شود، با کدام احتمال دختر می‌باشد؟

$$(1) ۰/۴۵ \quad (2) ۰/۵ \quad (3) ۰/۵۲ \quad (4) ۰/۵۶$$

☆ ۳۴۰. احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر، ۱۰ درصد و به فرزند دختر ۶ درصد است. با کدام احتمال، فرزندی که به دنیا می‌آید، این نوع بیماری را ندارد؟
(سراسری تجربی)

$$(1) ۰/۹۱ \quad (2) ۰/۹۲ \quad (3) ۰/۹۳ \quad (4) ۰/۹۴$$

۳۴۱. ۹۵ درصد متهم‌هایی که به یک دادگاه آورده می‌شوند گناهکار می‌باشند. اگر در ۹۸ درصد مواقع هیئت منصفه تشخیص درست بدهد و یک نفر از متهم‌ها را به تصادف از بین آن‌ها انتخاب کنیم، با کدام احتمال گناهکار است؟

- (۱) $\frac{912}{932}$ (۲) $\frac{932}{932}$ (۳) $\frac{938}{938}$ (۴) $\frac{946}{946}$

۳۴۲. در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچه سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن‌ها، دفترچه سلامت دارد؟

(سراسری ترمی خارج از کشور - ۹۰)

- (۱) $\frac{658}{669}$ (۲) $\frac{669}{669}$ (۳) $\frac{685}{685}$ (۴) $\frac{696}{696}$

۳۴۳. احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند $\frac{1}{25}$ و احتمال انتقال به افراد دیگر $\frac{1}{2}$ است. $\frac{2}{5}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟

(سراسری ترمی - ۸۹)

- (۱) $\frac{13}{14}$ (۲) $\frac{14}{14}$ (۳) $\frac{15}{15}$ (۴) $\frac{16}{16}$

۳۴۴. ۵۵ درصد دانشجویان سال اول، دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند؟

(سراسری ترمی خارج از کشور - ۸۸)

- (۱) $\frac{614}{618}$ (۲) $\frac{618}{618}$ (۳) $\frac{624}{624}$ (۴) $\frac{628}{628}$

۳۴۵. در یک شرکت بسته‌بندی کالا، درصد محصولات تولیدی، با سه دستگاه A، B و C به ترتیب ۲۵، ۴۵ و ۲۵ می‌باشد. می‌دانیم ۱ درصد از محصولات A، ۲ درصد از محصولات B و ۴ درصد از محصولات C معیوب هستند. اگر یک کالا به تصادف از بین این محصولات انتخاب کنیم، احتمال سالم بودن آن کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۹)

- (۱) $\frac{925}{978}$ (۲) $\frac{978}{978}$ (۳) $\frac{982}{982}$ (۴) $\frac{987}{987}$

۳۴۶. نقشه‌های جغرافیایی با دو دستگاه متمایز و جدا از هم چاپ می‌شوند. درصد چاپ معیوب در ماشین اول ۴ و در ماشین دوم ۵ می‌باشد و تعداد نقشه‌های چاپ‌شده ماشین دوم سه برابر تعداد نقشه‌های چاپ‌شده ماشین اول است. اگر به تصادف یک نقشه انتخاب شود، با کدام احتمال این نقشه معیوب است؟

(مشابه ترمین ۱۰ صفحه ۶۵ کتاب درسی)

- (۱) $\frac{433}{445}$ (۲) $\frac{445}{445}$ (۳) $\frac{445}{445}$ (۴) $\frac{475}{475}$

۳۴۷. در یک خانواده، احتمال داشتن گروه خونی A برای فرزند پسر $\frac{1}{3}$ و برای فرزند دختر $\frac{1}{4}$ است. اگر این خانواده دو فرزند داشته باشد، احتمال آن‌که گروه خونی هر دو فرزند از نوع A باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{47}{400}$ (۲) $\frac{47}{400}$ (۳) $\frac{49}{400}$ (۴) $\frac{49}{400}$

قانون بیز

۳۴۸. اگر B_1, B_2 و B_3 افزایش از فضای نمونه‌ای S باشند، با توجه به اطلاعات زیر، مقدار $P(B_2 | A)$ کدام است؟

$$P(B_1) = \frac{1}{2}, P(A | B_1) = \frac{1}{10}, P(B_2) = \frac{1}{3}, P(A | B_2) = \frac{1}{2}, P(B_3) = \frac{1}{5}, P(A | B_3) = \frac{1}{5}$$

- (۱) $\frac{2}{33}$ (۲) $\frac{1}{16}$ (۳) $\frac{2}{11}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۳۴۹. سه جعبه سیب همانند داریم. اولی شامل ۲ سیب سالم و ۱۳ سیب لکه‌دار، دومی شامل ۳ سیب سالم و ۷ سیب لکه‌دار و سومی تنها شامل سیب‌های سالم است. با چشم بسته یکی از سه جعبه را انتخاب و از آن سیبی خارج می‌کنیم. اگر بدائیم سیب خارج‌شده سالم است، با کدام احتمال از جعبه سوم خارج شده است؟

- (۱) $\frac{19}{43}$ (۲) $\frac{30}{43}$ (۳) $\frac{25}{86}$ (۴) $\frac{47}{86}$

۳۵۰. در یک کتابخانه، ۴۰ درصد کتاب‌ها به زبان فارسی و بقیه به زبان لاتین هستند. در میان کتاب‌های فارسی ۳۰ درصد و در میان کتاب‌های لاتین ۴۰ درصد جلد مقوایی دارند. اگر کتابی را به تصادف انتخاب و مشاهده کنیم که جلد مقوایی دارد، احتمال آن‌که به زبان لاتین باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{12}{11}$ (۲) $\frac{124}{11}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۳۵۱. درون کیسه‌ای سه سکه وجود دارد. سکه اول همگن، دو طرف سکه دوم «پشت» و در سکه سوم، احتمال آمدن «رو» دو برابر احتمال آمدن «پشت» است. یکی از سکه‌ها را به تصادف خارج می‌کنیم، سپس آن را پرتاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم «پشت» است، با چه احتمالی سکه خارج‌شده همگن است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{5}{11}$ (۳) $\frac{8}{11}$ (۴) $\frac{3}{11}$

۳۵۲. در یک جامعه روستایی، ۶۰ درصد جمعیت آن را مردان و ۴۰ درصد آن را زنان تشکیل می‌دهند. می‌دانیم ۸۰ درصد مردان و ۳۰ درصد زنان به کار کشاورزی مشغول می‌باشند. اگر یک نفر از این جامعه به تصادف انتخاب کنیم و مشغول کار کشاورزی باشد، با کدام احتمال زن می‌باشد؟

$$(۱) \frac{2}{5} \quad (۲) \frac{1}{5} \quad (۳) \frac{1}{6} \quad (۴) \frac{1}{3}$$

۳۵۳☆. در ظرف اول ۷ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و در ظرف دوم ۴ مهره سفید و ۸ مهره سیاه موجود است. یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر ۵ یا ۶ بیاید مجاز هستیم که از ظرف اول سه مهره و در غیر این صورت از ظرف دوم سه مهره بیرون آوریم. اگر از مهره‌های خارج شده دقیقاً ۲ مهره سفید باشد، با کدام احتمال از ظرف اول خارج شده‌اند؟

$$(۱) \frac{42}{71} \quad (۲) \frac{35}{67} \quad (۳) \frac{39}{71} \quad (۴) \frac{32}{67}$$

۳۵۴. ۶۰ درصد تلفن‌های شرکتی توسط تلفنچی A و مابقی توسط تلفنچی B وصل می‌شود. شخص A از هر ۵۰ تلفن یکی و شخص B از هر ۲۰ تلفن یکی را اشتباه وصل می‌کنند. شکایتی در خصوص اشتباه وصل شدن تلفن رسیده است. احتمال این‌که شخص A آن را وصل کرده باشد، چقدر است؟

$$(۱) ۰/۰۰۲ \quad (۲) ۰/۰۱۲ \quad (۳) ۰/۳۷۵ \quad (۴) ۰/۶۲۵$$

۳۵۵☆. در یک شرکت تولیدی، ۵۵ درصد کالا محصول دستگاه A با احتمال ۳ درصد معیوب و ۴۵ درصد آن محصول دستگاه B با احتمال ۵ درصد معیوب است. دو دستگاه مستقل از هم هستند. اگر یک کالا را به طور تصادفی انتخاب کنیم و بدانیم که معیوب است، با کدام احتمال این کالا محصول دستگاه A است؟

(سراسری ریاضی هفتم از کشور-۹۴)

$$(۱) \frac{11}{26} \quad (۲) \frac{6}{13} \quad (۳) \frac{7}{13} \quad (۴) \frac{15}{26}$$

۳۵۶. فرض کنید از بین ۳ کارت با شماره‌های ۲ تا ۴ کارتی را به تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر یک بار «رو» بیاید، احتمال این‌که شماره کارت خارج شده ۳ باشد، چقدر است؟

(مشابه تمرین ۱۸ صفحه ۶۶ کتاب درسی)

$$(۱) \frac{3}{8} \quad (۲) \frac{1}{3} \quad (۳) \frac{1}{8} \quad (۴) \frac{2}{3}$$

۳۵۷☆. در یک آزمون از دو کلاس A و B، ۴۰ درصد دانش‌آموزان کلاس A و ۶۰ درصد دانش‌آموزان کلاس B قبول شده‌اند. اگر تعداد داوطلبان در کلاس A دو برابر کلاس B باشد و فردی به تصادف از بین قبول شدگان انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد از کلاس A است؟

(سراسری ریاضی هفتم از کشور-۸۸)

$$(۱) ۰/۴۳ \quad (۲) ۰/۵۷ \quad (۳) ۰/۶۱ \quad (۴) ۰/۶۳$$

۳۵۸☆. ۶۰ درصد واجدین شرایط در شهر A، ۷۰ درصد واجدین شرایط در شهر B و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر C در انتخابات ریاست جمهوری شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A، دو برابر تعداد واجدین شرایط شهر B و سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر C باشند و فردی به تصادف از بین رأی‌دهندگان این سه شهر انتخاب شود، با کدام احتمال از شهر B است؟

(مشابه تمرین ۱۰ صفحه ۶۵ کتاب درسی)

$$(۱) \frac{31}{73} \quad (۲) \frac{27}{73} \quad (۳) \frac{25}{73} \quad (۴) \frac{21}{73}$$

۳۵۹. جعبه‌ای شامل ۴ مهره سفید و ۵ مهره آبی است. دو مهره را به تصادف خارج کرده و آن‌ها را بدون توجه به رنگشان کنار می‌گذاریم و سپس مهره سوم را خارج می‌کنیم. اگر سومین مهره خارج شده سفید باشد، با کدام احتمال دو مهره اول خارج شده آبی هستند؟

$$(۱) \frac{9}{14} \quad (۲) \frac{5}{14} \quad (۳) \frac{5}{28} \quad (۴) \frac{9}{28}$$

۳۶۰. کتابی توسط سه ویراستار A، B و C، ویرایش شده است که سهم ویراستاری آن‌ها به ترتیب ۴۰، ۳۵ و ۲۵ درصد است. احتمال آن‌که این سه نفر ویراستاری بدون غلط داشته باشند به ترتیب ۰/۹۸، ۰/۹۶ و ۰/۹۰ می‌باشد. اگر صفحه‌ای ویراستاری شده باشد ولی غلط نداشته باشد، آنگاه احتمال آن‌که مسئول ویراستاری آن صفحه، ویراستار A باشد چقدر است؟

(مشابه تمرین ۱۷ صفحه ۶۶ کتاب درسی)

$$(۱) \frac{352}{953} \quad (۲) \frac{361}{953} \quad (۳) \frac{368}{953} \quad (۴) \frac{392}{953}$$

۳۶۱. دانش‌آموزی در یک آزمون تستی چهارگزینه‌ای، گزینه ۴۰ درصد سوالات را به تصادف انتخاب کرده است. اگر بدانیم این دانش‌آموز، تستی را درست پاسخ داده است، با کدام احتمال این تست را به تصادف پاسخ داده است؟

$$(۱) \frac{1}{4} \quad (۲) \frac{1}{6} \quad (۳) \frac{1}{7} \quad (۴) \frac{1}{3}$$

۲۹۴

فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان یک خانواده با سه فرزند، ۸ عضو دارد. اگر B پیشامدی باشد که در آن یکی از فرزندان پسر باشد، آن‌گاه:

$$B = S - \{(د، د، د)\} \Rightarrow n(B) = 8 - 1 = 7$$

$\{(پ، پ، د)، (د، د، پ)، (د، د، د)\}$: دو فرزند دختر

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 3 \Rightarrow P(A|B) = \frac{3}{7}$$

۲۹۵

فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان یک خانواده ۳ فرزندی، ۸ عضو دارد که فقط در یک حالت (پ، پ، پ) هیچ فرزندی دختر نمی‌باشد. بنابراین اگر B پیشامدی باشد که در آن حداقل یک فرزند دختر باشد، آن‌گاه B، ۷ عضو دارد و اگر A پیشامدی باشد که در آن حداقل دو فرزند دختر باشند، آن‌گاه:

$$n(A \cap B) = \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 4 \Rightarrow P(A|B) = \frac{4}{7}$$

۲۹۶

$B = \{(د، پ، د)، (پ، پ، د)، (د، د، د)\}$: فرزند اول دختر است.

A: لااقل یکی از فرزندان پسر

$$\Rightarrow A \cap B = \{(د، پ، د)، (پ، پ، د)\}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{3}$$

۲۹۷

$B = \{(پ، د)، (د، د)، (پ، پ)\}$: حداقل یکی از فرزندان پسر است.

A: خانواده دارای فرزند دختر است.

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{2}{3}$$

۲۹۸

پیشامدهای A و B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم و سپس احتمال شرطی $P(A|B)$ را به‌دست می‌آوریم:

B: عدد تاس زوج و فقط ۲ پرتاب از ۳ پرتاب سکه «پشت» بیاید.
از اصل ضرب برای به‌دست آوردن $n(B)$ استفاده می‌کنیم:

تعداد دادهای زوج تاس

$$n(B) = 2 \times \binom{3}{2} = 2 \times 3 = 6$$

در ۳ پرتاب سکه، ۲ بار «پشت» بیاید.

A: عدد رو شده تاس ۲ و پرتاب اول سکه «پشت» بیاید.

عدد تاس ۲ باشد.

$$n(A \cap B) = 1 \times 2 = 2$$

$$\{(ر، پ، پ)، (پ، پ، ر)\}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{6}$$

۲۹۹

با توجه به جدول، $15 + 5 = 20$ دانشجوی زن مشغول به تحصیل می‌باشند که ۱۵ تای آن‌ها در مقطع کارشناسی ارشد می‌باشند؛ لذا احتمال

$$\text{مطلوب برابر } \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \text{ است.}$$

۲۸۸

اگر B پیشامدی باشد که برآمد حاصل، مضرب ۳ نباشد، آن‌گاه:

$$B = \{1, 2, 4, 5\}$$

$$A \Rightarrow A \cap B = \{2\} \Rightarrow P(A|B) = \frac{1}{4}$$

شماره ۲ ظاهر شود.

۲۸۹

B: عدد حاصل زوج است.

$$A \Rightarrow A \cap B = \{4, 6\} \Rightarrow P(A|B) = \frac{2}{4}$$

عدد ظاهر شده ۴ یا ۶ است.

۲۹۰

اگر B پیشامدی باشد که در آن حاصل جمع شماره‌های دو تاس کم‌تر از ۶ باشد، آن‌گاه:

$$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$$

A: پیشامدی باشد که در آن حداقل شماره یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد، آن‌گاه:

$$A \cap B = \{(1,2), (2,1), (2,2), (3,1)\}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

۲۹۱

احتمال خواسته‌شده، احتمال شرطی است. با فرض‌های زیر، داریم:

B: حداقل یکی از تاس‌ها ۵ ظاهر شود.

A: دو تاس دو عدد متوالی را نشان دهد.

$$B = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6)\} \Rightarrow n(B) = 11$$

$$A \cap B = \{(4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 4$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4}{11}$$

۲۹۲

اگر B (پیشامد رخ داده) تمام حالت‌هایی در پرتاب دو تاس باشد که حداقل یکی از تاس‌ها مضرب ۳ نباشد، آن‌گاه B' پیشامدی است که هر دو تاس مضرب ۳ است، بنابراین:

$$B' = \{(3,3), (3,6), (6,3), (6,6)\}$$

فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس (S)، ۳۶ عضو دارد، بنابراین:

$$B = S - B' \Rightarrow n(B) = 36 - 4 = 32$$

اگر A پیشامدی باشد که جمع دو عدد رو شده مضرب ۳ باشد، آن‌گاه:

$$A \cap B = \underbrace{\{(1,2), (2,1)\}}_{\text{مجموع } 3} \cup \underbrace{\{(1,5), (2,4), (4,2), (5,1)\}}_{\text{مجموع } 6} \cup \underbrace{\{(4,5), (5,4)\}}_{\text{مجموع } 9}$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 8 \Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

۲۹۳

فضای نمونه‌ای فرزندان خانواده با ۴ فرزند، $2^4 = 16$ عضو دارد. اگر B پیشامدی باشد که در آن، این خانواده حداقل یک فرزند پسر داشته باشد، آن‌گاه B شامل تمام اعضای فضای نمونه‌ای S به غیر از برآمد (د، د، د، د) است، بنابراین:

$$n(B) = n(S) - 1 = 16 - 1 = 15$$

اگر A پیشامدی باشد که این خانواده دارای ۳ فرزند پسر باشد، آن‌گاه:

$$A \cap B = \{(پ، پ، پ، د)، (پ، پ، د، پ)، (پ، د، پ، پ)، (د، پ، پ، پ)\}$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 4 \Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4}{15}$$

۳.۳ (۴ ۳ ۲ ۱)

اگر B پیشامدی باشد که در آن حداقل یکی از مهره‌ها سفید و با شماره ۲ باشد، آن‌گاه:

$$B = \{(w_2, w_1), (w_2, w_2), (w_2, w_3), (w_2, b_1), (w_2, b_2), (w_2, b_3), (w_1, w_2), (w_1, w_3), (w_1, w_4), (b_1, w_2), (b_1, w_3), (b_1, w_4)\} \Rightarrow n(B) = 12$$

اگر A پیشامدی باشد که در آن مجموع شماره‌های دو مهره برابر ۴ باشد، آن‌گاه:

$$A \cap B = \{(b_2, w_2), (w_2, b_2)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

۳.۴ (۴ ۳ ۲ ۱)

اگر B پیشامدی باشد که در آن دو گوی خارج شده هم‌رنگ باشند، آن‌گاه:

گوی دوم سیاه و گوی اول سیاه یا گوی دوم سفید و گوی اول سفید:

$$\Rightarrow n(B) = 5 \times 5 + 4 \times 4 = 41$$

توجه کنیم که در آزمایش‌های با جایگذاری، مهره خارج شده را دوباره به کیسه برمی‌گردانیم.

اگر A پیشامدی باشد که در آن هر دو گوی خارج شده سفید باشند، آن‌گاه:

$$n(A \cap B) = 5 \times 5 = 25 \Rightarrow P(A|B) = \frac{25}{41}$$

۳.۵ (۴ ۳ ۲ ۱)

B : حداکثر یک مهره خارج شده آبی باشد.

$$n(B) = \binom{2}{1} \binom{4}{2} + \binom{2}{0} \binom{4}{3} = 2 \times 6 + 1 \times 4 = 16$$

هر سه مهره
غیر آبی

یک مهره آبی و
دو مهره غیر آبی

اگر A پیشامد خارج شدن دو مهره سیاه از جعبه باشد، آن‌گاه:

$A \cap B$: دو مهره سیاه و یک مهره آبی از جعبه خارج شود یا دو مهره سیاه و یک مهره سفید از جعبه بیرون بیاید.

$$\Rightarrow n(A \cap B) = \binom{5}{2} \binom{2}{1} + \binom{5}{2} \binom{3}{1} = 10 \times 2 + 10 \times 3 = 50$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}$$

۳.۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

اگر B پیشامدی باشد که در آن مجموع شماره‌های دو مهره ۶ باشد، آن‌گاه:

$w =$ مهره سیاه ، $b =$ مهره سفید

$$B = \{(w_2, w_4), (w_1, w_5), (b_2, b_4), (b_1, b_5), (w_2, b_4), (w_1, b_5), (w_4, w_2), (w_5, w_1), (b_4, b_2), (b_5, b_1), (w_4, b_2), (w_5, b_1)\} \Rightarrow n(B) = 9$$

اگر A پیشامدی باشد که هر دو مهره هم‌رنگ باشند، آن‌گاه:

$A \cap B = \{(w_2, w_4), (w_1, w_5), (b_2, b_4), (b_1, b_5)\}$

$$n(A \cap B) = 4 \Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4}{9}$$

۳.۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

برای محاسبه احتمال شرطی خواسته شده، پیشامدهای A و B را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

A : کارمند اول مسن‌ترین کارمند است.

B : کارمند دوم مسن‌تر از کارمند اول نیست.

برای به دست آوردن مقدار $P(A|B)$ داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

واضح است که $A \subseteq B$ می‌باشد (اگر کارمند اول مسن‌ترین کارمند باشد، آن‌گاه قطعاً کارمند دوم مسن‌تر از کارمند اول نیست). در نتیجه داریم:

$$A \cap B = A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{12}$$

(احتمال آن‌که کارمندی که به تصادف از بین ۱۲ کارمند انتخاب می‌شود، مسن‌ترین کارمند باشد، برابر $\frac{1}{12}$ است).

همچنین $P(B) = \frac{1}{4}$ است. (در نیمی از حالات کارمند اول مسن‌تر از کارمند دوم است و در نیمی از حالات دیگر، کارمند دوم مسن‌تر از کارمند اول است). بنابراین:

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

۳.۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

اگر پیشامد B ، تمام اعداد زوج با ارقام ۵، ۴، ۳، ۲ باشد، آن‌گاه:

$$n(B) = \frac{4}{1} \times \frac{3}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} = 24$$

رقم یکان ۴ است.

اگر پیشامد A ، مجموعه تمام اعدادی باشند که در آن دو رقم یکسان (زوج) کنار هم باشند، در این صورت $A \cap B$ تمام اعداد زوجی خواهد بود که دو رقم سمت راست آن‌ها ۴ می‌باشند. بنابراین:

$$n(A \cap B) = \frac{3}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = 6 \Rightarrow P(A|B) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

رقم ۲

۳.۹ (۴ ۳ ۲ ۱)

فضای نمونه این آزمایش تصادفی مجموعه تمام اعداد سه رقمی می‌باشد:

$$S = \{1000, 1001, 1002, \dots, 9999\}$$

با توجه به شرط داده شده (مضرب ۳ بودن عدد انتخاب شده)، فضای نمونه‌ای جدید به صورت مقابل است:

$$\Rightarrow n(B) = \left[\frac{9999}{3} \right] - \left[\frac{99}{3} \right] = 3333 - 33 = 3300$$

تعداد اعداد مضرب ۳ کمتر از ۱۰۰ تعداد اعداد مضرب ۳ کمتر از ۱۰۰۰

اگر A پیشامد مضرب ۴ بودن عدد انتخاب شده باشد، آن‌گاه $A \cap B$ مجموعه تمام اعداد سه رقمی مضرب ۱۲ می‌باشد:

$$A \cap B = \{1008, 1020, \dots\}$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = \left[\frac{9999}{12} \right] - \left[\frac{99}{12} \right] = 833 - 8 = 825$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{825}{3300} = \frac{1}{4}$$

در حالت دوم، احتمال مطلوب برابر است با:

یک کارت سفید کم می‌شود.

$$P_2 = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$$

یک کارت کم می‌شود.

بنابراین احتمال مطلوب برابر $\frac{12}{42} + \frac{6}{42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$ می‌باشد.

۳۱۱

برای آن‌که در آزمایش سوم، اولین لامپ معیوب باشد، باید دو لامپ اول خارج‌شده، سالم و لامپ سوم معیوب باشد. چون خارج کردن لامپ از جعبه، بدون جایگزینی است، در هر مرحله یک لامپ از جعبه کم می‌شود.

$$P = \frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{28}$$

بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

لامپ سوم معیوب دو لامپ اول سالم

۳۱۲

متمم عبارت «حداقل یکی از مهره‌های خارج‌شده زرد می‌باشد»، عبارت «هیچ‌یک از دو مهره خارج‌شده زرد نیستند» می‌باشد. چون مهره‌ها به ترتیب و بدون جایگزینی خارج شده است، با معرفی پیشامدهای A و B به صورت زیر، مقدار $P(A \cap B)$ مطلوب است:

A: مهره اول زرد نباشد.

B: مهره دوم زرد نباشد.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{7}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{8}$$

(مقدار $P(A)$ ، احتمال آن است که مهره اول خارج‌شده زرد نباشد که این مقدار برابر $\frac{7}{8}$ است. با خارج کردن این مهره غیر زرد، درون کیسه ۷ مهره باقی می‌ماند که ۵ تای آن‌ها غیر زرد هستند، بنابراین $P(B|A) = \frac{5}{7}$)

بنابراین احتمال آن‌که حداقل یکی از مهره‌های خارج‌شده زرد باشد برابر است با: (هیچ‌کدام زرد نباشد) $1 - P(\text{حداقل یک مهره زرد})$

$$= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

۳۱۳

پیشامدهای A، B و C را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A: میوه خارج‌شده اول سیب باشد.

B: میوه دوم خارج‌شده، پرتقال باشد.

C: میوه سوم خارج‌شده، پرتقال باشد.

باید مقدار $P(A \cap B \cap C)$ را به دست آوریم که طبق قانون ضرب احتمالات داریم: $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$

$$= \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{10}{63}$$

۳۱۴

می‌خواهیم احتمال آن را به دست آوریم که پرتاب اول و سوم وارد سبد شود و پرتاب دوم وارد سبد نشود. پیشامدهای A، B و C را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A: پرتاب اول وارد سبد شود. B: پرتاب دوم وارد سبد نشود.

C: پرتاب سوم وارد سبد شود.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

$$= 0.9 \times 0.1 \times 0.7 = 0.063$$

۳۰۷

اگر B پیشامدی باشد که طرف مشاهده‌شده کارت انتخابی آبی و A پیشامدی باشد که هر دو طرف کارت انتخابی آبی باشد، باید $P(A|B)$ را به دست آوریم. داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

چون ۳ طرف کارت‌ها، آبی و ۳ طرف دیگر آن قرمز است، پس:

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

هم‌چنین:

اگر دو طرف کارت آبی باشد آن‌گاه حتماً طرف مشاهده‌شده آبی است.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3} \quad (2)$$

دو طرف یکی از سه کارت آبی است.

$$(1), (2) \Rightarrow P(A|B) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

۳۰۸

اگر B پیشامدی باشد که این شخص به سؤال اول پاسخ داده باشد، آن‌گاه B تمام حالاتی است که به دو سؤال از ۹ سؤال بعدی پاسخ داده

است، لذا:

$$n(B) = \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

اگر A پیشامدی باشد که این شخص دقیقاً به دو سؤال از ۵ سؤال با شماره فرد پاسخ داده باشد، آن‌گاه $A \cap B$ تمام حالاتی است که به سؤال اول و یکی از ۴ سؤال با شماره فرد دیگر و یک سؤال از ۵ سؤال با شماره زوج پاسخ داده است، لذا:

$$n(A \cap B) = \binom{1}{1} \binom{4}{1} \binom{5}{1} = 20$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

۳۰۹

پیشامدهای A و B را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

A: عدد روی یکی از کارت‌ها ۴ است.

B: مجموع اعداد روی دو کارت کم‌تر از ۶ است.

می‌خواهیم $P(A|B)$ را به دست آوریم. داریم (چون دو کارت را با هم خارج می‌کنیم، پس ترتیب وجود ندارد و در نتیجه به صورت یک مجموعه دوعضوی می‌نویسیم): $B = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}\} \Rightarrow n(B) = 4$

$$A \cap B = \{\{1,4\}\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{4}$$

۳۱۰

اگر A پیشامد هم‌رنگ بودن هر دو کارت باشد، آن‌گاه دو حالت زیر را خواهیم داشت:

حالت اول: کارت اول سبز و کارت دوم نیز سبز باشد.

حالت دوم: کارت اول سفید و کارت دوم نیز سفید باشد.

یک کارت سبز کم می‌شود.

در حالت اول، احتمال مطلوب برابر است با:

$$P_1 = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{12}{42}$$

یک کارت کم می‌شود.

۳۱۷

جدول ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، چهار حالت دارد که در سه حالت زیر، ارزش درست دارد:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	د

پس اگر B پیشامدی باشد که در آن ارزش گزاره درست باشد، آنگاه $n(B) = 3$ اگر A پیشامدی باشد که مقدم درست باشد، آنگاه پیشامد $A \cap B$ فقط

یک عضو به صورت

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د

$$n(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{3}$$

۳۱۸

با توجه به دستور $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ، مقدار $P(A \cap B)$ را

$$\text{به دست می آوریم: } 0.6 = \frac{P(A \cap B)}{0.4} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.4 \times 0.6 = 0.24$$

$$\Rightarrow P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.24}{0.3} = 0.8 = \frac{4}{5}$$

۳۱۹

مقدار $P(B'|A')$ از فرمول احتمال شرطی $P(B'|A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')}$

به دست می آید. برای به دست آوردن مقدار $P(A')$ از فرمول $P(A') = 1 - P(A)$ و برای به دست آوردن مقدار $P(B' \cap A')$ از دستور $P(B' \cap A') = 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B)$ استفاده می کنیم:

$$P(A) = 0.2 \Rightarrow P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8 \quad (1)$$

با توجه به فرض های داده شده باید مقدار $P(A \cap B)$ را به دست آوریم.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0.7 = \frac{P(A \cap B)}{0.2} \quad \text{داریم:}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.7 \times 0.2 = 0.14$$

$$\Rightarrow P(B' \cap A') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= 1 - 0.2 - 0.22 + 0.14 = 0.72 \quad (2)$$

$$P(B'|A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} = \frac{(2)}{(1)} = \frac{0.72}{0.8} = \frac{9}{10} = 0.9$$

۳۲۰

مقدار $P(B|A')$ از فرمول احتمال شرطی زیر به دست می آید:

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} \quad (1)$$

اما داریم: $P(A') = 1 - P(A)$ ، $P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B)$

چون $A \subseteq B$ ، پس $A \cap B = A$ می باشد و در نتیجه با توجه به

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad (2) \quad \text{فرض ها داریم:}$$

$$P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9-4}{12} = \frac{5}{12} \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow P(B|A') = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8}$$

۳۱۵

فرض کنیم پیشامد قبولی در آزمون های اول، دوم و سوم به ترتیب A، B و C باشند. مقدار $P(A)$ برابر 0.6 است. ولی مقدار $P(B)$ و $P(C)$ به آزمون قبل آن بستگی دارد. به عنوان مثال:

$0.8 = P(B|A) = P(\text{قبولی در آزمون دوم به شرط قبولی در آزمون اول})$
چون شرط پذیرش، قبولی در حداقل دو آزمون است، حالت های زیر قابل قبول است:

حالت اول: قبولی در آزمون های اول و دوم و عدم قبولی در آزمون سوم
در این حالت مقدار $P(A \cap B \cap C')$ مطلوب است، داریم:

$$P(A \cap B \cap C') = P(A)P(B|A)P(C'|B)$$

عدم قبولی به شرط قبولی در آزمون قبل

$$= 0.6 \times 0.8 \times (1 - 0.8) = 0.096$$

حالت دوم: قبولی در آزمون های اول و سوم و عدم قبولی در آزمون دوم
در این حالت مقدار $P(A \cap B' \cap C)$ مطلوب است، داریم:

$$P(A \cap B' \cap C) = P(A)P(B'|A)P(C|B')$$

قبولی به شرط عدم قبولی در آزمون قبل

$$= 0.6 \times (1 - 0.8) \times 0.55 = 0.066$$

حالت سوم: قبولی در آزمون های دوم و سوم و عدم قبولی در آزمون اول
در این حالت باید مقدار $P(A' \cap B \cap C)$ را به دست آوریم:

$$P(A' \cap B \cap C) = P(A')P(B|A')P(C|B)$$

$$= (1 - 0.6) \times (0.55) \times 0.8 = 0.176$$

حالت چهارم: قبولی در هر سه آزمون

در این حالت باید مقدار $P(A \cap B \cap C)$ را به دست آوریم:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|B)$$

$$= 0.6 \times 0.8 \times 0.8 = 0.384$$

با جمع کردن احتمال های به دست آمده در 4 حالت، مقدار احتمال مطلوب به دست می آید:

$$0.096 + 0.066 + 0.176 + 0.384 = 0.722$$

۳۱۶

برای آن که حداکثر در سومین آزمایش نتیجه مطلوب حاصل شود، باید:

(۱) در همان آزمایش اول هر دو عدد رو شده زوج باشند که احتمال مطلوب برابر $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ است.

(۲) در آزمایش اول، هر دو عدد رو شده زوج نباشند ولی در آزمایش دوم هر دو عدد رو شده زوج باشند که احتمال مطلوب برابر $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$ است.

(۳) در آزمایش اول و در آزمایش دوم هر دو عدد رو شده زوج نباشند و در آزمایش سوم هر دو عدد رو شده زوج باشند که احتمال مطلوب برابر $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$ است. بنابراین:

$$P = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} = \frac{4+9+9}{64} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$$

۳۳۴ ۱ ۲ ۳ ۴

فضای نمونه‌ای به سه پیشامد B_1, B_2, B_3 که به صورت زیر تعریف شده‌اند، افراز شده است. فرضیات داده شده مربوط به قانون احتمال کل است:

B_1 : ظرف اول انتخاب شود.

B_2 : ظرف دوم انتخاب شود.

B_3 : ظرف سوم انتخاب شود.

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3} \quad \text{داریم:}$$

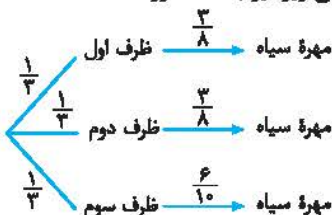
اگر A پیشامد سیاه بودن مهره انتخاب شده باشد، آن‌گاه:

$$P(A|B_1) = \frac{3}{8}, \quad P(A|B_2) = \frac{3}{8}, \quad P(A|B_3) = \frac{6}{10}$$

$$\Rightarrow P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

$$+ P(B_3)P(A|B_3) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{10} = \frac{9}{20}$$

این مقدار را می‌توان از نمودار درختی زیر نیز به دست آورد:

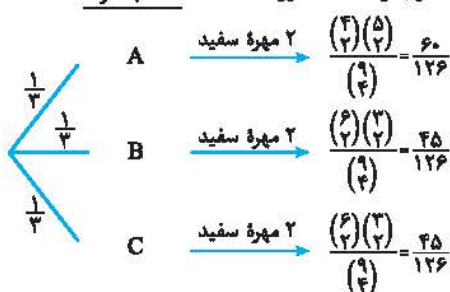


$$\Rightarrow P(\text{سیاه بودن مهره}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{10} = \frac{9}{20}$$

۳۳۵ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا انتخاب ظرف و سپس انتخاب دو مهره داریم. می‌توان از نمودار

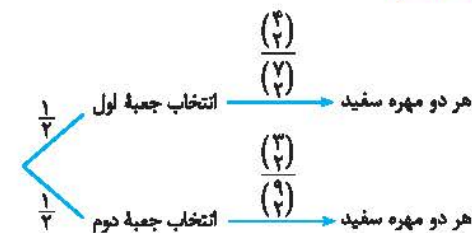
درختی زیر، احتمال مطلوب را به دست آورد:



بنابراین:

$$P(\text{سفید بودن دو مهره}) = \frac{1}{3} \left(\frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{4}{12} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{14}{12} = \frac{7}{18}$$

۳۳۶ ۱ ۲ ۳ ۴



$$\Rightarrow P(\text{سفید بودن هر دو مهره}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{6}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$$

۳۳۱ ۱ ۲ ۳ ۴

احتمال مطلوب، احتمال شرطی در فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس است. با فرض $A = \{a, c, d\}$ و $B = \{b, c, d\}$ داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{c, d\})}{P(\{b, c, d\})} \quad (1)$$

$$P(S) = 1 \Rightarrow P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + 2P(d) + P(d) = 1$$

$$\Rightarrow 3P(d) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{12-3-2}{12} = \frac{7}{12} \Rightarrow P(d) = \frac{7}{36}$$

مقدار هر یک از احتمال‌های $P(\{b, c, d\})$ و $P(\{c, d\})$ را به دست

می‌آوریم: $P(\{c, d\}) = P(c) + P(d) = 2P(d) + P(d) = 3P(d)$

$$= 3 \times \frac{7}{36} = \frac{7}{12} \quad (2)$$

چون پیشامد $\{a\}$ متمم پیشامد $\{b, c, d\}$ می‌باشد، داریم:

$$P(\{b, c, d\}) = 1 - P(a) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow P(A|B) = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{3}{4}} = \frac{7}{9}$$

۳۳۲ ۱ ۲ ۳ ۴

فضای نمونه‌ای یک فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس و احتمال خواسته شده، احتمال شرطی است.

با فرض $A = \{b, c, e\}$ و $B = \{a, b, c\}$ داریم:

$$P(\{b, c, e\} | \{a, b, c\}) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$A \cap B = \{b, c, e\} \cap \{a, b, c\} = \{b, c\}$$

با توجه به فرض می‌نویسیم:

$$P(\{b, c\}) = P(\{a, b, c\}) - P(a) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{b, c\})}{P(\{a, b, c\})} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8}$$

۳۳۳ ۱ ۲ ۳ ۴

فرضیات داده شده مربوط به قانون احتمال کل است. طبق قانون احتمال کل، داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) \quad (1)$$

طبق فرض و با قراردادن اعداد ۱، ۲ و ۳ به جای i در $P(B_i) = \frac{1}{6}$ داریم:

$$P(B_1) = \frac{1}{6}, \quad P(B_2) = \frac{2}{6}, \quad P(B_3) = \frac{3}{6} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \xrightarrow{P(A|B_i) = \frac{1}{4}} P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1+2+3}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$