

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com



مدابوک



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



(فصل ۱)

تابع

- درس ۱: تبدیل نمودار توابع ۷
درس ۲: تابع درجه سوم و توابع صعودی و نزولی ۲۰
درس ۳: بخش پذیری و تقسیم ۲۹
آزمون جامع ۳۵

(فصل ۲)

حد و پیوستگی

- درس ۱: حد بی نهایت ۷۱
درس ۲: حد در بی نهایت ۸۳
آزمون جامع ۹۲

(فصل ۳)

کاربرد مشتق

- درس ۱: اکسترم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ۱۴۹
درس ۲: اکسترم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ۱۵۸
درس ۳: جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن ۱۷۴
درس ۴: رسم نمودار توابع ۱۹۲
آزمون جامع ۱ ۲۰۶
آزمون جامع ۲ ۲۰۷

(فصل ۴)

مثلثات

- درس ۱: اتحادهای مثلثاتی ۳۸
درس ۲: تناوب و تابع تانژانت ۴۶
درس ۳: معادلات مثلثاتی ۵۸
آزمون جامع ۶۸

(فصل ۵)

مشتق

- درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق ۹۵
درس ۲: مشتق پذیری و پیوستگی ۱۰۲
درس ۳: مشتق پذیری و پیوستگی ۱۲۲
درس ۴: آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای ۱۴۱
آزمون جامع ۱ ۱۴۵
آزمون جامع ۲ ۱۴۶

- پاسخ‌نامه تشریحی ۲۱۱
پاسخ‌نامه کلیدی ۳۹۱

بخش پذیری و تقسیم



خوبه!

یکی از سؤال‌های معروف امتحان‌های ریاضی دوران کودکی این بود:

«عدد ۳۴ را بر عدد ۶ تقسیم کنید و خارج قسمت و باقی‌مانده را بیابید، سپس درستی تقسیم را با کمک امتحان تقسیم بررسی کنید.»

مقسوم علیه مقسوم

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 34} \\ \underline{30} \\ 4 \end{array}$$

خارج قسمت ۵

$$\begin{array}{r} 5 \\ \underline{30} \\ 4 \end{array}$$

باقی‌مانده

برای شروع بد نیست که این سؤال را با هم حل کنیم. این تقسیم به صورت روبه‌رو انجام می‌شود:

حالا باید درستی تقسیم را بررسی کنیم. رابطه امتحان تقسیم به صورت زیر است:

$$\text{باقی‌مانده} + \text{خارج قسمت} \times \text{مقسوم علیه} = \text{مقسوم}$$

$$34 = 6 \times 5 + 4 \quad \checkmark$$

به کم که بزرگ‌تر شدیم تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای را یاد گرفتیم. از اون‌جا که می‌دونیم یاد تونه! یک نمونه هم از این تقسیم انجام بدیم.

فرض کنید می‌خواهیم چندجمله‌ای $2x^4 + 3x^3 - 1$ را بر $x^2 - 2$ تقسیم کنیم. روش کار به ترتیب زیر است:

$$\begin{array}{r} \text{مقسوم علیه} \quad \text{مقسوم} \\ x^2 - 2 \overline{) 2x^4 + 3x^3 - 1} \\ \underline{-(2x^4 - 4x^2)} \\ 3x^3 + 4x^2 - 1 \\ \underline{-(3x^3 - 6x)} \\ 4x^2 + 6x - 1 \\ \underline{-(4x^2 - 8)} \\ 6x + 7 \end{array}$$

باقی‌مانده

$$\text{ابتدا } 1) \quad 2x^4 + 3x^3 - 1 \text{ (مقسوم) را استاندارد می‌کنیم:}$$

جمله با بزرگ‌ترین درجه مقسوم را بر جمله با بزرگ‌ترین درجه مقسوم علیه

$$\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$$

عبارت به دست آمده در خارج قسمت را در مقسوم علیه ضرب و از مقسوم کم

$$2x^2 \times (x^2 - 2) = 2x^4 - 4x^2$$

حال با تکرار مراحل ۲ و ۳ تقسیم را ادامه می‌دهیم، تا جایی که درجه

چندجمله‌ای باقی‌مانده از درجه مقسوم علیه کم‌تر باشد.

می‌توانید این تقسیم را به صورت سریع هم انجام دهید. برای

این کار کافی است که تنها ضرایب مقسوم و مقسوم علیه را

نوشته و عمل تقسیم را انجام دهید. فقط باید دقت کنید

که باید ضرایب توان‌هایی از x را که وجود ندارند، صفر قرار

دهید. در مثال بالا چون در مقسوم x^2 و x نداریم، ضرایب

آن‌ها را صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{array}{r} 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ -1 \\ \underline{-(2 \ 0 \ -4)} \\ 3 \ 4 \ 0 \\ \underline{-(3 \ 0 \ -6)} \\ 4 \ 6 \ -1 \\ \underline{-(4 \ 0 \ -8)} \\ 6 \ 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \ 0 \ -2 \\ \underline{2 \ 3 \ 4} \end{array}$$

$$\text{خارج قسمت} = 2x^2 + 3x + 4$$

به طور قطع این تقسیم هم رابطه امتحان تقسیم دارد. این رابطه هم همانند رابطه قبل است. یعنی: باقی‌مانده + خارج قسمت $\times$ مقسوم علیه = مقسوم : رابطه

فقط چون این‌جا با چندجمله‌ای‌ها سروکار داریم رابطه را بر حسب x بیان می‌کنیم: $P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$: رابطه

به عنوان مثال در تقسیم مثال قبل داریم:

$$2x^4 + 3x^3 - 1 = (x^2 - 2)(2x^2 + 3x + 4) + 6x + 7$$

اگر درجه مقسوم n و درجه مقسوم علیه m باشد ($n \geq m$)، درجه خارج قسمت $n - m$ و درجه باقی‌مانده حداکثر $m - 1$ می‌باشد.

تست در تقسیم $ax^3 - 3x^2 - 1$ بر $x^2 + 2$ خارج قسمت $x^2 + b$ و باقی‌مانده $x^2 + a - b$ شده است. کدام $n + a - b$ است؟

$$2 \ (4)$$

$$4 \ (3)$$

$$8 \ (2)$$

$$6 \ (1)$$

پاسخ گزینه ۲ اولاً مقسوم از درجه ۳، مقسوم علیه از درجه ۲ و خارج قسمت از درجه ۱ است، پس طبق نکته قبل داریم: $n - 3 = 2 \Rightarrow n = 5$

پس مقسوم به صورت $x^5 + ax^3 - 3x^2 - 1$ است. حالا رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x) \Rightarrow x^5 + ax^3 - 3x^2 - 1 = (x^3 - 1)(x^2 + 2) + x^2 + b$$

$$\Rightarrow x^5 + ax^3 - 3x^2 - 1 = x^5 + 2x^3 - x^2 - 2 + x^2 + b \Rightarrow x^5 + ax^3 - 3x^2 - 1 = x^5 + 2x^3 - 2 + b$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ -3 = -2 + b \Rightarrow b = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow n + a - b = 5 + 2 - (-1) = 8$$

حالا با متحد قراردادن جمله‌ها، مجهول‌ها را می‌یابیم:

محاسبه باقی مانده تقسیم

محاسبه باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر چندجمله‌ای درجه اول $ax + b$

وقتی $P(x)$ را بر $ax + b$ تقسیم می‌کنیم، باقی مانده حداکثر می‌تواند از درجه صفر (یا همان عدد ثابت) باشد، پس رابطه تقسیم به صورت زیر نوشته می‌شود (R یعنی یک عدد ثابت):

$$P(x) = (ax + b)Q(x) + R$$

ملا برای مناسبه R، باید $Q(x)$ را طوری از رابطه حذف کرد که فردش هم متوجه نشه! برای این کار ضرب $Q(x)$ را صفر می‌کنیم:

$$P(-\frac{b}{a}) = 0 \times Q(x) + R \Rightarrow P(-\frac{b}{a}) = R$$

پس اگر در رابطه تقسیم، $x = -\frac{b}{a}$ را قرار دهیم، R محاسبه می‌شود:

$$R = P(-\frac{b}{a})$$

باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $ax + b$ برابر است با:

تست باقی مانده تقسیم $P(x) = 2x^4 + x^3 - 6$ بر $x + 2$ کدام است؟

۱۸ (۱) ۳۴ (۲) ۱۰ (۳) ۲۲ (۴)

پاسخ گزینه ۱ مقسوم‌علیه یک چندجمله‌ای از درجه اول است. ریشه این عبارت برابر است با:

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

پس برای محاسبه باقی مانده کافی است، $P(-2)$ را محاسبه کنیم:

$$R = P(-2) = 2(-2)^4 + (-2)^3 - 6 = 2(16) - 8 - 6 = 18$$

نکته چندجمله‌ای $P(x)$ را بر چندجمله‌ای $D(x)$ بخش‌پذیر گویند، هرگاه باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $D(x)$ صفر شود و برعکس.

تست باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = x^4 - ax^3 + x^2 + b$ بر $x + 1$ برابر ۹ است. اگر این چندجمله‌ای بر $x - 2$ بخش‌پذیر باشد،

$a - b$ کدام است؟

-۱ (۱) ۱ (۲) ۷ (۳) -۷ (۴)

پاسخ گزینه ۱ باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $(x + 1)$ برابر ۹ است، در نتیجه: (*)

از طرفی $P(x)$ بر $(x - 2)$ بخش‌پذیر است، پس: (**)

با حل دستگاه معادلات (*) و (**) داریم:

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ 9a - 8a + 4 + b = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 9a = 27 \Rightarrow a = 3 \xrightarrow{(*)} 3 + b = 7 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a - b = 3 - 4 = -1$$

باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای از درجه بیشتر از یک

در این جا نیز همانند بالا (طبق رابطه تقسیم) مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار می‌دهیم و بزرگ‌ترین جمله مقسوم‌علیه را بر حسب جملات با درجه کم‌تر مرتب می‌کنیم و در نهایت رابطه حاصل را در مقسوم جای‌گذاری می‌کنیم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که درجه عبارت حاصل، کم‌تر از درجه مقسوم‌علیه باشد. در این حالت عبارت حاصل همان باقی مانده تقسیم است. عمر آگه متوجه شده باشین! 😊 بریم با مثال توضیح بدیم:

فرض کنید می‌خواهیم باقی مانده تقسیم $P(x) = x^5 - 2x^4 + x - 1$ بر $x^2 - 1$ را محاسبه کنیم. برای این کار از یکی از دو روش زیر استفاده می‌کنیم:

۱) مقسوم‌علیه از درجه دوم است. پس باقی مانده حداکثر از درجه یک است. بنابراین می‌توانیم باقی مانده را به صورت $ax + b$ در نظر بگیریم.

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x) \Rightarrow x^5 - 2x^4 + x - 1 = Q(x)(x^2 - 1) + ax + b$$

حالا رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x = 1 : 1 - 2 + 1 - 1 = 0 + a + b \Rightarrow a + b = -1 \\ x = -1 : -1 - 2 - 1 - 1 = 0 - a + b \Rightarrow -a + b = -5 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2b = -6 \Rightarrow b = -3 \xrightarrow{a+b=-1} a = 2$$

پس باقی مانده تقسیم، برابر $2x - 3$ است.

۲) رابطه تقسیم با فرض این که $R(x)$ باقی مانده است، به صورت مقابل است:

$$x^5 - 2x^4 + x - 1 = Q(x)(x^2 - 1) + R(x)$$

برای حذف $Q(x)$ و محاسبه $R(x)$ ، باید ضرب $Q(x)$ را برابر صفر قرار دهیم:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^5 - 2x^4 + x - 1 \xrightarrow{\text{بر حسب } x^2 \text{ می‌نویسیم}} = (x^2)^2 x - 2(x^2) + x - 1$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x^2 \text{ ها، ۱ می‌گذاریم}} = 1^2(x) - 2(1) + x - 1 = x - 2 + x - 1 = 2x - 3$$

تست به چند جمله‌ای $P(x) = x^6 - 3x^5 + ax$ چند واحد اضافه کنیم تا بر عبارت $x^2 - 4$ بخش پذیر باشد؟

۴۸ (۴)

۴۸ (۳)

۶۴ (۲)

۶۴ (۱)

پاسخ گزینه ۲:

فرض کنیم به $P(x)$ مقدار b واحد اضافه کنیم؛ در این حالت عبارت $x^6 - 3x^5 + ax + b$ بر $x^2 - 4$ بخش پذیر است. حالا برای حل دوتا روش داریم:

راه اول

از آن جا که $P(x)$ بر $x^2 - 4$ بخش پذیر است، پس باقی مانده تقسیم آن ها صفر است، پس طبق رابطه تقسیم داریم:

$$x^6 - 3x^5 + ax + b = (x^2 - 4)Q(x) + 0$$

با قراردادن $x = 2$ و $x = -2$ ، از شر $Q(x)$ خلاص میشیم! پس:

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{x=2} 64 - 96 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = 32 \\ \xrightarrow{x=-2} 64 + 96 - 2a + b = 0 \Rightarrow 2a - b = 160 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جمع}} 4a = 192 \Rightarrow a = 48 \xrightarrow{2a+b=32} b = -64$$

راه دوم

مقسوم علیه را برابر صفر قرار داده و آن را برحسب بزرگترین جمله آن می نویسیم:

حالا چند جمله‌ای $x^6 - 3x^5 + ax + b$ را برحسب x^2 مرتب می کنیم و سپس به جای x^2 ها مقدار ۴ قرار می دهیم:

$$(x^2)^3 - 3(x^2)^2 x + ax + b = 4^3 - 3(4)^2 x + ax + b = 64 - 48x + ax + b \Rightarrow (a - 48)x + b + 64$$

$$(a - 48)x + b + 64 = 0 \xrightarrow{\text{متحد قراردادن}} \begin{cases} a - 48 = 0 \Rightarrow a = 48 \\ b + 64 = 0 \Rightarrow b = -64 \end{cases}$$

چون باید باقی مانده برابر صفر باشد، پس:

تست اگر باقی مانده تقسیم $x^{10} + 3x^6 - 28x^2 + 1$ بر $x^3 + ax$ برابر ۱ باشد، a کدام است؟

± 7 (۴)

± 4 (۳)

± 2 (۲)

± 1 (۱)

پاسخ گزینه ۲:

مقسوم علیه را برابر صفر قرار داده و آن را برحسب بزرگترین جمله آن می نویسیم:

حالا مقسوم را برحسب x^3 مرتب می کنیم و سپس به جای x^3 ها $-ax$ قرار می دهیم و این کار را تا جایی انجام می دهیم که تمام x ها کم تر از ۳ (درجه مقسوم علیه) شود:

$$(x^3)^3 x + 3(x^3)^2 - 28x^2 + 1 = (-ax)^3 x + 3(-ax)^2 - 28x^2 + 1 = -a^3 x^4 + 3a^2 x^2 - 28x^2 + 1$$

$$= -a^3 (x^3)x + 3a^2 x^2 - 28x^2 + 1 = -a^3 (-ax)x + 3a^2 x^2 - 28x^2 + 1 = a^4 x^2 + 3a^2 x^2 - 28x^2 + 1$$

$$= (a^4 + 3a^2 - 28)x^2 + 1$$

باقی مانده چون ۱ است؛ بنابراین باید ضریب x^2 برابر صفر باشد (x^2 حذف شه!):

$$a^4 + 3a^2 - 28 = 0 \Rightarrow (a^2 + 7)(a^2 - 4) = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$$

محاسبه باقی مانده بدون داشتن مقسوم

در بعضی از سؤالات مقسوم را نمی دهند و از شما باقی مانده را می خواهند. در این جا فقط باید از رابطه تقسیم کمک بگیرید تا با خیال راحت جواب را محاسبه کنید. فقط حتماً باید به درجه مقسوم علیه برای تعیین درجه باقی مانده توجه کنید.

تست اگر باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 1$ و $x - 3$ به ترتیب برابر ۲ و ۶ باشد، باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - 2x - 3$ کدام است؟

$x + 3$ (۴)

$3x - 1$ (۳)

$-x + 2$ (۲)

$x - 1$ (۱)

پاسخ گزینه ۴:

باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 1$ برابر ۲ است، پس:

از طرفی باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x - 3$ برابر ۶ است، پس:

برای محاسبه باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - 2x - 3$ ، رابطه تقسیم را می نویسیم. فقط توجه کنید که چون مقسوم علیه از درجه ۲ است، باقی مانده حداکثر از درجه یک است؛ پس آن را به صورت $ax + b$ می نویسیم:

$$P(x) = (x^2 - 2x - 3)Q(x) + ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(-1) = 2 \Rightarrow 2 = 0 - a + b \Rightarrow -a + b = 2 \\ P(3) = 6 \Rightarrow 6 = 0 + 3a + b \Rightarrow 3a + b = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 4a = 4 \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{-a+b=2} b = 3$$

بنابراین با جای گذاری مقادیر a و b در $ax + b$ باقی مانده برابر $x + 3$ است.



تست اگر باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $(x+1)(x-1)$ برابر $2x-1$ باشد، باقی مانده تقسیم عبارت $P(x^3) - 2x$ بر $(x+1)(x-1)$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) 1 (۳) -2 (۴) 2

پاسخ گزینه ۱ باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $(x+1)(x-1)$ برابر $2x-1$ است، پس طبق رابطه تقسیم: $P(x) = (x-1)(x+1)Q(x) + 2x-1$ حالا اگر به جای x ها، x^3 قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$P(x^3) = (x^3-1)(x^3+1)Q(x^3) + 2x^3-1 \Rightarrow P(x^3) = (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)Q(x^3) + 2x^3-1$$

$$\Rightarrow P(x^3) = (x-1)(x+1)\underbrace{(x^2+x+1)(x^2-x+1)Q(x^3)}_{Q'(x)} + 2x^3-1 \Rightarrow P(x^3) = (x-1)(x+1)Q'(x) + 2x^3-1$$

حالا از طرفین تساوی $2x$ واحد کم می کنیم تا $P(x^3) - 2x$ تشکیل شود:

$P(x^3) - 2x = (x-1)(x+1)Q'(x) + 2x^3 - 2x - 1$ چون مقسوم علیه از درجه ۲ است، باید باقی مانده حداکثر از درجه ۱ باشد، پس $2x^3 - 2x - 1$ را بر مقسوم علیه (x^2-1) تقسیم می کنیم تا درجه آن کم تر از ۲ شود. باقی مانده این تقسیم همان باقی مانده ای است که دنبال آن هستیم:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 2x - 1 \quad | \quad x^2 - 1 \\ \underline{-(2x^3 - 2x)} \quad \quad \quad \\ -1 \end{array} \Rightarrow \text{باقی مانده} = -1$$

محاسبه مقادیر خارج قسمت یک تقسیم

برای یافتن مقادیر خارج قسمت یک تقسیم اول باید باقی مانده را محاسبه کرده، سپس با نوشتن رابطه تقسیم مقدار خواسته شده را بیابید:

تست خارج قسمت تقسیم $x^7 - 3x^5 - x^2 + 2$ بر $x-1$ را $Q(x)$ می نامیم. اگر $Q(x)$ را بر $x-2$ تقسیم کنیم، باقی مانده کدام است؟

- (۱) 28 (۲) 29 (۳) 31 (۴) 30

پاسخ گزینه ۳ ابتدا باقی مانده تقسیم $P(x) = x^7 - 3x^5 - x^2 + 2$ بر $x-1$ را محاسبه می کنیم: $R = P(1) = 1 - 3 - 1 + 2 = -1$ رابطه تقسیم را می نویسیم:

$$x^7 - 3x^5 - x^2 + 2 = (x-1)Q(x) - 1$$

برای محاسبه باقی مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ کافی است $Q(2)$ را محاسبه کنیم. پس با قراردادن $x=2$ در رابطه بالا داریم:

$$x=2: 128 - 96 - 4 + 2 = (1)Q(2) - 1 \Rightarrow Q(2) - 1 = 30 \Rightarrow Q(2) = 31 \text{ باقی مانده}$$

یادآوری و تعمیم دو اتحاد

اتحادهای زیر را به خاطر دارید:

$$x^r - y^r = (x-y)(x+y)$$

$$x^r + y^r = (x+y)(x^r - xy + y^r) \quad , \quad x^r - y^r = (x-y)(x^r + xy + y^r)$$

در این بخش می خواهیم این اتحادها را تعمیم دهیم؛ یعنی آن ها را برای توان های بالاتر از ۳ بنویسیم. به جدول زیر توجه کنید: ($k \in \mathbb{Z}$)

تقسیم	توضیح	رابطه
$x^n - y^n$ بر $x-y$	$x-y=0 \Rightarrow x=y$ $\Rightarrow P(y) = y^n - y^n = 0$ پس $x^n - y^n$ همواره بر $x-y$ بخش پذیر است.	① $n \in \mathbb{R} : x^n - y^n$ $= (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$
$x^n - y^n$ بر $x+y$	$x+y=0 \Rightarrow x=-y$ $\Rightarrow P(-y) = (-y)^n - y^n$ اگر n زوج باشد، حاصل مقدار بالا که همان باقی مانده است صفر می شود، پس $x^n - y^n$ بر $x+y$ بخش پذیر است.	② $n \in 2k : x^n - y^n$ زوج $= (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + xy^{n-2} - y^{n-1})$



تقسیم	توضیح	رابطه
$x^n + y^n$ $x - y$ بر	$x - y = 0 \Rightarrow x = y$ $\Rightarrow P(y) = y^n + y^n$ $P(y)$ تحت هیچ شرایطی برای n صفر نمی‌شود. پس $x^n + y^n$ هیچ‌گاه بر $x - y$ بخش‌پذیر نیست.	
$x^n + y^n$ $x + y$ بر	$x + y = 0 \Rightarrow x = -y$ $\Rightarrow P(-y) = (-y)^n + y^n$ اگر n فرد باشد، حاصل مقدار بالا صفر می‌شود و در نتیجه $x^n + y^n$ بر $x + y$ بخش‌پذیر است.	$\underbrace{n \in 2k+1}_{\text{فرد}} : x^n + y^n$ $= (x + y) \times (x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$

تست حاصل $\frac{x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1}{x + 1}$ به ازای $x = \sqrt{3}$ کدام است؟

۱) ۲۴۲ ۲) ۱۲۱ ۳) ۲۴۴ ۴) ۱۲۲

پاسخ گزینه ۲ **راه اول** صورت و مخرج را در $x - 1$ ضرب می‌کنیم:

$$\text{عبارت} = \frac{(x-1)(x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1)}{(x-1)(x+1)} \xrightarrow{\text{اتحاد (۱)}} \text{عبارت} = \frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1} = \frac{(\sqrt{3})^{10} - 1}{(\sqrt{3})^2 - 1}$$

$$= \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = \frac{243 - 1}{2} = \frac{242}{2} = 121$$

راه دوم صورت کسر، مجموع 10 جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $q = x$ است، پس:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{1(x^{10} - 1)}{x - 1}$$

پس کل کسر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1 + x + x^2 + \dots + x^9}{x + 1} = \frac{\frac{x^{10} - 1}{x - 1}}{x + 1} = \frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1}$$

با جای گذاری $x = \sqrt{3}$ ، داریم:

$$\frac{(\sqrt{3})^{10} - 1}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = \frac{242}{2} = 121$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

بخش‌پذیری و تقسیم

- ۱-۰۱ در تقسیم عبارت $x^3 + (x+2)^2(x-2) + x^2 - 4$ بر $x^2 - 4$ خارج‌قسمت کدام است؟
- ۱) $x^2 - 2x$ ۲) $x - 2$ ۳) $2x - 2$ ۴) $2x - 4$ (ریاضی ۸۰)
- ۱-۰۲ باقی‌مانده تقسیم عبارت $x^4 - ax^3 + x^2 + 2ax + 1$ بر $x + 1$ برابر ۴ است. a کدام است؟
- ۱) -4 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 4
- ۱-۰۳ اگر چندجمله‌ای $P(x) = x^3 - mx^2 - x - 4$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر باشد، m کدام است؟
- ۱) $2/5$ ۲) $-2/5$ ۳) $0/5$ ۴) $-0/5$
- ۱-۰۴ اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $2x^5 + mx + 2$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد، باقی‌مانده تقسیم آن بر $(x - 1)$ کدام است؟ (ق.م)
- ۱) -4 ۲) -6 ۳) 4 ۴) 6
- ۱-۰۵ به ازای یک مقدار a ، چندجمله‌ای $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x$ بر $2x - 1$ بخش‌پذیر است. در این حالت، باقی‌مانده $P(x)$ بر $x + 2$ ، کدام است؟ (ریاضی قاجار ۹۹)
- ۱) 10 ۲) -8 ۳) 4 ۴) 6
- ۱-۰۶ دو عبارت $x^5 + 4x^2 + 9$ و $ax^3 - x - 1$ در تقسیم بر $x + 2$ هم‌باقی‌مانده هستند. a کدام است؟
- ۱) 1 ۲) -1 ۳) -2 ۴) 2



۱۰۷- اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + x - b$ بر $x - 1$ برابر ۳ و $P(x)$ بر $x + 2$ بخش پذیر باشد، $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) ۱

۱۰۸- فرض کنید باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - 4$ و $x + 2$ به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی مانده تقسیم $p(x) + 4p(-x)$ بر $x - 2$ ، کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) -۱

۱۰۹- اگر باقی مانده تقسیم $P(x) = 2x^{n+1} + ax^3 + bx^2 - 1$ بر $x + 1$ برابر ۵ باشد، باقی مانده تقسیم $T(x) = ax^3 - 2bx^2 + x - 1$ بر $x - 2$ کدام است؟

- (۱) -۶۳ (۲) ۶۵ (۳) -۳۱ (۴) ۳۳

۱۱۰- اگر تابع $f(x) = x^3 + ax^2 - 5x - 6$ بر $x - 2$ بخش پذیر باشد، مجموع ریشه‌های تابع f کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۳

۱۱۱- به ازای مقداری از a ، چندجمله‌ای $f(x) = x^4 + ax^3 - 8x$ بر $x + 2$ بخش پذیر است. کوچک ترین ریشه معادله $f(x) = 0$ کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

- (۱) $1 - \sqrt{3}$ (۲) $1 - \sqrt{5}$ (۳) $-1 - \sqrt{3}$ (۴) $-1 - \sqrt{5}$

۱۱۲- در تقسیم $x^3 + 4x^2 + bx + 3$ بر $x^3 + ax - 1$ ، خارج قسمت $x + 2$ و باقی مانده $3x + 5$ شده است. $a + b$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۱۰

۱۱۳- اگر باقی مانده تقسیم عبارت $x^5 + x^4 + 3x^3 - x - 1$ بر $x^5 - 4x - 3$ برابر $R(x)$ باشد، $R(-1)$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) -۱

۱۱۴- عبارت $x^4 + 4ax^2 + 2bx + 1$ بر $x^2 - 4$ بخش پذیر است. $a + b$ کدام است؟ (ریاضی ۸۶)

- (۱) $-\frac{15}{8}$ (۲) $-\frac{17}{16}$ (۳) $\frac{17}{16}$ (۴) $\frac{15}{8}$

۱۱۵- در صورتی که باقی مانده تقسیم $ax^6 + bx^3 + 1$ بر $x^3 + 1$ برابر ۱ باشد، باقی مانده تقسیم $x^2 + ax + 2b$ بر $x + 2$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۱۶- اگر عبارات $x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + k$ به ازای هر عدد طبیعی n بر دوجمله‌ای $x + 2$ بخش پذیر باشد؛ آن گاه باقی مانده تقسیم آن بر $x^2 - 1$ کدام است؟ (ریاضی ۸۹)

- (۱) $-3x - 6$ (۲) $-2x + 1$ (۳) $2x + 4$ (۴) $2x - 4$

۱۱۷- اگر باقی مانده تقسیم $f(x) = x^3 + ax^2 - bx$ بر $x^2 + 1$ برابر ۵ باشد، $a - b$ کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) -۴

۱۱۸- کدام عبارت زیر را از عبارت $x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ کم کنیم تا حاصل بر $x^2 + 1$ بخش پذیر باشد؟

- (۱) $x + 1$ (۲) $x + 3$ (۳) $x + 6$ (۴) $x + 8$

۱۱۹- باقی مانده تقسیم عبارت $f(x) = (x + 1)^3(x - 1)^2 + x^4 - x^2 - 1$ بر $x^2 - 1$ کدام است؟

- (۱) $x + 1$ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $-x - 1$

۱۲۰- باقی مانده تقسیم عبارت $f(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$ بر $x^2 + 3x$ کدام است؟

- (۱) $2x + 1$ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) $x + 1$

۱۲۱- باقی مانده تقسیم $(x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)(x^2 + 4) + x^2$ بر $x^4 + 4x^2 - 1$ کدام است؟

- (۱) ۳۵ (۲) $x^2 + 5$ (۳) $9x^2 + 36$ (۴) $x^4 + 13x^2 + 35$

۱۲۲- باقی مانده تقسیم عبارت $3 + (x^2 - 4x + 3)(x^2 + 6x + 8)$ بر $x^2 + x + 1$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $-x + 1$ (۳) $x + 3$ (۴) ۴۲

۱۲۳- اگر $R(x)$ باقی مانده تقسیم عبارت $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x$ بر $x^3 - x$ باشد، $R(2)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۲۴- اگر عبارت $x^4 + ax^2 - bx + 4$ بر $(x - 1)^2$ بخش پذیر باشد، b کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۲۵- باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای درجه سوم f بر دوجمله‌ای‌های $x - 1$ ، $x + 1$ و $x - 2$ برابر ۲۴ است. اگر این چندجمله‌ای بر $x + 2$ بخش پذیر باشد، ضریب جمله با بیشترین درجه کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) -۳

۱۲۶- اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x^2 - 4$ برابر $x - 1$ و بر $x - 2$ برابر A و بر $x + 2$ برابر B باشد؛ آن گاه $A - B$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۸



۱۲۷- اگر باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ و $x+2$ به ترتیب برابر -2 و 4 باشد، باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر x^2+x-2 کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) -2 & (2) 2x-4 & (3) 6x-8 & (4) -2x \end{array}$$

۱۲۸- باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ و $x+3$ به ترتیب 1 و -4 است. باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر x^2+x-6 کدام است؟
(ریاضی قاری ۹۷)

$$\begin{array}{llll} (1) x-1 & (2) x+1 & (3) -x+2 & (4) 2x-1 \end{array}$$

۱۲۹- باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ و $2x+1$ به ترتیب 8 و 5 است. باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x^2-x-1$ کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

$$\begin{array}{llll} (1) -x+4 & (2) x+3 & (3) 2x+6 & (4) 2x-3 \end{array}$$

۱۳۰- باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ و $x+b$ به ترتیب 3 و 7 می‌باشد. اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x+b)(x-1)$ به شکل $(-x+a)$ باشد، $a-b$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) 3 & (2) 1 & (3) 7 & (4) 5 \end{array}$$

۱۳۱- اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-3)(x+3)$ برابر $5x^2+3x+1$ باشد و باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $3x-x^2$ برابر $ax+b$ باشد؛ آن‌گاه $2a+b$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) 20 & (2) 37 & (3) -23 & (4) 19 \end{array}$$

۱۳۲- اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر x^2-4 برابر $3x+12$ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم $2f(x+1)-1$ بر $x+3$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) -6 & (2) 6 & (3) 11 & (4) -11 \end{array}$$

۱۳۳- اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر x^2-4 برابر $3x+1$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x^3-x-2)$ بر $x+1$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) 1 & (2) 7 & (3) -5 & (4) -11 \end{array}$$

۱۳۴- اگر باقی‌مانده تقسیم عبارت $p(x)$ بر x^2+3x+2 ، x^2+1 و $2x+1$ باشد، باقی‌مانده تقسیم عبارت $p(x-1)-p(x-2)$ بر x کدام است؟
(کانون فرهنگی آموزش - ۹۸)

$$\begin{array}{llll} (1) 1 & (2) 2 & (3) 3 & (4) 4 \end{array}$$

۱۳۵- اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای باشد و عبارت $x+f(x)$ بر $(x-1)$ و $(x-2)$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده تقسیم $xf(x)$ بر x^2-3x+2 کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) 2x+3 & (2) -3x+2 & (3) 2x-3 & (4) 3x-2 \end{array}$$

۱۳۶- باقی‌مانده تقسیم $p(x) = x^7 - 3x^4 + ax - 1$ بر $x-1$ برابر 2 و خارج‌قسمت آن $q(x)$ است. $q(-1)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش - ۹۸)

$$\begin{array}{llll} (1) -7 & (2) -6 & (3) 6 & (4) 7 \end{array}$$

۱۳۷- مقدار خارج‌قسمت تقسیم $5x^5 - 14x^3 + 3$ بر $x-2$ به ازای $x = -2$ کدام است؟ (ق. ۴۰)

$$\begin{array}{llll} (1) -2 & (2) 12 & (3) 24 & (4) \text{ صفر} \end{array}$$

۱۳۸- مجموع ضرایب خارج‌قسمت تقسیم $f(x) = x^8 + 3x^5 - 2x^2 + 1$ بر $x+1$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) \text{ صفر} & (2) -3 & (3) 3 & (4) 2 \end{array}$$

۱۳۹- اگر خارج‌قسمت تقسیم $f(x) = 3x^{14} - x^{10} + x^7 + 6$ بر $x+1$ ، $g(x)$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $g(x)$ بر $x-1$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) \text{ صفر} & (2) 2 & (3) 7 & (4) 1 \end{array}$$

۱۴۰- عبارت $x^{24}+1$ بر کدام عبارت همواره بخش‌پذیر است؟

$$\begin{array}{llll} (1) x^{12}+1 & (2) x^3+1 & (3) x^6+1 & (4) x^8+1 \end{array}$$

۱۴۱- عبارت $a^{28} + b^{42}$ بر کدام یک از عبارت‌های زیر بخش‌پذیر است؟

$$\begin{array}{llll} (1) a^2 + b^2 & (2) a^6 + b^7 & (3) a^6 + b^6 & (4) a^7 + b^6 \end{array}$$

۱۴۲- اگر $A = \frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+x-2}$ ، آن‌گاه ساده‌شده A کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) x^2-x+1 & (2) x^2+x+1 & (3) x^2+x^2+x+1 & (4) x^2-x^2+x-1 \end{array}$$

۱۴۳- حاصل عبارت $\frac{(1-t+t^2-t^3+t^4)(1+t)}{1-t^{10}}$ به ازای $t = \sqrt[5]{2}$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) -1 & (2) 1 & (3) \frac{1}{3} & (4) -\frac{1}{3} \end{array}$$



۱۰۱- گزینه ۳ **راه اول** مقسوم را باز می کنیم:

$$\begin{aligned}(x-2)^2(x+2)+x^3 &= (x^2-4x+4)(x+2)+x^3 \\ &= x^3+2x^2-4x^2-8x+4x+8+x^3 = 2x^3-2x^2-4x+8\end{aligned}$$

حالا تقسیم می کنیم:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 2x^2 - 4x + 8 & x^2 - 4 \\ - 2x^3 + 8x & \quad 2x - 2 \\ \hline - 2x^2 + 4x + 8 & \text{خارج قسمت} \\ - 2x^2 + 8 & \\ \hline 4x & \end{array}$$

راه دوم با توجه به مقسوم علیه مقسوم را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned}(x-2)^2(x+2)+x^3 &= (x-2)(x+2)(x-2)+x^3 \\ &= (x^2-4)(x-2)+x^3\end{aligned}$$

حالا تقسیم می کنیم:

$$\begin{array}{r|l} (x^2-4)(x-2)+x^3 & x^2-4 \\ - (x^2-4)(x-2) & \quad (x-2)+x \\ \hline x^3 & \text{خارج قسمت} = 2x-2 \\ - x^3 + 4x & \\ \hline 4x & \end{array}$$



۱۰۸- گزینه ۱: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-4$ برابر ۳ است. پس:

$$p(4) = 3 \quad (*)$$

باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x+2$ برابر ۱ است، پس:

$$p(-2) = 1 \quad (**)$$

حالا باقی مانده تقسیم $T(x) = p(x^2) + 4p(-x)$ را بر $x-2$ را می‌یابیم.

برای این کار، باید $T(2)$ را محاسبه کنیم:

$$T(2) = p(4) + 4p(-2) \quad (***)$$

در نهایت با توجه به تساوی‌های $(*)$ و $(**)$ ، حاصل را می‌یابیم.

$$T(2) = 3 + 4(1) = 7$$

۱۰۹- گزینه ۱: ریشه $x+1$ و $x-2$ به ترتیب ۱ و ۲ است.

باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x+1$ برابر ۵ شده، پس:

$$P(-1) = 5 \Rightarrow 2(-1)^{n+1} + a(-1)^2 + b(-1)^2 - 1 = 5$$

$$\xrightarrow{\text{خود } -1 \text{ به توان فرد}} -2 - a + b - 1 = 5 \Rightarrow a - b = -8$$

باقی مانده تقسیم $T(x)$ بر $x-2$ برابر $T(2)$ است. آن را حساب می‌کنیم:

$$T(x) = ax^2 - 2bx^2 + x - 1$$

$$\Rightarrow T(2) = a(2)^2 - 2b(2)^2 + 2 - 1$$

$$= 4a - 8b + 1 = 8(a - 2b) + 1 = -64 + 1 = -63$$

۱۱۰- گزینه ۳: چون $f(x)$ بر $x-2$ بخش پذیر است، پس:

$$f(2) = 0 \Rightarrow 2^3 + a(2)^2 - 5(2) - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 8 + 4a - 10 - 6 = 0 \Rightarrow a = 2$$

با جای گذاری $a=2$ ، تابع $f(x)$ را بر $x-2$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - 5x - 6 & x-2 \\ -x^3 + 2x^2 & \\ \hline 4x^2 - 5x - 6 & \\ -4x^2 + 8x & \\ \hline 3x - 6 & \\ -3x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

پس f را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x) = (x-2)(x^2 + 4x + 3) = (x-2)(x+1)(x+3)$$

ریشه‌های تابع f برابر با ۲، ۱ و -۳ هستند که جمعشان -۲ می‌شود.

۱۱۱- گزینه ۴: چون $f(x) = x^4 + ax^3 - 8x$ بر $x+2$ بخش پذیر

است، پس $f(-2) = 0$ باید صفر باشد:

$$f(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^4 + a(-2)^3 - 8(-2) = 0$$

$$\Rightarrow 16 - 4a + 16 = 0 \Rightarrow 4a = 32 \Rightarrow a = 8$$

حالا با جای گذاری $a=8$ ، $f(x)$ را بر $x+2$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 8x^3 - 8x & x+2 \\ -x^4 - 2x^3 & \\ \hline 10x^3 - 8x & \\ -10x^3 - 20x^2 & \\ \hline -20x^2 - 8x & \\ -20x^2 - 40x & \\ \hline 32x & \\ 32x + 64 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

پس $f(x)$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$f(x) = (x+2)(x^3 + 2x^2 - 4x) = x(x+2)(x^2 + 2x - 4)$$

فاکتوراز

۱۰۲- گزینه ۲: ریشه مقسوم علیه را به دست می‌آوریم:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$x=-1$ را در مقسوم جای گذاری می‌کنیم تا باقی مانده به دست آید:

$$(-1)^4 - a(-1)^3 + (-1)^2 + 2a(-1) + 1 = -a + 3$$

باقی مانده تقسیم برابر ۴ است، پس:

$$-a + 3 = 4 \Rightarrow a = -1$$

۱۰۳- گزینه ۲: اول ریشه مقسوم علیه را حساب می‌کنیم:

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

چون $P(x)$ بر $x+2$ بخش پذیر است، پس:

$$P(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^2 - m(-2)^2 - (-2) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow -8 - 4m + 2 - 4 = 0 \Rightarrow -4m = 10 \Rightarrow m = -2.5$$

۱۰۴- گزینه ۴: ریشه $x+1$ برابر با $x=-1$ است.

باقی مانده تقسیم $P(x) = 2x^4 + mx + 2$ بر $x+1$ برابر با $P(-1)$ است،

$$P(-1) = 2 \Rightarrow 2(-1)^4 + m(-1) + 2 = 2$$

پس:

$$\Rightarrow -m + 4 = 2 \Rightarrow m = 2$$

حالا باقی مانده $P(x)$ بر $x-1$ را می‌خواهیم.

اول ریشه $x-1$ را حساب می‌کنیم:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

پس باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ برابر $P(1)$ است:

$$P(x) = 2x^4 + 2x + 2 \Rightarrow P(1) = 2(1)^4 + 2(1) + 2 = 6$$

۱۰۵- گزینه ۱: چندجمله‌ای $P(x)$ بر $2x-1$ بخش پذیر است، یعنی

$P(\frac{1}{2}) = 0$ باید صفر باشد:

$$P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x$$

$$\xrightarrow{P(\frac{1}{2})=0} 2(\frac{1}{2})^4 + a(\frac{1}{2})^3 + 2(\frac{1}{2})^2 - 3(\frac{1}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow{\times 8} 1 + a + 4 - 12 = 0 \Rightarrow a = 7$$

با جای گذاری $a=7$ ، چندجمله‌ای به صورت $P(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x$ درمی‌آید.

برای محاسبه باقی مانده $P(x)$ بر $x+2$ ، کافی است ریشه $x+2$ یعنی

$x=-2$ را در $P(x)$ قرار دهیم:

$$P(-2) = 2(-2)^4 + 7(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2)$$

$$= 32 - 56 + 8 + 6 = -10$$

۱۰۶- گزینه ۱: ریشه $x+2$ برابر -2 است.

باقی مانده تقسیم $P(x) = x^5 + 4x^2 + 9$ و $P'(x) = 5x^4 + 8x$ بر

$$P(-2) = P'(-2)$$

$x+2$ برابر است، پس:

$$\Rightarrow (-2)^5 + 4(-2)^2 + 9 = a(-2)^3 - (-2) - 1$$

$$\Rightarrow -32 + 16 + 9 = -8a + 2 - 1$$

$$\Rightarrow -7 = -8a + 1 \Rightarrow a = 1$$

۱۰۷- گزینه ۱: ریشه $x-1$ و $x+2$ به ترتیب ۱ و -۲ است.

باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ برابر ۳ شده، پس:

$$P(1) = 3 \Rightarrow 1^2 + a(1)^2 + 1 - b = 3 \Rightarrow a - b = 1$$

باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x+2$ بخش پذیر است، پس:

$$P(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^2 + a(-2)^2 + (-2) - b = 0 \Rightarrow 4a - b = 10$$

اگر دو معادله $a-b=1$ و $4a-b=10$ را حل کنیم، داریم:

$$b=2, a=3$$

$$a+b=3+2=5$$

در نتیجه:



۱۱۵- گزینه ۲ راه اول در تقسیم $ax^6 + bx^3 + 1$ بر $x^3 + 1$ خارج قسمت $Q(x)$ و باقی مانده ۱ شده است، رابطه تقسیم را می نویسیم:
 $ax^6 + bx^3 + 1 = (x^3 + 1)Q(x) + 1$
 در رابطه بالا جای x عدد -1 قرار می دهیم:

$$a(-1)^6 + b(-1)^3 + 1 = ((-1)^3 + 1)Q(-1) + 1 \\ \Rightarrow a - b + 1 = 1 \Rightarrow a - b = 0$$

برای به دست آوردن باقی مانده $P(x) = x^2 + ax + 2b$ بر $x + 2$ باید مقدار $P(-2)$ را حساب کنیم:

$$P(-2) = (-2)^2 + a(-2) + 2b = 4 - 2a + 2b \\ = 4 - 2(a - b) \xrightarrow{a-b=0} P(-2) = 4 - 2(0) = 4$$

راه دوم برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم $x^3 + 1$ بر $x^3 + 1$ مقسوم علیه را مساوی صفر قرار می دهیم و نتیجه می گیریم $x^3 = -1$.

حالا در مقسوم به جای x^3 ها، عدد -1 می گذاریم تا باقی مانده به دست آید:
 $ax^6 + bx^3 + 1 = a(x^3)^2 + bx^3 + 1$
 $\xrightarrow{x^3=-1} a(-1)^2 + b(-1) + 1 = a - b + 1$

طبق صورت سؤال، باقی مانده تقسیم بر $x^3 + 1$ برابر ۱ شده است، پس:
 $a - b + 1 = 1 \Rightarrow a - b = 0$
 ادامه حل مثل راه حل اول است.

۱۱۶- گزینه ۱ چون $P(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + k$ بر $x + 2$ بخش پذیر است، پس $P(-2) = 0$ باید صفر شود:
 $P(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^{2n+1} + 2(-2)^{2n} + (-2)^5 - 5(-2)^3 + k = 0$
 $\Rightarrow -2^{2n+1} + 2^{2n+1} - 32 + 40 + k = 0 \Rightarrow 8 + k = 0 \Rightarrow k = -8$

حالا باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - 1$ را می خواهیم، از $x^2 - 1 = 0$ نتیجه می گیریم $x^2 = 1$ ، پس برای محاسبه باقی مانده $P(x)$ بر $x^2 - 1$ به جای x^2 ها عدد ۱ می گذاریم:

$$P(x) = x(x^2)^n + 2(x^2)^n + (x^2)^2 x - 5x^3 x - 8 \\ \xrightarrow{x^2=1} x(1)^n + 2(1)^n + (1)^2 x - 5(1)x - 8 \\ = x + 2 + x - 5x - 8 = -3x - 6$$

۱۱۷- گزینه ۲ مقسوم علیه را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 + 1$ در $f(x)$ جای x^2 ها، عدد -1 می گذاریم:
 $f(x) = x^2 + ax^2 - bx = x^2 x + ax^2 - bx$
 $\xrightarrow{x^2=-1} (-1)x + a(-1) - bx = -x - a - bx = (-b-1)x - a$
 سؤال گفته باقی مانده برابر ۵ است، پس عبارت $(-b-1)x - a$ باید متحد با ۵ باشد و داریم:

$$\begin{cases} (-b-1)x - a = 5 \\ -a = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b-1 = 0 \Rightarrow b = -1 \\ -a = 5 \Rightarrow a = -5 \end{cases}$$

در نتیجه: $a - b = -5 - (-1) = -4$

۱۱۸- گزینه ۳

راه اول ابتدا باقی مانده تقسیم $P(x) = x^2 - 5x^2 + 2x + 1$ را بر $x^2 + 1$ حساب می کنیم.

ریشه های معادله $x^2 + 2x - 4 = 0$ را حساب می کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(-4) = 20 \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

پس ریشه های f عبارت اند از صفر، -2 ، $-1 + \sqrt{5}$ و $-1 - \sqrt{5}$ که کوچک ترین آن ها $-1 - \sqrt{5}$ است.

۱۱۲- گزینه ۲ رابطه تقسیم را می نویسیم:

$$x^3 + 4x^2 + bx + 3 = (x^2 + ax - 1)(x + 2) + 3x + 5 \\ \Rightarrow x^3 + 4x^2 + bx + 3 = x^3 + 2x^2 + ax^2 - x - 2 + 3x + 5 \\ \Rightarrow 4x^2 + bx + 3 = (2+a)x^2 + (2a+2)x + 3$$

برای آن که عبارت سمت راست و چپ متحد باشند باید ضرایب عبارت های هم درجه برابر باشند، پس:

$$4x^2 + bx + 3 = (2+a)x^2 + (2a+2)x + 3 \\ \Rightarrow \begin{cases} 4 = 2+a \\ b = 2a+2 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 6 \Rightarrow a + b = 8$$

۱۱۳- گزینه ۳ در تقسیم $x^{15} + x^7 + 3x^2 - x - 1$ بر $x^5 - 4x - 3$ خارج قسمت و باقی مانده را به ترتیب $Q(x)$ و $R(x)$ می گیریم، پس داریم:

$$x^{15} + x^7 + 3x^2 - x - 1 = (x^5 - 4x - 3)Q(x) + R(x) \\ \text{در رابطه تقسیم بالا، } x = -1 \text{ را جای گذاری می کنیم:} \\ (-1)^{15} + (-1)^7 + 3(-1)^2 - (-1) - 1 \\ = ((-1)^5 - 4(-1) - 3)Q(-1) + R(-1) \\ \Rightarrow -1 - 1 + 3 + 1 - 1 = (-1 + 4 - 3)Q(-1) + R(-1) \\ \Rightarrow 1 = R(-1)$$

۱۱۴- گزینه ۲ راه اول عبارت $P(x) = x^4 + 4ax^2 + 2bx + 1$ بر $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ بخش پذیر است، پس $P(2) = 0$ و $P(-2) = 0$ باید صفر باشند:

$$P(2) = 0 \Rightarrow 2^4 + 4a(2)^2 + 2b(2) + 1 = 0 \\ \Rightarrow 16 + 16a + 4b + 1 = 0 \Rightarrow 16a + 4b = -17$$

$$P(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^4 + 4a(-2)^2 + 2b(-2) + 1 = 0 \\ \Rightarrow 16 + 16a - 4b + 1 = 0 \Rightarrow 16a - 4b = -17$$

$$b = 0, a = \frac{-17}{16}$$

با حل دو معادله بالا داریم:

$$a + b = \frac{-17}{16} + 0 = \frac{-17}{16}$$

پس:

راه دوم از $x^2 - 4 = 0$ نتیجه می گیریم:

حالا $P(x)$ را بر حسب x^2 می نویسیم، به جای x^2 ها، عدد ۴ و عبارت به دست آمده را متحد با صفر قرار می دهیم:

$$P(x) = (x^2)^2 + 4ax^2 + 2bx + 1 = 4^2 + 4a(4) + 2bx + 1 \\ = 2bx + 16a + 17$$

اگر عبارت به دست آمده را متحد با صفر قرار دهیم، باید ضریب x (یعنی $2b$) و عبارت درجه صفر (یعنی $16a + 17$) صفر شوند:

$$\begin{cases} 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 16a + 17 = 0 \Rightarrow a = \frac{-17}{16} \end{cases}$$



برای به دست آوردن باقی‌مانده، باید در مقسوم به جای x^2 ها، x قرار دهیم:

$$4x^2 - 3x^2 + 2x + x = 4(x^2)^2 - 3(x^2)^2 + 2x^2 + x$$

$$\xrightarrow{x^2=x} 4x^2 - 3x^2 + 2x^2 + x$$

$$= 4(x^2)^2 - 3(x^2)^2 + 2x^2 + x$$

$$\xrightarrow{x^2=x} 4x^2 - 3x^2 + 2x^2 + x = 4x^2 - x^2 + x$$

$$\xrightarrow{x^2=x} 4x - x^2 + x = -x^2 + 5x$$

پس باقی‌مانده به صورت $R(x) = -x^2 + 5x$ است و مقدار $R(2)$ برابر

$$R(2) = -(2)^2 + 5(2) = -4 + 10 = 6$$

است با:

۱۲۴- گزینه ۲ مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 2x - 1$$

برای به دست آوردن باقی‌مانده، باید در مقسوم به جای x^2 ها، $2x - 1$ بگذاریم:

$$x^2 + ax^2 - bx + 4 = (x^2)^2 + ax^2 - bx + 4$$

$$\xrightarrow{x^2=2x-1} (2x-1)^2 + a(2x-1) - bx + 4$$

$$= 4x^2 - 4x + 1 + 2ax - a - bx + 4$$

$$\xrightarrow{x^2=2x-1} 4(2x-1) - 4x + 1 + 2ax - a - bx + 4$$

$$= 8x - 4 - 4x + 1 + 2ax - a - bx + 4$$

$$= (2a - b + 4)x + 1 - a$$

به خاطر بخش‌پذیر بودن، باقی‌مانده باید صفر شود، پس عبارت به دست آمده

$$\begin{cases} 1 - a = 0 \\ 2a - b + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \end{cases}$$

۱۲۵- گزینه ۲ چندجمله‌ای درجه سوم $a(x-1)(x+1)(x-2)$ بر $x-1$ ، $x+1$ و $x-2$ بخش‌پذیر است. پس اگر به این چندجمله‌ای درجه سه، ۲۴ واحد اضافه کنیم، باقی‌مانده تقسیم آن بر $x-1$ ، $x+1$ و $x-2$ برابر ۲۴ می‌شود. پس:

$$f(x) = a(x-1)(x+1)(x-2) + 24$$

حالا شرط آخر را روی آن اعمال می‌کنیم. باید $f(x)$ بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد، پس $f(-2) = 0$ باید صفر شود:

$$f(-2) = 0 \Rightarrow a(-2-1)(-2+1)(-2-2) + 24 = 0$$

$$\Rightarrow -12a + 24 = 0 \Rightarrow a = 2$$

پس $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2) + 24 = 2x^3 + \dots$$

ضرب x^3 برابر ۲ است.

۱۲۶- گزینه ۱ چندجمله‌ای $f(x)$ را بر $x^2 - 4$ تقسیم کرده‌ایم. خارج‌قسمت $Q(x)$ و باقی‌مانده $2x - 1$ شده است. بنابراین رابطه تقسیم به صورت مقابل است:

$$f(x) = (x^2 - 4)Q(x) + 2x - 1$$

باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x - 2$ و $x + 2$ به ترتیب برابر $f(2)$ و $f(-2)$ است.

$$f(2) = (2^2 - 4)Q(2) + 2(2) - 1 = 3 \Rightarrow A = 3$$

$$f(-2) = ((-2)^2 - 4)Q(-2) + 2(-2) - 1 = -5 \Rightarrow B = -5$$

$$A - B = 3 - (-5) = 8$$

پس:

۱۲۷- گزینه ۲ باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 + x - 2$ ، حداکثر از درجه یک است. آن را $ax + b$ در نظر می‌گیریم. رابطه تقسیم به صورت

$$P(x) = (x^2 + x - 2)Q(x) + ax + b$$

مقابل درمی‌آید:

$$\Rightarrow P(x) = (x+2)(x-1)Q(x) + ax + b$$

اگر مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار دهیم، داریم $x^2 = -1$ ، پس در $P(x)$ به جای x^2 ها، -1 می‌گذاریم:

$$P(x) = x^2 x - 5x^2 + 2x + 1$$

$$\xrightarrow{x^2=-1} (-1)x - 5(-1) + 2x + 1 = -x + 5 + 2x + 1 = x + 6$$

پس باقی‌مانده، $x + 6$ است، بنابراین اگر $x + 6$ را از $P(x)$ کم کنیم باقی‌مانده تقسیم، صفر می‌شود.

راه دوم $(x-1)^2 (x+1)^2$ بر $(x^2 - 1)$ بخش‌پذیر است. بنابراین کافی است باقی‌مانده $x^2 - 1$ را بر $x^2 - 1$ را محاسبه کنیم:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow (x^2)^2 - x^2 - 1$$

$$x^2 = 1$$

$$\xrightarrow{(1)^2 - 1 - 1 = -1}$$

۱۱۹- گزینه ۳ اگر مقسوم را مساوی صفر قرار دهیم، داریم: $x^2 = 1$ پس در $f(x)$ به جای x^2 ها، 1 می‌گذاریم. فقط اول مقسوم را بر حسب x^2 مرتب می‌کنیم:

$$f(x) = (x+1)^2 (x-1)^2 + x^2 - x^2 - 1$$

$$= (x+1)(x+1)^2 (x-1)^2 + x^2 - x^2 - 1$$

$$= (x+1)(x^2 - 1)^2 + (x^2)^2 - x^2 - 1$$

$$\xrightarrow{x^2=1} (x+1)(1-1)^2 + (1)^2 - 1 - 1 = 0 + 1 - 1 - 1 = -1$$

۱۲۰- گزینه ۲ اگر مقسوم را مساوی صفر بگذاریم، نتیجه می‌گیریم:

$$x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x^2 = -3x$$

پس برای به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 + 3x$ ، در $f(x)$ به جای x^2 ها، $-3x$ می‌گذاریم. البته قبلاً قیافه $f(x)$ را باید کمی درست کنیم:

$$f(x) = x(x+3)(x+1)(x+2) + 1 = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1$$

$$\xrightarrow{x^2=-3x} (-3x+3x)(-3x+3x+2) + 1 = 0 + 1 = 1$$

۱۲۱- گزینه ۳ اگر مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار دهیم، داریم:

$$x^2 + 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -4x^2 + 1$$

پس مقسوم را طوری مرتب می‌کنیم که بتوانیم از تساوی بالا استفاده کنیم:

$$(x^2 + 1)(x^2 + 4)(x^2 + 2)(x^2 + 3) + x^2$$

$$= (x^2 + 5x^2 + 4)(x^2 + 5x^2 + 6) + x^2$$

$$\xrightarrow{x^2=-4x^2+1} (-4x^2+1+5x^2+4)(-4x^2+1+5x^2+6) + x^2$$

$$= (x^2 + 5)(x^2 + 7) + x^2 = x^4 + 12x^2 + 35 + x^2 = x^4 + 13x^2 + 35$$

$$\xrightarrow{x^2=1-4x^2} 1 - 4x^2 + 13x^2 + 35 = 9x^2 + 36$$

۱۲۲- گزینه ۲ مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -x - 1$$

برای محاسبه باقی‌مانده، باید در مقسوم به جای x^2 ها، $-x - 1$ قرار دهیم و اگر لازم شد این کار را تکرار می‌کنیم:

$$(x^2 + 6x + 8)(x^2 - 4x + 3) + 3$$

$$\xrightarrow{x^2=-x-1} (-x-1+6x+8)(-x-1-4x+3) + 3$$

$$= (5x+7)(-5x+2) + 3 = -25x^2 + 10x - 35x + 14 + 3$$

$$\xrightarrow{-x-1} -25(-x-1) + 10x - 35x + 14 + 3 = 25x + 25 - 25x + 17 = 42$$

۱۲۳- گزینه ۲ اگر مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار دهیم، داریم:

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x^2 = x$$



برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 3x$ ، باید در $f(x)$ جای x^2 ها، $3x$ قرار دهیم:

$$\frac{x^2 = 3x}{\rightarrow} \circ + 5(3x) + 3x + 1 = 18x + 1$$

پس $a = 18$ ، $b = 1$ و در نتیجه:

۱۳۲- گزینه ۳ باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 4$ برابر با $3x + 12$ شده است. رابطه تقسیم را می نویسیم:

$$f(x) = (x^2 - 4)Q(x) + 3x + 12 \quad (I)$$

برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم $2f(x+1) - 1$ بر $x+3$ باید به جای x ، عدد -3 بگذاریم:

$$2f(-3) - 1 = 2f(-3+1) - 1 = 2f(-2) - 1$$

پس $f(-2)$ را می خواهیم. با استفاده از رابطه (I) آن را حساب می کنیم:

$$f(x) = (x^2 - 4)Q(x) + 3x + 12$$

$$\frac{x = -2}{\rightarrow} f(-2) = \circ + 3(-2) + 12 = 6$$

در نتیجه:

$$2f(-2) - 1 = 2(6) - 1 = 11$$

۱۳۳- گزینه ۳ باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 4$ برابر با $3x + 1$ شده، پس:

$$f(x) = (x^2 - 4)Q(x) + 3x + 1 \quad (I)$$

ما باقی مانده تقسیم $f(x^2 - x - 2)$ بر $x+1$ را می خواهیم. باید به جای x ، عدد -1 بگذاریم:

$$f(x^2 - x - 2) \xrightarrow{x=-1} f(-1+1-2) = f(-2)$$

مقدار $f(-2)$ را با استفاده از رابطه (I) حساب می کنیم:

$$f(x) = (x^2 - 4)Q(x) + 3x + 1$$

$$\frac{x = -2}{\rightarrow} f(-2) = \circ + 3(-2) + 1 = -5$$

۱۳۴- گزینه ۲ برای محاسبه باقی مانده عبارت $p(x-1) - p(x-2)$ بر x ، $x = 0$ قرار می دهیم: $(*)$ $p(-1) - p(-2) = p(x-1) - p(x-2)$ $x = 0$ ، حالا باید با استفاده از اطلاعات مسئله $p(-1)$ و $p(-2)$ را محاسبه کنیم. باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $x^2 + 3x + 2$ برابر $2x + 1$ است. پس رابطه تقسیم به صورت روبه رو است:

$$p(x) = (x^2 + 3x + 2)Q(x) + 2x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(-1) = \circ + (-1) = -1 \\ p(-2) = \circ + (-3) = -3 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\xrightarrow{(*)} -1 - (-3) = 2$$

۱۳۵- گزینه ۲ چندجمله ای $g(x) = x + f(x)$ بر $x-1$ و $x-2$ بخش پذیر است، پس:

$$\begin{aligned} \triangleright g(1) = \circ &\Rightarrow 1 + f(1) = \circ \Rightarrow f(1) = -1 \\ \triangleright g(2) = \circ &\Rightarrow 2 + f(2) = \circ \Rightarrow f(2) = -2 \end{aligned}$$

باقی مانده تقسیم $xf(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ یک چندجمله ای حداکثر از درجه یک است. آن را $ax + b$ در نظر می گیریم و داریم:

$$xf(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b$$

در تساوی بالا یک بار $x = 1$ و یک بار $x = 2$ قرار می دهیم:

$$\frac{x=1}{\rightarrow} 1f(1) = \circ + a + b \xrightarrow{f(1)=-1} a + b = -1$$

$$\frac{x=2}{\rightarrow} 2f(2) = \circ + 2a + b \xrightarrow{f(2)=-2} 2a + b = -4$$

با حل دو معادله بالا داریم:

$$b = 2, a = -3$$

پس باقی مانده به صورت $-3x + 2$ است.

۱۳۶- گزینه ۳ باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $x-1$ برابر 2 است پس:

$$p(1) = 2 \Rightarrow 1 - 3 + a - 1 = 2 \Rightarrow a = 5$$

حالا رابطه تقسیم را می نویسیم:

$$x^4 - 3x^3 + 5x - 1 = (x-1)q(x) + 2$$

باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ برابر -2 شده است، پس:

$$P(1) = -2 \Rightarrow \circ + a + b = -2 \Rightarrow a + b = -2$$

باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x+2$ برابر 4 شده است، پس:

$$P(-2) = 4 \Rightarrow \circ - 2a + b = 4 \Rightarrow -2a + b = 4$$

با حل دو معادله $-2a + b = 4$ و $a + b = -2$ داریم: $a = -2$ ، $b = \circ$ ، پس $ax + b$ که باقی مانده تقسیم بود برابر با $-2x$ است.

۱۳۸- گزینه ۱ باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-2$ برابر 1 است؛ پس $P(2) = 1$.

باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x+3$ برابر -4 است، پس $P(-3) = -4$.

برای محاسبه باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 + x - 6$ ، ابتدا رابطه تقسیم را می نویسیم (چون مقسوم علیه از درجه دوم است، باقی مانده تقسیم را به صورت $ax + b$ در نظر می گیریم):

$$P(x) = (x^2 + x - 6)Q(x) + ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(2) = 1 \Rightarrow \circ \times Q(2) + 2a + b = 1 \\ P(-3) = -4 \Rightarrow \circ \times Q(-3) - 3a + b = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 \\ -3a + b = -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \Delta a = 5 \Rightarrow a = 1$$

$$\xrightarrow{2a+b=1} b = -1 \Rightarrow \text{باقی مانده: } ax + b = x - 1$$

۱۳۹- گزینه ۲ باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ برابر 8 است، پس:

$$P(1) = 8$$

باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x+1$ برابر 5 است، پس:

$$P(-\frac{1}{2}) = 5$$

حالا فرض کنیم باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x^2 - x - 1$ برابر $ax + b$ باشد، در این صورت با توجه به رابطه تقسیم داریم:

$$P(x) = (2x^2 - x - 1)Q(x) + ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(1) = \circ + a + b \Rightarrow 8 = a + b \\ P(-\frac{1}{2}) = \circ + (-\frac{1}{2}a + b) \Rightarrow 5 = -\frac{1}{2}a + b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} 3 = \frac{3}{2}a \Rightarrow a = 2 \xrightarrow{a+b=8} b = 6$$

بنابراین باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x^2 - x - 1$ برابر $2x + 6$ است.

۱۳۰- گزینه ۲ باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ و $x+b$ به ترتیب 3 و 7 شده، پس:

$$f(-b) = 7, f(1) = 3$$

از طرفی باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x+b)(x-1)$ برابر با $-x+a$ است، پس رابطه تقسیم به شکل زیر درمی آید:

$$f(x) = (x+b)(x-1)Q(x) + (-x+a)$$

حالا دو شرط $f(-b) = 7$ و $f(1) = 3$ را می نویسیم:

$$f(1) = 3 \Rightarrow (1+b)(\circ)Q(1) + (-1+a) = 3$$

$$\Rightarrow a - 1 = 3 \Rightarrow a = 4$$

$$f(-b) = 7 \Rightarrow (-b+b)(-b-1)Q(-b) + (b+a) = 7$$

$$\Rightarrow \circ + b + a = 7 \xrightarrow{a=4} b = 3$$

$$a - b = 4 - 3 = 1$$

پس:

۱۳۱- گزینه ۲ باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x(x-3)(x+3)$ برابر $5x^2 + 3x + 1$ است. رابطه تقسیم را می نویسیم:

$$f(x) = x(x-3)(x+3)Q(x) + 5x^2 + 3x + 1$$

$$= (x^2 - 3x)(x+3)Q(x) + 5x^2 + 3x + 1$$



$$x^A + 1 = 0 \Rightarrow x^A = -1$$



$$x^{2^4} + 1 = (x^A)^2 + 1 = (-1)^2 + 1 = 0 \quad \checkmark$$

۱۴۱- گزینه ۳ با استفاده از اتحاد

$$x^y + y^y = (x+y)(x^y - x^y y + \dots - xy^y + y^y)$$

$$a^{2^4} + b^{2^4} = (a^4)^y + (b^4)^y = (a^4 + b^4)(a^{2^4} - \dots + b^{2^4})$$

داریم: پس $a^{2^4} + b^{2^4}$ بر $a^4 + b^4$ بخش پذیر است.

۱۴۲- گزینه ۳

$$A = \frac{(x^f - 1)(x + 2)}{x^f + x - 2} = \frac{(x - 1)(x^f + x^f + x + 1)(x + 2)}{(x + 2)(x - 1)}$$

$$= x^f + x^f + x + 1$$

۱۴۳- گزینه ۱ صورت کسر را با اتحاد (n فرد)

$$(a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) = a^n + b^n$$

ساده می کنیم و مخرج را با اتحاد مزدوج تجزیه می کنیم:

$$\frac{(1+t)(1-t+t^2-t^3+t^4)}{1-t^5} = \frac{1+t^5}{(1-t^5)(1+t^5)}$$

$$= \frac{1}{1-t^5} \xrightarrow{t=\sqrt[5]{t}} \frac{1}{1-(\sqrt[5]{t})^5} = \frac{1}{1-t} = -1$$

برای محاسبه $q(-1)$ ، در تساوی قبل $x = -1$ قرار می دهیم:

$$-1 - 3 - 5 - 1 = (-1 - 1)q(-1) + 2 \Rightarrow -2q(-1) = -12$$

$$\Rightarrow q(-1) = 6$$

۱۳۷- گزینه ۳ در تقسیم $P(x) = 5x^5 - 14x^3 + 3$ بر $x - 2$ ، ابتدا باقی مانده را حساب می کنیم:

$$P(2) = 5(2)^5 - 14(2)^3 + 3 = 160 - 112 + 3 = 51$$

با داشتن باقی مانده رابطه تقسیم را می نویسیم:

$$5x^5 - 14x^3 + 3 = (x - 2)Q(x) + 51$$

در رابطه بالا $x = -2$ را جای گذاری می کنیم:

$$5(-2)^5 - 14(-2)^3 + 3 = (-2 - 2)Q(-2) + 51$$

$$\Rightarrow -160 + 112 + 3 = -4Q(-2) + 51$$

$$\Rightarrow -96 = -4Q(-2) \Rightarrow Q(-2) = 24$$

۱۳۸- گزینه ۳ ابتدا باقی مانده تقسیم $f(x) = x^A + 3x^5 - 2x^3 + 1$ بر $x + 1$ را حساب می کنیم:

$$f(-1) = (-1)^A + 3(-1)^5 - 2(-1)^3 + 1 = 1 - 3 - 2 + 1 = -3$$

پس رابطه تقسیم به صورت زیر است:

$$x^A + 3x^5 - 2x^3 + 1 = (x + 1)Q(x) + (-3)$$

اگر یادتان باشد، مجموع ضرایب چندجمله ای $P(x)$ برابر با $P(1)$ بود، بنابراین مجموع ضرایب خارج قسمت $Q(1)$ می شود. در تساوی بالا $x = 1$

$$1^A + 3(1)^5 - 2(1)^3 + 1 = (1 + 1)Q(1) + (-3)$$

$$\Rightarrow 1 + 3 - 2 + 1 = 2Q(1) - 3 \Rightarrow 2Q(1) = 6 \Rightarrow Q(1) = 3$$

۱۳۹- گزینه ۴ ابتدا باقی مانده تقسیم $f(x) = 3x^{1^4} - x^{1^0} + x^y + 6$ بر $x + 1$ حساب می کنیم:

$$f(-1) = 3(-1)^4 - (-1)^1 + (-1)^y + 6 = 3 - 1 - 1 + 6 = 7$$

با فرض این که خارج قسمت این تقسیم $g(x)$ باشد، رابطه تقسیم به شکل مقابل درمی آید:

$$3x^{1^4} - x^{1^0} + x^y + 6 = (x + 1)g(x) + 7$$

باقی مانده تقسیم $g(x)$ بر $x - 1$ برابر با $g(1)$ است. برای به دست آوردن $g(1)$ ، در رابطه بالا، $x = 1$ را قرار می دهیم:

$$3(1)^4 - 1^1 + 1^y + 6 = (1 + 1)g(1) + 7$$

$$\Rightarrow 3 - 1 + 1 + 6 = 2g(1) + 7 \Rightarrow 2g(1) = 2 \Rightarrow g(1) = 1$$

۱۴۰- گزینه ۴

راه اول با استفاده از اتحاد $a^2 + b^2 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ داریم:

$$x^{2^4} + 1 = (x^A)^2 + 1^2 = (x^A + 1)(x^{1^6} - x^A + 1)$$

پس $x^{2^4} + 1$ بر $x^A + 1$ بخش پذیر است.

راه دوم تک تک گزینه ها را چک می کنیم. هر گزینه نقش مقسوم علیه را دارد. آن را مساوی صفر قرار می دهیم و تساوی به دست آمده را در مقسوم یعنی $x^{2^4} + 1$ جای گذاری می کنیم. اگر حاصل صفر شد یعنی $x^{2^4} + 1$ بر آن گزینه بخش پذیر است.

$$x^{1^2} + 1 = 0 \Rightarrow x^{1^2} = -1$$



$$x^{2^4} + 1 = (x^{1^2})^2 + 1 = (-1)^2 + 1 = 2 \quad \times$$

$$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$$



$$x^{2^4} + 1 = (x^3)^A + 1 = (-1)^A + 1 = 2 \quad \times$$

$$x^6 + 1 = 0 \Rightarrow x^6 = -1$$



$$x^{2^4} + 1 = (x^6)^4 + 1 = (-1)^4 + 1 = 2 \quad \times$$