
خرید کتاب های کنکور
با تخفیف ویژه
و
ارسال رایگان
Medabook.com
مدابوک
یک جلسه تماس تلفنی رایگان
با مشاوران رتبه برتر
برای انتخاب بهترین منابع
دبیرستان و کنکور
۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰

telegram.me/medabook_com www.medabook.com

فهرست

مشاوره و راهنمای انتخاب بهترین منابع کنکور : 021-28425210

telegram.me/medabook_com www.medabook.com

مشاوره و راهنمای انتخاب بهترین منابع کنکور : 021-28425210

telegram.me/medabook_com www.medabook.com

مشاوره و راهنمای انتخاب بهترین منابع کنکور : 021-28425210

telegram.me/medabook_com www.medabook.com

۴۰۶. گزینه ۴

اولاً $f=\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^۲-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$ باید تابع باشد، پس چون $(۳,۲)$ و $(۳,a^۲-a)$ داریم، پس باید $a^۲-a=۲$ باشد:

$$a^۲-a-۲=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} a=-۱ \\ a=۲ \end{cases}$$

مقدار $a=۲$ و $a=-۱$ را قرار می‌دهیم و f را بررسی می‌کنیم:

$$a=-۱ \Rightarrow f=\{(۳,۲),(-۱,۵),(۳,۲),(b,۲),(-۱,۴)\}$$

چون $(-۱,۴)$ و $(-۱,۵)$ داریم پس f تابع نیست.

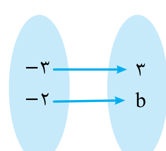
$$a=۲ \Rightarrow f=\{(۳,۲),(۲,۵),(۳,۲),(b,۲),(-۱,۴)\}$$

f تابع است و ثانیاً برای یک‌به‌یک بودنش چون $(۳,۲)$ و $(b,۲)$ داریم پس باید $b=۳$ باشد، پس دوتایی مرتب (a,b) می‌شود $(۲,۳)$.

۴۰۷. گزینه ۱ چون از $a-۱$ و از $۲a+۱$ به ۳ وصل شده است، پس این‌ها باید با هم برابر باشند:

$$y_۱=y_۲ \Rightarrow x_۱=x_۲ \Rightarrow a-۱=۲a+۱ \Rightarrow a=-۲$$

حالا چون از $a=-۲$ به b وصل شده است، b نباید ۳ باشد (مؤلفهٔ دوم تکراری نداریم)، پس $a=-۲$ و $b\neq ۳$. تابع را هم ببینید:

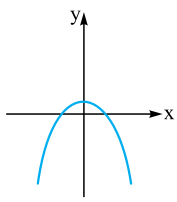


اشـاره نظرتان در مورد این گزینه چیست؟ $a=-۲$ و $b\neq ۱-a$، این هم درست است!

۴۰۸. گزینه ۲ نمودار هر کدام از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

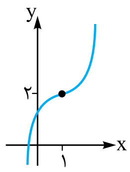
۱) $y=-x^۲+۱$

یک‌به‌یک نیست.



۲) $y=(x-۱)^۳+۲$

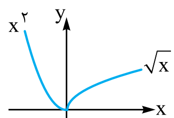
یک‌به‌یک است.



۳)

$$y=\begin{cases} x^۲ & x<۰ \\ \sqrt{x} & x\geq ۰ \end{cases}$$

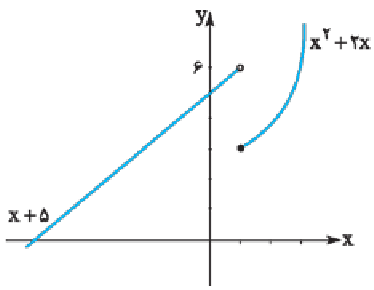
یک‌به‌یک نیست.



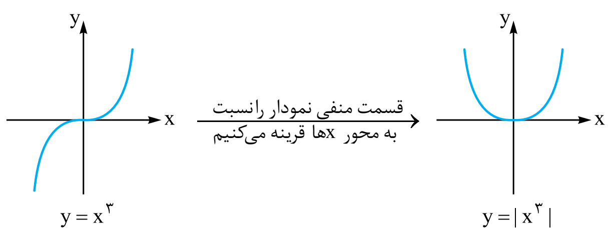
۴)

$$y=\begin{cases} x^۲+۲x & x\geq ۱ \\ x+۵ & x<۱ \end{cases}$$

یک‌به‌یک نیست.



۴۰۹. گزینه ۳ نمودار تابع $f(x)=|x^۳|$ را رسم می‌کنیم:

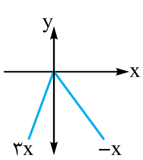


پس تابع $y=|x^۳|$ وارون‌ناپذیر است. حواسمان هست که $y=|x^۳|$ همان $y=x^۲|x|$ است!

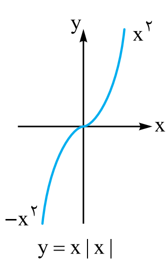
۴۱۰. گزینه ۳ هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم که ببینیم کدام یک‌به‌یک است. برای بررسی $y=x-۲|x|$ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$y=x-۲|x| \Rightarrow \begin{cases} x\geq ۰ & y=x-۲x=-x \\ x<۰ & y=x+۲x=۳x \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=\begin{cases} -x & x\geq ۰ \\ ۳x & x<۰ \end{cases}$$



پس تابع $y=x-۲|x|$ یک‌به‌یک نیست.
$y=x[x]$ یک‌به‌یک نیست چون به ازای $x\in[۰,۱)$ مقدارش برابر صفر است. $y=x-[x]$ یک‌به‌یک نیست چون به ازای تمام اعداد صحیح مقدار y برابر صفر می‌شود ولی $y=x|x|$ یک‌به‌یک است. برای این‌که مطمئن شویم کافی است نمودارش را رسم کنیم.



مشاوره و راهنمای انتخاب بهترین منابع کنکور : 021-28425210

telegram.me/medabook_com www.medabook.com

۴۱۱. گزینه ۳ در (۱) از قبل یادمان هست تابع $y=2^x$ (تابع نمایی با پایهٔ بزرگ‌تر از ۱) اکیداً صعودی است پس یک‌به‌یک است. در (۲) تابع $y=\log x$ (مبنا ۱۰ است) اکیداً صعودی است پس یک‌به‌یک است.

در (۴) تابع $x+[x]$ اکیداً صعودی است (چون x اکیداً صعودی و $[x]$ صعودی است) پس وارون دارد. اما در (۳) با کمی دقت داریم:

$$\frac{2x+4}{x+2} \overset{x\neq -2}{=} 2$$

که تابعی ثابت و غیر یک‌به‌یک است و تابع وارون ندارد.

۴۱۲. گزینه ۱ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

در (۱) $y=x^2+2\sqrt{x}$ با توجه به دامنهٔ تابع یعنی $x\ge 0$ هم x^2 و هم $2\sqrt{x}$ اکیداً صعودی‌اند. پس تابع اکیداً یکنوا و یک‌به‌یک است. پس جواب می‌شود (۱). بقیهٔ گزینه‌ها را هم بررسی کنیم:

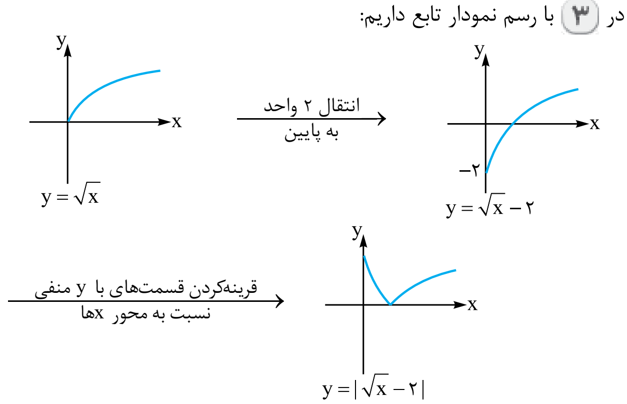
در (۲) $y=2x+\frac{1}{x}$ مثلاً به ازای $x=\frac{1}{4}$ و $x=2$ داریم:

$$x=\frac{1}{4} \Rightarrow y=2(\frac{1}{4})+4=\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}$$

$$x=2 \Rightarrow y=2(2)+\frac{1}{2}=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

پس به ازای دو مقدار x، y یکسان داریم. پس یک‌به‌یک نیست.

در (۳) با رسم نمودار تابع داریم:



حالا با توجه به نمودار، تابع $y=|\sqrt{x}-2|$ یک‌به‌یک نیست.

در (۴)، $y=x-\sqrt{x}$ هم به ازای $x=0$ و $x=1$ مقدار y برابر صفر می‌شود پس تابع یک‌به‌یک نیست.

۴۱۳. گزینه ۴ باید ببینیم کدام‌یک از تابع‌ها یک‌به‌یک هستند. در (۱) یعنی $y=x^4-2x^2$ به ازای $x=1$ و $x=-1$ مقدار $y=-1$ یکسان دارد پس یک‌به‌یک نیست. در درسنامه هم داشتیم که توابع با درجهٔ زوج در $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیستند.

(۲) یعنی $y=[x]$ هم که به ازای $k\le x\le k+1$ برابر k است پس یک‌به‌یک نیست.

در (۳) یعنی $y=x^3-3x^2$ مقدار y به ازای $x=0$ و $x=3$ برابر صفر می‌شود پس این هم یک‌به‌یک نیست. نمودار این تابع را در فصل کاربرد مشتق یاد می‌گیریم.

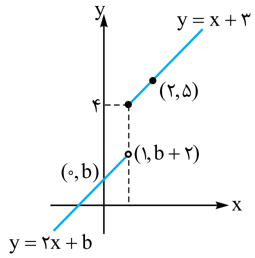
بنابراین جواب می‌شود (۴). یعنی $y=x^3+x+1$ برای دلیلش هم می‌توانیم بگوییم:

$f(x)=x^3$ صعودی اکید
$g(x)=x+1$ صعودی اکید
$\Rightarrow y=(f+g)(x)$ صعودی اکید

$\Rightarrow y=x^3+x+1$ صعودی اکید

و چون تابع صعودی اکید است پس یکنوای اکید و در نتیجه یک‌به‌یک است.

۴۱۴. گزینه ۳ نمودار تابع از دو قسمت خطی ساخته شده است:

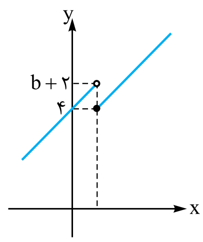


الف) $y=x+3$ را با دو نقطهٔ $(1,4)$ و $(2,5)$ می‌کشیم.

ب) قسمت $y=2x+b$ را با دو نقطهٔ $(0,b)$ و $(1,b+2)$ می‌کشیم:

تست از ما خواسته تابع یک‌به‌یک باشد.

اما در حالتی که نقطهٔ توخالی $(1,b+2)$، از نقطهٔ $(1,4)$ بالاتر برود، دیگر تابع یک‌به‌یک نیست. ببینید:



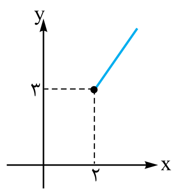
یک‌به‌یک نیست.

پس برای یک‌به‌یک‌شدن لازم است $b+2$ کم‌تر از ۴ یا مساوی آن باشد:

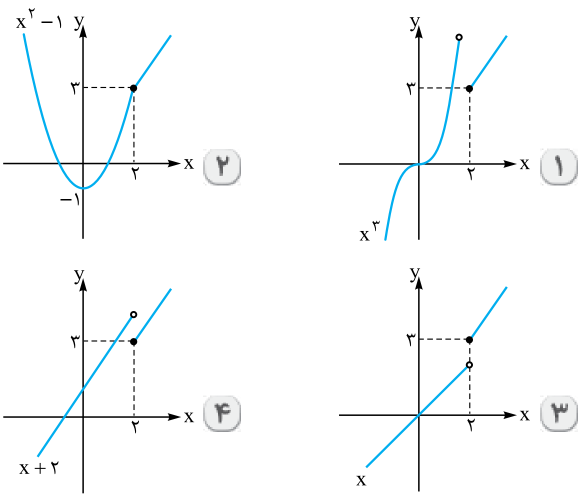
$$b+2\le 4 \Rightarrow b\le 2$$

و در بین گزینه‌ها فقط $b=1$ مناسب است.

۴۱۵. گزینه ۳ ضابطهٔ بالایی برای $x\ge 2$ به ما yهای بزرگ‌تر یا مساوی ۳ را می‌دهد.



پس ضابطهٔ پایین باید طوری باشد که برای $x<2$، yهای بیشتر یا مساوی ۳ ندهد. x^3، x^2-1 و $x+2$، این‌طور نیستند اما x خوب است. ببینید:

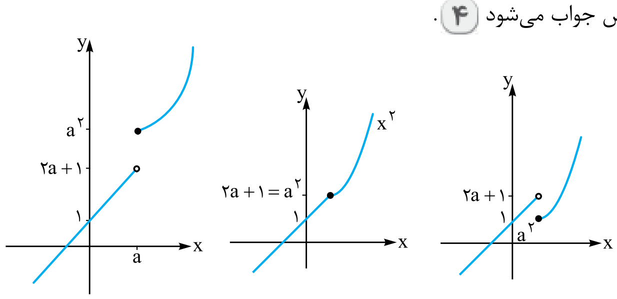


۴۱۶. گزینه ۴ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge a\\ 2x+1 & x<a\end{cases}$$

حالا با توجه به نمودار که در سه حالت رسم شده، می‌بینیم که f به شرطی یک‌به‌یک است که $a^2\ge 2a+1$ باشد: $a^2\ge 2a+1 \Rightarrow a^2-2a\ge 1$

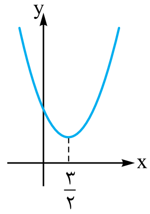
لازم نیست نامعادلهٔ به‌دست‌آمده را حل کنیم، کافی است گزینه‌ها را امتحان کنیم. در بین گزینه‌ها نامساوی $a^2-2a\ge 1$ فقط به ازای $a=\frac{5}{2}$ برقرار است پس جواب می‌شود (۴).



مشاوره و راهنمای انتخاب بهترین منابع کنکور : 021-28425210

telegram.me/medabook_com www.medabook.com

۴۱۷. گزینه ۳ تابع $f(x)=x^۲-۳x+۵$ یک سهمی است که طول رأسش برابر $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۳}{۲}=\frac{۳}{۲}$ است و چون نمودار تابع نسبت به خط $x=\frac{۳}{۲}$ متقارن است پس تابع در بازه‌ای که شامل دو طرف $x=\frac{۳}{۲}$ نباشد (یا $x=\frac{۳}{۲}$ نقطهٔ درونی بازه نباشد)، یک‌به‌یک است که با توجه به گزینه‌ها می‌شود بازهٔ $[-۷,۱]$.

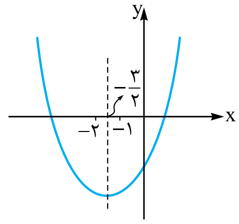


۴۱۸. گزینه ۴ اول ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=(x-۱)(x+۳)+x=x^۲+۲x-۳+x$$

$$\Rightarrow f(x)=x^۲+۳x-۳$$

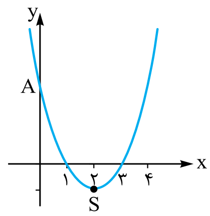
حالا طول رأس تابع $f(x)=x^۲+۳x-۳$ برابر است با: $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۳}{۲}$ و چون تابع در بازهٔ $[a,+\infty)$ یک‌به‌یک است پس حداقل مقدار a برابر می‌شود با $a=-\frac{۳}{۲}$.



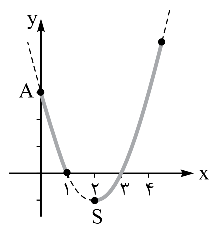
۴۱۹. گزینه ۲

نمودار تابع $y=x^۲-۴x+۳$ را (که یک سهمی است) رسم می‌کنیم:

$S(۲,-۱), A(۰,۳)$



در مورد گزینه‌های ۱ و ۴ چون رأس سهمی یعنی $x=۲$ درون این بازه‌ها قرار دارد، سهمی یک‌به‌یک نمی‌شود. برای ۳ هم شکل را ببینید:



در این نمودار هم سهمی یک‌به‌یک نمی‌شود. پس جواب می‌شود ۲. چون تابع f در مجموعهٔ داده‌شده یک‌به‌یک است.

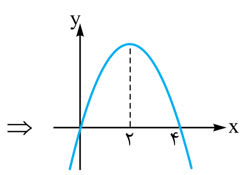
۴۲۰. گزینه ۱ تابع $f(x)=(a-۱)x^۲-۲x+a+۴$ بر روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک است، پس نباید درجه‌دوم باشد و ضریب $x^۲$ باید برابر صفر شود (چون نمودار تابع درجه‌دوم یک سهمی است که روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست)، یعنی $a=۱$ و در نتیجه $f(x)=-۲x+۵$. بنابراین: $af(۲)=۱\times(-۲(۲)+۵)=۱$

۴۲۱. گزینه ۴ نمودار هر دو تابع را رسم می‌کنیم:

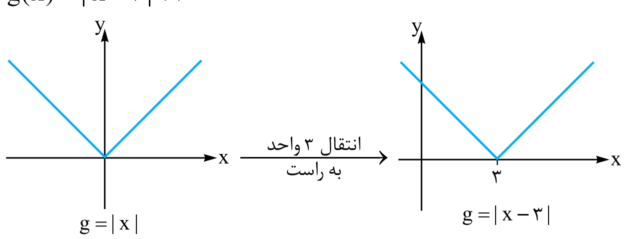
$$f(x)=-x(x-۴)=-x^۲+۴x$$

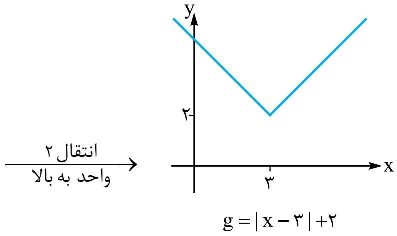
سهمی $\Leftarrow$ رأس $(۲,۴)$ و برخورد با محور yها $(۰,۰)$

$\Rightarrow$



$g(x)=|x-۳|+۲$

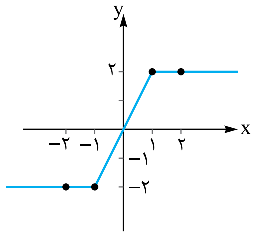




حالا با توجه به نمودارها هر دو تابع در بازهٔ $[-۱,۲]$ یک‌به‌یک هستند.

۴۲۲. گزینه ۲ نمودار تابع $f(x)=|x+۱|-|x-۱|$ را رسم می‌کنیم:

$f(x)=|x+۱|-|x-۱|$

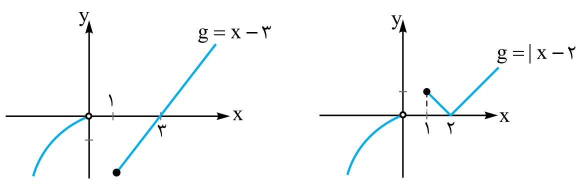


$A(-۲,-۲), B(-۱,-۲)$

$C(۱,۲), D(۲,۲)$

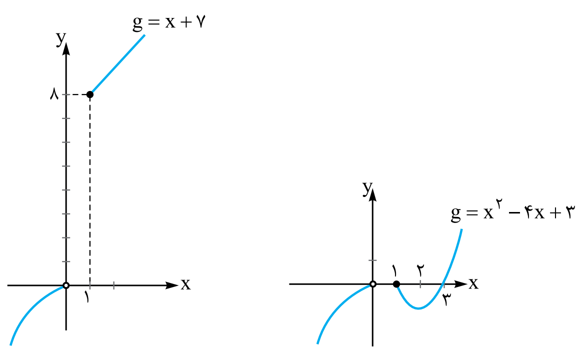
همان‌طور که می‌بینیم نمودار تابع در بازهٔ $[-۱,۱]$ یک‌به‌یک است پس حداکثر $b-a$ برای آن‌که تابع در بازهٔ $[a,b]$ یک‌به‌یک باشد برابر است با: $۱-(-۱)=۲$.

۴۲۳. گزینه ۴ ضابطهٔ پایین یعنی $-x^۲$، با دامنهٔ $x<۰$، تمام yهای منفی را تولید می‌کند. پس باید $g(x)$ اصلاً yهای منفی ندهد و خودش یک‌به‌یک باشد. در بین گزینه‌ها، ۴ مناسب است. نمودارها را ببینید:



۱ g یک‌به‌یک نیست.

۲ g هم yهای منفی دارد.



۳ هم یک‌به‌یک نیست هم برد تکراری دارد.

۴ این خوب است.

۴۲۴. گزینه ۴ گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ را که در درسنامه داشتیم اما در مورد ۴ همان‌طور که در درسنامه گفتیم اگر f تابعی غیر یک‌به‌یک باشد، $f^{-۱}$ (یعنی وارون آن) تابع نیست. پس اگر f تابع باشد، $f^{-۱}$ به شرطی تابع است که f یک‌به‌یک باشد.

۴۲۵. گزینه ۴ داریم: $f=\{(۱,۲),(-۳,-۱),(۳,۴),(۴,-۳)\}$

پس $f(۳)=۴$ و $f^{-۱}(-۳)=۴$ و در نتیجه:

$$۲f^{-۱}(-۳)+f(۳)=۲(۴)+۴=۱۲$$

۴۲۶. گزینه ۳ اول $f^{-۱}$ را به دست می‌آوریم:

$$f=\{(-۱,۰),(۱,۲),(۰,۱),(۲,-۱)\}$$

$$f^{-۱}=\{(۰,-۱),(۲,۱),(۱,۰),(-۱,۲)\}$$

مشاوره و راهنمای انتخاب بهترین منابع کنکور : 021-28425210

telegram.me/medabook_com www.medabook.com

حالا $\frac{f}{f^{-1}}$ را پیدا می‌کنیم: $\frac{f}{f^{-1}}=\{(-1,\frac{0}{2}),(1,\cancel{\frac{2}{0}}),(0,\frac{1}{-1}),(2,\frac{-1}{1})\}$

حواسمان هست که $\frac{f}{f^{-1}}$ به ازای $x=1$ تعریف‌نشده است؛ پس:

$$\frac{f}{f^{-1}}=\{(-1,0),(0,-1),(2,-1)\}$$

یعنی $\frac{f}{f^{-1}}$ سه زوج مرتب دارد.

۴۲۷. گزینهٔ ۱ رابطهٔ $f=\{(2,a+1),(\sqrt{b},3)\}$ دو زوج مرتب و رابطهٔ $f^{-1}=\{(a-1,c+1),(d,b-2)\}$ هم دو زوج مرتب دارد. پس هر کدام از زوج مرتب‌های f^{-1} باید وارون یکی از زوج مرتب‌های f باشند (یعنی در زوج مرتب f^{-1} جای x و y زوج مرتب f عوض شود)، پس:

الف) $(2,a+1)\xleftrightarrow{\text{وارون}}(a-1,c+1)\Rightarrow\begin{cases}2=c+1\\a+1=a-1\end{cases}\Rightarrow$ غیرممکن

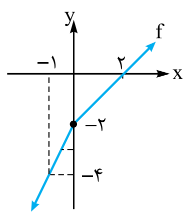
ب) $(2,a+1)\xleftrightarrow{\text{وارون}}(d,b-2)\Rightarrow\begin{cases}2=b-2\\a+1=d\end{cases}\Rightarrow b=4$

$(\sqrt{b},3)\xleftrightarrow{\text{وارون}}(a-1,c+1)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{b}=c+1\\3=a-1\end{cases}\xrightarrow{b=4}\begin{matrix}c=1\\a=4\end{matrix}\xrightarrow{a+1=d}d=5$$

پس $a+b+c+d$ برابر است با: $4+4+1+5=14$

۴۲۸. گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار تابع f برای پیداکردن $f^{-1}(-5)$ باید نقطه‌ای روی نمودار f پیدا کنیم که عرضش برابر -5 باشد؛ یعنی معادلهٔ خطی را بنویسیم که از $(0,-2)$ و $(-1,-4)$ می‌گذرد:



$$(0,-2),(-1,-4)\Rightarrow m=\frac{-4-(-2)}{-1-0}=\frac{-2}{-1}=2\Rightarrow y=2x-2$$

بنابراین باید $2x-2=-5$ باشد که می‌شود $x=-\frac{3}{2}$ یعنی $f^{-1}(-5)=-\frac{3}{2}$.
برای پیداکردن $f^{-1}(4)$ هم باید معادلهٔ خطی را بنویسیم که از نقاط $(0,-2)$ و $(2,0)$ می‌گذرد:

$$(0,-2),(2,0)\xrightarrow{f}m=\frac{0-(-2)}{2-0}=1\Rightarrow y=x-2$$

بنابراین باید $x-2=4$ باشد یعنی $x=6$ و در نتیجه $f^{-1}(4)=6$ بنابراین داریم:

$$f^{-1}(-5)+f^{-1}(4)=-\frac{3}{2}+6=\frac{-3+12}{2}=\frac{9}{2}=4/5$$

۴۲۹. گزینهٔ ۱ همان‌طور که می‌دانیم $f^{-1}(6)=1$ و $f^{-1}(21)=4$. پس $f(1)=6$ و $f(4)=21$، یعنی خط $y=ax+b$ از دو نقطهٔ $(1,6)$ و $(4,21)$ می‌گذرد:

$$(1,6),(4,21)\Rightarrow \text{شیب}\ m=\frac{21-6}{4-1}=5\Rightarrow y=5x+1$$

پس $f(x)=ax+b$ باید به شکل $f(x)=5x+1$ باشد و در نتیجه $a=5$ و $b=1$.

۴۳۰. گزینهٔ ۱ نمودار تابع f^{-1} از نقطهٔ $(a+2,a)$ می‌گذرد. پس نمودار تابع f از نقطهٔ $(a,a+2)$ می‌گذرد، در نتیجه:

$$y=\frac{x-4}{2x-1}\xrightarrow{(a,a+2)}a+2=\frac{a-4}{2a-1}$$

$$\Rightarrow(a+2)(2a-1)=a-4\Rightarrow 2a^2-a+4a-2=a-4$$

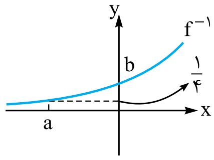
$$\Rightarrow 2a^2+2a+2=0\xrightarrow{\div 2}a^2+a+1=0$$

$$\Rightarrow\Delta=(1)^2-4(1)(1)<0\Rightarrow \text{جواب ندارد.}$$

پس به ازای هیچ مقدار a نمودار f از نقطهٔ $(a,a+2)$ نمی‌گذرد.

۴۳۱. گزینهٔ ۲ نقطهٔ برخورد وارون تابع و محور xها یعنی در تابع وارون $y=0$ باشد، پس در خود تابع $y=x^3+2x-3$ داریم $x=0$ و چون $x=0\Rightarrow y=-3$ پس وارون تابع محور xها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

۴۳۲. گزینهٔ ۱ روی نمودار f^{-1} نقطهٔ $(a,\frac{1}{4})$ داریم پس نقطهٔ $(\frac{1}{4},a)$ باید روی نمودار f باشد:



$$f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}\xrightarrow{x=\frac{1}{4}}f(\frac{1}{4})=\sqrt{\frac{1}{4}}-\frac{1}{\frac{1}{4}}=a$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}-4=a\Rightarrow a=-\frac{7}{2}$$

از طرف دیگر نقطهٔ $(0,b)$ روی نمودار f^{-1} است، پس روی نمودار f باید نقطهٔ $(b,0)$ را داشته باشیم:

$$(b,0)\xrightarrow{f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}}\sqrt{b}-\frac{1}{b}=0\Rightarrow\frac{b\sqrt{b}-1}{b}=0$$

$$\Rightarrow b\sqrt{b}=1\xrightarrow{\text{توان ۲}}b^3=1\Rightarrow b=1$$

پس حاصل $a+b$ برابر است با: $-\frac{7}{2}+1=-\frac{5}{2}$

۴۳۳. گزینهٔ ۳ g وارون تابع f است، یعنی $g=f^{-1}$، حالا داریم:

$$g(6)=f^{-1}(6)=a\Rightarrow f(a)=6\Rightarrow a+\sqrt{a}=6\xrightarrow{\text{عددگذاری}}a=4$$

$$g(12)=f^{-1}(12)=b\Rightarrow f(b)=12\Rightarrow b+\sqrt{b}=12\xrightarrow{\text{عددگذاری}}b=9$$

پس $g(6)+g(12)$ یا همان $f^{-1}(6)+f^{-1}(12)=4+9=13$ است.

۴۳۴. گزینهٔ ۳ در تابع $f(x)=\begin{cases}4x+3 & x\ge 3\\x+1 & x<3\end{cases}$ فرض می‌کنیم $f^{-1}(-5)=a$ باشد، در این صورت باید $f(a)=-5$ باشد. پس هر کدام از ضابطه‌ها را برابر -5 قرار می‌دهیم. مقدار به دست آمده برای a در صورتی قابل قبول است که در محدودهٔ تعریف ضابطه باشد:

$x\ge 3\Rightarrow 4a+3=-5\Rightarrow a=-2$ غ‌قق

$x<3\Rightarrow a+1=-5\Rightarrow a=-6$ قق

پس $f^{-1}(5)=a=-6$.

۴۳۵. گزینهٔ ۱ اگر $x=f^{-1}(3)$ قرار دهیم داریم:

$$f(f^{-1}(3))=f^{-1}(3)+2f^{-1}(3)-1$$

$$\Rightarrow 3=3f^{-1}(3)-1\Rightarrow f^{-1}(3)=\frac{4}{3}$$

پس $f(x)=\frac{4}{3}+2x-1$ و مقدار $f(3)$ می‌شود $\frac{4}{3}+5=\frac{19}{3}$.

۴۳۶. گزینهٔ ۲ | راه I می‌دانیم دامنهٔ f^{-1} برابر برد f است. پس برای پیداکردن دامنهٔ تابع معکوس تابع $f(x)=3-|x+1|$ باید برد تابع f را پیدا کنیم. می‌دانیم حاصل یک قدرمطلق همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، حاصل $|x-1|$ هم به ازای $x\le -1$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس:

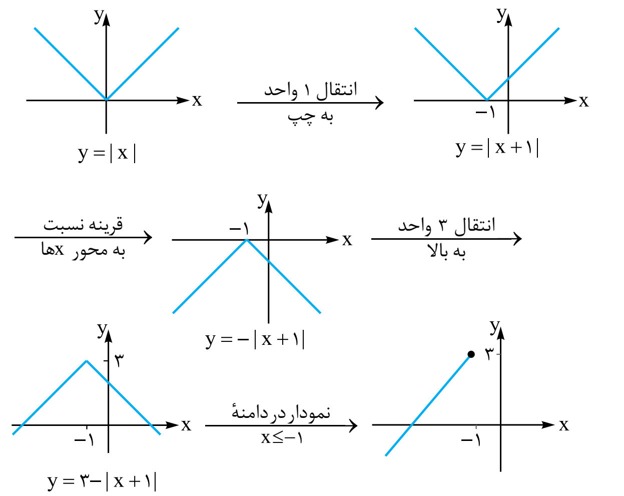
$$|x+1|\ge 0\Rightarrow -|x+1|\le 0\Rightarrow 3-|x+1|\le 3\Rightarrow f(x)\le 3$$

پس برد f برابر بازهٔ $(-\infty,3]$ و در نتیجه دامنهٔ f^{-1} هم برابر بازهٔ $(-\infty,3]$ است.

مشاوره و راهنمای انتخاب بهترین منابع کنکور : 021-28425210

telegram.me/medabook_com www.medabook.com

راه II برای پیداکردن $D_{f^{-1}}$ یا همان برد f، می‌توانیم نمودار تابع f را هم رسم کنیم:



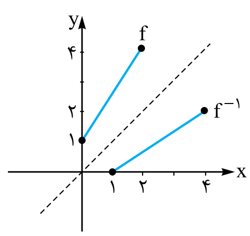
حالا طبق نمودار برد تابع f (یا همان دامنهٔ تابع f^{-1}) برابر است با $(-\infty,3]$.

۴۳۷. گزینه ۲ باید دامنه و برد g^{-1} را پیدا کنیم و چون $R_g = D_{g^{-1}}$ و $R_{g^{-1}} = D_g$ پس باید دامنه و برد $g(x)=1+\sqrt{x-2}$ را پیدا کنیم:

$$g(x)=1+\sqrt{x-2} \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه}: x\ge 2 \Rightarrow D_g:[2,+\infty) \\ \text{برد}: \sqrt{x-2}\ge 0 \Rightarrow \sqrt{x-2}+1\ge 1 \\ \text{برد}: y\ge 1 \Rightarrow R_g=[1,+\infty) \end{cases}$$

پس $D_{g^{-1}}=[1,+\infty)$ و $R_{g^{-1}}=[2,+\infty)$ و در دامنه و برد g^{-1} فقط یک عضو صحیح غیرمشترک هست.

۴۳۸. گزینه ۱ راه I طبق شکل زیرنمودار تابع f^{-1} از نقاط $(1,0)$ و $(4,2)$ می‌گذرد.پس ضابطه‌اش برابر است با: $(1,0),(4,2)$



$$\Rightarrow (\text{شیب})\ m=\frac{2-0}{4-1}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$$

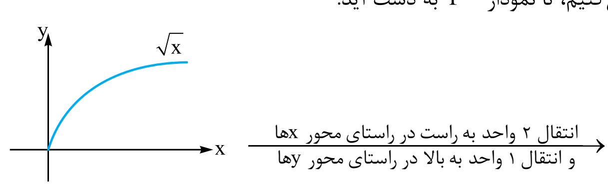
راه II اول ضابطهٔ خود تابع را پیدا می‌کنیم، تابع f پاره‌خطی است که از نقاط $(0,1)$ و $(2,4)$ می‌گذرد، پس:

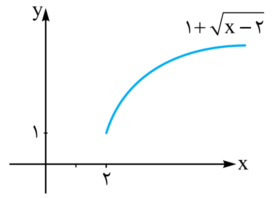
$$(0,1),(2,4) \Rightarrow (\text{شیب})\,m=\frac{4-1}{2-0}=\frac{3}{2} \Rightarrow y=\frac{3}{2}x+1$$

حالا ضابطهٔ f^{-1} را پیدا می‌کنیم: $y=\frac{3}{2}x+1 \Rightarrow \frac{3}{2}x=y-1$

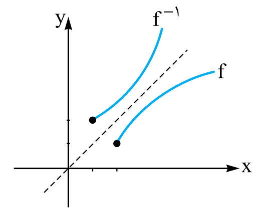
$$\Rightarrow x=\frac{2}{3}y-\frac{2}{3} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$$

۴۳۹. گزینه ۱ اول نمودار تابع $f(x)=1+\sqrt{x-2}$ را با انتقال نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ رسم می‌کنیم و بعد قرینه‌اش را نسبت به خط $y=x$ رسم می‌کنیم، تا نمودار f^{-1} به دست آید:

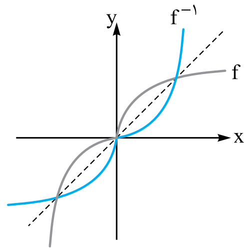




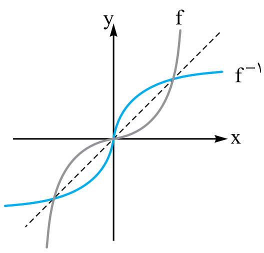
$\Rightarrow$



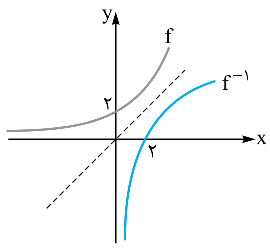
۴۴۰. گزینه ۳ اول نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$ را رسم می‌کنیم. نمودار تابع معکوس f، قرینهٔ نمودار آن نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است.



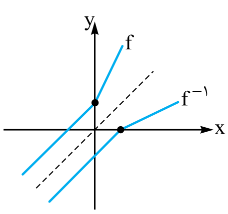
۴۴۱. گزینه ۳ اول نمودار تابع $f(x)=x|x|$ که برابر است با $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$ را رسم می‌کنیم. نمودار تابع $y=f^{-1}(x)$ قرینهٔ نمودار f نسبت به خط $y=x$ است:



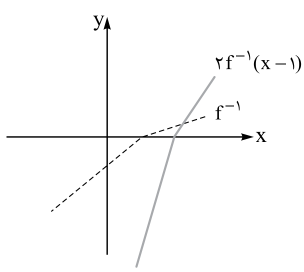
۴۴۲. گزینه ۴ نمودار تابع $f(x)$ را داریم. نمودار تابع $f^{-1}(x)$ قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است، حالا دامنهٔ تابع $\sqrt{f^{-1}(x)}$ برابر بازه‌ای است که در آن $f^{-1}(x)\ge 0$ باشد که می‌شود $x\ge 2$.



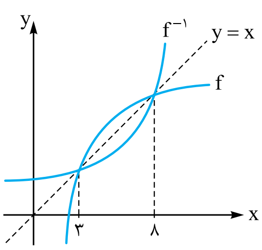
۴۴۳. گزینه ۲ برای رسم نمودار f^{-1} کافی است وارون نمودار f را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم رسم کنیم:



حالا دقت کنید که ما $2f^{-1}(x-1)$ را می‌خواهیم پس باید f^{-1} را یک واحد به راست برده و عرض‌ها را ۲ برابر کنیم: که از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد.



۴۴۴. گزینه ۴ دامنهٔ تابع $\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ برابر بازه‌ای است که در آن $x-f^{-1}(x)\ge 0$، یعنی $x\ge f^{-1}(x)$ باشد. با توجه به شکل، خط $y=x$ در بازهٔ $[3,8]$ بالای منحنی تابع قرار می‌گیرد. پس دامنهٔ تابع $\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ برابر است با بازهٔ $[3,8]$.



مشاوره و راهنمای انتخاب بهترین منابع کنکور : 021-28425210

telegram.me/medabook_com www.medabook.com

۴۴۵. گزینه ۳ | راه I | برای پیداکردن تابع معکوس تابع $f(x)=۲x+۴$ با دامنهٔ $[-۱,۳]$ اولاً در مورد ضابطه مثل همان چیزی که قبلاً گفتیم، داریم:

$y=۲x+۴ \Rightarrow ۲x=y-۴ \Rightarrow x=\frac{y-۴}{۲}$

$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x-۴}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۴}{۲}$

و ثانیاً در مورد دامنهٔ $f^{-۱}$ هم می‌دانیم که دامنهٔ $f^{-۱}$ همان برد f است پس باید برد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۲x+۴$ و دامنهٔ $[-۱,۳]$ را پیدا کنیم:

$-۱\le x\le ۳ \Rightarrow -۲\le ۲x\le ۶ \Rightarrow ۲\le ۲x+۴\le ۱۰$

$\Rightarrow ۲\le f(x)\le ۱۰$

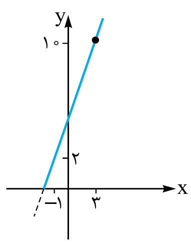
پس برد f برابر بازهٔ $[۲,۱۰]$ و در نتیجه دامنهٔ $f^{-۱}$ هم برابر بازهٔ $[۲,۱۰]$ است، پس تابع معکوس f می‌شود: $f^{-۱}(x)=\frac{x-۴}{۲}, ۲\le x\le ۱۰$

راه II | بعد از پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون یعنی $f^{-۱}(x)=\frac{x-۴}{۲}$ برای پیداکردن دامنهٔ $f^{-۱}$ می‌توانیم نمودار تابع f را رسم و برد f را تعیین کنیم:

$f(x)=۲x+۴\ ,\ x\in[-۱,۳]$

$x=-۱ \Rightarrow y=۲ \Rightarrow (-۱,۲)$

$x=۳ \Rightarrow y=۱۰ \Rightarrow (۳,۱۰)$



حالا با توجه به نمودار برد تابع f برابر است با $[۲,۱۰]$ پس دامنهٔ $f^{-۱}$ هم می‌شود $۲\le x\le ۱۰$.

۴۴۶. گزینه ۴ | برای پیداکردن وارون یک تابع دوضابطه‌ای f در هر کدام از ضابطه‌ها:

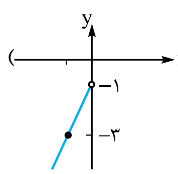
الف) ضابطهٔ وارون را پیدا می‌کنیم (x را برحسب y پیدا و جای x و y را عوض می‌کنیم) و ب) برای هر کدام از ضابطه‌ها برد تابع f را با رسم نمودار پیدا می‌کنیم که برابر می‌شود با دامنهٔ $f^{-۱}$، ببینیم:

$$f(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x<۰\\ ۴x+۱ & x\ge ۰\end{cases}$$

ضابطهٔ بالا: الف) $y=۲x-۱ \Rightarrow ۲x=y+۱ \Rightarrow x=\frac{y}{۲}+\frac{۱}{۲}$

$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}$

ب) $(۰,-۱),(-۱,-۳) \Rightarrow$

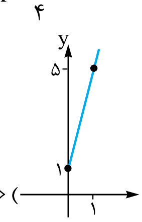


$\Rightarrow$ دامنهٔ $f^{-۱}: x<-۱$

ضابطهٔ پایین: الف) $y=۴x+۱ \Rightarrow ۴x=y-۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۴}y-\frac{۱}{۴}$

$\xrightarrow{x\Leftrightarrow y} y=\frac{۱}{۴}x-\frac{۱}{۴}$

ب) $(۰,۱),(۱,۵) \Rightarrow$



$\Rightarrow$ دامنهٔ $f^{-۱}: x\ge ۱$

پس ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ برابر است با:

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲} & x<-۱\\ \frac{۱}{۴}x-\frac{۱}{۴} & x\ge ۱\end{cases}$$

۴۴۷. گزینه ۱ | راه I | معادلهٔ قرینهٔ خط $d_۱: ۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$ پیدا می‌کنیم (جای x و y را عوض می‌کنیم.):

$d: ۳x-۲y=۴ \Rightarrow$ عرض از مبدأ $x=۰ \Rightarrow -۲y=۴$

$\Rightarrow y=-۲$

راه II | اگر فرض کنیم خط $۳y-۲x=۴$ ضابطهٔ یک تابع مانند f است، خط d، قرینهٔ آن نسبت به خط $y=x$، ضابطهٔ تابع وارون آن یعنی $f^{-۱}$ است، پس عرض از مبدأ خط d، برابر طول از مبدأ خط $۳y-۲x=۴$ است، بنابراین داریم:

$۳y-۲x=۴ \Rightarrow$ طول از مبدأ $y=۰ \Rightarrow -۲x=۴ \Rightarrow x=-۲$

۴۴۸. گزینه ۲ | راه I | در درسنامه داشتیم اگر f یک تابع خطی باشد f و وارون f در دو صورت بر هم منطبق‌اند:

الف) $f(x)=x$ باشد.

ب) $f(x)=-x+b$ باشد (چون خط $y=-x+b$ بر نیمساز ناحیهٔ اول و سوم عمود است و قرینه‌اش نسبت به نیمساز می‌شود خودش). پس حالا که داریم $f(x)=ax+۱$ باید $a=-۱$ باشد.

راه II | وارون تابع f را پیدا می‌کنیم: $y=ax+۱$

$\Rightarrow ax=y-۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{a}y-\frac{۱}{a} \xrightarrow{x\Leftrightarrow y} y=\frac{۱}{a}x-\frac{۱}{a}$

حالا دو خط $y=ax+۱$ و $y=\frac{۱}{a}x-\frac{۱}{a}$ باید بر هم منطبق باشند، پس باید a برابر ۱- باشد.

۴۴۹. گزینه ۲ | دو خط $d_۱: ax+by=۸$ و $d_۲: ۲x-۳y=b$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینهٔ یکدیگرند پس قرینهٔ $d_۲$ را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم پیدا می‌کنیم:

$۲x-۳y=b \xrightarrow{x\Leftrightarrow y} ۲y-۳x=b$

حالا دو خط $۲y-۳x=b$ و $ax+by=۸$ باید بر هم منطبق باشند پس ضرایب x و y و عدد ثابت دو خط باید با هم متناسب باشند:

$$\begin{cases}-۳x+۲y=b\\ ax+by=۸\end{cases} \xrightarrow{\text{منطبق بر هم}} -\frac{۳}{a}=\frac{۲}{b}=\frac{b}{۸}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{b}=\frac{b}{۸} \Rightarrow b^۲=۱۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases}b=۴ \Rightarrow -\frac{۳}{a}=\frac{۲}{۴}=\frac{۴}{۸} \Rightarrow a=-۶\\ b=-۴ \Rightarrow -\frac{۳}{a}=\frac{۲}{-۴}=\frac{-۴}{۸} \Rightarrow a=۶\end{cases}$$

پس یا $a=-۶$ و $b=۴$ که $a+b$ می‌شود $-۶+۴=-۲$ و یا $a=۶$ و $b=-۴$ که $a+b$ می‌شود $۶+(-۴)=۲$.

۴۵۰. گزینه ۴ | راه I | مثل همیشه برای پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون، x را برحسب y پیدا می‌کنیم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم:

$y=\frac{۱}{x-۱} \Rightarrow xy-y=۱ \Rightarrow xy=y+۱$

$\Rightarrow x=\frac{y+۱}{y} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{x}$

و چون $\frac{x+۱}{x}=\frac{x}{x}+\frac{۱}{x}=۱+\frac{۱}{x}$ پس $f^{-۱}(x)=۱+\frac{۱}{x}$.

راه II | در درسنامه دیدیم وارون تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است، پس:

$f(x)=\frac{۱}{x-۱}=\frac{۰\times x+۱}{x-۱} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{x-۰}=\frac{x+۱}{x}$

مشاوره و راهنمای انتخاب بهترین منابع کنکور : 021-28425210

telegram.me/medabook_com www.medabook.com

۴۵۱. گزینه ۲ از درس‌نامه یادمان هست که تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به شرطی وارون خودش است که $a=-d$، در تابع $f(x)=\frac{2x+3}{x+b}$ باید $b=-2$ باشد، پس $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$ است و در نتیجه $f(0)=-\frac{3}{2}$.

۴۵۲. گزینه ۲ راه I در درس‌نامه دیدیم که نمودار تابع هموگرافیک، نمودار تابع وارونش را روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قطع می‌کند، یعنی روی خط $y=x$. پس می‌توانیم مقدار x را از گزینه‌ها در ضابطهٔ تابع قرار دهیم و در هر کدام که y برابر x شد جواب است: $y=\frac{x+4}{x-2}$

$$x=1 \Rightarrow y=\frac{1+4}{1-2}=-5 \times$$
$$x=-1 \Rightarrow y=\frac{-1+4}{-1-2}=-1 \checkmark$$
$$x=4 \Rightarrow y=\frac{4+4}{4-2}=4 \checkmark$$
$$x=-4 \Rightarrow y=\frac{-4+4}{-4-2}=0 \times$$

پس جواب می‌شود $x=-1$ و $x=4$.

راه II تابع $y=\frac{x+4}{x-2}$ را با نیمساز ناحیهٔ اول و سوم تلاقی می‌دهیم:

$$\begin{cases} y=\frac{x+4}{x-2} \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \frac{x+4}{x-2}=x \Rightarrow x+4=x^2-2x$$
$$\Rightarrow x^2-3x-4=0 \xrightarrow{a+c=b} x=-1, x=4$$

۴۵۳. گزینه ۲ راه I برد $\sqrt{x+3}$ شامل اعداد بیشتر یا مساوی صفر است (پس دامنهٔ f^{-1} باید $x\ge 0$ باشد) به ازای $x=1$ داریم $y=2$. پس در وارون آن نقطه $(2,1)$ صدق می‌کند و جواب می‌شود (۲).

راه II ضابطهٔ تابع وارون و دامنه‌اش را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1} \text{ ضابطهٔ}: y=\sqrt{x+3} \Rightarrow y^2=x+3$$
$$\Rightarrow x=y^2-3 \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x^2-3$$
$$f^{-1} \text{ دامنهٔ}: \sqrt{x+3}\ge 0 \Rightarrow y\ge 0$$
$$\Rightarrow f \text{ برد}: y\ge 0 \Rightarrow f^{-1} \text{ دامنهٔ}: x\ge 0$$

۴۵۴. گزینه ۱ عددگذاری در تابع f داریم: $f(5)=0$ پس در وارون آن $f^{-1}(0)=5$ که فقط به (۱) می‌خورد.

راه II با توجه به گزینه‌ها هم باید ضابطهٔ تابع وارون و هم دامنهٔ آن را پیدا کنیم. برای پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون داریم:

$$y=2-\sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1}=2-y$$
$$\xrightarrow{\text{توان } 2} x-1=(2-y)^2 \Rightarrow x=4-4y+y^2+1$$
$$\Rightarrow x=y^2-4y+5 \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x^2-4x+5$$

و برای پیداکردن دامنهٔ f^{-1} می‌گوییم دامنهٔ f^{-1} برابر برد f است و چون در f داریم $y=2-\sqrt{x-1}$، می‌نویسیم:

$$\sqrt{x-1}\ge 0 \Rightarrow -\sqrt{x-1}\le 0 \Rightarrow 2-\sqrt{x-1}\le 2 \Rightarrow f(x)\le 2$$

پس برد f برابر است با $y\le 2$ و در نتیجه دامنهٔ f^{-1} هم می‌شود $x\le 2$؛ یعنی تابع وارون برابر است با: $f^{-1}(x)=x^2-4x+5, x\le 2$

۴۵۵. گزینه ۱ عددگذاری f از $(2,1)$ می‌گذرد پس باید $(1,2)$ در وارونش هم صدق کند که فقط به (۱) می‌خورد.

راه I برای پیداکردن ضابطهٔ f^{-1} با شرط $x\ge 2$، x را برحسب y پیدا می‌کنیم و برای پیداکردن دامنهٔ f^{-1} برد خود تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-1} \text{ ضابطهٔ}: y=x^2-4x+5 \Rightarrow y-1=(x-2)^2$$
$$\xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y-1}=|x-2| \xrightarrow{x\ge 2} x-2=\sqrt{y-1}$$
$$\Rightarrow x=2+\sqrt{y-1} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=2+\sqrt{x-1}$$
$$f^{-1} \text{ دامنهٔ}: y=(x-2)^2+1 \Rightarrow y\ge 1$$
$$\Rightarrow f \text{ برد}: y\ge 1 \Rightarrow f^{-1} \text{ دامنهٔ}: x\ge 1$$

۴۵۶. گزینه ۱ ضابطهٔ تابع وارون f را با شرط $x\le 1$ پیدا می‌کنیم:

$$y=x^2-2x \xrightarrow{\text{تبدیل به مربع کامل}} y+1=x^2-2x+1$$
$$\Rightarrow y+1=(x-1)^2 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} \sqrt{y+1}=|x-1|$$
$$\xrightarrow{\text{چون } x\le 1} \sqrt{y+1}=-x+1 \Rightarrow x=-\sqrt{y+1}+1$$
$$\xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم}]{\text{جای x و y را}} y=-\sqrt{x+1}+1$$

پس $f^{-1}(x)=-\sqrt{x+1}+1$ است که با مقایسه‌اش با $y=a\sqrt{x+b}+c$ داریم $a=-1$ و $b=1$ و $c=1$ پس $a+b-c^2$ برابر است با:

$$-1+1-(1)^2=-1$$

۴۵۷. گزینه ۳ عددگذاری در خود تابع نقطهٔ $(1,9)$ را داریم پس در گزینهٔ درست باید $(9,1)$ بخورد.

راه I x را بر حسب y پیدا می‌کنیم و جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=x^3+3x^2+3x+2 \Rightarrow y=x^3+3x^2+3x+1+1$$
$$\Rightarrow y=(x+1)^3+1 \Rightarrow (x+1)^3=y-1$$
$$\Rightarrow x+1=\sqrt[3]{y-1} \Rightarrow x=\sqrt[3]{y-1}-1$$
$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\sqrt[3]{x-1}-1$$

۴۵۸. گزینه ۲ عددگذاری در تابع فرض می‌کنیم $x=-\frac{1}{2}$:

$$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{16}-2\left(\frac{1}{4}\right)+1=\frac{9}{16}$$

پس در تابع وارون باید داشته باشیم $x=\frac{9}{16} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$ که فقط در (۲) صدق می‌کند.

راه I در تابع $y=x^4-2x^2+1$، x را بر حسب y، با توجه به $-1<x<0$ پیدا می‌کنیم: $y=(x^2-1)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y}=|x^2-1|$

$$\xrightarrow{-1<x<0} \sqrt{y}=-x^2+1 \Rightarrow x^2=1-\sqrt{y}$$
$$\xrightarrow{\text{جذر}} |x|=\sqrt{1-\sqrt{y}} \xrightarrow{-1<x<0} -x=\sqrt{1-\sqrt{y}}$$
$$\Rightarrow x=-\sqrt{1-\sqrt{y}} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=-\sqrt{1-\sqrt{x}}$$

پس تابع وارون $y=-\sqrt{1-\sqrt{x}}$ است.

۴۵۹. گزینه ۳ عددگذاری زوج‌های مرتب $(1,1)$ و $(-1,-1)$ در f هستند و عکس آن‌ها باید در f^{-1} باشد که فقط به (۳) می‌خورد.

راه I قرار شد برای محاسبهٔ تابع وارون، x را برحسب y پیدا کنیم و سپس جای x و y را عوض کنیم. در تابع‌های دوضابطه‌ای (یا چندضابطه‌ای) این کار را برای هر کدام از ضابطه‌ها انجام می‌دهیم:

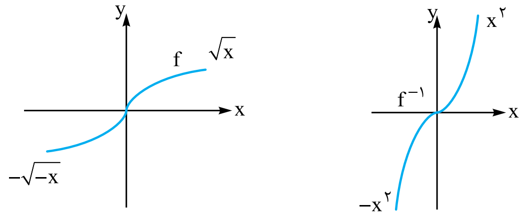
$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}\ ; x\ge 0 \Rightarrow y=\sqrt{x} \\ \Rightarrow x=y^2 \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x^2 \\ -\sqrt{-x}\ ; x<0 \Rightarrow y=-\sqrt{-x} \\ \Rightarrow y^2=-x \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=-x^2 \end{cases}$$

مشاوره و راهنمای انتخاب بهترین منابع کنکور : 021-28425210

telegram.me/medabook_com www.medabook.com

پس ضابطهٔ تابع وارون برابر است با $f^{-1}(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$ که می‌تواند به صورت $f(x)=x|x|$ نوشته شود.

نمودار تابع و وارونش را ببینید:



۴۶۰. گزینه ۱ | **عددگذاری** در تابع f به ازای $x=-2$ داریم $y=-2$. پس وارون آن باید در شرایط $f^{-1}(-2)=-2$ صدق کند که فقط به (۱) می‌خورد.

اشاره این تابع در $x<-2$ یک‌به‌یک نیست (تابع ثابت است.)

راه II از اول تابع را به یک تابع دوضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$f(x)=x+|x+2| \Rightarrow f(x)=\begin{cases}2x+2 & x\ge -2\\ -2 & x<-2\end{cases}$$

از بین دو ضابطهٔ تابع، ضابطهٔ $y=2x+2$ در بازهٔ $x\ge -2$ وارون‌پذیر است (چون ضابطهٔ دیگر $y=-2$ یک تابع ثابت است که یک‌به‌یک نیست). ضابطهٔ تابع وارون را در این بازهٔ پیدا می‌کنیم:

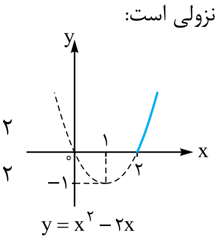
$$x\ge -2: y=2x+2 \Rightarrow x=\frac{y-2}{2} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x-2}{2}$$

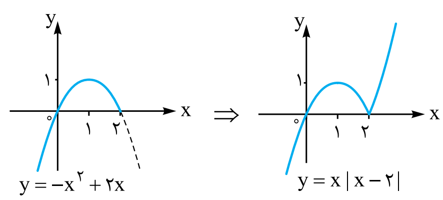
پس ضابطهٔ تابع وارون برابر است با: $y=\frac{x-2}{2}$ و $x\ge -2$

۴۶۱. گزینه ۳ | **عددگذاری** در تابع f نقطهٔ $(2,0)$ می‌خورد پس باید $(0,2)$ در وارونش صدق کند که فقط در (۳) این‌طور است!

راه II اول نمودار تابع $y=x|x-2|$ را رسم می‌کنیم تا ببینیم در کدام بازه نزولی است:

$$y=x|x-2|=\begin{cases}x^2-2x & x\ge 2\\ -x^2+2x & x<2\end{cases}$$





با توجه به شکل رسم‌شده تابع در بازهٔ $[1,2]$ نزولی است، ضابطهٔ تابع وارون را در این بازه پیدا می‌کنیم:

$$1\le x\le 2 \Rightarrow y=-x^2+2x \Rightarrow y-1=-(x-1)^2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2=1-y \xrightarrow{\text{جذر}} |x-1|=\sqrt{1-y}$$

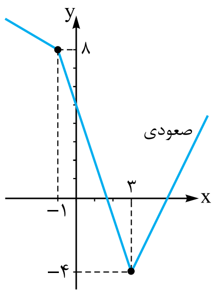
$$\xrightarrow{1<x<2} x-1=\sqrt{1-y} \Rightarrow x=\sqrt{1-y}+1$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\sqrt{1-x}+1$$

پس ضابطهٔ تابع وارون در این بازه برابر است با: $f^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x}, 0\le x\le 1$

البته در گزینه‌ها، بازه‌های جواب به صورت باز آمده‌اند.

۴۶۲. گزینه ۳ | **راه I** نمودار f را می‌کشیم، ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها $x=3$ و $x=-1$ هستند، نقاط شکستگی $A(3,-4)$ و $B(-1,8)$ هستند و شیب نمودار برای xهای بزرگ $2-1=1$ و برای xهای خیلی منفی $-2-(-1)=-1$ است. ببینید:



تابع با دامنهٔ $[3,+\infty)$ و برد $[-4,+\infty)$ صعودی است. پس دامنهٔ وارونش $x\ge -4$ است و وارون آن از نقطهٔ $(-4,3)$ می‌گذرد.

راه II ضابطهٔ تابع $f(x)=|2x-6|-|x+1|$ را ساده می‌کنیم تا ببینیم در کدام بازه صعودی است.

نزولی $\quad x<-1 \Rightarrow y=-2x+6+x+1 \Rightarrow y=-x+7$

نزولی $\quad -1\le x<3 \Rightarrow y=-2x+6-x-1 \Rightarrow y=-3x+5$

صعودی $\quad 3\le x \Rightarrow y=2x-6-x-1 \Rightarrow y=x-7$

پس باید ضابطهٔ تابع وارون را برای $x\ge 3$ و $y=x-7$ پیدا کنیم:

$$y=x-7 \Rightarrow \begin{cases}\text{ضابطهٔ وارون}: y=x-7 \Rightarrow x=y+7\\ \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x+7\\ \text{دامنهٔ وارون}: x\ge 3 \Rightarrow x-7\ge -4\\ \Rightarrow y\ge -4 \xrightarrow[\text{وارون}]{\text{در تابع}} x\ge -4\end{cases}$$

پس ضابطهٔ تابع وارون برابر است با: $f^{-1}(x)=x+7$ و $x\ge -4$

در گزینه‌ها حالت تساوی را نداریم، پس $x>4$ را در نظر می‌گیریم.

۴۶۳. گزینه ۲ | **عددگذاری** در خود تابع نقطهٔ $(-1,-4)$ را داریم، پس در وارونش باید $(-4,-1)$ را داشته باشیم که فقط در (۲) صدق می‌کند.

راه II اول ضابطهٔ تابع را به ازای xهای مثبت و منفی به دست می‌آوریم:

$$y=3x-|x|$$

$$x\ge 0 \Rightarrow y=3x-x \Rightarrow y=2x \Rightarrow x=\frac{y}{2}$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x}{2}$$

$$x<0 \Rightarrow y=3x+x \Rightarrow y=4x \Rightarrow x=\frac{y}{4}$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x}{4}$$

پس تابع وارون برابر است با:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & x\ge 0\\ \frac{x}{4} & x<0\end{cases}$$

حالا اگر گزینه‌ها را به ازای $x\ge 0$ و $x<0$ ساده کنیم (۲) برابر f^{-1} است:

$$y=\frac{3x+|x|}{8}=\begin{cases}\frac{x}{2} & x\ge 0\\ \frac{x}{4} & x<0\end{cases}$$

۴۶۴. گزینه ۴ | **عددگذاری** تابع از نقاط $(0,0)$ و $(2,4)$ عبور می‌کند پس $(0,0)$ و $(4,2)$ باید در وارونش صدق کنند که فقط به (۴) می‌خورد.

راه II ضابطهٔ تابع را به ازای $x>0$ و $x<0$ جدا می‌کنیم و در هر حالت ضابطهٔ تابع وارون (به همراه دامنهٔ تابع وارون) را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

مشاوره و راهنمای انتخاب بهترین منابع کنکور : 021-28425210

telegram.me/medabook_com www.medabook.com

$x>۰ \Rightarrow y=\sqrt{x} \Rightarrow y^۲=x \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x^۲ , x>۰$

$x<۰ \Rightarrow y=-\sqrt{-x} \Rightarrow y^۲=-x$

$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=-x^۲ , x<۰$

پس تابع وارون برابر است با $f^{-1}(x)=\begin{cases} x^۲ & x\ge ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$ و از بین گزینه‌ها (۴) برابر f^{-1} است.

۴۶۵. گزینهٔ ۱ | **عددگذاری** نقطهٔ (۰,۰) روی منحنی تابع $y=\frac{x}{۱+|x|}$ قرار دارد پس (۰,۰) باید در f^{-1} هم صدق کند که با بررسی گزینه‌ها جواب (۱) می‌شود.

راه II ضابطهٔ تابع را به ازای xهای مثبت و منفی جدا می‌کنیم و در هر کدام، تابع وارون را پیدا می‌کنیم:

$y=\frac{x}{۱+|x|} \Rightarrow$

الف) $x\ge ۰ \Rightarrow y=\frac{x}{۱+x} \Rightarrow y+yx=x \Rightarrow x(۱-y)=y$

$\Rightarrow x=\frac{y}{۱-y} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x}{۱-x}$

ب) $x<۰ \Rightarrow y=\frac{x}{۱-x} \Rightarrow y-yx=x \Rightarrow x(۱+y)=y$

$\Rightarrow x=\frac{y}{۱+y} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x}{۱+x}$

از طرفی با توجه به محدودهٔ x در خود تابع در مورد تابع وارون داریم:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{۱-x} & ۰\le x<۱\\ \frac{x}{۱+x} & -۱<x<۰\end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{۱-|x|}, |x|<۱$$

۴۶۶. گزینهٔ ۱ | **عددگذاری** در $f(x)=۲^x-۱$ به ازای $x=۱$ داریم $y=۱$ و در گزینه‌ها نقطهٔ (۱,۱) فقط در گزینه‌های (۱) و (۳) صدق می‌کند. به ازای $x=۳$ داریم $y=۷$، پس باید (۷,۳) در تابع معکوس صدق کند و (۱) صحیح است.

راه II x را بر حسب y پیدا می‌کنیم: $y=۲^x-۱ \Rightarrow ۲^x=y+۱$

$\xrightarrow{a=\log_c b \Leftrightarrow b=a^c} x=\log_۲(y+۱)$

$\xrightarrow[\text{را عوض می‌کنیم}]{\text{جای x و y}} y=\log_۲(x+۱)$

۴۶۷. گزینهٔ ۲ | **راه I** برای $f(x)=\log_{۱۰}(x-۱)-۳$، داریم: پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$y=\log_{۱۰}(x-۱)-۳ \Rightarrow y+۳=\log_{۱۰}(x-۱)$

$\Rightarrow x-۱=۱۰^{y+۳} \Rightarrow x=۱۰^{y+۳}+۱$

$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=۱۰^{x+۳}+۱ \Rightarrow f^{-1}(x)=۱۰^{x+۳}+۱$

عددگذاری روی نمودار $f(x)=\log_{۱۰}(x-۱)-۳$ اگر $x=۲$ باشد:

$y=\log_{۱۰}۱-۳=۰-۳=-۳ \Rightarrow (۲,-۳)\in f$

پس نقطهٔ $(-۳,۲)$ باید روی نمودار f^{-1} قرار داشته باشد که فقط در (۲) یعنی $f^{-1}(x)=۱۰^{x+۳}+۱$ صدق می‌کند.

۴۶۸. گزینهٔ ۴ | **راه I** $f^{-1}(۲)$ یعنی در تابع وارون x برابر ۲ است، پس در خود تابع باید $y=۲$ باشد:

$$y=\frac{۲^x+(\frac{۱}{۲})^x}{۲} \Rightarrow \frac{۲^x+(\frac{۱}{۲})^x}{۲}=۲$$

$\Rightarrow ۲^x+\frac{۱}{۲^x}=۴ \Rightarrow \frac{۲^{۲x}+۱}{۲^x}=۴ \Rightarrow ۲^{۲x}+۱=۴\times ۲^x$

$\Rightarrow ۲^{۲x}-۴\times ۲^x+۱=۰$

حالا باید معادلهٔ نهایی به دست آمده را حل کنیم. اگر فرض کنیم $۲^x=t$ داریم:

$(۲^x)^۲-۴(۲^x)+۱=۰ \Rightarrow t^۲-۴t+۱=۰$

$\xrightarrow{\text{روش }\Delta} t=\frac{۴\pm\sqrt{۱۶-۴(۱)(۱)}}{۲(۱)} \Rightarrow t=\frac{۴\pm\sqrt{۱۲}}{۲}$

$=\frac{۴\pm ۲\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲(۲\pm\sqrt{۳})}{۲}=۲\pm\sqrt{۳}$

حالا چون باید $x>۰$ باشد، پس ۲^x باید بزرگ‌تر از ۱ شود؛ یعنی $۲^x=۲+\sqrt{۳}$، پس در نتیجه: $x=\log_۲ ۲+\sqrt{۳}$

راه II چون $x>۰$ است، پس گزینه‌های (۱) و (۲) حذف می‌شوند (چون $۲-\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۳}-۱$ هر دو بین صفر و یک‌اند و لگاریتمشان منفی است.)

بنابراین می‌ماند (۳) و (۴) که در معادله امتحانشان می‌کنیم:

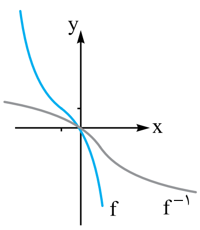
(۳) $x=\log_۲(\sqrt{۳}+۱) \Rightarrow \frac{۲^{\log_۲(\sqrt{۳}+۱)}+\frac{۱}{۲^{\log_۲(\sqrt{۳}+۱)}}}{۲}=۲$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}+۱+\frac{۱}{\sqrt{۳}+۱}}{۲}=۲ \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}+۱+\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}}{۲}=۲$

$\Rightarrow ۳\sqrt{۳}+۱=۸$ ×

پس (۳) هم نادرست است و جواب می‌شود (۴) یعنی $x=\log_۲(۲+\sqrt{۳})$.

۴۶۹. گزینهٔ ۳



نمودار تابع $y=-(x+۱)^۳+۱$ و نمودار تابع معکوسش را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم: همان‌طور که می‌بینیم منحنی تابع و وارونش یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

۴۷۰. گزینهٔ ۲ | **راه I** تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}$ صعودی اکید است، پس تابع وارونش را باید روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قطع کند؛ یعنی در نقطهٔ (a,a)، پس می‌توانیم گزینه‌ها را امتحان کنیم: (هر عددی به x بدهیم y هم باید همان شود.)

(۱) $x=-۱ \Rightarrow y=\sqrt{-۱+۲}=۱$ ×

(۲) $x=۲ \Rightarrow y=\sqrt{۲+۲}=۲$ ✓

پس جواب (۲) است.

راه II چون سؤال گفته نقطهٔ تلاقی تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}$ با نمودار معکوس آن و f اکیداً صعودی است، پس این نقطه روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرار دارد پس تابع را با نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قطع می‌دهیم:

$\begin{cases}y=\sqrt{x+۲}\\ y=x\end{cases} \Rightarrow x=\sqrt{x+۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲=x+۲$

$\Rightarrow x^۲-x-۲=۰$

$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases}x=-۱ \xrightarrow{\text{چون } x\ge ۰} \text{غ‌ق‌ق}\\ x=۲ \ \text{ق‌ق}\end{cases}$

۴۷۱. گزینهٔ ۱ | چون نمودار تابع f و نمودار وارونش یعنی f^{-1} در نقطهٔ (۱,۲) یکدیگر را قطع می‌کنند پس نقطهٔ (۱,۲) در ضابطهٔ هر دو صدق می‌کند، یعنی $f(۱)=۲$ و $f^{-1}(۱)=۲$ و در نتیجه $f^{-1}(۲)=۱$ و $f(۲)=۱$.

مشاوره و راهنمای انتخاب بهترین منابع کنکور : 021-28425210

telegram.me/medabook_com www.medabook.com

۴۷۲. گزینهٔ ۱ نمودار تابع f و تابع وارونش یعنی f^{-1} در نقطهٔ $(۱,۲)$ متقاطع‌اند، پس $(۱,۲)$ هم روی نمودار f است و هم روی نمودار f^{-1}. در نتیجه نقطهٔ $(۲,۱)$ هم روی نمودار f است و هم روی نمودار f^{-1}، بنابراین:

$$f(x)=\sqrt{ax+b}$$

$$\begin{cases}(۱,۲)\Rightarrow ۲=\sqrt{a+b}\Rightarrow \\ (۲,۱)\Rightarrow ۱=\sqrt{۲a+b}\Rightarrow\end{cases}\begin{cases}a+b=۴\\ ۲a+b=۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} -a=۳\Rightarrow a=-۳\Rightarrow b=۷$$

بنابراین: $a-b=-۱۰$.

۴۷۳. گزینهٔ ۳ می‌دانیم تابع‌های چندجمله‌ای درجهٔ زوج (با دامنهٔ $\mathbb{R}$) هرگز یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیستند. بنابراین برای این‌که تابع $f(x)=(a+۱)x^۴+(a+۲)x^۳+(a+۴)x^۲+۳x$ وارون‌پذیر باشد، باید جملهٔ $x^۴$ حذف شود یعنی $a=-۱$.

پس ضابطهٔ تابع f برابر است با $f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x$، حالا باید تعداد نقاط برخورد منحنی تابع f را با خط $y=x$ حساب کنیم:

$$\begin{cases}y=x^۳+۳x^۲+۳x\\y=x\end{cases}\Rightarrow x^۳+۳x^۲+۳x=x$$

$$\Rightarrow x(x^۲+۳x+۲)=۰\Rightarrow x(x+۱)(x+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=-۱\\x=-۲\end{cases}$$

پس منحنی تابع، خط $y=x$ را در سه نقطه قطع می‌کند.

۴۷۴. گزینهٔ ۳ می‌دانیم نمودار تابع f^{-1} و f نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند، پس اگر نمودار f^{-1} خط $y=x-۲$ را در نقطهٔ (α,β) قطع کند، نمودار f خط قرینهٔ خط $y=x-۲$ نسبت به نیمساز را، در نقطهٔ (β,α) قطع می‌کند. پس قرینهٔ خط $y=x-۲$ را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم پیدا می‌کنیم و با f قطع می‌دهیم:

$$y=x-۲\xrightarrow[\text{را عوض می‌کنیم}]{\text{جای x و y}}x=y-۲\Rightarrow y=x+۲$$

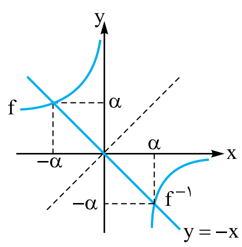
حالا خط $y=x+۲$ را با تابع $f(x)=x^۳+x+۱$ قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases}y=x^۳+x+۱\\y=x+۲\end{cases}\Rightarrow x^۳+x+۱=x+۲\Rightarrow x^۳=۱$$

$$\Rightarrow x=۱\xrightarrow{\text{روی } y=x+۲ \text{ است}} y=۳$$

پس نقطهٔ (β,α) همان $(۱,۳)$ است؛ یعنی $\beta=۱$ و $\alpha=۳$ و در نتیجه $\alpha+\beta=۴$.

۴۷۵. گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیهٔ چهارم را در نقطهٔ $(\alpha,-\alpha)$ قطع کند، نمودار خود تابع، نیمساز ناحیهٔ دوم را در نقطهٔ $(-\alpha,\alpha)$ قطع می‌کند (به شکل فرضی که کشیده‌ایم، نگاه کنید!).



پس نمودار تابع $f(x)=x-\frac{۲}{x}$ را با نیمساز ناحیهٔ دوم یعنی $y=-x$ قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases}y=x-\frac{۲}{x}\\y=-x\end{cases}\Rightarrow x-\frac{۲}{x}=-x\Rightarrow\frac{x^۲-۲}{x}=-x$$

$$\Rightarrow x^۲-۲=-x^۲\Rightarrow ۲x^۲=۲\Rightarrow x^۲=۱$$

$$\xrightarrow{\text{ناحیهٔ دوم}}\begin{cases}x=۱ & \text{غ‌قق}\\x=-۱&\text{قق}\end{cases}$$

پس $-\alpha=-۱$ و در نتیجه $\alpha=۱$.

۴۷۶. گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع f^{-1} خط $g(x)=\frac{x-۹}{۲}$ در نقطه‌ای به طول α قطع کند، نمودار خود تابع f خط قرینهٔ خط $y=\frac{x-۹}{۲}$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را در نقطه‌ای به عرض α قطع می‌کند، پس اول قرینهٔ خط $y=\frac{x-۹}{۲}$ را پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{x-۹}{۲}\xrightarrow[\text{را عوض می‌کنیم}]{\text{جای x و y}}x=\frac{y-۹}{۲}\Rightarrow y-۹=۲x$$

$$\Rightarrow y=۲x+۹$$

حالا خط $y=۲x+۹$ را با نمودار تابع $f(x)=x^۲-۲x-۳$ قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases}y=x^۲-۲x-۳\\y=۲x+۹\end{cases}\Rightarrow x^۲-۲x-۳=۲x+۹$$

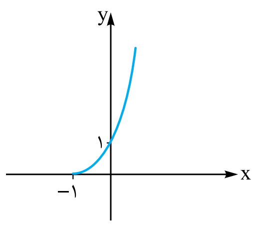
$$\Rightarrow x^۲-۴x-۱۲=۰\Rightarrow(x+۲)(x-۶)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-۲ & \text{غ‌قق}\\x=۶&\text{قق}\end{cases}(\text{چون } x\ge ۱ \text{ است})$$

حالا مقدار عرض نقطه را به ازای $x=۶$ پیدا می‌کنیم:

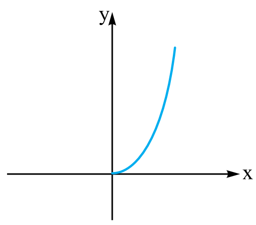
$$x=۶\Rightarrow y=۲(۶)+۹=۲۱\Rightarrow \alpha=۲۱$$

۴۷۷. گزینهٔ ۴ داریم $f(x)=(x+۱)^۲$ پس $f(x-۱)=x^۲$ و از طرف دیگر برای رسم $f^{-1}(-x)$ اول نمودار $f(x)$ و سپس نمودار تابع $f^{-1}(x)$ یعنی قرینهٔ نمودار نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را رسم می‌کنیم و بعد نمودار $f^{-1}(-x)$ یعنی قرینهٔ نمودار تابع $f^{-1}(x)$ را نسبت به محور yها می‌کشیم: (در تمام این‌ها حواسمان هست که دامنهٔ تابع $x>-۱$ است.)

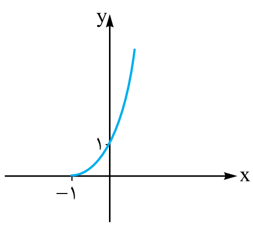


$y=f(x)$

$\Rightarrow$

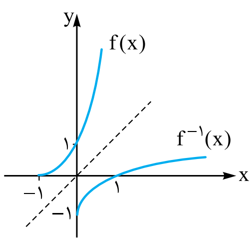


$y=f(x-۱)$

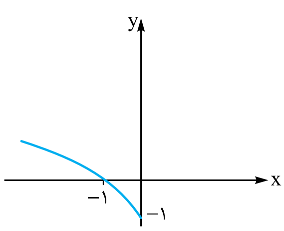


$y=f(x)$

$\Rightarrow$



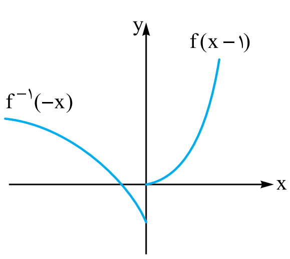
$y=f^{-1}(x)$



$y=f^{-1}(-x)$

حالا نمودار $f(x-۱)$ و $f^{-1}(-x)$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:

دو نمودار یکدیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند.



مشاوره و راهنمای انتخاب بهترین منابع کنکور : 021-28425210

telegram.me/medabook_com www.medabook.com

۴۷۸. گزینهٔ ۱ گفتیم $(fof^{-1})(x)=x$، پس تابع fof^{-1} از زوج مرتب‌هایی تشکیل شده است که x و y‌شان برابر است و فقط باید دامنهٔ fof^{-1} را پیدا کنیم: $D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}=R_f$

و چون $f=\{(۱,۲),(۲,۳)\}$، پس $R_f=\{۲,۳\}$ و در نتیجه:

$fof^{-1}=\{(۲,۲),(۳,۳)\}$

۴۷۹. گزینهٔ ۲ چون $(fog)(x)=x$، پس $g=f^{-1}$ و در نتیجه:

$f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$

$\Rightarrow f^{-1}=g=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$

نکته البته g می‌تواند زوج‌های مرتب دیگری به شکل (a,b) داشته باشد. فقط a نباید ۱ و ۲ و ۳ باشد. به همین دلیل این جواب، تنها انتخاب g نیست، مثلاً $g=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳),(۷,۸)\}$ هم قابل قبول است.

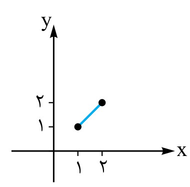
۴۸۰. گزینهٔ ۳ با توجه به ماشین $x\to\boxed{f}\to\boxed{g}\to x$ داریم $(gof)(x)=x$ پس $g=f^{-1}$، بنابراین:

$f(x)=۲x-۱\Rightarrow g(x)=\frac{x+۱}{۲}$

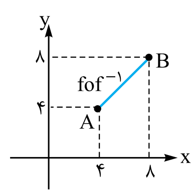
$g(۰)=f^{-1}(۰)\Rightarrow ۰=۲x-۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$

۴۸۱. گزینهٔ ۴ می‌دانیم همواره $(fof^{-1})(x)=x$ است و برای رسم نمودار تابع $(fof^{-1})(x)$ فقط باید دامنهٔ fof^{-1} را پیدا کنیم. طبق آن‌چه در درس‌نامه گفتیم: $D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}=R_f$

پس $(fof^{-1})(x)=x$ یعنی همان خط $y=x$ که دامنه‌اش برابر برد f یعنی بازهٔ $[۱,۲]$ است که نمودارش می‌شود:



۴۸۲. گزینهٔ ۱ گفتیم $fof^{-1}(x)$ همان $y=x$ است فقط دامنهٔ آن، برد f است. در این‌جا f اکیداً صعودی است پس برد آن با دامنهٔ $[-۱,۱]$ به صورت $[f(-۱),f(۱)]$ یعنی $[۴,۸]$ خواهد بود.



طول پاره‌خط نمودار $=\sqrt{(۴-۸)^۲+(۴-۸)^۲}=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}$

۴۸۳. گزینهٔ ۲ می‌دانیم: $(f^{-1}of)(x)=x$

پس دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۱+(f^{-1}of)(x)}$ برابر است با دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۱+x}$ به شرط آن‌که $f^{-1}of$ تعریف‌شده باشد. یعنی $x\in D_{f^{-1}of}$ و چون $D_{f^{-1}of}=D_f$، پس دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۱+(f^{-1}of)(x)}$ برابر می‌شود با:

دامنه $=\{۱+x\ge ۰ \mid x\in D_f\}$

از طرف دیگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۱-x}$ برابر است با $x\le ۱$، پس:

دامنه $=\{x\ge -۱ \mid x\le ۱\}=[-۱,۱]$

۴۸۴. گزینهٔ ۱ می‌دانیم: $(fog^{-1})(۴)=f(g^{-1}(۴))$

پس اول باید حاصل $g^{-1}(۴)$ را پیدا کنیم:

$g(x)=\frac{۵x+۲}{۲x-۱}\Rightarrow ۴=\frac{۵x+۲}{۲x-۱}\Rightarrow ۸x-۴=۵x+۲$

$\Rightarrow ۳x=۶\Rightarrow x=۲\Rightarrow g^{-1}(۴)=۲$

$f(x)=x^۲+x\Rightarrow f(g^{-1}(۴))=f(۲)=۴+۲=۶$

۴۸۵. گزینهٔ ۱ اول با توجه به این‌که $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$، ضابطهٔ f^{-1} و gof^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$f^{-1}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۴,۳),(۶,۴)\}$

$g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ $\Rightarrow gof^{-1}=\{(۵,۳),(۴,۱),(۶,۲)\}$

حالا g و gof^{-1} را در نظر می‌گیریم و $\frac{g}{gof^{-1}}$ را پیدا می‌کنیم:

$g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$

$gof^{-1}=\{(۵,۳),(۴,۱),(۶,۲)\}$

$\Rightarrow gof^{-1}=\{(۴,\frac{۲}{۱}),(۵,\frac{۶}{۳})\}=\{(۴,۲),(۵,۲)\}$

۴۸۶. گزینهٔ ۴ در درس‌نامه داشتیم: $g^{-1}of^{-1}=(fog)^{-1}$

پس بهتر است اول fog و بعد وارونش را پیدا کنیم:

$f=\{(۰,-۱),(۲,\frac{۱}{۲}),(-۳,\sqrt{۲}),(۱,۵)\}$

$g=\{(-۱,-۳),(۵,۲),(\frac{۱}{۲},۰),(۴,۶)\}$

$fog=\{(-۱,\sqrt{۲}),(۵,\frac{۱}{۲}),(\frac{۱}{۲},-۱)\}$

$\Rightarrow (fog)^{-1}=\{(\sqrt{۲},-۱),(\frac{۱}{۲},۵),(-۱,\frac{۱}{۲})\}$

پس جواب می‌شود ۴.

۴۸۷. گزینهٔ ۴

می‌دانیم $(g^{-1}of^{-1})=(fog)^{-1}$ پس $(g^{-1}of^{-1})(۸)=(fog)^{-1}(۸)$.

حالا اگر فرض کنیم $(fog)^{-1}(۸)=a$ داریم $(fog)(a)=۸$، پس:

$(fog)(a)=۸\Rightarrow f(g(a))=۸$

$\xrightarrow{f(x)=\frac{۲}{۵}x-۴}\frac{۲}{۵}g(a)-۴=۸\Rightarrow \frac{۲}{۵}g(a)=۱۲$

$\Rightarrow g(a)=\frac{۱۲\times ۵}{۲}=۳۰\xrightarrow{g(x)=x^۳+x}a^۳+a=۳۰$

$\xrightarrow{\text{عددگذاری}} a=۳$

۴۸۸. گزینهٔ ۲ چون داریم: $(g^{-1}of^{-1})(a)=۸$

پس $(fog)^{-1}(a)=۸$ و در نتیجه $(fog)(۸)=a$، بنابراین برای پیداکردن مقدار a باید $(fog)(۸)$ را پیدا کنیم:

$f=\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$

$g(x)=\sqrt{۵x+۹}$

$a=(fog)(۸)=f(g(۸))=f(\sqrt{۴۰+۹})=f(۷)=۳$

۴۸۹. گزینهٔ ۳ می‌دانیم: $(fog^{-1})^{-1}=gof^{-1}$

پس برای پیداکردن مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(fog^{-1})^{-1}(x)=۰$ باید اول معادلهٔ $(gof^{-1})(x)=۰$ را تشکیل دهیم:

$f(x)=x+۲\Rightarrow y=x+۲\Rightarrow x=y-۲$

$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x-۲\Rightarrow f^{-1}(x)=x-۲$

$g(x)=۲x^۲-۸x+۱$

معادلهٔ $(gof^{-1})(x)=۰$ را تشکیل می‌دهیم: $۲(x-۲)^۲-۸(x-۲)+۱=۰$

$\Rightarrow ۲x^۲-۸x+۸-۸x+۱۶+۱=۰\Rightarrow ۲x^۲-۱۶x+۲۵=۰$

و چون مجموع ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دو برابر $-\frac{b}{a}$ است، پس مجموع ریشه‌های معادلهٔ بالا برابر است با $S=-\frac{-۱۶}{۲}=۸$.

دقت کنید که $\Delta=(-۱۶)^۲-۸(۲۵)>۰$ و دو ریشهٔ حقیقی وجود دارند.

مشاوره و راهنمای انتخاب بهترین منابع کنکور : 021-28425210

telegram.me/medabook_com www.medabook.com

۴۹۰. گزینه ۴ می‌دانیم $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$، پس اگر اول $(g^{-1}of^{-1})(x)$ را پیدا کنیم (که همان $(fog)^{-1}$ است) و بعد وارونش را پیدا کنیم، ضابطهٔ fog را حساب کرده‌ایم، بنابراین:

$$f^{-1}(x)=1+\sqrt{x}$$
$$g^{-1}(x)=x^2 \Rightarrow (g^{-1}of^{-1})(x)=(1+\sqrt{x})^2$$

پس داریم:
$$(fog)^{-1}(x)=(1+\sqrt{x})^2$$

حالا fog را پیدا می‌کنیم:
$$y=(1+\sqrt{x})^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y}=1+\sqrt{x}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y}-1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x=1-2\sqrt{y}+y$$
$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=1-2\sqrt{x}+x$$

پس ضابطهٔ fog برابر است با:
$$(fog)(x)=x+1-2\sqrt{x}$$

۴۹۱. گزینه ۳ داریم:
$$f=\{(2,3),(-1,2),(-4,1),(3,0)\}$$
$$g=\{(0,2),(2,-4),(3,2),(-4,-2)\}$$

حالا مقدار $(fogof^{-1})(3)$ را به ترتیب پیدا می‌کنیم:
$$f^{-1}(3)=2 \Rightarrow g(f^{-1}(3))=g(2)=-4$$
$$\Rightarrow f(g(f^{-1}(3)))=f(-4)=1$$

۴۹۲. گزینه ۴ راه I این تابع از ترکیب $f(x)$ و $g(x)=3x-1$ به صورت fog ساخته شده است. پس وارونش می‌شود:
$$(fog)^{-1}(x)=g^{-1}of^{-1}(x)$$

وارون $g(x)$ را بلدیم:
$$g^{-1}(x)=\frac{x+1}{3}$$

پس:
$$g^{-1}(f^{-1}(x))=\frac{f^{-1}(x)+1}{3}$$

راه II می‌نویسیم $y=f(3x-1)$. حالا جای x و y را عوض می‌کنیم:
$$x=f(3y-1)$$

برای تنهاکردن y، از دو طرف f^{-1} می‌گیریم:
$$f^{-1}(x)=\underbrace{f^{-1}(f}_{\text{همدیگر را از بین می‌برند}}(3y-1))=3y-1 \Rightarrow y=\frac{f^{-1}(x)+1}{3}$$

۴۹۳. گزینه ۴ داریم $g(x)=f(2x+1)+1$، $f^{-1}(5)=3$ و $g^{-1}(a)=1$. از $g^{-1}(a)=1$ نتیجه می‌گیریم $g(1)=a$، پس:
$$g(x)=f(2x+1)+1 \Rightarrow g(1)=a \Rightarrow f(3)+1=a$$

از طرفی دیگر چون $f^{-1}(5)=3$، پس $f(3)=5$، بنابراین:
$$f(3)+1=a \Rightarrow 5+1=a \Rightarrow a=6$$

۴۹۴. گزینه ۱ می‌دانیم $(fof^{-1})(x)=x$، پس در تابع $f(x)=x+[x]$ به ازای xهای عضو برد f، داریم:
$$(fof^{-1})(4/5)=4/5$$

نکته در این تابع $f(2/5)$ می‌شود $4/5$؛ پس عدد $4/5$ در برد f (و دامنهٔ f^{-1}) بود. اما مثلاً اگر همین سؤال $fof^{-1}(5/5)$ را بخواهد جواب ۴ است یعنی موجود نیست. چون عدد $5/5$ در برد تابع $y=x+[x]$ قرار ندارد. راستش را بخواهید برد تابع $y=x+[x]$ از بازه‌های $[2k,2k+1)$ ساخته شده است $(k\in\mathbb{Z})$.

۴۹۵. گزینه ۴ راه I در تابع f داریم:
$$f(1)=1+\sqrt{2}$$

پس در g باید $g(1+\sqrt{2})=1$ باشد:
$$g(1+\sqrt{2})=k(1+\sqrt{2}-\frac{1}{1+\sqrt{2}})$$
$$=k(1+\sqrt{2}-\underbrace{\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}_{\text{مخرج را گویا می‌کنیم}})=k(1+\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1))=2k$$
$$\Rightarrow 2k=1 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

راه II گفتیم باید $fog(x)=x$ و $gof(x)=x$ باشند، پس داریم:
$$gof(x)=g(f(x))$$
$$\xrightarrow[\text{باید } f(x) \text{ قرار دهیم.}]{\text{به‌جای } x \text{ در } g} k(x+\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}})$$
$$=k\frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=k\frac{x^2+x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=k\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}=k\frac{2x(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}=k(2x)=x$$
$$\Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

۴۹۶. گزینه ۴ تابع $f(x)=\frac{x-3}{2}+2\sqrt{x}$ یک تابع اکیداً صعودی است چون تابع‌های $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ و $y=2\sqrt{x}$ هر دو اکیداً صعودی‌اند، پس نقطهٔ برخورد تابع f و تابع وارونش روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم متقاطع‌اند:
$$\begin{cases} y=\frac{x-3}{2}+2\sqrt{x} \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \frac{x-3}{2}+2\sqrt{x}=x$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{x}=x-\frac{x-3}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x}=\frac{x+3}{2}$$
$$\Rightarrow 4\sqrt{x}=x+3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 16x=x^2+6x+9$$
$$\Rightarrow x^2-10x+9=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\frac{c}{a}=9 \end{cases}$$

پس دو نمودار در نقاط $A(1,1)$ و $B(9,9)$ متقاطع‌اند که فاصلهٔ آن‌ها می‌شود:
$$AB=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$$

۴۹۷. گزینه ۴ راه I ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=x+4\sqrt{x}+8$ را پیدا می‌کنیم:
$$y=x+4\sqrt{x}+8 \Rightarrow y=(\sqrt{x}+2)^2+4$$
$$\Rightarrow y-4=(\sqrt{x}+2)^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{x}+2=\sqrt{y-4} \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y-4}-2$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x=y-4-4\sqrt{y-4}+4$$
$$\Rightarrow x=y-4\sqrt{y-4} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x-4\sqrt{x-4}$$

حالا با مقایسهٔ $f^{-1}(x)=x-4\sqrt{x-4}$ و $f^{-1}(x)=x-a\sqrt{x-b}$ نتیجه می‌گیریم $a=4$ و $b=4$. از طرفی دیگر در شرط $x\geq c$ (یعنی دامنهٔ f^{-1}) برای پیداکردن مقدار c باید برد f را پیدا کنیم: $f(x)=(\sqrt{x}+2)^2+4$

داریم:
$$x\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2\geq 2 \Rightarrow (\sqrt{x}+2)^2\geq 4$$
$$\Rightarrow (\sqrt{x}+2)^2+4\geq 8 \Rightarrow \text{برد } f: y\geq 8$$

بنابراین باید $c=8$ باشد و در نتیجه:
$$a+b+c=4+4+8=16$$

راه II دو تابع را ترکیب کنیم و مساوی x بگذاریم:

مشاوره و راهنمای انتخاب بهترین منابع کنکور : 021-28425210

telegram.me/medabook_com www.medabook.com

$$f^{-1}(x)=x-a\sqrt{x-b}$$
$$f(x)=(\sqrt{x}+2)^2+4$$
ترکیب کنیم: $$(\sqrt{x}+2)^2+4-a\sqrt{(\sqrt{x}+2)^2+4-b}=x$$
$$\Rightarrow x+4\sqrt{x}+8-a\sqrt{x+4\sqrt{x}+8-b}=x$$
$$\Rightarrow 4\sqrt{x}+8=a\sqrt{x+4\sqrt{x}+8-b}$$
$$\xrightarrow[\div 4]{a=4} \sqrt{x}+2=\sqrt{x+4\sqrt{x}+8-b}$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+4\sqrt{x}+4=x+4\sqrt{x}+8-b \Rightarrow b=4$$
c شروع برد f است که چون f همواره صعودی است، داریم:
$$f(x)=x+4\sqrt{x}+8 \qquad D_f=[0,+\infty)$$
$$\xrightarrow{\text{صعودی } f} R_f=[f(0),f(+\infty)) \Rightarrow c=f(0)=8$$

۴۹۸. (گزینه ۱) (عددگذاری) در تابع $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ داریم $f(1)=\frac{1}{3}$ پس در تابع وارون باید $f(\frac{1}{3})=1$ باشد که فقط در (۱) یعنی $y=\log_2\frac{1+x}{1-x}$ صدق می‌کند.

(راه II) f از ترکیب دو تابع $g(x)=2^x$ و $h(x)=\frac{x-1}{x+1}$ ساخته شده که وارون آن‌ها $g^{-1}(x)=\log_2 x$ و $h^{-1}(x)=\frac{-x-1}{x-1}$ است. پس داریم:
$$f^{-1}=(hog)^{-1}=g^{-1}oh^{-1}=\log_2\frac{-x-1}{x-1}=\log_2\frac{1+x}{1-x}$$

(راه III) داریم $y=\frac{2^x-1}{2^x+1}$، x را برحسب y پیدا می‌کنیم:
$$y=\frac{2^x-1}{2^x+1}\Rightarrow y(2^x)+y=2^x-1\Rightarrow 2^x-y(2^x)=y+1$$
$$\Rightarrow 2^x(1-y)=y+1\Rightarrow 2^x=\frac{y+1}{1-y}$$
$$\xrightarrow{\text{طبق تعریف لگاریتم}} x=\log_2\frac{y+1}{1-y}$$
$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\log_2\frac{x+1}{1-x}$$
پس تابع وارون $y=\log_2\frac{x+1}{1-x}$ است.

۴۹۹. (گزینه ۳) (عددگذاری) در $f(x)=5^{\log_x 5}$ به ازای $x=25$ داریم $y=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ پس در تابع وارون باید به ازای $x=\sqrt{5}$ داشته باشیم $y=25$ که فقط در (۳) یعنی $y=5^{\log_x 5}$ صدق می‌کند.

(راه II) از رابطهٔ $y=5^{\log_x 5}$ مقدار x را برحسب y پیدا می‌کنیم. برای این کار از طرفین (در مبنای ۵) لگاریتم می‌گیریم:
$$y=5^{\log_x 5}\Rightarrow \log_5 y=\log_5 5^{\log_x 5}$$
$$\Rightarrow \log_5 y=\log_x 5\log_5 5\Rightarrow \log_x 5=\log_5 y$$
$$\xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} x^{\log_5 y}=5$$
$$\Rightarrow (x^{\log_5 y})^{\log_y 5}=5^{\log_y 5}\Rightarrow x=5^{\log_y 5}$$
$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=5^{\log_x 5}$$

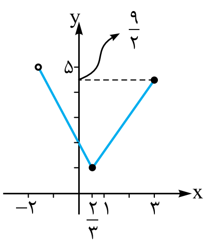
۵۰۰. (گزینه ۲) مثل سؤال قبل، داریم: $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$

و $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2x}$ و مقدار $g^{-1}(6)$ را می‌خواهیم:
$$\begin{cases} g^{-1}(6)=a \Rightarrow g(a)=6 \\ g(a)=f(a)+\sqrt{f(a)}\end{cases}\Rightarrow f(a)+\sqrt{f(a)}=6$$
تساوی $f(a)+\sqrt{f(a)}=6$ یک معادله است و اگر فرض کنیم $\sqrt{f(a)}=t$. داریم:
$$t^2+t-6=0\Rightarrow (t-2)(t+3)=0\Rightarrow \begin{cases}t=2\\t=-3\end{cases}$$
و چون $t=\sqrt{f(a)}$، پس فقط مقدار $t=2$ قابل قبول است؛ یعنی:
$$\sqrt{f(a)}=2\Rightarrow f(a)=4\Rightarrow a=f^{-1}(4)$$
$$\Rightarrow a=\sqrt[3]{2(4)}=\sqrt[3]{8}=2$$

۵۰۱. (گزینه ۴) (راه I) در رابطهٔ $g(x)=f(2x+5)$ کاری می‌کنیم که $f(-1)$ ساخته شود! چه کار؟ به جای x می‌گذاریم ۳-. پس:
$$\xrightarrow{x=-3} g(-3)=f(-1)$$
حالا در صورت سؤال به جای $f(-1)$ می‌گذاریم $g(-3)$ و داریم:
$$f^{-1}(g^{-1}(f(-1)))=f^{-1}(g^{-1}(g(-3)))$$
$$\xrightarrow{g^{-1}(g(x))=x} =f^{-1}(-3)$$
پس در ضابطهٔ f^{-1} باید ۳- قرار دهیم:
$$f^{-1}(-1)=\frac{(-3)^3}{9}+\sqrt[3]{(-3)\times 9}=-6$$

(راه II) از رابطهٔ $g(x)=f(2x+5)$ می‌توانیم بنویسیم:
$$g(x)=f(2x+5)\Rightarrow x=g^{-1}(f(2x+5))$$
حالا $f^{-1}(g^{-1}(f-1))$ را می‌خواهیم. پس در تساوی $x=g^{-1}(f(2x+5))$ به جای x باید عددی بگذاریم که $2x+5=-1$ شود، یعنی $x=-3$:
$$x=-3\Rightarrow -3=g^{-1}(f(-1))$$
حالا مقدار $f^{-1}(g^{-1}(f^{-1}))$ به راحتی به دست می‌آید:
$$f^{-1}(g^{-1}(f(-1)))=f^{-1}(-3)=\frac{(-3)^3}{9}+\sqrt[3]{9\times(-3)}$$
$$=-\frac{27}{9}-3=-6$$

۵۰۲. (گزینه ۱) (راه I) نمودار تابع را رسم می‌کنیم: (برای رسم از بازهٔ $(-2,3]$ استفاده می‌کنیم.)
$$f(x)=|\frac{3}{2}x-1|+1$$
$$(-2,5),(\frac{2}{3},1),(3,\frac{9}{2})$$



حالا با توجه به نمودار، برد تابع برابر است با $[1,5)$.

(راه II) به ازای $-2<x\le 3$ داریم: $-3<\frac{3}{2}x\le\frac{9}{2}$

پس $-4<\frac{3}{2}x-1\le\frac{7}{2}$ و قدر مطلق آن بین صفر و ۴ خواهد بود.

پس با اضافه‌کردن یک واحد داریم: $0+1\le|\frac{3}{2}x-1|+1<4+1$

یعنی برد تابع با این دامنه به صورت $[1,5)$ است.

۵۰۳. (گزینه ۲) نمودار تابع را رسم می‌کنیم:
$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & x\le 0\\ \sqrt{x+1} & x>0\end{cases}$$

مشاوره و راهنمای انتخاب بهترین منابع کنکور : 021-28425210