

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com

+



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



(فصل ۴)

آشنایی با مبانی ریاضیات

- درس ۱: آشنایی با منطق ریاضی ۱۹۴
درس ۲: مجموعه‌ها ۲۱۳

(فصل ۵)

احتمال

- درس ۱: مبانی احتمال ۲۴۲
درس ۲: احتمال غیرهم‌شانس ۲۶۲
درس ۳: احتمال شرطی ۲۶۸
درس ۴: پیشامدهای مستقل و وابسته ۲۸۵

(فصل ۱)

آشنایی با نظریهٔ اعداد

- درس ۱: استدلال ریاضی ۷
درس ۲: بخش‌پذیری در اعداد صحیح ۱۶
درس ۳: هم‌نهمی در اعداد صحیح و کاربردها ۴۶

(فصل ۲)

گراف و مدل‌سازی

- درس ۱: معرفی گراف ۷۸
درس ۲: مدل‌سازی با گراف ۱۱۲

(فصل ۶)

آمار توصیفی و استنباطی

- درس ۱: توصیف و نمایش داده‌ها ۲۹۴
درس ۲: شاخص‌های گرایش به مرکز ۳۰۵
درس ۳: شاخص‌های پراکندگی ۳۱۹
درس ۴: روش‌های جمع‌آوری اطلاعات ۳۳۲
درس ۵: برآورد ۳۴۲

(فصل ۳)

ترکیبیات

- درس ۱: شمارش بدون شمردن ۱۳۴
درس ۲: مباحثی در ترکیبیات ۱۵۲
درس ۳: روش‌هایی برای شمارش ۱۷۷

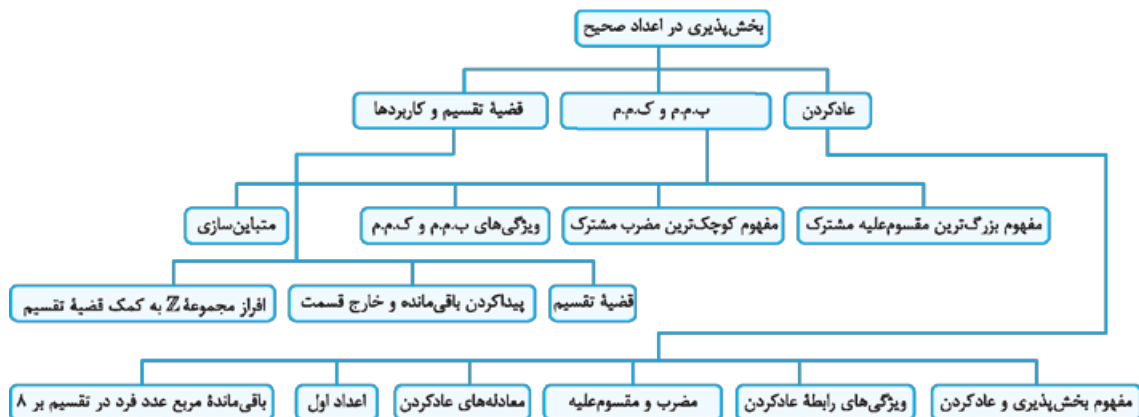
- پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۳۵۵
پاسخ‌نامهٔ کلیدی ۵۷۲

درس ۲

بخش پذیری در اعداد صحیح



این درس از سه قسمت تشکیل شده است. در بخش اول با مفهوم بخش پذیری و عادکردن و ویژگی‌های آن آشنا می‌شویم؛ در قسمت دوم دربارهٔ ب.م.م و ک.م.م صحبت می‌کنیم و بالاخره به قضیهٔ تقسیم و افراز مجموعهٔ \mathbb{Z} به کمک آن می‌پردازیم.



خب! حالا وقتش است برویم سراغ این درس و ببینیم چه خبر است؟

مفهوم بخش‌پذیری و عادکردن

تساوی $۱۵ = ۵ \times ۳$ را در نظر بگیرید. عدد ۱۵، از سه دستهٔ ۵ تایی تشکیل شده است. جور دیگری نیز می‌توانیم بگوییم که در تقسیم عدد ۱۵ بر ۵، خارج قسمت برابر ۳ می‌شود و باقی‌مانده صفر است. به همین خاطر، می‌توانیم از یک طرف بگوییم که ۱۵ بر ۵ بخش پذیر است و از طرف دیگر بگوییم که عدد ۵، عدد ۱۵ را می‌شمارد؛ چون می‌توان ۱۵ را با دسته‌های ۵ تایی شمرد. (۳ دسته پنج تایی سیب می‌شود، ۱۵ سیب و سیبی باقی نمی‌ماند.) این شمارش یا عادکردن را در ریاضی با علامت «|» نشان می‌دهند و می‌نویسند: $۱۵ | ۵$

عدد صحیح a را بر عدد صحیح b بخش پذیر می‌گویند هرگاه عدد صحیحی مثل q وجود داشته باشد، به طوری که: $a = bq$

در این صورت می‌گویند b عاد می‌کند a را یا b می‌شمارد a را و می‌نویسند: $b | a$

از رابطهٔ $a = bq$ دو نتیجه می‌توان گرفت:

a بر b بخش پذیر است. $\Leftrightarrow a = bq$

b می‌شمارد a را (ب عاد می‌کند a)

(فیلی پیز ساده‌ایه! مثلا وقتی می‌گیم ۶ بر ۲ بخش پذیره یعنی ۲ عاد می‌کند ۶ رو، یعنی ۶ | ۲)

دو نکته مهم:

$$a = bq \Leftrightarrow b | a$$

۱) تبدیل عاد کردن به تساوی خیلی خیلی مهم است و زیاد استفاده می‌شود:

۲) منظور از عدد در بخش نظریه اعداد، عدد صحیح است، بخش پذیری توی عددهای گنگ، کسری و ... تعریف نمی‌شود.

قانون ۹۰ درجه

اگر در تشخیص درستی یا نادرستی یک رابطه عاد کردن مثل $۶۳ | ۲۱$ ، دچار اشکال شدید، می‌توانید آن را نود درجه به خلاف عقربه‌های

ساعت بچرخانید تا به یک کسر تبدیل شود:

$$۲۱ | ۶۳ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم.}]{\text{نود درجه خلاف}} \frac{۶۳}{۲۱} = ۳$$

حالا اگر مثل این‌جا، حاصل عددی صحیح شد، رابطه عاد کردن، یک رابطه درست بوده و در غیر این صورت، درست نیست.

مثال رابطه‌های $۲۵ | ۳۸$ و $۷ | -۱$ را در نظر بگیرید.

همان‌طور که گفتیم، برای این‌که بفهمیم این رابطه‌ها درست‌اند یا نه آن‌ها را تبدیل به کسر می‌کنیم:

$$۳۸ | ۲۵ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم.}]{\text{نود درجه خلاف جهت}} \frac{۲۵}{۳۸} = \frac{۱}{۳} \times$$

رابطه درست نیست، زیرا $\frac{۱}{۳} | \frac{۱}{۸}$ عددی صحیح نیست. جور دیگر هم می‌توانستیم بگوییم. ۳۸ ضربدر هیچ عدد صحیحی، برابر ۲۵ نمی‌شود.

$$-۱ | ۷ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم.}]{\text{نود درجه خلاف جهت}} \frac{۷}{-۱} = -۷ \checkmark$$

رابطه درست است، زیرا -۷ عددی صحیح است!

تست کدام یک از رابطه‌های زیر درست نیست؟

$$۴۴ | ۲۷ (۴)$$

$$۳۵ | ۳۷ (۳)$$

$$۱۳ | ۹۱ (۲)$$

$$۷ | -۶۳ (۱)$$

پاسخ گزینه ۴: اگر $a = bq$ باشد، آن‌گاه $b | a$. در این سؤال داریم:

$$-۶۳ = ۷ \times (-۹) \Rightarrow ۷ | -۶۳$$

$$۹۱ = ۷ \times ۱۳ \Rightarrow ۷ | ۹۱$$

$$۳۷ = ۳۵ \times ۱ \Rightarrow ۳۵ | ۳۷$$

اما ۴) درست نیست. توجه کنید که $۴ = (۲)^۲ = ۲^۲$ بنابراین رابطه $۲۷ | ۲۸$ نادرست است و برعکس آن یعنی $۲۷ | ۲۸$ درست است، زیرا:

$$۲۸ = ۲ \times ۲^۷ \Rightarrow ۲ | ۲۸$$

البته با نکته‌ای که گفتیم هم می‌توانید نادرستی ۴) را بررسی کنید. عبارت $۴۴ | ۲۷$ را به یک کسر تبدیل می‌کنیم:

$$۴۴ | ۲۷ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم.}]{\text{نود درجه خلاف}} \frac{۲۷}{۴۴} = \frac{۳^۷}{۲^۲ \times ۱۱} = \frac{۱}{۲}$$

پس رابطه برقرار نیست.

تست کوچک‌ترین مقدار n برای آن‌که رابطه $n! | ۴۵۵$ برقرار باشد، چه مجموع ارقامی دارد؟

$$۱۴ (۴)$$

$$۱۰ (۳)$$

$$۷ (۲)$$

$$۴ (۱)$$

$$۴۵۵ = ۵ \times ۷ \times ۱۳$$

پاسخ گزینه ۱: عدد ۴۵۵ را تجزیه می‌کنیم:

قرار است رابطه $n! | ۴۵۵$ برقرار باشد، یعنی باید کوچک‌ترین مقدار n را پیدا کنیم به شرط آن‌که کسر $\frac{n!}{۴۵۵} = \frac{n!}{۵ \times ۷ \times ۱۳}$ برابر عددی صحیح شود.

مشخص است که اگر بخواهیم n! هر سه عامل ۵، ۷ و ۱۳ را داشته باشد کوچک‌ترین مقدار n برابر ۱۳ است. $۱ + ۳ = ۴$ مجموع ارقام ۱۳

سه ویژگی ساده و ابتدایی از بخش پذیری

$$a | a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{a}{a} = ۱ \checkmark$$

۱) همه عددها یا عبارت‌های جبری بر خودشان بخش پذیرند بر قرینه‌شان هم بخش پذیرند:

$$a | -a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{-a}{a} = -۱ \checkmark$$



همهٔ عددها بر ۱ و -۱ بخش پذیرند. به بیان دیگر ۱ و -۱ همهٔ عددها را عاد می کنند: $\pm 1 | a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{a}{\pm 1} = \pm a \quad \checkmark$

صفر بر همهٔ عددها بخش پذیر است اما هیچ عدد مخالف صفری بر صفر بخش پذیر نیست: $a | 0 \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{0}{a} = 0 \quad \checkmark$

$0 | a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{a}{0} \quad \times$

طبق قرارداد صفر بر خودش بخش پذیر است. به بیان دیگر تنها عددی که بر صفر بخش پذیر است، خود صفر است.

صفر خودش را می شمارد. $0 | 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \times q$

(یعنی آگه یه با دیدن صفر یه چیزی رو می شماره، اون چیز صفره؛ $0 | \text{cloud} \Rightarrow \text{cloud} = 0$)

تست به ازای چند عدد صحیح مانند x ، رابطه $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ برقرار است؟

- ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر (۱)

پاسخ گزینه ۳

گفتیم که عدد صفر، هیچ عددی را نمی شمارد به جز خودش؛ بنابراین اگر خواهیم رابطه بالا برقرار باشد، باید:

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x^2 = 1 &\Rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 = 3 &\Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{aligned} \quad (p \text{ عددی اول است.})$$

چون x باید عددی صحیح باشد پس $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ غیر قابل قبول هستند و در نتیجه **۳** پاسخ سؤال است.

$a | \text{cloud} \Rightarrow ?$

وقتی که a عددی را می شمارد چه نتایج می توان گرفت؟

- ۱ $a | 1 \Rightarrow a = \pm 1$ (اگر عددی ۱ یا -۱ رو می شماره واضحه فقط می تونه ۱ یا -۱ باشه.)
- ۲ $a | p \Rightarrow a = \pm 1, \pm p$ (برای مثال اگر $7 | a$ ، فقط می تونه ۱، -۱، ۷ و -۷ باشه.) p عددی اول است.
- ۳ $a | k \Rightarrow a$ می تواند هر کدام از مقسوم علیه های k باشد.

توان عدد اول p در تجزیه $n!$

این بخش در کتاب درسی نیست، اما از آن جایی که از آن در کنکور سراسری ۱۴۰۰ سؤال آمده، بهتر است آن را بلد باشید.

توان عدد اول p در تجزیه $n!$ برابر است با: $[\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + [\frac{n}{p^3}] + \dots$

برای مثال اگر خواهیم بدانیم در تجزیه $41!$ توان عدد ۲ چند است داریم.

$$[\frac{41}{2}] + [\frac{41}{4}] + [\frac{41}{8}] + [\frac{41}{16}] + [\frac{41}{32}] + [\frac{41}{64}] + \dots$$

↓
از اینجا به بعد صفر می شود

$$20 + 10 + 5 + 2 + 1 = 38$$

تست اگر $\frac{50!}{3^x \times 3^y}$ عددی صحیح باشد، بیش ترین مقدار $x+y$ کدام است؟

- ۶۹ (۱) ۷۰ (۲) ۷۱ (۳) ۷۳ (۴)

پاسخ گزینه ۱ با توجه به رابطه داده شده توان عددهای ۲ و ۳ را در تجزیه $50!$ پیدا می کنیم.

$$[\frac{50}{2}] + [\frac{50}{4}] + [\frac{50}{8}] + [\frac{50}{16}] + [\frac{50}{32}] = 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 47$$

$$[\frac{50}{3}] + [\frac{50}{9}] + [\frac{50}{27}] = 16 + 5 + 1 = 22$$

بنابراین اگر خواهیم $\frac{50!}{3^x \times 3^y}$ عددی صحیح باشد. x حداکثر برابر ۴۷ و y حداکثر برابر ۲۲ است. بنابراین بیشترین مقدار xy برابر است با:

$$47 \times 22 = 69$$

مضرب و مقسوم‌علیه

این دو رابطه را نگاه کنید:

(الف) $6 \mid x$

(ب) $x \mid 12$

(الف) اگر همان‌طور که گفتیم رابطه (الف) را به یک کسر تبدیل کنیم، به صورت $\frac{x}{6}$ درمی‌آید. حالا به نظر شما این کسر به ازای چه مقادیری

از x تبدیل به یک عدد صحیح می‌شود؟ مشخص است که به ازای $\pm 6, \pm 12, \pm 18$ و خوب! حالا این‌ها چه عددهایی هستند؟ بله! مضرب ۶.

(ب) اما اگر رابطه $x \mid 12$ را به یک کسر تبدیل کنیم، می‌شود $\frac{12}{x}$. خوب حالا به ازای چه مقادیری از x این کسر تبدیل به یک عدد صحیح

می‌شود؟ عددهای $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. همان‌طور که می‌بینید این عددها همان مقسوم‌علیه‌های ۱۲ هستند.

$a \mid x \Rightarrow x$ مضرب a است.

یادتان باشد:

$x \mid a \Rightarrow x$ مقسوم‌علیه a است.

تست به ازای چند عدد طبیعی مانند x هر دو رابطه $x \mid 90$ و $5 \mid x$ برقرار است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ گزینه ۴: بهترین روش برای پاسخ‌دادن به این مدل سؤال‌ها این است که رابطه اول را به تساوی تبدیل کنیم و در رابطه دوم قرار دهیم:

$5 \mid x \Rightarrow x = 5q$

$x \mid 90 \Rightarrow 5q \mid 90 \Rightarrow q \mid 18$

حالا باید مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۸ را پیدا کنیم:

۱، ۲، ۳، ۶، ۹، ۱۸

تست چند عدد صحیح مانند a وجود دارد که عدد -4 را می‌شمارد؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

$a \mid -4 \Leftrightarrow -4 = aq$

پاسخ گزینه ۴: اگر قرار باشد که عدد a ، عدد -4 را بشمارد؛ یعنی داریم:

اگر این رابطه را به کسر تبدیل کنیم، یعنی این‌که کسر $\frac{-4}{a}$ باید عددی صحیح باشد. به بیان دیگر، باید پیدا کنیم که عدد -4 بر چه عددهای صحیحی بخش‌پذیر است. روشن است که در مخرج کسر، می‌توان هر یک از مقسوم‌علیه‌های عدد -4 را قرار داد؛ یعنی هر کدام از عددهای زیر را:

۱، -۱، ۲، -۲، ۴، -۴

بنابراین ۶ عدد صحیح مانند a وجود دارد که عدد -4 را می‌شمارد و پاسخ (۴) است.

از رابطه $a \mid b$ چه نتایجی می‌توان گرفت؟

فرض کنید که یک رابطه عادی $a \mid b$ داریم. می‌خواهیم ببینیم چه کارهایی را مجازیم روی آن انجام دهیم. سمت راست رابطه عادی کردن را می‌توانیم در هر عدد صحیحی، ضرب کنیم. اما سمت چپ آن را نمی‌توانیم؛ به عنوان مثال، رابطه $12 \mid 36$ را در نظر بگیرید. این رابطه، یک رابطه

درست است؛ زیرا کسر $\frac{36}{12}$ برابر عددی صحیح است. حالا وقتی می‌دانیم این کسر عددی صحیح است؛ اگر آن را در هر عدد صحیح دیگری ضرب

کنیم حاصل، باز هم عددی صحیح می‌شود. (یعنی سمت راست هر رابطه عادی کردن رو می‌شه تو هر عدد صحیحی ضرب کرد). مثلاً $5 \times \frac{36}{12}$ نیز عددی صحیح

$12 \mid 36 \Rightarrow 12 \mid 36 \times 5$

است؛ یعنی می‌توان نتیجه گرفت:

$a \mid b \Rightarrow a \mid mb$

در حالت کلی:

اما مشخص است که سمت چپ رابطه عادی کردن را نمی‌توان در هر عددی ضرب کرد؛ مثلاً همین رابطه $12 \mid 36$ را در نظر بگیرید، اگر سمت چپ رابطه را در ۵ ضرب کنیم، می‌شود $60 \mid 36$ که رابطه‌ای نادرست است.

حالا دوباره همین رابطه $12 \mid 36$ را در نظر بگیرید، کسر معادل با آن برابر $\frac{36}{12}$ است. می‌دانیم وقتی عدد

36 بر 12 بخش‌پذیر است، بدیهی است که بر هر کدام از عددهای $1, 2, 3, 4, 6$ یعنی بر هر کدام از مقسوم‌علیه‌های 12 نیز بخش‌پذیر باشد. به عبارت دیگر، از رابطه $12 \mid 36$ هر یک از رابطه‌های مقابل

قابل نتیجه‌گیری است:

$$12 \mid 36 \Rightarrow \begin{cases} \pm 6 \mid 36 \\ \pm 4 \mid 36 \\ \pm 3 \mid 36 \\ \pm 2 \mid 36 \\ \pm 1 \mid 36 \end{cases}$$



به عبارت دیگر، سمت چپ رابطه $a | b$ را می‌توان بر هر یک از مقسوم‌علیه‌های a تقسیم کرد. در نتیجه می‌توان گفت:

$$ac | b \Rightarrow a | b \wedge c | b$$

به طور خلاصه این نکات یادتان باشد:

مثال	توضیح	نکته	
$5 15 \xrightarrow{\text{طرفین } \times 4} 20 60$	طرفین یک رابطه عا‌د کردن را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد.	$a b \Rightarrow ma mb$	۱
$6 12 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 3} 6 36$	سمت راست یک رابطه عا‌د کردن را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد.	$a b \Rightarrow a mb$	۲
$6 18 \Rightarrow \begin{cases} \text{سمت چپ } \div 2 \rightarrow 3 9 \\ \text{سمت چپ } \div 3 \rightarrow 2 6 \end{cases}$	سمت چپ یک رابطه عا‌د کردن را می‌توان به هر یک از مقسوم‌علیه‌های عدد سمت چپ تقسیم کرد.	$a b \Rightarrow a$ از مقسوم‌علیه‌های a	۳
$3 \times 5 45 \Rightarrow \begin{cases} \text{سمت چپ } \div 3 \rightarrow 5 15 \\ \text{سمت چپ } \div 5 \rightarrow 3 9 \end{cases}$	در واقع همان نکته قبلی است. وقتی حاصل ضرب دو یا چند عدد، عددی را می‌شمارد، هر کدام از آن اعداد را نیز عا‌د می‌کند.	$ab c \Rightarrow \begin{cases} a c \\ b c \end{cases}$	۴
$2 4 \xrightarrow{\text{به توان } 4} 2^4 4^4 (16 256)$	طرفین یک رابطه عا‌د کردن را می‌توان به توان رساند.	$a b \Rightarrow a^n b^n$	۵
$27 216 \Rightarrow 3^3 6^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم می‌گیریم}} 3 6$ $8 16 \Rightarrow 2^3 2^4 \xrightarrow{\text{نمی‌توان ریشه چهارم گرفت چون عدد سمت چپ صحیح نمی‌شود.}} \sqrt[4]{8} 2$	از طرفین یک رابطه عا‌د کردن می‌شود ریشه گرفت به شرط آن‌که بعد از ریشه‌گرفتن هر دو عبارت عددی صحیح باشد.	$a^n b^n \Rightarrow a b$	۶
$4 12 \Rightarrow 4 \leq 12$ $6 -18 \Rightarrow 6 \leq -18 $	در یک رابطه عا‌د کردن اگر عدد سمت راست صفر نباشد حتماً قدرمطلق سمت چپ کوچک‌تر و یا مساوی از قدرمطلق عدد سمت راست است.	$a b \Rightarrow a \leq b , b \neq 0$	۷

مثال بررسی کنید کدام‌یک از نتیجه‌گیری‌های زیر درست و کدام غلط است؟

الف) $a | b \Rightarrow a | 3b$

ب) $a | b \Rightarrow 3a | b$

پ) $a | b^2 \Rightarrow a | 3b^3$

ت) $a^2 | b \Rightarrow a | b$

ث) $2a | b \Rightarrow a | 2b$

ج) $a^2 | b^5 \Rightarrow a^3 | b^6$

پاسخ نکته مهم در پاسخ‌گویی به این سؤالات در این است که بدانیم اگر $a | b$ سمت راست رابطه را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد و سمت چپ رابطه را می‌توان بر هر یک از مقسوم‌علیه‌های a تقسیم کرد. (یعنی فرمولیش کنید که راست رو می‌شه گنده کرد و چپ رو می‌شه کوچک کرد و رابطه درست باقی بمونه.)

الف) $a | b \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 3} a | 3b \checkmark$

درست است، چون راست را بزرگ کردیم:

ب) $3 | 9 \Rightarrow 3 \times 2 | 9$

چپ رو الکی نمی‌شود بزرگ کرد. بنابراین این رابطه درست نیست. برای مثال اگر $a = 3$ و $b = 9$ باشد:

پ) $a | b^2 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 3b} a | 3b^3$

درست است چون سمت راست را بزرگ کردیم:

ت) $a^2 | b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر } a} a | b$

درست است چون سمت چپ را کوچک کردیم:

ث) درست است. هم‌زمان دو کار را انجام دادیم. هم سمت راست را بزرگ کردیم هم سمت چپ را کوچک:

$2a | b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر } 2} a | b \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 3} a | 3b$

ج) این خیلی غلط است، چون دوتا کار اشتباه انجام دادیم. هم سمت راست را بزرگ کردیم و هم سمت چپ را کوچک. برای مثال اگر $a = 4$ و $b = 2$ باشد رابطه $a^2 | b^5$ درست است، زیرا:

$4^2 | 2^5 \Rightarrow 16 | 32$ درست

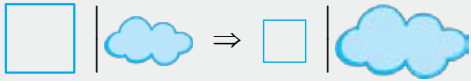
اما رابطه $a^3 | b^6$ نادرست است، زیرا:

$4^3 = 64, 2^6 = 64 \Rightarrow 16 | 64$

حالا که این رابطه‌ها را تعریف کردیم به تست صفحه بعد پاسخ دهید.



در یک رابطه عادی کردن، سمت چپ را می‌توان کوچک و سمت راست را بزرگ کرد.



تست از رابطه $2a^2 \mid b^3$ کدام نتیجه‌گیری ممکن است درست نباشد؟

- (۱) $a^2 \mid b^3$ (۲) $2a^2 \mid 5b^2$ (۳) $a^2 \mid b^4$ (۴) $a \mid b$

پاسخ گزینه ۲: درست است؛ زیرا گفتیم که می‌توان سمت چپ رابطه را بر مقسوم‌علیه‌هایش تقسیم کرد و این‌جا نیز همین اتفاق افتاده است.

$$2a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر 2}} a^2 \mid b^3$$

(۲) درست است؛ زیرا سمت راست رابطه را می‌توان در هر عددی ضرب کرد.

$$2a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در 5}} 2a^2 \mid 5b^3$$

(۳) نیز درست است؛ زیرا هر دو اتفاق با هم رخ داده، یعنی هم‌زمان، سمت چپ رابطه، بر عددی تقسیم شده و سمت راست در عددی ضرب شده است.

$$2a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر 2}} a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times b} a^2 \mid b^4$$

اما دلیلی ندارد که (۴) حتماً درست باشد؛ به عنوان مثال اگر $b = 2^4$ و $a = 2^5$ باشد، داریم:

$$2a^2 \mid b^3 \Rightarrow 2 \times (2^5)^2 \mid (2^4)^3 \Rightarrow 2^{11} \mid 2^{12} \checkmark$$

اما $2^4 \nmid 2^4$.

به تست بعد نگاه کنید. برای حل کردن این مدل تست‌ها به‌جز روش تشریحی یک تکنیک هم وجود دارد که خوب است آن را بلد باشید:

تست از رابطه $a^5 \mid b^9$ کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱) $a^{10} \mid b^{18}$ (۲) $a^7 \mid b^{12}$ (۳) $a^8 \mid b^{15}$ (۴) $a^9 \mid b^6$

پاسخ گزینه ۳: یک راه ساده برای جواب دادن به این مدل تست‌ها این است که یک کاری کنیم که دو طرف رابطه داده‌شده در صورت سؤال با هم برابر شوند. یعنی a و b را عددهای توان‌داری فرض کنیم که وقتی به توان ۵ و ۹ می‌رسند طرفین رابطه عادی‌کردن صورت سؤال مساوی هم شود. برای این کار یک پایه فرضی مثل x را در نظر بگیرید و توان b را به پایه a بدهید و توان a را به پایه b . یعنی چی؟ یعنی این‌که مثلاً در این سؤال a و b را به صورت

زیر در نظر می‌گیریم:

$$a = x^9, \quad b = x^5$$

چون اگر به ازای این a و b صورت سؤال را بازنویسی کنیم خواهیم داشت:

$$a^5 \mid b^9 \Rightarrow x^{45} \mid x^{45}$$

و می‌بینید که طرفین رابطه برابر می‌شود.

خوبی این کار این است که حالا اگر گزینه‌ها را به ازای این مقادیر a و b بررسی کنیم، معلوم می‌شود کدام رابطه درست است و کدام نه. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$(1) a^{10} \mid b^{18} \Rightarrow (x^9)^{10} \mid (x^5)^{18} \Rightarrow x^{90} \mid x^{90} \times \quad (2) a^7 \mid b^{12} \Rightarrow (x^9)^7 \mid (x^5)^{12} \Rightarrow x^{63} \mid x^{60} \times$$

$$(3) a^8 \mid b^{15} \Rightarrow (x^9)^8 \mid (x^5)^{15} \Rightarrow x^{72} \mid x^{75} \checkmark \quad (4) a^9 \mid b^6 \Rightarrow (x^9)^9 \mid (x^5)^6 \Rightarrow x^{81} \mid x^{30} \times$$

درستی (۳) را به روش تشریحی به صورت مقابل می‌توان ثابت کرد:

$$a^5 \mid b^9 \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۵ می‌رسانیم}} a^{25} \mid b^{45}$$

$$\xrightarrow{\text{سمت چپ را بر ۵ تقسیم می‌کنیم}} a^{24} \mid b^{45} \xrightarrow{\text{از طرفین ریشه سوم می‌گیریم}} a^8 \mid b^{15}$$

که خب کار ساده‌ای نیست و تازه رد کردن بقیه گزینه‌ها کار سخت‌تری است!

این نکته را این‌جوری هم می‌توان توضیح داد:

از رابطه $a^m \mid b^n$ زمانی می‌توان رابطه $a^{m'} \mid b^{n'}$ را نتیجه گرفت که: $nm' \leq mn'$

$$(a^m \mid b^n \Rightarrow a^{m'} \mid b^{n'}) \quad \text{دور} \times \text{دور} \leq \text{نزدیک} \times \text{نزدیک}$$

(اینو این‌جوری هم می‌شه گفت، درکش آسون‌تره؛)

چند ویژگی مهم دیگر از رابطه عادی‌کردن

این رابطه‌ها را خوب نگاه کنید و یاد بگیرید. چون کمی جلوتر از همه آن‌ها در حل معادله‌های عادی‌کردنی و سایر سؤال‌ها استفاده می‌کنیم.

(۱) اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد، آن‌گاه عدد a عدد c را می‌شمارد:

$$a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$$

(برای مثال: $4 \mid 24, 8 \mid 24 \Rightarrow 4 \mid 24$)



۲ هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن گاه مجموع، تفاضل و حاصل ضرب آن دو عدد را نیز می‌شمارد:

$$a | b \wedge a | c \Rightarrow \begin{cases} a | b + c \\ a | b - c \\ a | bc \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 | 6 \\ 3 | 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3 | 15 + 6 \Rightarrow 3 | 21 \\ 3 | 15 - 6 \Rightarrow 3 | 9 \\ 3 | 15 \times 6 \Rightarrow 3 | 90 \end{cases}$$

(برای مثال: $3 | 9$)

۳ تعمیم نکته قبل: اگر عددی دو عدد را بشمارد مجموع یا تفاضل هر مضرب یکی و هر مضربی از دیگری را می‌شمارد:

$$a | b \wedge a | c \Rightarrow \begin{cases} a | mb + nc \\ a | mb - nc \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 | 10 \\ 5 | 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{m=4, n=2} \begin{cases} 5 | 4 \times 10 + 2 \times 15 \Rightarrow 5 | 115 \\ 5 | 4 \times 10 - 2 \times 15 \Rightarrow 5 | -35 \end{cases}$$

(برای مثال: $5 | 115$)

۴ اگر دو رابطه عاقد کردن مختلف داشته باشیم، می‌توانیم سمت چپ و راست دو رابطه را در هم ضرب کرد و به رابطه‌ای جدید رسید:

$$a | b \wedge c | d \Rightarrow ac | bd \quad (\text{برای مثال: } 7 | 35, 2 | 4 \Rightarrow 7 \times 2 | 35 \times 4 \Rightarrow 14 | 140)$$

۵ حواستان باشد طرفین رابطه عاقد کردن را نمی‌توان با عددی جمع کرد یا از عددی کم کرد.

$$a | b \Rightarrow a + c | b + c \quad \times$$

$$a | b \Rightarrow a - c | b - c \quad \times$$

(برای مثال رابطه ۱۰، ۵ رو در نظر بگیرید؛ اگر طرفین را با یک جمع کنیم به رابطه ۱۱، ۶ می‌رسیم که نادرست است و اگر از طرفین یکی کم کنیم به رابطه ۹، ۴ می‌رسیم که باز هم غلط است.)

گستره جامع کنکور

تست به ازای چند عدد صحیح مانند a ، دو عدد $8m + 3$ و $11m + 4$ همواره بر a بخش پذیرند؟

(۴) بیشتر از ۴

(۳) ۴

(۲) ۲

(۱) ۱

$$a | 8m + 3, a | 11m + 4$$

پاسخ گزینه ۲ اگر دو عدد $8m + 3$ و $11m + 4$ بر a بخش پذیر باشند، یعنی:

دیدیم که سمت راست رابطه عاقد کردن را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد. به خاطر این که ضرب m یکسان شود، سمت راست رابطه اول را در ۱۱ و سمت راست رابطه دوم را در ۸ ضرب می‌کنیم، بعد سمت راست‌ها را از هم کم می‌کنیم.

$$a | 8m + 3 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۱۱}} a | 88m + 33$$

$$a | 11m + 4 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۸}} a | 88m + 32$$

$$a | 88m + 33 \xrightarrow{-} a | 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

استفاده می‌کنیم و سمت راست دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$\frac{a | b}{a | c} \Rightarrow a | b - c$$

پس به ازای ۲ عدد صحیح a ، رابطه برقرار است.

در این نوع سؤال‌ها برای سرعت در کار می‌توانیم از دترمینان ماتریس ضرایب نیز استفاده کنیم. به این صورت که ضرایب را به صورت یک ماتریس 2×2 می‌نویسیم و عبارت سمت چپ دترمینان این ماتریس را می‌شمارد. برای مثال در این سؤال:

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow a | -1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$= 8 \times 4 - 11 \times 3 = -1$ دترمینان

این مدل سؤال‌ها که برای حل‌کردنشان باید سمت راست رابطه عاقد کردن را در عددی ضرب کنیم، سؤال‌های شایعی است و اصولاً یادتان باشد این یک روشی است که می‌توانیم متغیر را از سمت راست رابطه عاقد کردن حذف کنیم. حالا به یک مدل دیگر از این سؤال‌ها نگاه کنید:

تست اگر $5 | 4k + 1$ و $5 | 5k - 1$ ، کدام گزینه درست است؟

$$15 | 5k^2 - k - 1 \quad (۴)$$

$$15 | 5k^2 + k - 1 \quad (۳)$$

$$15 | 5k^2 - k + 1 \quad (۲)$$

$$15 | 5k^2 + k + 1 \quad (۱)$$

پاسخ گزینه ۲ می‌دانیم که اگر $a | b$ و $a | c$ ، آن گاه $ac | bd$ بنا بر این:

$$\begin{matrix} 5 | 4k + 1 \\ 5 | 5k - 1 \end{matrix} \Rightarrow 15 | (4k + 1)(5k - 1) \Rightarrow 15 | 20k^2 + k - 1$$

از طرفی می‌دانیم، اگر $a | b$ ، $a | c \Rightarrow a | b - c$ ، پس داریم:

$$\begin{matrix} 15 | 20k^2 + k - 1 \\ 15 | 15k^2 \end{matrix} \xrightarrow{-} 15 | 5k^2 + k - 1$$

(بدیهی است.)

بنابراین **گزینه ۲** درست است.

يك تيب سؤال خاص

يك مدل سؤال‌هایی در مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی آمده است که الان می‌خواهیم روش پاسخ‌گویی به آن‌ها را با هم مرور کنیم. به سؤال زیر نگاه کنید:
اگر $۷ \mid ۴k + ۳$ ، ثابت کنید: $۴۹ \mid ۱۲k^۲ + ۲۵k + ۱۲$ (مشابه این سؤال در کتاب درسی آمده است.)

همان‌طور که در سؤال‌های قبل دیدید، معمولاً سمت چپ رابطه‌های عادکردن یا تغییر نمی‌کند یا کوچک‌تر می‌شود، اما در این مدل سؤال‌ها، سمت چپ رابطه بزرگ‌تر می‌شود. برای جواب‌دادن به این نوع سؤال‌ها بهتر است رابطه داده‌شده را تجزیه کنیم و حواستان باشد که معمولاً یکی از عوامل تجزیه همان عبارت فرضی سؤال است. برای مثال در این سؤال داریم:

حالا باید سعی کنیم با استفاده از فرض، آن یکی جمله را بسازیم (یعنی از $۷ \mid ۴k + ۳$ ثابت کنیم $۷ \mid ۳k + ۴$) و بعد دو جمله را در هم ضرب کنیم:

$$\begin{array}{l} ۷ \mid ۴k + ۳ \\ ۷ \mid ۷k + ۷ \end{array} \xrightarrow{\ominus} ۷ \mid ۳k + ۴ \qquad \begin{array}{l} ۷ \mid ۴k + ۳ \\ ۷ \mid ۳k + ۴ \end{array} \xrightarrow{\otimes} ۴۹ \mid ۱۲k^۲ + ۲۵k + ۱۲$$

به یک مثال دیگر نگاه کنید:

مثال ثابت کنید اگر $۵ \mid ۴k + ۱$ ، آن‌گاه: $۲۵ \mid ۳۶k^۲ + ۱۳k + ۱$

پاسخ همانند سؤال قبل سعی می‌کنیم عبارت $۳۶k^۲ + ۱۳k + ۱$ را تجزیه کنیم. با این احتمال که یکی از عوامل تجزیه $۴k + ۱$ است. یعنی باید بررسی کنیم با فرض $۳۶k^۲ + ۱۳k + ۱ = (۴k + ۱)(?)$ ، پرانتز دیگر چیست؟ با کمی دقت می‌توان فهمید $۳۶k^۲ + ۱۳k + ۱ = (۴k + ۱)(۹k + ۱)$. حالا باید ثابت کنیم $۵ \mid ۹k + ۱$ یعنی از $۵ \mid ۴k + ۱$ باید ثابت کنیم $۵ \mid ۹k + ۱$. این هم کار ساده‌ای است.

$$\begin{array}{l} ۵ \mid ۴k + ۱ \\ ۵ \mid ۵k \end{array} \xrightarrow{\oplus} ۵ \mid ۹k + ۱$$

حالا دو رابطه را در هم ضرب می‌کنیم و حکم ثابت می‌شود:

$$\begin{array}{l} ۵ \mid ۴k + ۱ \\ ۵ \mid ۹k + ۱ \end{array} \xrightarrow{\otimes} ۲۵ \mid ۳۶k^۲ + ۱۳k + ۱$$

معادله‌های عادکردنی

رابطه $x - 2 \mid 5x + 1$ را در نظر بگیرید. اسم چنین رابطه‌ای را می‌توانیم بگذاریم یک معادله عادکردنی چون به جای تساوی در معادله‌های معمول رابطه عادکردن داریم. راه تشریحی حل کردن این معادله‌ها این است که متغیر را از عبارت سمت راست حذف کنیم. روش کار هم به صورت زیر است: می‌دانیم هر عبارتی خودش را عاد می‌کند. بنابراین عبارت سمت چپ هم خودش را عاد می‌کند. در این نوع معادله‌ها همیشه اول این رابطه را می‌نویسیم و بعد سمت راست آن را در عددی مناسب (با توجه به صورت سؤال) ضرب می‌کنیم:

$$x - 2 \mid x - 2 \xrightarrow{\times ۵ \text{ سمت راست}} x - 2 \mid 5x - 10$$

(برای این سمت راست را در ۵ ضرب کردیم که در رابطه صورت سؤال فریب x در عبارت سمت راست، رابطه عادکردن نه.)

$$x - 2 \mid 5x - 10 \xrightarrow{(-)} x - 2 \mid 11 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \\ x - 2 = 11 \Rightarrow x = 13 \\ x - 2 = -11 \Rightarrow x = -9 \end{cases}$$

اما راه تستی برای پاسخگویی سریع‌تر این سؤال‌ها این است که ریشه عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار دهیم:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 5x + 1 = 11 \Rightarrow x - 2 \mid 11 \quad \text{و بقیه پاسخ شبیه بالاست.}$$

تست مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقدار x که در رابطه $x - 3 \mid ۲x^۳ + ۵$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۸ (۱)

پاسخ گزینه ۱ از روش تستی استفاده می‌کنیم. ریشه عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم:

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow ۲x^۳ + ۵ = ۵۹ \Rightarrow x - 3 \mid ۵۹$$

چون بزرگ‌ترین مقدار x را می‌خواهیم $x - 3$ را برابر ۵۹ فرض می‌کنیم: $x - 3 = ۵۹ \Rightarrow x = ۶۲ \Rightarrow$ مجموع ارقام $= ۶ + ۲ = ۸$

توجه کنید در بعضی از سؤال‌ها عبارت سمت چپ ریشه صحیح ندارد؛ در این مدل سؤال‌ها ریشه کسری را پیدا کرده، در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم بعد عبارت سمت راست را ساده می‌کنیم تا به یک کسر برسیم. عبارت سمت چپ صورت آن کسر را می‌شمارد.



به سؤال زیر نگاه کنید:



تست چند نقطه روی منحنی به معادله $3xy = x^2 + 2y + 1$ وجود دارد که هر دو مولفه x و y در آن عددهایی صحیح باشند؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

پاسخ گزینه ۳ اول این رابطه را تبدیل به یک کسر می‌کنیم:

$$3xy - 2y = x^2 + 1 \Rightarrow y(3x - 2) = x^2 + 1 \Rightarrow y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2}$$

اگر قرار باشد y عدد صحیح باشد، باید مخرج کسر صورت را بشمارد.

حالا از نکته‌ای که گفتیم استفاده می‌کنیم:

$$3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow x^2 + 1 = \frac{4}{9} + 1 = \frac{13}{9}$$

گفتیم عبارت سمت چپ صورت این کسر را می‌شمارد. داریم:

$$3x - 2 \mid 13 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2 = 13 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = \frac{25 + 1}{15 - 2} = 2 \\ 3x - 2 = -13 \quad \times \\ 3x - 2 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = \frac{1 + 1}{3 - 2} = 2 \\ 3x - 2 = -1 \quad \times \end{cases}$$

بنابراین به ازای دو مقدار صحیح رابطه برقرار است.

بعضی از معادله‌های عادی هم با روش‌های معمول حل نمی‌شوند و باید از روش‌های خلاقانه دیگری برای پاسخگویی به آن‌ها استفاده کرد. در برخی از این معادله‌ها رشد عبارت سمت چپ از عبارت سمت راست بیشتر است. به سؤال زیر نگاه کنید:

تست به ازای چند عدد صحیح مانند a ، رابطه $a^4 + 1 \mid 3a + 1$ برقرار است؟

۴ بیشتر از ۳

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ گزینه ۳ می‌دانیم: $a \mid b, b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$

بنابراین با توجه به این که $a^4 + 1 \mid 3a + 1$ ، باید $|a^4 + 1|$ کوچک‌تر یا مساوی $|3a + 1|$ باشد. با توجه به این که رشد $a^4 + 1$ ، سریع‌تر از رشد $3a + 1$ است؛ بنابراین: این اتفاق به ازای a های کوچک، ممکن است برقرار باشد. حالا جست‌وجو می‌کنیم:

$$a = 0 \Rightarrow 1 \mid 1 \quad \checkmark$$

$$a = 1 \Rightarrow 2 \mid 4 \quad \checkmark$$

روشن است که به ازای $a \geq 2$ هم، عبارت سمت چپ، بزرگ‌تر از عبارت سمت راست است. اعداد منفی را نیز باید بررسی کنیم:

$$a = -1 \Rightarrow 2 \mid -2 \quad \checkmark$$

$$a = -2 \Rightarrow 17 \mid -5 \quad \times$$

به ازای $a \leq -2$ هم، دیگر رابطه برقرار نیست؛ بنابراین فقط به ازای عددهای $0, 1$ و -1 رابطه برقرار است.

باقی‌مانده مربع عدد فرد تقسیم به ۸

فرض کنید x یک عدد فرد باشد. در این صورت می‌توان آن را به صورت $x = 2k + 1$ نوشت. حالا اگر مربع این عدد را به دست آوریم، داریم:

$$x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1 = 4(2q) + 1 = 8q + 1$$

حاصل ضرب دو عدد متوالی

مربع هر عدد فرد را به صورت $8q + 1$ می‌توان نوشت.

مثال اگر a عددی زوج باشد، باقی‌مانده $(a + 7)^2 + (a + 1)^2$ بر ۸ چند است؟

پاسخ چون a زوج است، پس $a + 1$ و $a + 7$ هر دو عددهایی فرد و در نتیجه $(a + 7)^2 + (a + 1)^2$ مربع‌های عددهای فردند. بنابراین:

$$(a + 1)^2 + (a + 7)^2 = 8q' + 1 + 8q'' + 1$$

پس باقی‌مانده عبارت در تقسیم بر ۸ برابر ۲ است.

سه رابطه مهم از بخش پذیری

به این سه رابطه نگاه کنید:

$$a - b \mid a^n - b^n$$

$a^n - b^n$ همیشه بر $a - b$ بخش پذیر است:

$$a + b \mid a^n + b^n \quad n \text{ باید فرد باشد}$$

$a^n + b^n$ زمانی بر $a + b$ بخش پذیر است که n فرد باشد:

$$a + b \mid a^n - b^n \quad n \text{ باید زوج باشد}$$

$a^n - b^n$ زمانی بر $a + b$ بخش پذیر است که n زوج باشد:



(یعنی هواستون باشه $a^n - b^n$ همیشه بر $a - b$ بخش پذیره اما اگر n زوج باشه بر $a + b$ هم بخش پذیره)

تعمیم یافته رابطه اول هم به صورت زیر است:

$$a^m - b^m \mid a^n - b^n$$

وقتی $\frac{n}{m}$ عددی صحیح باشد:

این رابطه‌ها را بهتر است در بخش همنهستی می‌دیدید اما از آن‌جا که در خیلی از آزمون‌ها از این رابطه‌ها قبل از همنهستی سؤال می‌آید، ما هم تصمیم گرفتیم این‌جا بیاوریم‌شان!

مثال ثابت کنید $3^{23} + 2^{55}$ بر ۵۹ بخش پذیر است.

پاسخ ببینید، در تمام رابطه‌هایی که در بالا دیدید توان‌ها یکسان است، بنابراین ما هم باید کاری کنیم که توان‌ها برابر شود. داریم:

$$3^{23} + 2^{55} = (3^3)^{11} + (2^5)^{11} = 3^{33} + 2^{55}$$

خب حالا که توان‌ها یکسان شد و از طرف دیگر توان فرد است. از این نکته که اگر n فرد باشد $a^n + b^n$ بر $a + b$ بخش پذیر است، استفاده می‌کنیم. بنابراین:

$$32 + 27 \mid 3^{33} + 2^{55}$$

پس $3^{33} + 2^{55}$ بر ۵۹ بخش پذیر است.

تست عدد $5^{30} - 2^{60}$ بر کدام یک از عددهای زیر بخش پذیر نیست؟

۶۳ (۴)

۶۱ (۳)

۳۱ (۲)

۲۷ (۱)

$$5^{30} - 2^{60} = (5^3)^{10} - (2^6)^{10} = 125^{10} - 64^{10}$$

پاسخ گزینه ۲ خب دوباره توان‌ها را برابر می‌کنیم:

دیدیم که اگر n زوج باشد $a^n - b^n$ هم بر $a - b$ بخش پذیر است هم بر $a + b$.

بنابراین $125^{10} - 64^{10}$ هم بر $61 = 125 - 64$ بخش پذیر است هم بر $189 = 125 + 64$.

حالا اگر ۱۸۹ را تجزیه کنیم داریم: $189 = 3^3 \times 7$ که بر ۲۷ و ۶۳ بخش پذیر است. بنابراین عدد $5^{30} - 2^{60}$ فقط بر ۳۱ بخش پذیر نیست.

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک

عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند و می‌نویسیم $(a, b) = d$)، هرگاه دو شرط زیر برقرار

(الف) $d \mid a$ ، $d \mid b$ (یعنی d مقسوم‌علیه هر دو a و b باشد)

باشد:

(ب) $\forall m > 0; m \mid a, m \mid b \Rightarrow m \leq d$ (مقسوم‌علیه‌های دیگر a و b مثل m از d کوچک‌تر باشد)

دو عدد a و b را نسبت به هم اول می‌گوییم، هرگاه: $(a, b) = 1$ یا به بیان دیگر، دو عدد، عامل مشترک بزرگ‌تر از ۱ نداشته باشند.

تست اگر d هر دو عدد ۷۲ و ۶۰ را بشمارد، مقدار مختلف طبیعی، به جای d می‌توان قرار داد که بزرگ‌ترین آن‌ها است.

۶ - ۴ (۴)

۱۲ - ۴ (۳)

۶ - ۶ (۲)

۱۲ - ۶ (۱)

پاسخ گزینه ۱ مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی هر دو عدد را می‌نویسیم:

$72 = 2^3 \times 3^2$ مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۷۲ $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۶۰ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$

$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

بنابراین تعداد شمارنده‌های طبیعی مشترک آن‌ها برابر است با:

همان‌طور که می‌بینید، دو عدد ۷۲ و ۶۰ دارای ۶ شمارنده طبیعی مشترکند که بزرگ‌ترین آن‌ها عدد ۱۲ است. پس ۱ درست است.

راه بهتر برای پیدا کردن ب.م.م دو یا چند عدد (به جای نوشتن همه مقسوم‌علیه‌های آن)، این است که عددها را تجزیه کرده، فقط

عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب کنیم. به عنوان مثال برای تست بالا داریم:

$$\begin{cases} 72 = 2^3 \times 3^2 \\ 60 = 2^2 \times 3 \times 5 \end{cases} \Rightarrow (72, 60) = 2^2 \times 3 = 12$$



تست حاصل عبارت $(72, 48), (180, 120)$ کدام است؟

۱۲ (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۶۰ (۴)

پاسخ گزینه ۱ **روش اول** اول عددها را تجزیه می‌کنیم، بعد با توجه به رابطه ب.م.م عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در نظر می‌گیریم:

$$(72, 48) = (2^3 \times 3^2, 2^4 \times 3) = 2^3 \times 3 = 24$$

$$(180, 120) = (2^2 \times 3^2 \times 5, 2^3 \times 3 \times 5) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$\Rightarrow (24, 60) = (2^3 \times 3, 2^2 \times 3 \times 5) = 2^2 \times 3 = 12$$

روش دوم چون ب.م.م همه عددها خواسته شده، می‌توانستیم از همان اول همه عددها را تجزیه کنیم و بین همه آن‌ها فقط عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در نظر بگیریم:

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

$$48 = 2^4 \times 3$$

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

عوامل مشترک با توان کوچک‌تر $\rightarrow 2^2 \times 3 = 12$

ب.م.م و تعداد شمارنده‌ها: یک سری سؤال مفهومی از ب.م.م وجود دارد که به درک ما از این مفهوم کمک می‌کند. برای مثال فرض کنید n عددی طبیعی است که به ازای آن رابطه $(n, 60) = 6$ برقرار است. می‌خواهیم بررسی کنیم n چه جور عددی است و تعداد عامل‌های $2, 3, 5, 7$ و ... در این عدد به چه صورت است.

اول عددها را تجزیه می‌کنیم، داریم:

$$(n, 2^2 \times 3 \times 5) = 2 \times 3$$

شمارنده ۲: n دقیقاً یک عامل ۲ دارد. می‌دانیم برای به دست آوردن ب.م.م دو عدد، عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر انتخاب می‌کنیم. چون ۲ در ب.م.م وجود دارد پس n باید حتماً یک عامل ۲ داشته باشد، اما اگر n بیشتر از یک عامل ۲ داشته باشد با توجه به این که در تجزیه عدد 60 نیز دو عامل ۲ وجود دارد، بنابراین توان ۲ در ب.م.م، ۲ خواهد بود و چون در ب.م.م توان ۲ یک است پس n فقط یک عامل ۲ می‌تواند داشته باشد. شمارنده ۳: n دست‌کم یک عامل ۳ دارد، چون ۳ در ب.م.م آمده است. اما با توجه به این که در تجزیه عدد 60 نیز فقط یک عامل ۳ وجود دارد بنابراین n می‌تواند بیشتر از یک عامل ۳ هم داشته باشد (پس تو ب.م.م عوامل مشترک رو با توان کوچک‌تر در نظر می‌گیریم). شمارنده ۵: n عامل یا شمارنده ۵ ندارد چون ۵ در ب.م.م نیامده است. شمارنده‌های ۷ و ۱۱ و ...: چون در تجزیه 60 عوامل ۷ و ۱۱ و ... وجود ندارد، بنابراین در مورد این که n چندتا شمارنده از هر کدام از این عددها دارد نیز نمی‌توانیم اظهار نظر کنیم.

مثال اگر $(n, 45) = 15$ باشد، حاصل $(n^2, 675)$ چند است؟

پاسخ اول عددها را تجزیه می‌کنیم: $(n, 3^2 \times 5) = 3 \times 5$

n دقیقاً یک عامل ۳ دارد. (پس آنگه بیشتر داشت تو ب.م.م ۳ می‌اومد)

هم‌چنین n دست‌کم یک عامل ۵ دارد. (پس آنگه بیشتر هم داشت با توجه به این که فقط یک عامل ۳ داره تو ب.م.م شون باز هم ۵ می‌اومد)

بنابراین فرم کلی n به صورت $n = 3 \times 5^\alpha \times \dots$ است که $\alpha \geq 1$ است. این قسمت عوامل ۳ و ۵ ندارد

حالا حاصل $(n^2, 675)$ را پیدا می‌کنیم:

$$(n^2, 675) = (3^2 \times 5^{2\alpha} \times \dots \times 3^3 \times 5^2) = 3^2 \times 5^2 = 225$$

حالا سعی کنید به تست زیر جواب دهید.

تست اگر $(n, 12) = 6$ باشد، فرم کلی n بر حسب متغیر $k \in \mathbb{Z}$ ، به کدام صورت است؟

۶k (۱) ۶k + ۳ (۲) ۱۲k (۳) ۱۲k + ۶ (۴)

پاسخ گزینه ۲ با توجه به این که $(n, 2^2 \times 3) = 2 \times 3$ ، می‌توان فهمید که n دقیقاً یک عامل ۲ و دست‌کم یک عامل ۳ دارد. بنابراین n بر ۶ بخش پذیر است. اما اگر بنویسیم $n = 6q$ و q زوج باشد، n بیشتر از یک عامل ۲ خواهد داشت. پس q حتماً باید فرد باشد. بنابراین:

$$q = 2k + 1 \Rightarrow n = 6(2k + 1) = 12k + 6$$

گاهی اوقات می‌خواهیم ب.م.م دو عبارت را پیدا کنیم. در این صورت از این ویژگی ب.م.م استفاده می‌کنیم که d یعنی ب.م.م دو عدد هر دو عدد را می‌شمارد:

$$(a, b) = d \Rightarrow \begin{cases} d | a \\ d | b \end{cases}$$

و سپس سعی می‌کنیم متغیر را حذف کنیم. به سؤال زیر توجه کنید:

تست به ازای چند عدد طبیعی دورقمی مانند n ، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $n+3$ و $n+4$ برابر ۱ نیست؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

پاسخ گزینه ۲ می‌دانیم اگر $(a, b) = d$ باشد، $d | a$ و $d | b$.

$$\begin{cases} d | n+3 \xrightarrow{\times 5} d | 5n+15 \\ d | 5n+4 \end{cases} \xrightarrow{(-)} d | 11 \Rightarrow d = 11$$

فرض می‌کنیم $(5n+4, n+3) = d$ است. داریم:

اگر بخواهیم ب.م.م دو عدد، ۱ نباشد، باید عددها بر ۱۱ بخش پذیر باشند.

$$n+3 = 11k \Rightarrow n = 11k - 3$$

$$10 \leq 11k - 3 \leq 99 \Rightarrow 13 \leq 11k \leq 102 \Rightarrow 2 \leq k \leq 9$$

n عددی طبیعی و دورقمی است. بنابراین:

پس به ازای $8 = 1 + 2 + 9$ عدد دورقمی، ب.م.م دو عدد برابر ۱۱ است.

۱ یک نکته خارج از کتاب که بد نیست بدانید:

برای پیدا کردن تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی یک عدد کافی است عدد را به عوامل اول تجزیه کرده، سپس توان‌ها را با یک جمع کرده، در هم ضرب کنیم.

(برای مثال تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد ۶۰۰ برابر است با:

$$24 = (3+1)(1+1)(2+1) = \text{تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی} \Rightarrow 600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$$

به طور کلی اگر $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ باشد، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی n برابر است با: $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$

۲ از همین نکته در کنکور ۱۴۰۰ دو سؤال آمده است.

کوچک‌ترین مضرب مشترک

عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a, b] = c$ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

(الف) $a | c, b | c$ (یعنی c مضرب هر دو عدد a و b باشد)

(ب) $\forall m > 0; a | m, b | m \Rightarrow c \leq m$ (اگر m مضرب دیگری از a و b باشد، c از اون کوچک‌تر باشد)

برای به دست آوردن ک.م.م دو عدد هر دو عدد را تجزیه می‌کنیم، سپس عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم. به عنوان مثال ک.م.م دو عدد ۳۶ و ۱۲۰ را از این روش به دست می‌آوریم:

$$[36, 120] = [2^2 \times 3^2, 2^3 \times 3 \times 5] = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$$

(برگرفته از کتاب درسی)

تست حاصل عبارت $([72, 48], 120)$ کدام است؟

۶۰ (۴)

۳۶ (۳)

۲۴ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ گزینه ۲ برای به دست آوردن $[72, 48]$ عددها را تجزیه می‌کنیم و عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در هم ضرب می‌کنیم:

$$[72, 48] = [2^3 \times 3^2, 2^4 \times 3] = 2^4 \times 3^2 = 144$$

$$(144, 120) = (2^4 \times 3^2, 2^3 \times 3 \times 5) = 2^3 \times 3 = 24$$

حالا ب.م.م دو عدد ۱۲۰ و ۱۴۴ را به دست می‌آوریم:

(دقت کنید برای به دست آوردن ب.م.م فقط عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در نظر می‌گیریم.)

تست به ازای چند عدد طبیعی مانند x رابطه $[x, 6] = 12$ برقرار است؟

۴ بیشتر از ۴

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$[x, 2 \times 3] = 2^2 \times 3$$

پاسخ گزینه ۲ اگر عددها را تجزیه کنیم، داریم:

خب گفتیم برای به دست آوردن ک.م.م دو عدد باید چه کار کنیم؟ عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک ضرب کنیم. حالا این رابطه را دوباره نگاه کنید:

$$[x, 2 \times 3] = 2^2 \times 3$$

اول بررسی می‌کنیم x چندتا عامل ۲ دارد. اگر x عامل ۲ نداشت یا فقط یک عامل ۲ داشت، با توجه به این که در ک.م.م عوامل مشترک با توان بزرگ‌تر می‌آید و چون در تجزیه عدد ۶ هم فقط یک عامل ۲ وجود دارد آن وقت تعداد عوامل ۲ در ک.م.م دو عدد هم یکی می‌شد. (برای مثال فکر کنید

$$x = 2, \text{ اون وقت ک.م.م. اینه پوری می‌شه: } [2, 6] = [2, 2 \times 3] = 2 \times 3$$





بنابراین چون الان در ک.م.م توان ۲ برابر ۲ است، پس X باید حتماً دو عامل ۲ داشته باشد.

در مورد تعداد عوامل ۳ در تجزیه X هم دقت کنید چون در ک.م.م فقط یک عامل ۳ هست. پس X یا عامل ۳ ندارد یا فقط یک عامل ۳ دارد. (پهن اگر بیشتر داشت اون وقت توک ۴.۴ هم تعداد ۳ها بیشتر می‌شد!) هم چنین در تجزیه X هیچ عامل دیگری به جز ۲ و ۳ وجود ندارد. (پهن اگر داشت توک ۴.۴ شون هم می‌اومد.) بنابراین X دو حالت دارد:

$$x = 2^2 = 4 \text{ و } x = 2^2 \times 3 = 12$$

ویژگی‌های ب.م.م و ک.م.م

این چند ویژگی را حتماً یادتان باشد:

- ۱ اگر a و b دو عدد صحیح باشند به طوری که $a | b$ ، ب.م.م آن‌ها برابر $|a|$ (کوچک‌ترین) و ک.م.م شون برابر $|b|$ (بزرگ‌ترین) می‌شود.

$$a | b \Rightarrow \begin{cases} (a, b) = |a| \\ [a, b] = |b| \end{cases}$$
- ۲ علامت در ب.م.م و ک.م.م تأثیری ندارد. مثلاً $(-2, 6) = (2, 6) = 2$ می‌شود یا $[10, 15] = [10, -15] = 5$ ، پس اگر عددی منفی بود، اصلاً منفی را حذف کنید و بعد ب.م.م و ک.م.م را محاسبه کنید.
- ۳ از عامل مشترک دو عدد، می‌توانیم فاکتور بگیریم، یعنی $(ka, kb) = k(a, b)$ ؛ مثلاً $(6(2, 3) = 6 \times 1 = 6$ ؛ مثلاً $(12, 18) = 6 \times 6 = 36$.
- ۴ اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند (یعنی $(a, b) = 1$)، ک.م.م برابر ضرب آن‌ها می‌شود، یعنی $[a, b] = ab$ ؛ مثلاً $[2, 3] = 6$ یا $[3, 7] = 21$ یا ...
- ۵ اگر p عددی اول باشد و a // p آن‌گاه $(p, a) = 1$.
- ۶ حاصل ضرب ب.م.م و ک.م.م دو عدد با قدرمطلق حاصل ضرب دو عدد برابر است: $(a, b)[a, b] = |ab|$
- ۷ اگر هر مضربی از یکی از اعداد را به دیگری اضافه یا کم کنیم، ب.م.م تغییری نمی‌کند: $(a, b) = d \Rightarrow (a, b \pm ka) = d$

تست حاصل $([4a^2, 8a^2], (2a, 24a^2))$ کدام است؟

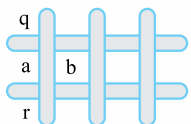
- پاسخ گزینه ۲ با توجه به خاصیت بالا داریم:
- $$2 | a | \quad 2a \quad 8 | a^3 | \quad 4a^2$$
- $$2a^2 | 8a^2 \Rightarrow [4a^2, 8a^2] = |8a^2| = 8 | a^2 |$$
- $$2a | 24a^2 \Rightarrow (2a, 24a^2) = |2a| = 2 | a |$$

تست کدام گزینه نادرست است؟

- پاسخ گزینه ۳ می‌گوید که دو عدد متوالی نسبت به هم اول‌اند، این همیشه درست است. زیرا اگر $(n, n+1) = d$ بگیریم، نتیجه می‌شود: $d | n$ و $d | n+1$ و حالا اگر سمت راستشان را از هم کم کنیم $d | 1$ و $d = 1$ نتیجه می‌شود. حالا با توجه به ویژگی ۴ که در بالا گفتیم، هم درست می‌شود. اما $(2n+1, 2n+3) = d$ را می‌گیریم، پس $d | 2n+1$ و $d | 2n+3$ پس $d | 2$ و در نتیجه $d = 2$ یا $d = 1$ می‌تواند باشد، اما $2n+1$ و $2n+3$ هر دو عدد فرد هستند، پس $d = 2$ نمی‌تواند باشد، یعنی $d = 1$ باید باشد. پس فهمیدیم که ب.م.م دو عدد فرد متوالی هم همیشه برابر ۱ می‌شود. اگر همین‌جوری ۴ را هم برویم $d = 1$ یا $d = 2$ نتیجه می‌شود، ولی چون هر دو عدد زوج هستند، پس هر دو به ۲ بخش‌پذیرند؛ این یعنی ب.م.م دو عدد زوج متوالی همیشه برابر ۲ می‌شود.

روش نردبانی

نکته شماره ۷ را دیدید. از این نکته می‌توان برای پیدا کردن ب.م.م دو عدد استفاده کرد. ببینید! گاهی وقت‌ها که می‌خواهیم ب.م.م دو عدد را پیدا کنیم عددها خوب تجزیه نمی‌شوند و پیدا کردن ب.م.م از راه تجزیه سخت است. در این‌جا می‌توانیم از یک روش دیگری استفاده کنیم که به آن می‌گوییم روش نردبانی.



این روش توی کتاب نیست ولی دوستش فیلی به درد بخور و کمک‌کننده است.

در این روش یک جدول سه‌سطری می‌کشیم. (مثل یک نردبانی که روی زمین افتاده)

سطر اول مربوط به خارج قسمت‌ها، سطر وسط مربوط به عددها و سطر پایین مربوط به باقی‌مانده‌هاست:

عددها را به هم تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت را در بالا و باقی‌مانده را در پایین می‌نویسیم. اگر باقی‌مانده صفر شد آخرین عددی که نوشتیم ب.م.م است. اما اگر باقی‌مانده صفر نشد، باقی‌مانده را می‌بریم در ردیف وسط و الگوریتم را آن قدر تکرار می‌کنیم که باقی‌مانده صفر شود.



مثال بزرگ‌ترین عامل مشترک دو عدد ۳۴۱ و ۴۰۳ را به دست آورید.

پاسخ (این سؤال خیلی شبیه یکی از سؤال‌های کنکور سراسریه!)

q	۱	۵	۲
۴۰۳	۳۴۱	۶۲	م.م.ب
r	۶۲	۳۱	۰

گام اول دو عدد را به هم تقسیم می‌کنیم، باقی‌مانده و خارج قسمت را در جدول می‌نویسیم:

$$\begin{array}{r} 403 \overline{) 341} \\ 342 \quad 1 \\ \hline 62 \end{array}$$

گام دوم چون باقی‌مانده صفر نشده آن را در جدول اعداد قرار می‌دهیم. (سطر دوم)

گام سوم حالا ۳۴۱ را بر ۶۲ تقسیم می‌کنیم و باقی‌مانده و خارج قسمت را پیدا کرده، در جدول قرار می‌دهیم.

$$\begin{array}{r} 341 \overline{) 62} \\ 310 \quad 5 \\ \hline 31 \end{array}$$

گام چهارم چون باقی‌مانده صفر نشد ۳۱ را به سطر دوم می‌بریم.

گام پنجم ۶۲ را بر ۳۱ تقسیم می‌کنیم. باقی‌مانده صفر می‌شود. پس عدد آخر یعنی ۳۱ م.م.ب دو عدد است.

اعداد اول

عدد p را عددی اول می‌گویند هرگاه بر هیچ عدد طبیعی دیگری به جز خودش و ۱ بخش پذیر نباشد. برای مثال ۱۳ یک عدد اول است چون در اعداد طبیعی فقط بر خودش و ۱۳ بخش پذیر است اما ۹ یک عدد اول نیست چون به جز خودش و ۱ بر ۳ نیز بخش پذیر است.

هرگاه حاصل ضرب دو عدد طبیعی a و b برابر یک عدد اول مانند p شود، یکی از آن‌ها ۱ و دیگری p است:

$$ab = p \Rightarrow \begin{cases} a = 1, b = p \\ a = p, b = 1 \end{cases}$$

تست اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a^2 = b^2 + 17$ در این صورت $2a + b$ کدام است؟

۲۸ (۴)

۲۷ (۳)

۲۶ (۲)

۲۵ (۱)

پاسخ گزینه ۲ از نکته‌ای که در بالا گفتیم استفاده می‌کنیم:

$$a^2 = b^2 + 17 \Rightarrow a^2 - b^2 = 17 \Rightarrow (a-b)(a+b) = 17 \Rightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=8 \end{cases} \Rightarrow 2a+b=26$$

حاصل ضرب دو عدد برابر عددی اول شده است.

چند نکته دربارهٔ اعداد اول و اول بودن دو عدد نسبت به هم:

۱) اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $a \nmid p$ آن‌گاه $(p, a) = 1$.

(یعنی مثلاً وقتی $20 \nmid 3$ می‌شه نتیجه گرفت: $(3, 20) = 1$)

۲) هیچ عدد اولی بزرگ‌تر از $n! + 1$ و کوچک‌تر مساوی $n! + n$ وجود ندارد.

(برای مثال هیچ‌کدام از عددهای بزرگ‌تر از $1 + 100!$ و کوچک‌تر مساوی $100! + 100$ اول نیستند مثلاً عدد $100! + 43$ را در نظر بگیریم. این عدد بر 43 بخش پذیره، چون که تو تجزیه $100!$ عامل 43 وجود داره:

$$100! + 43 = \underbrace{100 \times 99 \times \dots \times 43 \times \dots \times 1}_{\text{از } 43 \text{ می‌توان فاکتور گرفت}} + 43$$

۳) هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم به ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۵ دارد. یعنی آن را می‌توان به صورت $6k + 1$ یا $6k + 5$ نوشت.

(پون $6k$ و $6k + 2$ و $6k + 4$ زوج و نمی‌تونه اول باشه. $6k + 3$ هم مقرب ۳ و نمی‌تونه اول باشه. پس فقط $6k + 1$ و $6k + 5$ می‌مونه که ممکنه اول باشه.)

۴) مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم به ۲۴، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. یعنی آن را می‌توان به صورت $p^2 = 24k + 1$ نوشت.

(این نکته خارج از کتابه ولی دوستش ضرر ندره.)



۵) دو تا عدد پشت سر هم نسبت به هم اول اند.

$$((n, n+1) = d \Rightarrow \begin{matrix} d|n \\ d|n+1 \end{matrix} \xrightarrow{\ominus} d|1 \Rightarrow d=2$$

(اثباتش خیلی ساده است):

۶) دو عدد فرد پشت سر هم، نسبت به هم اول اند.

$$((2n+1, 2n+3) = d \Rightarrow \begin{matrix} d|2n+3 \\ d|2n+1 \end{matrix} \xrightarrow{\ominus} d|2 \Rightarrow d=1 \text{ یا } d=3$$

(اینم اثباتش ساده است):

اما چون عددها فردن نمی تونن بر ۲ بخش پذیر باشن.)

۷) اگر p و q دو عدد اول متمایز باشند: $(p, q) = 1$.

(این هم اثباتش آسونه و چون تمرین کتابه فوبه اثباتش رو ببینید. فرض کنید $b=3, c=4$ شون d باشه؛)

$$(p, q) = d \Rightarrow \begin{cases} d|p \Rightarrow d=1 \text{ یا } p \\ d|q \Rightarrow d=1 \text{ یا } q \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} d=1$$

تنها عددی که تو هر دو رابطه صدق می کنه عدد ۱ هستش.)

مثال اگر n عددی طبیعی باشد حاصل هر یک از عبارتهای زیر به ازای چند مقدار n ممکن است عددی اول باشد:

ب) $n^6 + 8$

الف) $3n^2 + 5n + 2$

پاسخ (الف)

یکی از راههای پاسخ دادن به این نوع سؤالها تفکیک روی فرد و زوج بودن عدد است. برای مثال:

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n^2 & \text{زوج} \\ 5n & \text{زوج} \Rightarrow 3n^2 + 5n + 2 = \text{زوج} + \text{زوج} + \text{زوج} \\ 2 & \text{زوج} \end{cases} \text{ اگر } n \text{ زوج باشد.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n^2 & \text{فرد} \\ 5n & \text{فرد} \Rightarrow \text{زوج} + \text{فرد} + \text{فرد} \\ 2 & \text{زوج} \end{cases} \text{ اگر } n \text{ فرد باشد.}$$

یعنی حاصل این عبارت هیچ وقت اول نمی شود.

ب) وقتی یک عبارت را می توان به صورت حاصل ضرب چند عبارت غیر از یک تجزیه کرد آن عبارت دیگر نمی تواند اول باشد:

$$n^6 + 8 \Rightarrow (n^2)^3 + 2^3 = (n^2 + 2)(n^4 - 2n^2 + 4)$$

(ضرب دو عبارت بزرگ تر از یکله پس اول نمی شه هیچ وقت.)

تست اگر p عددی اول باشد به ازای چند مقدار p عبارت $p^2 + 8$ عددی اول است؟

(۴) بیشتر از دو مقدار

(۳) دو مقدار

(۲) یک مقدار

(۱) هیچ مقدار

پاسخ گزینه ۲

گفتیم که مربع هر عدد اول بزرگ تر از ۳ را می توان به صورت $24k + 1$ نوشت.

اول نیست. $p=2 \Rightarrow p^2 + 8 = 12$

اول است. $p=3 \Rightarrow p^2 + 8 = 17$

مضرب ۳ است پس اول نیست. $p > 3 \Rightarrow p^2 + 8 = 24k + 1 + 8 = 24k + 9 = 3(8k + 3)$

داریم:

متباین سازی

⚠ مباحث مربوط به متباین سازی در کتاب درسی نیامده است اما از آن جا که از این مبحث در کنکور سراسری سال ۹۹ دو سؤال آمده، بنابراین پیشنهاد می کنیم آن را یاد بگیریم.

می دانیم اگر دو عدد داشته باشیم و آن ها را بر ب.م.م.شان تقسیم کنیم حاصل های به دست آمده نسبت به هم اول می شوند.

$$\text{برای مثال: } (18, 12) = 6 \Rightarrow \left(\frac{18}{6}, \frac{12}{6}\right) = (3, 2) = 1$$

حاصل تقسیم عددهای a و b بر ب.م.م.شان یعنی d را a' و b' می نامیم. داریم:

$$(a, b) = d \Rightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1, \frac{a}{d} = a', \frac{b}{d} = b'$$



این سه رابطه را خوب یادتان بماند:

① $a = a'd$

② $b = b'd$

③ $(a', b') = 1$

اما این رابطه‌ها به چه دردی می‌خورند؟ در بعضی سؤال‌ها یک رابطه‌هایی براساس ب.م.د دو عدد، ک.م.م دو عدد، ضرب دو عدد، جمع دو عدد و ... داده می‌شود و اطلاعاتی در مورد عددها خواسته می‌شود. کاری که ما در این سؤال‌ها انجام می‌دهیم این است که همهٔ رابطه‌ها را برحسب a' و b' و d می‌نویسیم و معمولاً با استفاده از این که $(a', b') = 1$ است، سؤال حل می‌شود.

خوب است بدانید:

① $(a, b) = d$

② $a + b = a'd + b'd = d(a' + b')$

③ $ab = (a'd)(b'd) = a'b'd^2$

④ $[a, b] = [a'd, b'd] = d[a', b'] = a'b'd$

برای درک بهتر این نکات و آشنایی با این سؤال‌ها به دو سؤال زیر دقت کنید!

تست اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a, b) = 7$ و $[a, b] = 315$ باشد، $a + b$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ گزینه ۲ همان‌طور که گفتیم دو رابطه را برحسب a' و b' و d می‌نویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} (a, b) = 7 \Rightarrow d = 7 \\ [a, b] = 315 \Rightarrow a'b'd = 315 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{با جای‌گذاری}} a'b' = 45$$

حالا حالت‌هایی که ضرب $a'b'$ برابر ۴۵ می‌شود پیدا می‌کنیم. دقت کنید که a' و b' نسبت به هم اول‌اند.

a'	۱	۳	۵
b'	۴۵	۱۵	۹
	✓	غ ق ق	✓

چون $(3, 15) = 3$ ، پس حالت دوم قابل قبول نیست. بنابراین a' و b' دو حالت دارند، پس دو مقدار برای $a + b$ وجود دارد:

$$\left. \begin{array}{l} a' = 1 \\ b' = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow a + b = d(a' + b') = 7 \times 46 = 322$$

$$\left. \begin{array}{l} a' = 5 \\ b' = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow a + b = 7 \times 14 = 98$$

پس $a + b$ می‌تواند دو مقدار مختلف داشته باشد.

تست اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a, b) = 13$ و $a + b = 130$ باشد، حداکثر مقدار ab کدام است؟

۴۲۲۵ (۴)

۲۷۰۴ (۳)

۳۵۴۹ (۲)

۱۵۲۱ (۱)

پاسخ گزینه ۲ دو رابطه را برحسب a' و b' و d می‌نویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} (a, b) = 13 \Rightarrow d = 13 \\ a + b = 130 \Rightarrow d(a' + b') = 130 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{با جای‌گذاری}} a' + b' = 10$$

حالت‌هایی که مجموع دو عدد برابر ۱۰ می‌شود را می‌نویسیم و فقط حالت‌هایی را قبول می‌کنیم که $(a', b') = 1$ باشد:

$a' + b' = 10$		
۱	۹	✓
۲	۸	✗
۳	۷	✓
۴	۶	✗
۵	۵	✗

غیر قابل قبول $(a', b') = 2$
غیر قابل قبول $(a', b') = 2$
غیر قابل قبول $(a', b') = 5$

$$ab = a'b'd^2 = 169a'b'$$

حالا می‌خواهیم ab ماکزیمم شود. می‌دانیم:



سپس باید حالتی را در نظر بگیریم که $a'b'$ حداکثر شود:

$$\begin{aligned} a' &= 1 \Rightarrow ab = 9 \times 169 = 1521 \\ b' &= 9 \\ a' &= 3 \Rightarrow ab = 21 \times 169 = 3549 \checkmark \\ b' &= 7 \end{aligned}$$

قضیه تقسیم و کاربردها

از سال‌های گذشته یادتان هست که در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b ، رابطه مقابل برقرار است:

$$a \overline{) b} \quad \begin{array}{l} q \\ r \end{array} \quad a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

که در آن به a مقسوم، به b مقسوم‌علیه، به q خارج قسمت و به r باقی‌مانده می‌گویند. یعنی در تقسیم a بر b ، اعداد منحصر به فرد q و r وجود دارند که $a = bq + r$ می‌شود. به شرط باقی‌مانده (یعنی $0 \leq r < b$) هم حتماً توجه کنید، در برخی از تست‌ها به آن نیاز پیدا خواهید کرد.

تست در تقسیم عددی بر ۱۹، باقی‌مانده بیشترین مقدار خود را دارد. اگر این عدد دورقمی باشد، حداکثر مقدار آن برابر چند است؟

۹۷ (۱) ۹۸ (۲) ۹۵ (۳) ۹۴ (۴)

پاسخ گزینه ۲ عدد را a می‌نامیم. داریم:

$$a \overline{) 19} \quad \begin{array}{l} q \\ r \end{array} \Rightarrow a = 19q + r, \quad 0 \leq r < 19$$

$a = 19q + 18$ با توجه به این که باقی‌مانده بیشترین مقدار خود را دارد، $r = 18$ است. یعنی:

$a = 19q + 18 < 100 \Rightarrow 19q < 82 \Rightarrow q < 4 \frac{2}{3}$ حالا می‌خواهیم a بزرگ‌ترین عدد دورقمی باشد، بنابراین:

$\Rightarrow q_{\max} = 4 \Rightarrow a = 4 \times 19 + 18 = 94$

تست اگر باقی‌مانده دو عدد a و b بر ۱۱ به ترتیب برابر ۷ و ۳ باشد، باقی‌مانده $2a - 3b$ بر ۱۱ کدام است؟

۹ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴)

پاسخ گزینه ۳

$$a \overline{) 11} \quad \begin{array}{l} q \\ r \end{array} \Rightarrow a = 11q + 7 \xrightarrow{\times 2} 2a = 22q + 14$$

$$b \overline{) 11} \quad \begin{array}{l} q' \\ r' \end{array} \Rightarrow b = 11q' + 3 \xrightarrow{\times 3} 3b = 33q' + 9$$

$$\xrightarrow{-} 2a - 3b = 22q - 33q' + 5 = 11(2q - 3q') + 5$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم $2a - 3b$ بر ۱۱ برابر ۵ است.

توجه کنید در خیلی از این مدل سؤال‌ها می‌شود یک‌راست باقی‌مانده را جایگزین کرد و پاسخ را به دست آورد:

برای مثال در سؤال قبل:

$$\begin{aligned} a &= 7 \\ b &= 3 \end{aligned} \Rightarrow 2a - 3b = 14 - 9 = 5$$

(فقط دقت کنید، که این کار رو وقتی مجازید انجام بیدید که باقی‌مانده را به همون عدد بقواد. مثل همین سؤال که باقی‌مانده a و b رو به ۱۱ داده و باقی‌مانده $2a - 3b$ رو هم بر همون ۱۱ بقواد.)

تست اگر باقی‌مانده a و b بر ۱۹ به ترتیب برابر ۲ و ۵ باشد باقی‌مانده $a^2 + 3ab + 5$ بر ۱۹ کدام است؟

۱۸ (۴) ۵ (۳) ۳ (۲) ۱ (۱)

پاسخ گزینه ۱ از نکته‌ای که گفتیم استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 5 \end{aligned} \Rightarrow a^2 + 3ab + 5 = 4 + 30 + 5 = 39$$

و باقی‌مانده ۳۹ بر ۱۹ برابر ۱ است.



برای پیدا کردن باقی مانده در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b وقتی a منفی باشد، دو کار می توان کرد.

۱) اول خارج قسمت را از فرمول $q = \left[\frac{a}{b} \right]$ به دست می آوریم سپس r را از رابطه $r = a - bq$ پیدا می کنیم.

۲) باقی مانده $|a|$ را بر b به دست می آوریم و آن را r' می نامیم؛ باقی مانده a بر b برابر است با:

$$r = b - r'$$

برای مثال باقی مانده -23 بر 7 را از دو روش پیدا می کنیم:

$$\text{① } q = \left[-\frac{23}{7} \right] = -4 \Rightarrow r = -23 - (7)(-4) = 5$$

$$\text{② } \begin{array}{r} 23 \\ 7 \overline{) 23} \\ \underline{21} \\ 2 \end{array} \Rightarrow r' = 2 \Rightarrow r = 7 - 2 = 5$$

۳) حواستان باشد که این فرمول $q = \left[\frac{a}{b} \right]$ برای پیدا کردن خارج قسمت تقسیم a بر b در کل خیلی چیز به درد بخوری است و در

خیلی از سؤال ها می شود از آن استفاده کرد.

مثال اگر $a = 12k + 7$ باشد، خارج قسمت $5a + 13$ بر 15 را بر حسب k به دست آورید:

$$a = 12k + 7 \Rightarrow 5a = 60k + 35 \Rightarrow 5a + 13 = 60k + 48$$

پاسخ

حالا خارج قسمت این عبارت را بر 15 به دست می آوریم:

$$q = \left[\frac{5a + 13}{15} \right] = \left[\frac{60k + 48}{15} \right] = [4k + 3\frac{2}{3}] = 4k + 3$$

تست اگر باقی مانده و خارج قسمت a بر 14 به ترتیب برابر 5 و q باشد، باقی مانده $3a - 49$ بر 21 برابر و خارج قسمت آن بر حسب q برابر است با

$$2q - 2 \quad \text{④}$$

$$2q - 2 \quad \text{③}$$

$$2q - 1 \quad \text{②}$$

$$2q - 1 \quad \text{①}$$

پاسخ گزینه ۲ با توجه به رابطه داده شده داریم:

$$a \begin{array}{r} 14 \\ \underline{14} \\ q \end{array} \Rightarrow a = 14q + 5 \Rightarrow 3a = 42q + 15 \Rightarrow 3a - 49 = 42q - 34$$

گفتیم برای پیدا کردن خارج قسمت از رابطه $q = \left[\frac{a}{b} \right]$ استفاده می کنیم:

برای پیدا کردن باقی مانده نیز باید باقی مانده $42q - 34$ را بر 21 پیدا کنیم؛ $42q$ که بر 21 بخش پذیر است. کافی است باقی مانده -34 را بر 21 تقسیم کنیم، با توجه به چیزی که گفتیم اول باقی مانده 34 را بر 21 به دست می آوریم:

$$34 \begin{array}{r} 21 \\ \underline{21} \\ 13 \end{array} \Rightarrow r' = 13 \Rightarrow r = 21 - 13 = 8$$

تست اگر $a = 12q + 5$ باشد، خارج قسمت تقسیم $8a - 73$ بر 16 کدام است؟

$$6q - 3 \quad \text{④}$$

$$6q - 2 \quad \text{③}$$

$$8q - 3 \quad \text{②}$$

$$8q - 2 \quad \text{①}$$

پاسخ گزینه ۲

می خواهیم خارج قسمت $8a - 73$ بر 16 به دست آوریم. می دانیم در تقسیم عدد A بر 16 اگر $A = 16q + r$ و $0 \leq r < 16$ باشد، به q خارج قسمت می گوییم. پس باید $8a - 73$ را به صورت مجموع یک مضرب 16 و یک عدد بین صفر تا 15 بنویسیم. داریم:

$$8a - 73 = 96q - 73 = 96q - 48 + 15 = 16(6q - 3) + 15$$

بنابراین خارج قسمت این تقسیم برابر است با: $6q - 3$

البته یک جور دیگر نیز می شود به سؤال پاسخ داد. اول به نکته زیر توجه کنید:

در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت برابر است با:

$$q = \left[\frac{a}{b} \right]$$

بنابراین در تقسیم $96q - 73$ بر 16 ، خارج قسمت برابر است با:

$$\left[\frac{96q - 73}{16} \right] = [6q - 4\frac{5}{16}] = [6q] + [-4\frac{5}{16}] = 6q - 4$$



توجه کنید در رابطه تقسیم یعنی $a = bq + r$ شرط باقی‌مانده یعنی $0 \leq r < b$ بسیار شرط مهمی است و سؤال‌های زیادی با استفاده از همین شرط جواب داده می‌شوند.

تست چند عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۳۰۰ وجود دارد که در تقسیم به ۳۶ باقی‌مانده آن دوسوم خارج قسمتش باشد؟

- ۱۵ (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴)

پاسخ گزینه ۲ عدد را a می‌نامیم. داریم:

$$a \begin{array}{r} \underline{36} \\ q \end{array} \Rightarrow a = 36q + \frac{2}{3}q, 0 \leq \frac{2}{3}q < 36$$

دقت کنید که q حتماً باید مضرب ۳ باشد وگرنه باقی‌مانده کسری می‌شود که امکان‌پذیر نیست. با توجه به شرط سؤال، حدود q را پیدا می‌کنیم:

$$0 \leq \frac{2}{3}q < 36 \Rightarrow 0 \leq q < 54 \quad (I)$$

از طرفی a باید یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۳۰۰ باشد، بنابراین:

$$36q + \frac{2}{3}q > 300 \Rightarrow \frac{11 \cdot q}{3} > 300 \Rightarrow q > 81/1 \quad (II)$$

با توجه به دو رابطه (I) و (II) داریم: $9 \leq q < 54$ و چون q مضرب ۳ است، می‌توان نوشت: $9 \leq q < 54 \Rightarrow 9 \leq 3k < 54 \Rightarrow 3 \leq k < 18$

پس به ازای $k \in \{3, 4, \dots, 17\}$ رابطه برقرار است. تعداد اعضای این مجموعه برابر است با: $17 - 3 + 1 = 15$

اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو بر n بخش‌پذیر باشند، باقی‌مانده نیز همواره مضرب n است.

تست اگر a در تقسیم به ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ داشته باشد، باقی‌مانده $a+1$ در تقسیم بر ۱۵ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- ۱۵ (۴) ۵ (۳) ۴ (۲) ۶ (۱)

پاسخ گزینه ۲ a در تقسیم بر ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد، بنابراین $a = 6k + 2$ ؛ حالا باید باقی‌مانده $a+1$ را بر ۱۵ به دست آوریم:

$$6k + 2 \begin{array}{r} \underline{15} \\ q \end{array} \Rightarrow 6k + 2 = 15q + r$$

با توجه به این‌که $6k + 2$ و ۱۵ هر دو مضرب ۳ هستند پس r نیز باید مضرب ۳ باشد، یعنی $r = 3r'$. از طرفی چون $0 \leq r < 15$ است، پس:

$$0 \leq 3r' < 15 \Rightarrow 0 \leq r' < 5 \Rightarrow r' = 0, 1, 2, 3, 4$$

پس باقی‌مانده ۵ حالت می‌تواند داشته باشد.

یک مدل از سؤال‌های الگوریتم تقسیم وجود دارد که نمونه‌اش در تمرین‌های کتاب درسی نیز آمده است و به این صورت است که باقی‌مانده تقسیم یک عدد را بر دو عدد مختلف به شما می‌دهند و باقی‌مانده آن را بر عدد دیگری (که معمولاً حاصل ضرب اون دو تا عدد) می‌خواهد. به یک نمونه از این سؤال‌ها توجه کنید.

تست اگر باقی‌مانده a در تقسیم به عددهای ۸ و ۹ به ترتیب برابر ۵ و ۷ باشد، باقی‌مانده a بر ۷۲ کدام است؟

- ۵۹ (۱) ۶۱ (۲) ۶۹ (۳) ۷۱ (۴)

پاسخ گزینه ۲ با توجه به فرمول قضیه تقسیم، داریم:

$$\begin{cases} a = 8q + 5 \xrightarrow{\times 9} 9a = 72q + 45 \\ a = 9q' + 7 \xrightarrow{\times 8} 8a = 72q' + 56 \end{cases}$$

اگر این دو تا را از هم کم کنیم $11 - 72q = a = 72q' - 11$ باقی‌مانده، -11 نمی‌تواند باشد، چون باقی‌مانده منفی نیست، پس باید یک دسته ۷۲ تایی باز کنیم تا باقی‌مانده مثبت بشود، پس باقی‌مانده برابر $61 = 72 - 11$ می‌شود. در واقع انگار این کار را کردیم:

$$a = 72(q'' - 1) + 72 - 11 = 72(q'' - 1) + 61$$

افراز مجموعه \mathbb{Z} به کمک تقسیم

می‌دانیم در تقسیم بر ۲، باقی‌مانده ممکن است ۱ یا صفر بشود، پس عددها یا فردند و یا زوج؛ از این‌جا مجموعه عددهای صحیح را می‌توانیم به دو دسته افراز کنیم؛ عددهای فرد که آن را به صورت $2k + 1$ نشان می‌دهیم و عددهای زوج که آن را با $2k$ نمایش می‌دهیم.

\mathbb{Z}	
$2k$	$2k + 1$

به همین ترتیب در تقسیم به ۳، مجموعه \mathbb{Z} به سه دسته افزایش می‌شود:

۳k: عددهای مضرب ۳

۳k + ۱: عددهایی که در تقسیم به ۳، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارند.

۳k + ۲: عددهایی که در تقسیم به ۳، باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارند.

\mathbb{Z}		
۳k	۳k + ۱	۳k + ۲

و به همین ترتیب در تقسیم به m، مجموعه \mathbb{Z} به m دسته افزایش می‌شود.

mk	mk + ۱	mk + ۲	...	mk + (m - ۱)
عددهای مضرب m	عددهایی که در تقسیم به m، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارند.	عددهایی که در تقسیم به m، باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارند.		عددهایی که در تقسیم به m، باقی‌مانده‌ای برابر m - ۱ دارند.

تست اگر P یک عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد که در تقسیم به ۶، باقی‌مانده‌اش برابر ۱ نباشد، باقی‌مانده آن در تقسیم به ۶ کدام است؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

پاسخ گزینه ۲: می‌دانیم در تقسیم به ۶، مجموعه \mathbb{Z} را به ۶ مجموعه می‌توانیم افزایش کنیم. پس:

اول نیست \rightarrow مضرب ۶ است $6k$

$$6k + 1$$

اول نیست \rightarrow زوج است $6k + 2$

اول نیست \rightarrow مضرب ۳ است $6k + 3$

اول نیست \rightarrow زوج است $6k + 4$

$$6k + 5$$

همان‌طور که دیدید، تنها عددهایی به فرم $6k + 1$ و $6k + 5$ می‌توانند اول باشند که با توجه به این که سؤال گفته‌شده، باقی‌مانده عدد در تقسیم به ۶، برابر ۱ نیست، بنابراین باقی‌مانده آن در تقسیم به ۶، برابر ۵ به دست می‌آید.

تست اگر عدد صحیحی نه زوج باشد و نه بر ۳ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده آن در تقسیم به ۱۲ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۵ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ گزینه ۲: می‌دانیم در تقسیم به ۱۲ مجموعه \mathbb{Z} به ۱۲ مجموعه زیر افزایش می‌شود. بررسی می‌کنیم چندتای آن‌ها نه زوج‌اند و نه مضرب ۳.

مضرب ۳	زوج	زوج	مضرب ۳	زوج	زوج	زوج	زوج
۱۲k	۱۲k + ۹	۱۲k + ۶	۱۲k + ۳	۱۲k + ۷	۱۲k + ۴	۱۲k + ۱۰	۱۲k + ۱۱
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
زوج	زوج	زوج	زوج	زوج	زوج	زوج	زوج
۱۲k + ۱	۱۲k + ۱۱	۱۲k + ۵	۱۲k + ۸	۱۲k + ۲	۱۲k + ۱۰	۱۲k + ۱	۱۲k + ۱۱
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
زوج	زوج	زوج	زوج	زوج	زوج	زوج	زوج
۱۲k + ۲	۱۲k + ۱۱	۱۲k + ۵	۱۲k + ۸	۱۲k + ۲	۱۲k + ۱۰	۱۲k + ۱	۱۲k + ۱۱
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
زوج	زوج	زوج	زوج	زوج	زوج	زوج	زوج

پس باقی‌مانده عدد در تقسیم به ۱۲ فقط می‌تواند برابر ۱ یا ۵ یا ۷ یا ۱۱ باشد.

در مورد پیدا کردن باقی‌مانده مربع عددهای کامل به عددهای مختلف نیز می‌توان از افزایش استفاده کرد. البته جلوتر می‌بینیم که با استفاده از همنهشتی این سؤال‌ها را راحت‌تر می‌توان پاسخ گفت. اما بد نیست این‌جا هم کمی ماجرا را بررسی کنیم:

مثال ثابت کنید مربع هر عدد صحیح در تقسیم به ۵، یا باقی‌مانده‌ای برابر صفر دارد یا باقی‌مانده‌ای برابر ۱ و یا باقی‌مانده‌ای برابر ۴.

پاسخ در تقسیم به ۵ مجموعه \mathbb{Z} به ۵ مجموعه افزایش می‌شود. در هر پنج حالت مربع عدد را بررسی می‌کنیم:

$$5k \xrightarrow{\text{به توان } 2} 25k^2$$

بر ۵ بخش‌پذیر است.

$$5k + 1 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 25k^2 + 10k + 1$$

بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

$$5k + 2 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 25k^2 + 20k + 4$$

بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۴ دارد.

$$5k + 3 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 25k^2 + 30k + 9$$

بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۴ دارد. (چون باقی‌مانده ۹ به ۵ برابر چهار)

$$5k + 4 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 25k^2 + 40k + 16$$

بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. (چون باقی‌مانده ۱۶ به ۵ برابر یک)

پس هر عدد مربع کامل در تقسیم به ۴ باقی‌مانده‌ای برابر صفر یا ۱ دارد.

البته برای راحتی کار فقط می‌شود خود باقی‌مانده‌ها را به توان ۲ رساند.

$$5k \Rightarrow 0$$

$$5k + 1 \Rightarrow 1^2 = 1$$

$$5k + 2 \Rightarrow 2^2 = 4$$

$$5k + 3 \Rightarrow 3^2 = 9 \text{ دارد. } 4 \text{ برابر } 4 \text{ دارد.}$$

$$5k + 4 \Rightarrow 4^2 = 16 \text{ دارد. } 1 \text{ برابر } 1 \text{ دارد.}$$



تست عددی صحیح بر ۷ بخش پذیر نیست. باقی ماندهٔ مربع آن بر ۷ چند حالت می تواند داشته باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ گزینهٔ ۳

مثل مثال قبل عمل می کنیم و فقط باقی مانده ها را به توان ۲ می رسانییم. چون عدد بر ۷ بخش پذیر نیست حالت $7k$ را نمی نویسیم.

$$7k+1 \Rightarrow 1$$

$$7k+2 \Rightarrow 4$$

باقی مانده ۹ بر ۷ برابر ۲ است. $7k+3 \Rightarrow 9$

باقی مانده ۱۶ بر ۷ برابر ۲ است. $7k+4 \Rightarrow 16$

باقی مانده ۲۵ بر ۷ برابر ۴ است. $7k+5 \Rightarrow 25$

باقی مانده ۳۶ بر ۷ برابر ۱ است. $7k+6 \Rightarrow 36$

پس باقی ماندهٔ مربع عدد بر ۷ فقط می تواند برابر ۱ یا ۲ یا ۴ باشد. یعنی سه حالت دارد.

همان طور که در بالا دیدیم در تقسیم به ۳ مجموعهٔ \mathbb{Z} به سه مجموعه افزایش می شود.

\mathbb{Z}		
$3k$	$3k+1$	$3k+2$

بنابراین به راحتی می شود فهمید از هر سه عدد متوالی حتماً یکی بر ۳ بخش پذیر است، یکی بر ۳ باقی مانده ای برابر ۱ دارد و یکی بر ۳ باقی مانده ای برابر ۲. (مثلاً ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ در نظر بگیرین؛ ۲۰ بر ۳ باقی مانده اش ۲ می شه، ۲۱ به ۳ بخش پذیره و ۲۲ به ۳ باقی مانده اش ۱ می شه) و چون از هر سه عدد متوالی یکی حتماً زوج است، می توان نتیجه گرفت:

ضرب ۳ عدد متوالی بر ۶ بخش پذیر باشد.

این قضیه را می توان در حالت کلی نیز تعمیم داد:

ضرب n عدد متوالی همواره بر $n!$ بخش پذیر است.

پرسش های چهارگزینه ای

ویژگی های بخش پذیری

سوال های آغازین این بخش اگرچه ممکن است ساده به نظر برسند اما سوال های مفهومی هستند و یادگرفتنشان ضروری است.

۶۹- اگر a ، b و c سه عدد طبیعی باشند، کدام گزینه درست نیست؟

$$a | b \wedge a | c \Rightarrow a | bc \quad (۲)$$

$$a | b \wedge b | c \Rightarrow a | c \quad (۱)$$

$$a | b \wedge a | c \Rightarrow a | b+c \quad (۴)$$

$$a | bc \Rightarrow a | c \vee a | b \quad (۳)$$

۷۰- چندتا از رابطه های زیر درست است؟

$$a | b \Rightarrow a+c | b+c \quad (پ)$$

$$bc | a \Rightarrow b | a \wedge c | a \quad (ب)$$

$$a | b+c \Rightarrow a | b \vee a | c \quad (الف)$$

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۷۱- اگر $a | c$ و $ab | c$ ، کدام گزینه درست است؟

$$a^2 | c \quad (۴)$$

$$a-b | c \quad (۳)$$

$$a+b | c \quad (۲)$$

$$b | c \quad (۱)$$

(۴۰.ق)

(۴۰.ق)

$$a-b | b \quad (۴)$$

$$a | b \quad (۳)$$

$$b | a-b \quad (۲)$$

$$a | a-b \quad (۱)$$

۷۲- اگر $a-b | a$ ، آن گاه:

۷۳- اگر $a+b | a+c$ و $a+b | 2c$ ، کدام نتیجه گیری درست نیست؟

$$a+b | 2b \quad (۴)$$

$$a+b | 2a \quad (۳)$$

$$a+b | 2b+c \quad (۲)$$

$$a+b | a-c \quad (۱)$$

۷۴- از رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ کدام نتیجه گیری درست است؟

$$b+c | a^2 \quad (۴)$$

$$a-b | c^2 \quad (۳)$$

$$c | a-b \quad (۲)$$

$$b | a+c \quad (۱)$$

۷۵- به ازای چند عدد صحیح، هر دو رابطهٔ $6n-5 | n^2$ و $n^2 | 6n-5$ برقرار است؟

(۴) چنین n ای وجود ندارد.

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۷۶- به ازای چند مقدار x هر دو رابطهٔ $x^3 - 3x^2 + 2x + 1 | x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ برقرار است؟

(۴) بیشتر از ۲

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۷۷- عدد $43!$ بر کدام یک از عددهای زیر، بخش پذیر نیست؟

۴۹ (۴)

۴۸ (۳)

۴۷ (۲)

۴۶ (۱)



(دافل ۱۴۰۰)

۷۸- عدد $20! + 12$ بر چند عدد طبیعی یکرقمی بخش پذیر نیست؟

- ۵ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۷۹- برای هر عدد طبیعی n داریم $n! = 2^{a_1} \times 3^{a_2} \times 5^{a_3} \times \dots$ مقدار $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ به ازای $n = 20$ ، کدام است؟

- ۲۸ (۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۴۰ (۴)

برای پاسخ گویی به این نوع سؤال‌ها بد نیست به بخش «مضرب و مقسوم علیه» در درس نامه نگاه کنید.

۸۰- اگر $12 \mid x$ و $12 \mid y$ ، کدام گزینه درست نیست؟

- ۱) $2y \mid x$ ۲) $4 \mid y$ ۳) $x \mid 24$ ۴) $2x \mid y$

۸۱- به ازای چند عدد صحیح مانند x ، هر دو رابطه $84 \mid x$ و $4 \mid x$ برقرار است؟

- ۴ (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴)

۸۲- از رابطه‌های $a \mid 2$ و $ab = 60$ ، کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

- ۱) $a = 2$ ۲) $a \mid 30$ ۳) $b = 30$ ۴) $b \mid 30$

۸۳- اگر a و b دو عدد طبیعی و دو رابطه $a \mid b$ و $2a \mid b$ هر دو درست باشند، در این صورت:

- ۱) همواره $a = b$ ۲) $a = b$ یا $a = 2b$ ۳) $a = b$ یا $2a = b$ ۴) $a = 2b$ یا $2a = b$

۸۴- اگر $x \in \{1, 2, \dots, 20\}$ باشد به ازای چند مقدار x رابطه $x^2 - 1$ بر ۱۳ بخش پذیر است؟

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۵- تعداد اعداد پنج رقمی مضرب ۱۸ که مربع کامل هستند، کدام است؟ ($\sqrt{10} \approx 3.16$)

- ۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷ ۴) ۳۸

۸۶- تعداد اعداد سه و چهار رقمی مضرب ۹ که مکعب کامل باشند، کدام است؟ ($\sqrt{10} \approx 3.16$)

- ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

برای پاسخ گویی به این سؤال‌ها به نکته \Rightarrow دقت کنید.

۸۷- اگر $2x^2 \mid 3y$ ، کدام نتیجه گیری نادرست است؟

- ۱) $2x^2 \mid y$ ۲) $x^2 \mid 3y$ ۳) $x \mid 3y$ ۴) $x^2 \mid 6y^2$

۸۸- به ازای چند مقدار صحیح a ، رابطه $a^2 + b^2 \mid a^2 b^2$ درست است؟

- ۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) بی شمار

۸۹- اگر $a^3 \mid b^2$ ، کدام یک از رابطه‌های زیر درست نیست؟

- ۱) $a \mid b$ ۲) $a^5 \mid b^4$ ۳) $a^6 \mid b^5$ ۴) $a^2 \mid b$

۹۰- اگر از رابطه $x^2 \mid y^m$ بتوانیم نتیجه بگیریم $x^5 \mid y^{2m-5}$ ، کمترین مقدار m کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

توجه کنید در قبلی از سؤال‌های عاقد کردن تلاش ما بر آن است که سمت راست را از متغیر تبدیل به یک عدد کنیم! این مدل سؤال‌ها که باید یک متغیر را حذف کنید از سؤال‌های پر تکرار در آزمون‌ها به حساب می‌آیند.

۹۱- اگر $a > 1$ ، $a \mid 7k + 4$ و $a \mid 8k + 3$ در این صورت:

- ۱) a عددی اول است. ۲) a مربع کامل است. ۳) a مضرب ۵ است. ۴) a مضرب ۷ است.

(برگرفته از کتاب درسی)

(برگرفته از کتاب درسی)

۹۲- اگر هر دو کسر $\frac{6b+5}{a+1}$ و $\frac{5b+2}{a+1}$ عددهایی صحیح باشند، a چند مقدار صحیح می‌تواند باشد؟

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

(برگرفته از کتاب درسی)

۹۳- اگر از دو رابطه $a \mid 7m + x$ و $a \mid 6m + 5$ بتوان نتیجه گرفت که $a = \pm 1$ است، x کدام است؟

- ۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

(برگرفته از کتاب درسی)

۹۴- اگر دو عدد $m + 1$ و $m^2 - 2$ همواره بر a بخش پذیر باشد، a چند مقدار صحیح مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

۹۵- اگر $10a + 3b \mid 3a + 4b$ آن‌گاه کدام یک از عبارت‌های زیر بر $3a + 4b$ بخش پذیر است؟

- ۱) $31a$ ۲) $49a$ ۳) $a + 2b$ ۴) $b - 2a$



۹۶- اگر $a|b+1$ و $a|c+2$ ، کدام یک از عبارتهای زیر همواره بر a بخش پذیر است؟

- (۱) $bc-1$ (۲) $bc-2$ (۳) $bc+1$ (۴) $bc+2$

۹۷- اگر $5k-1$ و $4k+3$ ، آن گاه کدام یک از گزینههای زیر درست است؟

- (۱) $35|20k^2-11k+3$ (۲) $35|20k^2-11k-3$ (۳) $35|15k^2-11k+3$ (۴) $35|15k^2-11k-3$

(برگرفته از کتاب درسی)

۹۸- اگر $2n+1$ ، عبارت $14n^2+19n+6$ همواره بر کدام عدد زیر، بخش پذیر است؟ ($n \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۱۵ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) ۳۵

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۹۹- اگر $a+2b$ و $3|a^2+kab-5b^2$ ، آن گاه k کدام عدد می تواند باشد؟

- (۱) -۵ (۲) -۴ (۳) -۳ (۴) -۱

(کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

۱۰۰- اگر $4x-3x^2-x^3$ مضرب ۱۱ باشد، آن گاه مجموع ارقام بزرگترین عدد طبیعی دورقمی x کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۱۰۱- اگر a ، عضوی از مجموعه $A = \{2^n | n \in \mathbb{N}\}$ باشد، آن گاه به ازای چند مقدار a ، عدد طبیعی مانند k می توان یافت به گونه ای که رابطه $a|k^2+2$ برقرار باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱۰۲- اگر $a+3b+k$ و $11|a+4b+3$ و $11|5a+4b+3$ ، آن گاه کمترین مقدار طبیعی k کدام است؟ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۰۳- اگر $a+3b$ و $7|b$ ، به ازای چند مقدار k از مجموعه $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x \leq 7\}$ ، رابطه $7|2a+kb$ لزوماً برقرار است؟ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

معادله های عادکردنی

۱۰۴- به ازای چند مقدار طبیعی n رابطه $5n+3|n+2$ برقرار است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشتر از ۲

۱۰۵- بزرگترین مقدار x که به ازای آن رابطه $5x+7|3x+2$ برقرار است، کدام یک از عددهای زیر را می شمارد؟

- (۱) ۲۲ (۲) ۲۳ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵

۱۰۶- چند نقطه روی منحنی $2(x+y) = yx+3$ وجود دارد که هر دو مؤلفه آن، عددهایی طبیعی باشند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۰۷- به ازای چند مقدار m ، عبارت $9m+2$ بر $5m+3$ بخش پذیر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) بیشتر از ۴

۱۰۸- به ازای چند مقدار طبیعی مانند n ، رابطه $4n^2+5n+4|2n+1$ برقرار است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۱۰۹- به ازای چند عدد صحیح مانند x ، حاصل کسر $\frac{x+1}{x^2+1}$ عددی صحیح است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بیشتر از ۳

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱۱۰- چند مقدار صحیح n وجود دارد به گونه ای که $n+6$ بر n^2+2 بخش پذیر باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۱۱۱- به ازای چند عدد سه رقمی طبیعی، مانند n ، رابطه $2^n|2^n$ برقرار است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۱۲- به ازای چند عدد طبیعی، رابطه $2^n|2^n$ برقرار است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) بی شمار

(برگرفته از کتاب درسی)

باقی مانده مربع کامل بر ۸

۱۱۳- باقی مانده a بر ۴، برابر ۳ است باقی مانده a^2 بر ۸ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۵

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۱۴- اگر a و b دو عدد صحیح باشند، به طوری که $a = 4k+3$ و $b = 6k'+1$ ، باقی مانده a^2+b^2 بر ۸ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۷

۱۱۵- کدام یک از عددهای زیر، مربع کامل است؟

- (۱) ۵۳۳۵۹ (۲) ۵۳۳۶۱ (۳) ۵۳۳۶۳ (۴) ۵۳۳۶۵

۱۱۶- دو عدد متوالی را به توان ۳ رسانده و از هم کم می‌کنیم، سپس حاصل را به توان ۲ می‌رسانیم. باقی‌مانده آن در تقسیم به ۸ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) بستگی به اعداد ممکن است هر سه گزینه درست باشد.

۱۱۷- اگر a, b و c سه عدد طبیعی باشند، به طوری که $abc = 3^{97}$ باشد، باقی‌مانده $a^2 + 2b^2 + 3c^2$ بر ۸ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۶

۱۱۸- اگر a عددی صحیح و زوج باشد و $a + 3 | b$ ، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم عدد $a^3 + b^2 - 3$ بر ۸ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) صفر

۱۱۹- اگر x زوج باشد، باقی‌مانده x^2 بر ۸ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲۰- اگر a و b دو عدد صحیح فرد باشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین عددی که $a^2 - b^2$ همواره بر آن بخش‌پذیر است، کدام است؟

- (۱) ۸۰ (۲) ۴۰ (۳) ۹۶ (۴) ۱۶

۱۲۱- اگر $a + 3 | b + 4$ و b عددی صحیح و فرد باشد، باقی‌مانده $a^2 + 2a + b^2 + 3$ بر ۸ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

بخش‌پذیری به کمک اتحادها

۱۲۲- عدد $9 \times 3^4 - 4 \times 2^{10}$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر نیست؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۳۷

۱۲۳- کدام یک از گزینه‌های زیر به ازای هر عدد صحیح مانند n برقرار است؟

- (۱) $n^2 + 2 | n^2 + 4$ (۲) $n^2 + 2 | n^4 + 8$ (۳) $n^2 + 2 | n^2 + 1$ (۴) $n^2 + 2 | n^6 + 8$

۱۲۴- عدد $7^{26} + 3^{29}$ بر کدام یک از عددهای زیر بخش‌پذیر است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۷ (۳) ۱۹ (۴) ۲۳

۱۲۵- عدد $3^{18} - 2^{42}$ بر کدام یک از عددهای زیر بخش‌پذیر نیست؟

- (۱) ۵ (۲) ۳۱ (۳) ۶۱ (۴) ۱۰۱

۱۲۶- به ازای کدام مقدار n رابطه $7^n + 1 | 25$ برقرار است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۲۷- به ازای کدام مقدار n عبارت $5^n - 2^n$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است؟

- (۱) ۸۲ (۲) ۸۳ (۳) ۸۴ (۴) ۸۵

۱۲۸- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۶۰ مانند n رابطه $3^n + 1 | 28$ برقرار است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

ب.م.م

۱۲۹- مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۱۴۴ و ۱۸۰ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۱۳۰- اگر $a | b$ و عددهای a و b هر دو عددهای منفی باشند، حاصل (a, b) و $(a, 0)$ به ترتیب کدام است؟

- (۱) $-a, -a$ (۲) $a, -a$ (۳) $-a, -b$ (۴) $a, -b$

۱۳۱- اگر $d = (663, 187)$ باشد، $2d + 1$ بر کدام بخش‌پذیر است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۷

۱۳۲- اگر $(3m, 6m^2) = 12$ باشد:

- (۱) $m = 4$ (۲) هر کدام از مضارب ۴ می‌تواند باشد.
(۳) $m = 6$ (۴) m هر عددی به فرم $4k + 2$ می‌تواند باشد.

۱۳۳- اگر $(a^2, b^2) - (5a, 5b) = 14$ باشد، بزرگ‌ترین شمارنده دو عدد a و b کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۴ (۳) ۲۱ (۴) ۲۸

۱۳۴- کدام گزینه درست نیست؟

- (۱) $(m, m+1) = 1$ (۲) $(4m+1, 4m+3) = 1$ (۳) $(5m+1, 5m+3) = 1$ (۴) $(6m+3, 6m+5) = 1$

۱۳۵- اگر $(a, b) = 36$ باشد، به ازای چند عدد طبیعی مانند x هر دو رابطه $a | x$ و $x | b$ برقرار است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰





۱۳۶- اگر a زوج و b فرد باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱) $(a, b) = 1$ (۲) $(a, b+1) = 2$ (۳) $(a, 7) = 1$ (۴) $(a-b, 2) = 1$

۱۳۷- اگر $(a, 12) = 1$ و a عددی طبیعی یک‌رقمی باشد، a چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۳۸- اگر $d = (4n+1, 18)$ باشد؛ d چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۳۹- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی مانند n ، اعداد $3-n$ و $13-n$ نسبت به هم اول نیستند؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۹۲ (۴) ۹۳

۱۴۰- در مجموعه اعداد طبیعی اگر $d = (3n^2 - 2n + 6, 3n + 5)$ و $d \neq 1$ باشد، عدد d کدام است؟

- (۱) ۴۱ (۲) ۴۳ (۳) ۴۷ (۴) ۵۳

۱۴۱- حاصل $(20!, 19! - 18!)$ کدام است؟

- (۱) $18!$ (۲) $2 \times 18!$ (۳) $19!$ (۴) $2 \times 19!$

۱۴۲- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی مانند n رابطه $(n, 24) = 12$ برقرار است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۴۳- اگر $(6a, 10b) = 44$ باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $(a, b) = 11$ (۲) a مضرب ۵ نیست. (۳) b بر ۶۶ بخش‌پذیر است. (۴) $a+b$ مضرب ۴۴ است.

۱۴۴- a و b نسبت به هم اول‌اند. اگر $a-b \mid c$ آنگاه (c, a) کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $|a|$ (۳) $|b|$ (۴) $|c|$

۱۴۵- به ازای چند عدد طبیعی و دورقمی n ، دو عدد به صورت $25n+9$ و $11n+4$ نسبت به هم اول‌اند؟

- (۱) ۸۶ (۲) ۸۷ (۳) ۸۹ (۴) ۹۰

۱۴۶- اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n ، دو عدد $7+12n$ و $2-5n$ نسبت به هم اول نباشند، آنگاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

- (۱) ۵۹ (۲) ۶۷ (۳) ۸۳ (۴) ۸۹

۱۴۷- به ازای چند عدد طبیعی n ، هر دو عدد $5+7n$ و $2+11n$ مقسوم‌علیه مشترک برابر ۳ دارند؟

- (۱) هیچ عدد (۲) یک عدد (۳) دو عدد (۴) بی‌شمار عدد

۱۴۸- برای چند عدد n از مجموعه $\{1, 42, \dots, 100\}$ حاصل $(n+2, 7n+1)$ برابر ۱ نمی‌شود؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۴۹- به ازای مقادیر مختلف $a > 3$ بزرگ‌ترین مقدار بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $3+15a$ و $12+15a$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۵

۱۵۰- اگر به ازای عدد صحیح k ، $d = (2k-3, k^2+6k-1)$ و $d \neq 1$ باشد، آنگاه مقدار d کدام است؟

- (۱) ۳۳ (۲) ۴۱ (۳) ۴۷ (۴) ۵۳

۱۵۱- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر مساوی ۳۰ مانند n رابطه $(n, 10) = 2$ برقرار است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵

۱۵۲- تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح $x = 2^m \times 5^n$ از تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت صحیح $\frac{x}{4}$ ، ۱۲ واحد بیشتر است. حداقل مقدار x ، کدام است؟

- (۱) ۶۴۰ (۲) ۸۰۰ (۳) ۱۰۰۰ (۴) ۱۲۸۰ (دافل ۱۴۰۰)

۱۵۳- اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد صحیح $x = 6^m \times 10^n$ ، ۳۵ واحد از تعداد مقسوم‌علیه‌های $15x$ کم‌تر باشد، اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار ممکن برای x ، کدام است؟

- (۱) ۱۲۹۶ (۲) ۲۳۰۴ (۳) ۶۴۰۰ (۴) ۸۷۰۴ (فارج ۱۴۰۰)

۱۵۴- دو عدد $A = 2^3 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2$ و $B = 2^5 \times 3^2 \times 5^p \times 11$ دارای ۲۳ مقسوم‌علیه مشترک و مثبت و غیریک هستند. تعداد تمام مقسوم‌علیه‌های مثبت کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد کدام است؟

- (۱) ۳۶۰ (۲) ۴۸۰ (۳) ۵۴۰ (۴) ۷۲۰

۱۵۵- a و b نسبت به هم اول‌اند. ب.م.م دو عدد $8a+5b$ و $5a+3b$ کدام است؟

- (۱) فقط ۱ (۲) ۱ یا ۳ (۳) ۱ یا ۵ (۴) ۱ یا ۷

ک.م.م

۱۵۶- کوچک‌ترین عضو مجموعه $\{x \in \mathbb{N} : 6 \mid x, 8 \mid x\}$ چه مجموع ارقامی دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰ (برگرفته از کتاب درسی)

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۵۷- اگر $[a, b] = a$ باشد، حاصل (a, b) کدام است؟ (b و a دو عدد طبیعی اند).
 (۱) a (۲) b (۳) ۱ (۴) ab

۱۵۸- حاصل $[(341, 403) + 1, 112]$ چه مجموع ارقامی دارد؟
 (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۱۵۹- با توجه به نمادهای «بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک» عدد $[154, (429, 627)]$ کدام است؟
 (۱) ۴۶۲ (۲) ۴۷۸ (۳) ۵۰۶ (۴) ۹۲۴

(۹۸)

۱۶۰- چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که به هر سه عدد ۱۵، ۲۱ و ۳۵ بخش‌پذیر باشد؟
 (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۱۶۱- به ازای چند عدد صحیح n، ب.م.م و ک.م.م دو عدد ۸ و $n^2 - 1$ برابر است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) بی‌شمار

۱۶۲- حاصل $([a^x, a^y], a^z)$ کدام است؟ ($a \in \mathbb{N}$)
 (۱) a^x (۲) a^y (۳) a^z (۴) a^y

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۶۳- حاصل $([3a, 12a^2], [4a, 8a])$ کدام است؟
 (۱) a (۲) $|a|$ (۳) $3|a|$ (۴) $4|a|$

۱۶۴- اگر داشته باشیم $3x|y|$ حاصل $([x, y], (3, y))$ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) $|x|$ (۳) $|y|$ (۴) $3|y|$

۱۶۵- a و b دو عدد طبیعی هستند. کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) $(a, b), [a, b] = (a, b)$ (۲) $[a, (a, b)] = (a, b)$ (۳) $(b, (a, b)) = (a, b)$ (۴) $(a, [a, b]) = a$

(کانون فرهنگی آموزش ۹۶)

۱۶۶- اگر $a|b^2$ و $a^2|c$ ، آن‌گاه حاصل $[a^2b, ab^2c]$ کدام است؟ ($a, b, c \in \mathbb{N}$)
 (۱) b^2c (۲) abc (۳) a^2b (۴) ab^2c

۱۶۷- اگر $(m, 6) = 3$ حاصل $[5m^2, 90]$ کدام است؟
 (۱) $5m^2$ (۲) $10m^2$ (۳) $30m^2$ (۴) $90m^2$

۱۶۸- به ازای چند عدد طبیعی m رابطه $[m, 120] = 600$ برقرار است؟
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۶۹- اگر a عددی فرد و طبیعی باشد، حاصل $[(a+1)^4, 8], (a-1)(a+1)$ کدام است؟
 (۱) ۸ (۲) $a^2 - 1$ (۳) $(a+1)^4$ (۴) $4a + 4$

متباین‌سازی

۱۷۰- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a, b) = 5$ و $ab = 500$ باشد، کم‌ترین مقدار $a + b$ کدام است؟
 (۱) ۴۵ (۲) ۶۰ (۳) ۷۵ (۴) ۱۰۵

۱۷۱- اگر $(a, b) = 7$ باشد، حاصل $(\frac{a}{7}, [a, b])$ کدام است؟
 (۱) ۷ (۲) $|a|$ (۳) $|b|$ (۴) $7|a|$

۱۷۲- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۷ و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها برابر ۴۲۰ است. مجموع دو عدد کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟ (۹۰)
 (۱) ۱۳۳ (۲) ۲۲۴ (۳) ۱۶۱ (۴) ۱۱۹

۱۷۳- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a, b) = 8$ و $a + b = 104$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار برای $[a, b]$ کدام است؟ (۴۰.ق)
 (۱) ۳۵۲ (۲) ۳۴۴ (۳) ۳۳۶ (۴) ۳۲۰

۱۷۴- اگر $[a, b] = (a, b) + 1$ حاصل $a^2 + b^2$ کدام است؟ (۱۹)
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۶

۱۷۵- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a, b) \neq 1$ و $11 + 9(a, b) = 5[a, b]$ آن‌گاه $a + b$ کدام است؟ (۱۴)
 (۱) ۵۰ (۲) ۱۶۵ (۳) ۳۳ (۴) ۶۶

۱۷۶- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۶۰ برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها است. اگر مجموع این دو عدد ۱۳۶ باشد، تفاضل آن دو عدد، کدام است؟
 (۱) ۴۲ (۲) ۴۸ (۳) ۵۲ (۴) ۵۶





اعداد اول

۱۷۷- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $2a + b = 245$ و $[a, b] = 1001$ مجموع ارقام عدد بزرگ‌تر کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۷۸- چندتا از عددهای $7, 10!, 13, 20!$ و $93 + 30!$ اول اند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۷۹- مجموع سه عدد اول برابر 200 است حاصل ضرب این ۳ عدد:

- (۱) اول است. (۲) زوج است. (۳) بر ۳ بخش پذیر است. (۴) مربع کامل است.

۱۸۰- در یک تقسیم، مقسوم، مقسوم‌علیه، باقی‌مانده و خارج قسمت، همگی اعداد اول متمایزند. در این صورت:

- (۱) باقی‌مانده حتماً برابر ۲ است. (۲) مقسوم‌علیه حتماً برابر ۲ است. (۳) باقی‌مانده یا خارج قسمت برابر ۲ است. (۴) مقسوم‌علیه یا خارج قسمت برابر ۲ است.

۱۸۱- اگر P یک عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، P^2 را به کدام صورت نمی‌توان نوشت؟

- (۱) $8k + 1$ (۲) $12k + 1$ (۳) $16k + 1$ (۴) $24k + 1$

۱۸۲- اگر p و q دو عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشند باقی‌مانده $p + q$ بر ۶، چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۸۳- اگر P عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد، کدام یک از عددهای زیر می‌توانند عددی اول باشند؟

- (۱) $P^2 + 1$ (۲) $P^2 + 2$ (۳) $P^2 + 4$ (۴) $P^2 + 5$

۱۸۴- اگر p یک عدد اول فرد باشد به طوری که $p^2 + 22$ مربع کامل باشد، $p^2 + 2$ بر کدام یک از عددهای زیر بخش پذیر است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۵ (۳) ۱۷ (۴) ۱۹

۱۸۵- به ازای چند عدد اول p عدد $5p - 1$ مکعب کامل می‌شود؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۸۶- اگر p عددی اول و $p \mid 12a$ و $(a, p) = 1$ باشد، آن‌گاه p چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۸۷- a عددی طبیعی و P عددی اول است که $\frac{P+a}{P-a} = 18$. عبارت aP برابر با کدام است؟

- (۱) ۳۲۳ (۲) ۳۸۰ (۳) ۲۵۵ (۴) ۳۴۲

۱۸۸- اگر p عددی اول باشد به طوری که $(a, p^4) = p^2$ و $(b^2, p^3) = p^2$ باشد حاصل (ab, p^6) کدام است؟

- (۱) p^2 (۲) p^3 (۳) p^4 (۴) p^6

۱۸۹- چندتا از عددهای $1, 2^{17}, 6^{17} - 1$ و $2^{22} - 1$ اول است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۹۰- اگر p یک عدد اول باشد، کدام یک از عبارتهای زیر به ازای هیچ مقداری از p عدد اول نمی‌شود و همواره مرکب است؟

- (۱) $3p + 1$ (۲) $4^p + 1$ (۳) $p^2 + 2$ (۴) $2^{2p} - 1$

۱۹۱- به حاصل ضرب همهٔ عددهای اول دورقمی یک واحد اضافه می‌کنیم عدد جدید اول و شمارندهٔ دورقمی اول دارد.

- (۱) است - صفر (۲) نیست - صفر (۳) است - دست‌کم یک (۴) نیست - دست‌کم یک

۱۹۲- به ازای چند مقدار $n \in \mathbb{N}$ هر سه عدد $n, n + 4$ و $n + 8$ اول اند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۹۳- سمت راست عدد $30! \times 125^6$ چند صفر وجود دارد؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۵ (۳) ۲۶ (۴) ۲۷

۱۹۴- اگر P بزرگ‌ترین عدد اولی باشد که در رابطه $25! \mid P$ صدق کند، کوچک‌ترین مقدار n برای آن که رابطه $n! \mid P^2$ برقرار باشد، چند است؟

- (۱) ۴۶ (۲) ۵۰ (۳) ۳۶۱ (۴) ۵۲۹

۱۹۵- اگر r, q, p سه عدد اول متمایز باشند به طوری که $p < q < r$ و $p^2 + q^2 + r^2 = 150$ باشد، $r + q - p$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) نمی‌توان تعیین کرد.

الگوریتم تقسیم

۱۹۶- در تقسیم چند عدد سه‌رقمی بر ۲۱، باقی‌مانده برابر ۱۵ می‌شود؟

- (۱) ۳۹ (۲) ۴۰ (۳) ۴۱ (۴) ۴۲

(برگرفته از کتاب درسی)



۱۹۷- باقی مانده عدد ۱۰۷- در تقسیم به ۱۳ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۳- (۴) ۱۰

۱۹۸- فرض کنید مجموع خارج قسمت و باقی مانده تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۵، عدد ۵ باشد. کدام عدد زیر بر ۱۴ بخش پذیر است؟ (هنر ۱۳۰۰)

- (۱) $a - 5$ (۲) $a - 3$ (۳) $a + 3$ (۴) $a + 5$

۱۹۹- اگر باقی مانده تقسیم دو عدد a و b بر ۱۱ به ترتیب برابر ۵ و ۹ باشد، باقی مانده تقسیم $a - 2b$ بر ۱۱ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۲۰۰- اگر باقی مانده a بر ۱۴ برابر ۱ و b بر ۲۱ برابر ۲ باشد، باقی مانده تقسیم $2a + 3b$ بر ۷ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۲۰۱- اگر عدد x در تقسیم به ۲۰، باقی مانده‌ای برابر ۷ داشته باشد، باقی مانده $7x + 1$ بر ۱۴ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۲۰۲- اگر باقی مانده m بر ۲۴ برابر ۷ و باقی مانده n بر ۲۰ برابر ۱۷ باشد، باقی مانده $5m - 3n$ بر ۱۵ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۲۰۳- اگر n در تقسیم بر ۶، باقی مانده‌ای برابر ۴ و در تقسیم بر ۷، باقی مانده‌ای برابر ۶ داشته باشد، باقی مانده آن بر ۴۲ کدام است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۳۴ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶ (برگرفته از کتاب درسی)

۲۰۴- چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد که باقی مانده آن بر ۷ و ۸ به ترتیب برابر ۵ و ۷ باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۷

۲۰۵- باقی مانده تقسیم عدد a بر ۶ برابر ۲ و بر ۸ برابر ۴ است. باقی مانده تقسیم $5a + 3$ بر ۱۲ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۱

۲۰۶- اگر باقی مانده a بر دو عدد ۱۳ و ۷ به ترتیب برابر ۷ و ۶ باشد، باقی مانده a بر ۹۱ کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۱ (۳) ۲۴ (۴) ۲۷

تا این جا سؤال های مربوط به باقی مانده را دیدید، از این جا به بعد خارج قسمت هم وارد می شود.

۲۰۷- خارج قسمت تقسیم عدد $1 - 13 - 13$ بر ۱۳ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۴)

- (۱) $12!$ (۲) -12 (۳) $12! + 1$ (۴) $11 - 12!$

۲۰۸- مقسوم و خارج قسمت یک تقسیم برابر ۲۴۶ و ۱۸ است. مقسوم علیه چند مقدار می تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار

۲۰۹- در یک تقسیم اگر ۵۳ واحد به مقسوم اضافه کنیم، ۵ واحد به خارج قسمت اضافه شده و از باقی مانده ۲ واحد کم می شود. مقسوم علیه این تقسیم کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) نمی توان تعیین کرد.

۲۱۰- در تقسیم عددی بر ۱۷ باقی مانده برابر ۱۳ شده است. اگر ۶۱ واحد به مقسوم اضافه کنیم خارج قسمت واحد اضافه شده و باقی مانده برابر می شود.

- (۱) $6 - 3$ (۲) $16 - 3$ (۳) $6 - 4$ (۴) $16 - 4$

۲۱۱- در تقسیم عدد a بر ۶۳ باقی مانده ۱۷ است. اگر ۶۰ واحد به a اضافه کنیم، باقی مانده و خارج قسمت چه تغییری می کند؟ (۱۵)

- (۱) سه واحد کم می شود - یک واحد اضافه می شود. (۲) سه واحد اضافه می شود - یک واحد اضافه می شود. (۳) سه واحد اضافه می شود - تغییر نمی کند. (۴) سه واحد کم می شود - دو واحد اضافه می شود.

توجه کنید که در فیلی از سؤال های الگوریتم تقسیم، چیزی که در نهایت باعث حل سؤال می شود رابطه $b \cdot r = a$ است.

۲۱۲- اگر خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی $a > 9$ بر ۱۱، ۳ واحد بیشتر از باقی مانده آن باشد، احتمال این که عدد $a - 9$ بر ۲۴ بخش پذیر باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{13}{22}$ (۲) $\frac{6}{11}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{5}{11}$ (دراقل ۱۴۰۰)

۲۱۳- مجموع باقی مانده و خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۳ برابر ۱۷ است. احتمال این که باقی مانده تقسیم $a - 8$ بر ۳۶، برابر ۲۱ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{6}{13}$ (۲) $\frac{5}{13}$ (۳) $\frac{4}{13}$ (۴) $\frac{3}{13}$ (خارج ۱۴۰۰)

۲۱۴- مجموع ارقام بزرگ ترین عددی که در تقسیم بر ۴۷، باقی مانده توان دوم خارج قسمت است، کدام است؟ (۱۵)

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۲۱۵- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷ باقی مانده تقسیم از مربع خارج قسمت آن ۲ واحد کم تر است. بزرگ ترین مقدار a مضرب کدام عدد است؟ (۱۴)

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۲۱۶- در تقسیم عدد ۹۱ بر عدد b ، باقی مانده، مربع خارج قسمت است. مقسوم علیه چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار



۲۱۷- اگر a و b اعداد صحیح متمایز و مثبتی باشند به طوری که باقی‌مانده تقسیم هر کدام از آن‌ها بر ۲۳، دو برابر مکعب خارج قسمت باشد، آن‌گاه $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟

(کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

- ۶۲ (۱) ۲۵ (۲) ۱۴۹ (۳) ۸۷ (۴)

۲۱۸- اگر در تقسیم عدد طبیعی a بر b ، باقی‌مانده بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد و $a - 1 \mid b$ ، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم a^2 بر b کدام است؟ ($b > 1$)

(کانون فرهنگی آموزش ۹۶)

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) به a بستگی دارد.

۲۱۹- باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر ۱۵، از باقی‌مانده تقسیم $(-a)$ بر ۱۵، یک واحد بیشتر است. مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی دورقمی a کدام است؟

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

- ۱۵ (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴)

۲۲۰- دو عدد طبیعی ۱۰۷ و ۸۳ را بر عدد طبیعی b تقسیم نموده‌ایم. باقی‌مانده‌ها به ترتیب ۳ و ۵ شده است. عدد b ، چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

(کانون فرهنگی آموزش ۹۴)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۲۱- عدد طبیعی a ، فرد است. اگر در تقسیم a بر ۲۰۰، باقی‌مانده یک عدد مربع کامل باشد، آن‌گاه رقم دهگان بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی a کدام است؟

(کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۴ (۴)

۲۲۲- در تقسیم عددی بر ۲۳، اگر x واحد به مقسوم اضافه کنیم، به خارج قسمت، ۳ واحد اضافه شده، باقی‌مانده $\frac{1}{3}$ می‌شود. کم‌ترین مقدار x کدام است؟

- ۵۴ (۱) ۵۵ (۲) ۵۶ (۳) ۵۷ (۴)

افراز مجموعه \mathbb{Z} به کمک قضیه تقسیم

۲۲۳- باقی‌مانده عدد فرد a در تقسیم به ۶، چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

(برگرفته از کتاب درسی)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۲۲۴- اگر a فرد و بر ۳ بخش‌پذیر باشد، فرم کلی آن به کدام صورت است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

- $3k$ (۱) $9k + 3$ (۲) $9k + 6$ (۳) $6k + 3$ (۴)

۲۲۵- اگر سه مجموعه $A = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 2k\}$ ، $B = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 4k + 1\}$ ، C و مجموعه \mathbb{Z} را افراز کنند، فرم کلی اعضای مجموعه C به کدام صورت است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

- $4k + 3$ (۱) $3k + 1$ (۲) $2k$ (۳) $6k + 1$ (۴)

۲۲۶- اگر رابطه $a \mid n^3 - n$ برقرار باشد، a برابر کدام یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

(برگرفته از کتاب درسی)

- ۴۸ (۱) ۴۹ (۲) ۵۰ (۳) ۵۱ (۴)

۲۲۷- یک عدد صحیح فرد را در عدد قبلی و بعدی‌اش ضرب می‌کنیم؛ عدد به دست آمده بر بزرگ‌ترین عددی که همواره بخش‌پذیر است، کدام است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

- ۱۲ (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۲۸ (۴)

۲۲۸- دو عدد فرد متوالی را به توان ۳ رسانده و از هم کم می‌کنیم، باقی‌مانده عدد حاصل بر ۸ و ۱۲ به ترتیب برابر و است.

(برگرفته از کتاب درسی)

- $2 - 1$ (۱) $4 - 1$ (۲) $2 - 2$ (۳) $4 - 2$ (۴)

۲۲۹- باقی‌مانده مجموع مربعات دو عدد صحیح در تقسیم بر ۴ برابر کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

- ۳ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) صفر

۲۳۰- اگر k حاصل ضرب دو عدد متوالی باشد، باقی‌مانده $4k + 1$ در تقسیم به ۱۶ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۲۳۱- اگر k عددی صحیح باشد، باقی‌مانده تقسیم $k^2 + 1$ بر ۵، کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

- ۳ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) صفر

۲۳۲- اگر باقی‌مانده عدد a در تقسیم به ۷ فرد باشد، باقی‌مانده a^2 بر ۷ برابر کدام یک از عددهای زیر نمی‌تواند باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۳۳- اگر باقی‌مانده عددی در تقسیم بر ۴، برابر ۳ باشد، باقی‌مانده آن بر ۸ کدام است؟

- ۱ همواره ۳ (۲) ۵ یا ۳ (۳) ۷ یا ۵ (۴)

۲۳۴- اگر باقی‌مانده a بر ۲۴ برابر ۱۵ باشد، باقی‌مانده $\frac{a}{3}$ بر ۱۶ کدام است؟

- ۳ (۱) ۵ (۲) ۱۱ یا ۳ (۳) ۵ یا ۱۳ (۴)

(برگرفته از کتاب درسی)

۲۳۵- به ازای کدام مقدار m می‌توان ثابت کرد که همواره یکی از عددهای $a + 4$ یا $a + m$ یا $a + m$ بر ۳ بخش‌پذیر است؟

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۲۳۶- اگر $a + 5 \mid 21$ ، باقی‌مانده تقسیم $a - 2$ بر ۱۴، چند عضو از مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, 13\}$ می‌تواند باشد؟

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۲۳۷- اگر a در تقسیم بر ۲۵، باقی‌مانده‌ای برابر ۷ داشته باشد، باقی‌مانده تقسیم $a + 3$ بر ۱۵ برابر کدام یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

- ۳ (۱) ۵ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴)



۲۳۸- از رابطه $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ کدام نتیجه گیری درست نیست؟

- (۱) $a \mid bc$ (۲) $b \mid ad$ (۳) $c \mid ab$ (۴) $d \mid abc$

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۲۳۹- اگر $18 \mid a$ و $18 \mid b$ ، آن گاه کدام رابطه درست نیست؟ $(a, b \in \mathbb{N})$

- (۱) $6 \mid b$ (۲) $a \mid 3b$ (۳) $a \mid 54$ (۴) $3a \mid b$

(برگرفته از کتاب درسی)

۲۴۰- اگر $a \neq 1$ عددی طبیعی باشد که هر دو عدد $9k + 7$ و $7k + 6$ را عاقد کند، کمترین مقدار طبیعی k ، برای برقراری این رابطه کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۴۱- به ازای چند عدد طبیعی n ، رابطه $n^5 + 3n^2 - n + 6 \mid n + 1$ درست است؟

- (۱) هیچ مقدار (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) بی شمار

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۲۴۲- اگر $a^2 \mid a + b$ ، آن گاه کدام رابطه زیر، لزوماً صحیح نیست؟

- (۱) $a^2 \mid b^2$ (۲) $a \mid 3b - 2a$ (۳) $a^2 \mid a - b$ (۴) $a^2 \mid a^2 + b^2$

(کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

۲۴۳- اگر $a \mid b + 3$ و $a \mid c - 2$ ، آن گاه باقی مانده تقسیم $bc + 1$ بر a ، همواره برابر کدام است؟ $(a \geq 5)$

- (۱) ۱ (۲) ۵ (۳) $a - 5$ (۴) صفر

(کانون فرهنگی آموزش ۹۴)

۲۴۴- اگر $a^3 \mid 48$ و $b^2 \mid 375$ ، کمترین مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۷ (۳) ۸۱ (۴) ۸۷

۲۴۵- به ازای کدام مقادیر m و n ، هر دو رابطه $3^m \mid 3^n$ و $5^{2m} \mid 5^{n+3}$ درست است؟

- (۱) $m = 4, n = 6$ (۲) $m = 5, n = 7$ (۳) $m = 4, n = 8$ (۴) $m = 5, n = 8$

(برگرفته از کتاب درسی)

۲۴۶- اگر $a > 1$ ، $a \mid 9k + 4$ و $a \mid 5k + m$ ، به ازای کدام مقدار m ، ثابت می شود که a عددی اول است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۲۴۷- به ازای چند مقدار طبیعی n ، رابطه $n^3 \mid (n+1)!$ برقرار است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشتر از ۲

۲۴۸- اگر عدد a فقط دو مقسوم علیه طبیعی داشته باشد و $a \mid 225$ ، در این صورت $(a, 15)$ کدام است؟

- (۱) همواره ۱ (۲) ۱ یا ۳ (۳) ۱ یا ۵ (۴) ۳ یا ۵

۲۴۹- اگر $(a, b) = d > 1$ ، $d \mid a^2 - b + 7$ ، آن گاه $a + b$ کدام گزینه می تواند باشد؟

- (۱) ۸۴ (۲) ۸۵ (۳) ۸۶ (۴) ۸۷

۲۵۰- اگر باقی مانده و خارج قسمت تقسیم a بر ۱۹ به ترتیب برابر ۷ و q باشد، باقی مانده و خارج قسمت $a + 49$ بر ۱۹ به ترتیب برابر و است.

- (۱) صفر - $q + 1$ (۲) $q + 1 - 18$ (۳) صفر - $q + 2$ (۴) $q + 2 - 18$

۲۵۱- اگر n عددی طبیعی و b, m دو عدد $n + 2$ و $n - 1$ ، عددی مخالف ۱ باشد، جمع ارقام کوچک ترین عدد سه رقمی n کدام است؟

(کانون فرهنگی آموزش ۹۶)

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۲۵۲- در تقسیم a بر عدد طبیعی b ، باقی مانده، ۳۴ و خارج قسمت، عدد طبیعی است. چند جواب طبیعی کم تر از ۷۰ برای a وجود دارد؟

(کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۵۳- در تقسیم عدد a بر ۸، باقی مانده برابر جذر خارج قسمت است. رقم یکان بزرگ ترین مقدار مقسوم کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۲۵۴- اگر در تقسیم اعداد طبیعی a و $a + 100$ بر عدد طبیعی b ، باقی مانده ها به ترتیب برابر با ۱۰ و ۱۱ باشند، کمترین مقدار b کدام است؟

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

- (۱) ۲۲ (۲) ۳۳ (۳) ۶۶ (۴) ۹۹

(کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

۲۵۵- در تقسیمی، مقسوم، ۲۰ برابر باقی مانده و باقی مانده ماکزیمم است، مقسوم علیه حداکثر کدام است؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱

۲۵۶- عدد a زوج است ولی بر ۳ بخش پذیر نیست، باقی مانده آن بر ۶ کدام است؟

- (۱) همواره ۲ (۲) صفر یا ۲ (۳) ۲ یا ۴ (۴) صفر یا ۳

۲۵۷- اگر یکی از عددهای $a, a + 5, a + 10$ و b همواره بر ۴ بخش پذیر باشد، باقی مانده $b - a$ بر ۴ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶۹- گزینه ۳ واضح است؛ مثلاً $3 \times 2 \mid 6$ ولی $2 \mid 3$ و $3 \mid 6$.
بقیه را هم نگاهی بیندازیم.

۱ که از ویژگی‌های اصلی عاد کردن است.

$$a \mid b \Rightarrow b = aq \quad (I)$$

$$b \mid c \Rightarrow c = bq' \quad (II)$$

$$\xrightarrow{\text{با جای‌گذاری (I) در (II)}} c = a \underbrace{qq'}_{q''} \Rightarrow c = q''a \Rightarrow a \mid c$$

۲ هم درست است. وقتی $\frac{b}{a}$ صحیح است، $\frac{bc}{a}$ هم صحیح می‌شود.

۴ هم درست است. اگر a دو عدد را عاد کند، جمع آن‌ها را هم عاد می‌کند؛ چون:

$$\begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow aq = b \\ a \mid c \Rightarrow aq' = c \end{array} \xrightarrow{+} a(\underbrace{q+q'}_k) = b+c \Rightarrow a \mid b+c$$

روشن‌دوم برای رد کردن گزینه (۳) به راحتی می‌توانیم یک مثال نقض پیدا کنیم:
 $6 \mid 9 \times 4 \Rightarrow 6 \mid 4 \vee 6 \mid 9$

۷۰- گزینه ۲ (الف) نادرست است؛ مثلاً $3 \mid 2 + 3$ ولی $2 \mid 3$ و $3 \mid 5$.
(ب) درست است؛

$$bc \mid a \Rightarrow a = bcq \Rightarrow \begin{cases} a = (bq)c = kc \Rightarrow c \mid a \\ a = (cq)b = kb \Rightarrow b \mid a \end{cases}$$

(پ) هم نادرست است؛ مثلاً $2 \mid 4 + 1$ ولی $1 \mid 4 + 1$ ؛ پس فقط یکی درست شد.

۷۱- گزینه ۱ سؤال ساده‌ای است و در حقیقت یکی از ویژگی‌های عاد کردن است. می‌دانیم اگر $ab \mid c$ می‌توان نتیجه گرفت $a \mid c$ و $b \mid c$ پس ۱ درست است. (در سؤال‌های قبل ثابت کردیم).

اما اگر $c = 6$ ، $b = 3$ و $a = 2$ و ۲ و ۴ رد می‌شوند. برای رد ۳ کافی است a را برابر ۲، b را برابر ۳- و c را برابر ۶ فرض کنید.

۷۲- گزینه ۲ این هم سؤال بسیار ساده‌ای است. داریم:

$$\begin{array}{l} a-b \mid a-b \\ a-b \mid a \end{array} \xrightarrow{(-)} a-b \mid b$$

روشن‌دوم از عددگذاری استفاده می‌کنیم. برای مثال فرض کنید $a-b = 3$ و $a = 15$ باشد در این صورت رابطه $a-b \mid a$ به ازای $a = 15$ و $b = 12$ برقرار است. اما به ازای این عددها فقط گزینه (۴) برقرار است.



۷۳- گزینه ۲ **۱** درست است، چون:

$$a+b \mid a+c \xrightarrow{(-)} a+b \mid a-c$$

$$a+b \mid 2c$$

۳ هم درست است، چون:

$$a+b \mid 2a+2c \xrightarrow{(-)} a+b \mid 2a$$

$$a+b \mid 2c$$

۴ هم درست است، چون:

$$a+b \mid a+c-(a+b) = c-b \xrightarrow{\times 2}$$

$$a+b \mid 2c-2b \xrightarrow{(-)} a+b \mid 2b$$

$$a+b \mid 2c$$

روش دوم از عددگذاری استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $a=1, b=1, c=-1$ باشد در این قسمت هر دو رابطه $a+b \mid a+c$ و $a+b \mid 2c$ درست است، اما $a+b \mid 2b+c$ می‌شود $2 \mid 1$ که نادرست است.

۷۴- گزینه ۳ برای تبدیل یک تساوی به رابطه عادی کردن، معمولاً جمع به کارمان نمی‌آید. بنابراین در این نوع سؤال‌ها سعی کنید ضرب بسازید.

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow (a-b)(a+b) = c^2$$

پس $a-b \mid c^2$.

روش دوم فرض کنید $c=5$ و $b=12$ و $a=13$. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

- ۱** نادرست است. $12 \mid 5+3$
- ۲** نادرست است. $5 \mid 13-12$
- ۳** \checkmark درست است. $1 \mid 25$
- ۴** نادرست است. $17 \mid 169$

۷۵- گزینه ۲ می‌دانیم اگر $a \mid b$ و $a \mid b$ ، آن‌گاه $a = \pm b$ است، بنابراین دو حالت رخ می‌دهد:

$$n^2 = 6n - 5 \Rightarrow (n-1)(n-5) = 0 \Rightarrow n=1, n=5$$

$$n^2 = 5 - 6n \Rightarrow$$
 معادله ریشه صحیح ندارد.

پس فقط به ازای دو مقدار $n=1$ و $n=5$ رابطه برقرار است.

۷۶- گزینه ۳ می‌دانیم اگر $\bullet \mid \bullet$ آن‌گاه $\bullet = \bullet$ (هون تنها عددی که بر صفر بخش پذیره فود صفره) بنابراین:

$$x^2 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x-1)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ یا } x=1 \text{ یا } x=2$$

حالا بررسی می‌کنیم رابطه $2x+1 \mid 2x+1$ به ازای چندتا از این عددها برقرار است.

$$x=0 \Rightarrow 1 \mid 1 \checkmark$$

$$x=1 \Rightarrow 2+1 \mid 2+1 \checkmark$$

$$x=2 \Rightarrow 2^2+1 \mid 2 \times 2+1 \checkmark$$

۷۷- گزینه ۲ ۴۷ عددی اول است، پس هر چه قدر اعداد کوچک‌تر از آن را ضرب کنیم، ۴۷ به وجود نمی‌آید، یعنی $43 \nmid 47$. ولی $43 \mid 46$ چون $46 = 2 \times 23$ است و ...

۷۸- گزینه ۲ $20!$ بر $1, 2, 3, 4, \dots, 9$ بخش پذیر است. 12 هم بر $1, 2, 3, 4, 6$ از بین اعداد طبیعی یک‌رقمی بخش پذیر است، پس $20!+12$ بر اعداد $1, 2, 3, 4, 6$ بخش پذیر می‌شود. اما این عدد بر

$$10+2$$

۵، ۷، ۸، ۹ نمی‌خورد. چرا؟ مثلاً $2^2 + 5k = 12 + 20!$ ، یعنی در تقسیم بر ۵، باقی‌مانده دو می‌آورد. شبیه همین برای ۷، ۸ و ۹ هم اتفاق می‌افتد. خلاصه این که بر ۴ عدد طبیعی بخش پذیر نیست.

۷۹- گزینه ۳ **روش اول** عبارت $20!$ را تجزیه می‌کنیم:

$$20! = (2^2 \times 5) \times 19 \times (2 \times 3^2) \times 17 \times (2^4) \times (3 \times 5)$$

$$\times (2 \times 7) \times 13 \times (3^2 \times 3) \times 11 \times (2 \times 5) \times (3) \times (2^3) \times 7$$

$$\times (2 \times 3) \times 5 \times (2^2) \times 3 \times 2 = 2^{18} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2 \times 11 \times 13$$

$$\times 17 \times 19$$

بنابراین مجموع توان‌ها یا $\sum_{i=1}^n a_i$ برابر است با:

$$18+8+4+2+1+1+1+1=36$$

روش دوم برای پیدا کردن توان عدد اول p در تجزیه $n!$ از رابطه زیر می‌توان استفاده کرد:

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots$$

با این روش می‌توان عدد 2 و 3 را در تجزیه $20!$ سریع‌تر به دست آورد.

$$\left[\frac{20}{2}\right] + \left[\frac{20}{4}\right] + \left[\frac{20}{8}\right] + \left[\frac{20}{16}\right] = 10 + 5 + 2 + 1 = 18$$

$$\left[\frac{20}{3}\right] + \left[\frac{20}{9}\right] = 6 + 2 = 8$$

پیدا کردن توان بقیه عددهای اول هم که ساده است.

۸۰- گزینه ۱ $x \mid 2y \xrightarrow{\text{سمت راست} \times 2} x \mid y$ پس **۱** درست است.

۲ درست است. $12 \mid y \xrightarrow{\text{سمت چپ} \div 3} 4 \mid y$

۳ درست است. $x \mid 24 \xrightarrow{\text{سمت راست} \times 2} x \mid 12$

۴ درست نیست برای مثال اگر $x=y=12$ باشد **۴** رد می‌شود.

کافی است x و y را برابر 12 فرض کنیم در این صورت **۴** رد می‌شود.

۸۱- گزینه ۲ دو رابطه را به یک رابطه تبدیل می‌کنیم. $4 \mid x$ ، پس $4q = x$ می‌شود. با جای‌گذاری، $4q \mid 84$ به دست می‌آید. حالا دو طرف به 4 ساده شده، پس $q \mid 21$. حالا چه اعدادی می‌تواند باشد؟

$q = \pm 1, q = \pm 3, q = \pm 7, q = \pm 21$ می‌تواند باشد. به ازای هر q ، یک جواب برای x به دست می‌آید، پس x ، هشت عدد صحیح مختلف می‌تواند باشد.

۸۲- گزینه ۲ $a \mid 2q$ پس $a = 2q$ می‌شود. با جای‌گذاری $2qb = 60$ پس $30 = bq$ و این یعنی $b \mid 30$ (نه این‌که $b = 30$ بشود).

روش دوم فرض کنید $a = 4$ و $b = 15$ باشد در این صورت هر دو رابطه $4 \mid 2$ و $ab = 60$ درست است اما سه گزینه اول رد می‌شوند.

۸۳- گزینه ۳ از $a \mid b$ نتیجه می‌شود $aq = b$. از $b \mid 2a$ هم داریم $bq' = 2a$. با جای‌گذاری b می‌شود: $qq' = 2$.

$$aq' = 2a \xrightarrow{\div a} qq' = 2$$

حالا داریم:

$$\begin{cases} q=1, q'=2 \Rightarrow a=b \\ \text{یا} \\ q=2, q'=1 \Rightarrow 2a=b \end{cases}$$

روش دوم فرض کنید $a=1$ و $b=2$ در این صورت هر دو رابطه $a \mid b$ و $b \mid 2a$ درست می‌شود اما گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند. حالا فرض کنید $a=1$ و $b=1$ در این صورت گزینه (۴) نیز رد می‌شود.

گسسته جامع کنکور



با توجه به دو رابطه (I) و (II) می توان نتیجه گرفت $a^2 = b^2$.

با جای گذاری در رابطه صورت سؤال داریم: $a^4 \mid 2a^2$.

اگر a صفر باشد، رابطه $a \mid b$ به دست می آید که درست است. اگر $a \neq 0$ باشد، دو طرف را بر a^2 ساده می کنیم: $a^2 = 2$ یا $a^2 = 1$. بنابراین رابطه ای که داده، فقط به ازای سه مقدار $a = \pm 1, 0$ برقرار می شود.

۸۹- گزینه ۲ در بخش آموزش تقسیم در صورتی ترکیب شرطی

$a^m \mid b^n \Rightarrow a^r \mid b^s$ درست است که $nr \leq ms$ باشد، مثلاً
 $a \mid b \Rightarrow a^2 \mid b^2$ چون $2 \times 1 \leq 1 \times 2$.
 $a^2 \mid b^2 \Rightarrow a^4 \mid b^4$ چون $4 \times 1 \leq 2 \times 2$.
 $a^3 \mid b^2 \Rightarrow a^6 \mid b^4$ هم درست است؛ چون $6 \times 1 \leq 3 \times 2$.
 $a^3 \mid b^2 \Rightarrow a^2 \mid b$ نادرست است؛ چون $2 \times 1 < 3 \times 2$.

برای این که درک بهتری داشته باشید، یکی از گزینه ها را ثابت می کنیم؛ مثلاً از $a^3 \mid b^2$ نتیجه می گیریم $a^5 \mid b^4$. $a^5 \mid b^4 \Rightarrow a^2 \mid b^2$

حالا دو طرف (۱) و (۲) را در هم ضرب می کنیم. یادتان هست که اگر $a \mid b$ و $c \mid d$ آن گاه $ac \mid bd$ ؛ پس $a^3 \times a^2 \mid b^2 \times b^2$ یعنی $a^5 \mid b^4$.

۹۰- گزینه ۱ دیدیم که رابطه $x^a \mid y^b \Rightarrow x^{a'} \mid y^{b'}$ درست است

که: $ba' \leq ab'$
 دو دور نزدیک نزدیک نزدیک

بنابراین چون $x^3 \mid y^m \Rightarrow x^5 \mid y^{3m-5}$ درست است، پس:
 $5m \leq 3(3m-5) \Rightarrow 5m \leq 9m-15$
 $\Rightarrow 4m \geq 15 \Rightarrow m \geq 3.75$

پس m دست کم باید برابر ۴ باشد.

۹۱- گزینه ۱ $a \mid 7k+4$ سمت راست $\times 8 \rightarrow a \mid 56k+32$

$a \mid 8k+3$ سمت راست $\times 7 \rightarrow a \mid 56k+21$

$\xrightarrow{(-)} a \mid 11 \Rightarrow a = \pm 1, \pm 11$

اما با توجه به این که گفته شده $a > 1$ است، پس فقط مقدار $a = 11$ قابل قبول است، در نتیجه a عددی اول است.

۹۲- گزینه ۲ می خواهیم هر دو کسر صحیح باشند، پس صورت ها بر

مخرج بخش پذیرند، یعنی:

$a+1 \mid 5b+2 \xrightarrow{\times 6} a+1 \mid 30b+12$

$a+1 \mid 6b+5 \xrightarrow{\times 5} a+1 \mid 30b+25$

حالا داریم:

$$\begin{cases} a+1 = \pm 1 \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases} \\ a+1 = \pm 13 \begin{cases} a = 12 \\ a = -14 \end{cases} \end{cases}$$

پس a چهار مقدار صحیح می تواند باشد.

۹۳- گزینه ۱

$a \mid 7m+x \xrightarrow{\times 6} a \mid 42m+6x \xrightarrow{(-)} a \mid 6x-35$

$a \mid 6m+5 \xrightarrow{\times 7} a \mid 42m+35$

تنها مقسوم علیه های $6x-35$ باید ± 1 باشند، این یعنی باید $6x-35 = 1$ (یعنی $x = 6$) یا $6x-35 = -1$ باشد (یعنی $x = \frac{34}{6}$ که نمی شه).

۹۴- گزینه ۲ باید کاری کنیم که m از سمت راست رابطه ها حذف

شود، چون داریم $a \mid m^2-2$ پس سمت راست رابطه $a \mid m+1$ را در

۸۴- گزینه ۲ می دانیم $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ بنابراین اگر بخواهیم

x^2-1 بر 13 بخش پذیر باشد یعنی یا $x-1$ بر 13 بخش پذیر است و یا $x+1$. هر دو حالت را بررسی می کنیم.

$x-1 = 13k \Rightarrow x = 13k+1 \Rightarrow x = 1, 14$

$x+1 = 13k \Rightarrow x = 13k-1 \Rightarrow x = 12$

پس رابطه به ازای سه عدد برقرار است.

۸۵- گزینه ۲ عدد را X^2 می نامیم. داریم:

$18 \mid X^2 \Rightarrow \frac{X^2}{2 \times 3^2} \in \mathbb{Z}$

اگر بخواهیم این کسر عددی صحیح باشد، X حتماً باید زوج باشد و یک عامل ۳ داشته باشد؛ بنابراین: $x = 6q \Rightarrow x^2 = 36q^2$

از طرفی عدد پنج رقمی است، بنابراین:

$10000 \leq 36q^2 < 100000$

$\xrightarrow{\text{جذر می گیریم}} 100 \leq 6q < 1000 \sqrt{10}$

$100 \leq 6q < 316 \Rightarrow 16.6 < q < 52.6$

بنابراین $q \in \{17, 18, \dots, 52\}$ و در نتیجه به ازای $36-17+1 = 36$ عدد رابطه برقرار است.

۸۶- گزینه ۲ فرم کلی عددی که مکعب کامل باشد، به صورت X^3 است. اگر

X^3 بر ۹ بخش پذیر باشد، X باید حتماً مضرب ۳ باشد، پس:

$x = 3q \Rightarrow x^3 = 27q^3$

حالا مقادیر سه و چهار رقمی X^3 را پیدا می کنیم:

$100 \leq x^3 < 10000 \Rightarrow 100 \leq 27q^3 < 10000$

$\xrightarrow{\text{ریشه سوم می گیریم}} \sqrt[3]{100} \leq 3q < \sqrt[3]{10000}$

$\Rightarrow \frac{10}{\sqrt[3]{10}} \leq 3q \leq 10 \sqrt[3]{10} \Rightarrow \frac{10}{2.15} \leq 3q \leq 10 \times 2.15$

$\Rightarrow 4.65 \leq 3q \leq 21.5 \Rightarrow 1.55 \leq q \leq 7.17$

$\Rightarrow q = 2, 3, 4, 5, 6, 7$

پس به ازای ۶ عدد رابطه برقرار است.

۸۷- گزینه ۱ می دانیم در هر رابطه عا در کردن، سمت چپ را می توان

کوچک و سمت راست را بزرگ کرد. داریم:

$2x^2 \mid 3y \xrightarrow{\text{سمت چپ} \div 2} x^2 \mid 3y \checkmark$ (۲)

$2x^2 \mid 3y \xrightarrow{\text{سمت چپ} \div 2x} x \mid 3y$ (۳)

$2x^2 \mid 3y \xrightarrow{\text{سمت چپ} \div 2} x^2 \mid 3y$ (۴)

$\xrightarrow{\text{سمت راست} \times 2y} x^2 \mid 6y^2$

اما گزینه (۱) درست نیست.

روش دوم از عددگذاری استفاده می کنیم. فرض کنید $x = 3$ و $y = 6$

باشد، در این صورت رابطه $2x^2 \mid 3y$ درست است (۱۸ | ۱۸). اما گزینه (۱) نادرست است (۱۸ | ۶).

۸۸- گزینه ۲

$a^2 b^2 \mid a^2 + b^2 \xrightarrow{\text{سمت چپ} \div \text{تقسیم بر } b^2} a^2 \mid a^2 + b^2 \xrightarrow{(-)} a^2 \mid b^2$ (I)
 از طرفی: $a^2 \mid a^2$

$a^2 b^2 \mid a^2 + b^2 \xrightarrow{\text{سمت چپ} \div \text{تقسیم بر } a^2} b^2 \mid a^2 + b^2 \xrightarrow{(-)} b^2 \mid a^2$ (II)
 از طرفی: $b^2 \mid b^2$



اما ما می‌خواهیم عبارت سمت راست $-5b^2$ داشته باشد، بنابراین با توجه به این که $9|9b^2$ ، دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$9|a^2 + 4b^2 + 4ab \xrightarrow{\ominus} 9|a^2 + 4ab - 5b^2$$

$$9|9b^2$$

در میان گزینه‌ها عدد ۴ وجود ندارد. با توجه به این که $9|9ab$ این رابطه را از رابطه به دست آمده کم می‌کنیم:

$$9|a^2 + 4ab - 5b^2 \xrightarrow{\ominus} 9|a^2 - 5ab - 5b^2$$

$$9|9ab$$

پس k می‌تواند برابر ۵- باشد.

روش دوم اگر $a = b = 1$ باشد، رابطه به صورت: $5 = 1 + k$ درمی‌آید که در میان گزینه‌ها فقط به ازای $k = -5$ برقرار می‌شود.

۱۰۰- گزینه ۲ رابطه را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4) = x(x-4)(x+1)$$

این عبارت باید مضرب ۱۱ باشد؛ یعنی هر یک از سه جمله x ، $(x-4)$ و $(x+1)$ می‌تواند بر ۱۱ بخش‌پذیر باشند. هر سه حالت را بررسی می‌کنیم:

$$x = 11k \xrightarrow{k=9} x_{\max} = 99$$

$$x - 4 = 11k' \Rightarrow x = 11k' + 4 \xrightarrow{k'=8} x_{\max} = 92$$

$$x + 1 = 11k'' \Rightarrow x = 11k'' - 1 \xrightarrow{k''=9} x_{\max} = 98$$

در میان این عددها، ۹۹ از همه بزرگ‌تر است:

۱۰۱- گزینه ۲ اعضای مجموعه A به صورت زیر است:

$$A = \{2, 4, 8, 16, \dots\}$$

می‌دانیم $a \in A$ است. اگر $a = 2$ باشد، داریم: $2|k^2 + 2$ روشن است اگر k زوج باشد، این رابطه برقرار است، پس برای $a = 2$ می‌توان مقادیری برای k پیدا کرد که رابطه برقرار باشد.

اگر $a = 4$ باشد، رابطه به صورت $4|k^2 + 2$ خواهد بود. مشخص است که اگر k فرد باشد، $k^2 + 2$ نیز فرد است و رابطه برقرار نیست. اما اگر k زوج باشد، داریم: $k = 2q \Rightarrow k^2 = 4q^2 \Rightarrow k^2 + 2 = 4q^2 + 2$

که این عبارت بر ۴ بخش‌پذیر نیست، چون در تقسیم به ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد.

به همین ترتیب ثابت می‌شود که به ازای $a = 8$ ، $a = 16$ و ... نیز هیچ مقداری برای k وجود ندارد.

پس فقط به ازای $a = 2$ می‌توان مقادیری برای k پیدا کرد.

$$11|5a + 4b + 3 \quad (I) \quad \text{گزینه ۱- ۱۰۲}$$

$$11|a + 3b + k \xrightarrow{\times 5} 11|5a + 15b + 5k \quad (II)$$

با توجه به دو رابطه (I) و (II) داریم:

$$\begin{cases} 11|5a + 4b + 3 \\ 11|5a + 15b + 5k \end{cases} \xrightarrow{(-)} 11|11b + 5k - 3$$

$$\xrightarrow{(-)} 11|5k - 3$$

در میان گزینه‌ها کوچک‌ترین عدد، ۵ است که به ازای همان $k = 5$ عبارت $5k - 3$ برابر ۲۲ می‌شود که بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

(در فصل بعد خواهیم دید که این مدل سوال‌ها را با معادله هم‌نوعی به صورت ساده‌تری می‌توان پاسخ داد.)

۱۰۳- گزینه ۲

$$\left. \begin{aligned} &v|a + 3b \xrightarrow{\times 2} v|2a + 6b \\ &v|7b \end{aligned} \right\} \Rightarrow v|2a - b$$

$m-1$ ضرب می‌کنیم تا عبارت به دست آمده فقط جمله m^2 داشته باشد.

$$a|m^2 - 1 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times (m-1)} a|m+1$$

$$a|m^2 - 2 \quad \text{از طرفی}$$

$$\xrightarrow{(-)} a|1 \Rightarrow a = \pm 1$$

۹۵- گزینه ۱ با توجه به گزینه‌های (۱) و (۲) سعی کنیم b را از

بین ببریم. می‌دانیم اگر $a|b$ و $a|c$ آن‌گاه $a|bm \pm cn$ ، یعنی a هر ترکیب خطی b و c را عادی می‌کند. حالا:

$$3a + 4b|3a + 4b \xrightarrow{\times 3} 3a + 4b|9a + 12b$$

$$3a + 4b|10a + 3b \xrightarrow{\times 4} 3a + 4b|40a + 12b$$

$$\xrightarrow{(-)} 3a + 4b|31a$$

۹۶- گزینه ۲

$$\begin{cases} a|b+1 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 2} a|2b+2 \\ a|c+2 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times b} a|bc+2b \end{cases} \xrightarrow{(-)} a|bc-2$$

روش دوم از عددگذاری استفاده می‌کنیم. اگر $a = 5$ ، $b = 4$ و $c = 3$

باشد هر دو رابطه $a|c+2$ و $a|b+1$ درست می‌شود. حالا به ازای این مقادیر چهار گزینه را بررسی می‌کنیم:

(۱) بر ۵ بخش‌پذیر نیست. $bc - 1 = 12 - 1 = 11$

(۲) بر ۵ بخش‌پذیر است. $bc - 2 = 12 - 2 = 10$

(۳) بر ۵ بخش‌پذیر نیست. $bc + 1 = 12 + 1 = 13$

(۴) بر ۵ بخش‌پذیر نیست. $bc + 2 = 12 + 2 = 14$

بنابراین (۲) پاسخ سؤال است.

۹۷- گزینه ۲ دو رابطه را در هم ضرب می‌کنیم:

$$5|4k+3 \xrightarrow{\times} 35|20k^2+15k-4k-3$$

$$7|5k-1$$

$$\Rightarrow 35|20k^2+11k-3$$

همان‌طور که می‌بینید چنین چیزی در گزینه‌ها وجود ندارد. اما با توجه به این که $35|35k^2$ است اگر این دو رابطه را از هم کم کنیم، داریم:

$$35|20k^2+11k-3 \xrightarrow{\ominus} 35|15k^2-11k+3$$

$$35|35k^2$$

روش دوم اگر $k = 3$ باشد هر دو رابطه برقرار است اما در میان گزینه‌ها فقط (۲) به ازای $k = 3$ درست می‌شود:

$$35|15 \times 9 - 11 \times 3 + 3 \Rightarrow 35|105$$

۹۸- گزینه ۲ می‌دانیم: $14n^2 + 19n + 6 = (7n+6)(2n+1)$

$$5|2n+1 \xrightarrow{(+)} 5|7n+6$$

از طرفی:

$$5|5n+5$$

هر دو عدد $2n+1$ و $7n+6$ بر ۵ بخش‌پذیرند، پس حاصل ضرب آن‌ها همواره مضرب ۲۵ است.

روش سوم از عددگذاری استفاده می‌کنیم. n را طوری انتخاب می‌کنیم که:

$$5|2n+1$$

برای مثال فرض می‌کنیم $n = 2$ باشد. حالا به ازای $n = 2$

$$14n^2 + 19n + 6 = 4n^2 + 19n + 6 = 100$$

مقدار $4n^2 + 19n + 6$ را پیدا می‌کنیم:

$$n = 2 \Rightarrow 14 \times 4 + 19 \times 2 + 6 = 100$$

که در میان گزینه‌ها فقط بر ۲۵ بخش‌پذیر است.

۹۹- گزینه ۱ اگر طرفین را به توان دو برسانیم داریم:

$$3|a+2b \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 9|a^2+4b^2+4ab$$



پس $\Delta m + 3 = \pm 1$ یا $\Delta m + 3 = \pm 17$ می‌تواند باشد.

$$\begin{cases} \Delta m + 3 = \pm 1 \Rightarrow \text{صحیح نداریم } m \\ \Delta m + 3 = \pm 17 \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = \frac{14}{5} \end{cases} \end{cases}$$

$m = -4$ صدق هم می‌کند $(-17 | -34)$ ، پس قابل قبول است.

روش دوم ریشه سمت چپ یعنی $\frac{3}{5}$ را می‌اندازیم در طرف راست. کسر را ساده کرده و صورت را در نظر می‌گیریم.

$$\Delta m + 3 \mid 9(-\frac{3}{5}) + 2 = \frac{-17}{5} \Rightarrow \Delta m + 3 \mid -17$$

ادامه راه‌حل، شبیه قبلی می‌شود.

۱۰۸- گزینه ۲ روش اول داریم:

$$\left. \begin{aligned} 2n+1 \mid 2n+1 &\xrightarrow{\text{سمت راست } \times (2n+1)} 2n+1 \mid 4n^2+4n+1 \\ 2n+1 \mid 2n+1 &\xrightarrow{\text{از طرفی}} 2n+1 \mid 4n^2+\Delta n+4 \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{(-)} 2n+1 \mid n+3 \xrightarrow{\times 2} 2n+1 \mid 2n+6 \xrightarrow{(-)} 2n+1 \mid \Delta$$

پس $2n+1 = \pm 1$ یا $2n+1 = \pm 5$ می‌تواند باشد. با حل معادله‌ها $n = 0, n = -1, n = 2, n = -3$ به دست می‌آید. فقط یکی از این‌ها طبیعی است و آن هم $n = 2$ بوده که در رابطه مسئله صدق هم می‌کند، پس یک جواب برای n به دست می‌آید.

روش دوم به جای این همه ضرب، تفریق و ...، ریشه سمت چپ (یعنی $-\frac{1}{4}$) را در طرف راست قرار دهیم. کسر به دست آمده را ساده کرده و صورت آن را در نظر می‌گیریم.

$$2n+1 \mid 4(-\frac{1}{4})^2 + 5(-\frac{1}{4}) + 4 = 1 - \frac{5}{4} + 4 = \frac{5}{4} \Rightarrow 2n+1 \mid 5$$

ادامه راه‌حل، شبیه روش اول است. فقط حواستان باشد، n هایی که با این روش به دست می‌آید حتماً باید در رابطه اولیه صدق کنند؛ یعنی بعد از این که n ها را به دست آوردید، باید در رابطه اولیه جای‌گذاری کنید و درستی آن را به دست آورید.

۱۰۹- گزینه ۲ گفتیم که در سؤالاتی شبیه این سؤال که رشد عبارت سمت چپ رابطه عادی کردن سریع‌تر از عبارت سمت راست باشد، کافی است رابطه را فقط به ازای عددهای کوچک بررسی کنیم:

$$x^3 + 1 \mid x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow 1 \mid 1 \checkmark \\ x = 1 \Rightarrow 2 \mid 2 \checkmark \\ x = 2 \Rightarrow 9 \mid 3 \times \end{cases}$$

از این‌جا به بعد قطعاً رابطه برقرار نیست. اما باید عددهای منفی را هم

بررسی کنیم:

$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow 0 \mid 0 \checkmark \\ x = -2 \Rightarrow -7 \mid -1 \times \end{cases}$$

به ازای عددهای منفی کوچک‌تر نیز رابطه برقرار نیست و بنابراین معادله فقط دو جواب دارد.

۱۱۰- گزینه ۱ کسر $\frac{n+6}{n^2+2}$ باید عددی صحیح شود.

می‌دانیم رشد منفرجه از صورت، بیشتر است. یعنی اگر n عددی بزرگ باشد، منفرجه از صورت بیشتر می‌شود و رابطه برقرار نیست. در میان عددهای کوچک رابطه را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{array}{ll} n = 0 \Rightarrow \frac{6}{2} = 3 \checkmark & n = 1 \Rightarrow \frac{7}{3} \times \\ n = -1 \Rightarrow \frac{5}{3} \times & n = 2 \Rightarrow \frac{8}{6} \times \\ n = -2 \Rightarrow \frac{4}{6} \times & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{7a-b} &\xrightarrow{(-)} \sqrt{(k+1)b} \text{ بنابراین: } \sqrt{7a+kb} \\ \sqrt{7a+kb} & \end{aligned}$$

b بر 7 بخش‌پذیر نیست، پس $k+1$ باید مضرب 7 باشد.

$$k+1 = 7q \Rightarrow k = 7q-1$$

می‌دانیم $7 \leq k \leq -3$ است. در نتیجه:

$$-3 \leq 7q-1 \leq 7 \Rightarrow -2 \leq 7q \leq 8$$

این رابطه به ازای $2 \leq 7q \leq 8$ و $q = 0$ برقرار است یعنی 2 مقدار $k = 6$ و $k = -1$.

۱۰۴- گزینه ۲ روش اول می‌دانیم هر عددی مثل $n+2$ خودش را می‌شمارد. سمت راست آن را در 5 ضرب می‌کنیم:

$$n+2 \mid n+2 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 5} n+2 \mid 5n+10 \quad (I)$$

بر طبق صورت سؤال می‌دانیم:

$$\begin{cases} n+2 \mid 5n+3 \quad (II) \\ \begin{cases} a \mid b \\ a \mid c \end{cases} \Rightarrow a \mid b-c \end{cases}$$

با توجه به این نکته دو رابطه (I) و (II) را از هم کم می‌کنیم:

$$n+2 \mid 5n+10 \xrightarrow{(-)} n+2 \mid -7 \Rightarrow \begin{cases} n+2=7 \Rightarrow n=5 \\ n+2=1 \Rightarrow n=-1 \\ n+2=-1 \Rightarrow n=-3 \\ n+2=-7 \Rightarrow n=-9 \end{cases}$$

که در میان آن‌ها فقط $n = 5$ طبیعی است.

روش دوم ریشه عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم:

$$n+2=0 \Rightarrow n=-2 \Rightarrow 5 \times (-2) + 3 = -7$$

$n+2$ عدد -7 را می‌شمارد. بنابراین:

$$n+2 \mid -7 \Rightarrow \begin{cases} n+2=1 \\ n+2=-1 \\ n+2=-7 \\ n+2=7 \end{cases}$$

و از این‌جا به بعد مثل روش اول عمل می‌کنیم.

۱۰۵- گزینه ۳ سمت راست رابطه را تبدیل به یک عدد می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 3x+2 \mid 5x+7 &\xrightarrow{\times 2} 3x+2 \mid 10x+14 \\ &\xrightarrow{\text{کم}} 3x+2 \mid 11 \\ 3x+2 \mid 3x+2 &\xrightarrow{\times 5} 3x+2 \mid 15x+10 \end{aligned}$$

پس $3x+2 = \pm 11$ یا $3x+2 = \pm 1$ و چون بزرگ‌ترین مقدار x را می‌خواهیم $3x+2$ را برابر 11 فرض می‌کنیم. بزرگ‌ترین مقدار x برابر 3 می‌شود که عدد 24 را می‌شمارد.

۱۰۶- گزینه ۳ y را تنها می‌کنیم.

$$yx+3 = 2x+2y \Rightarrow \frac{y(x-2)}{yx-2y} = 2x-3 \Rightarrow y = \frac{2x-3}{x-2}$$

حُب حالا چه موقع y عددی طبیعی می‌شود؟ بله درست است، وقتی صورت بر منفرجه بخش‌پذیر باشد؛ یعنی $2x-3 \mid x-2$. حالا:

ریشه عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow x-2 \mid 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=-1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1 \\ x-2=1 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=3 \end{cases}$$

پس دو نقطه وجود دارد.

۱۰۷- گزینه ۱ روش اول m را از سمت راست عبارت حذف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Delta m+3 \mid \Delta m+3 &\xrightarrow{\times 9} \Delta m+3 \mid 45m+27 \\ \Delta m+3 \mid 17 &\xrightarrow{(-)} \Delta m+3 \mid 17 \\ \Delta m+3 \mid 9m+2 &\xrightarrow{\times 5} \Delta m+3 \mid 45m+10 \end{aligned}$$



۱۱۷- گزینه ۲ 3^{97} عددی فرد است، پس a ، b و c هر سه تا فرد هستند. (آه یکی زوج باشه، ضربشون زوج می شه.) می دانیم مربع هر عدد فرد به صورت $8q+1$ است؛ یعنی در تقسیم بر ۸، باقی مانده‌ای برابر یک دارد. حالا a ، b و c همگی فرد هستند، پس هر سه تا به صورت $8q+1$ هستند.

$$a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 8q + 1 + 2(8q' + 1) + 3(8q'' + 1)$$

$$= 8(q + 2q' + 3q'') + \underbrace{1+2+3}_6 = 8k + 6$$

پس باقی مانده آن بر ۸ برابر ۶ می شود.

۱۱۸- گزینه ۲ می دانیم اگر a عددی زوج باشد، $a+3$ عددی فرد است. حالا دقت کنید که $b \mid a+3$ یعنی $a+3 = bk$ که عددی فرد است بر b بخش پذیر است، بنابراین b هم حتماً باید فرد باشد (پهن عدد فرد که نمی تونه به عدد زوج بخش پذیر باشه).

از طرفی می دانیم مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقی مانده‌ای برابر ۱ دارد. بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= 8k^2 \Rightarrow a = 2k \Rightarrow a \text{ زوج است.} \\ b^2 &= 8k' + 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - 2 = 8k^2 + 8k' + 1 - 2$$

$$= 8k^2 + 8k' - 2 = \underbrace{8k^2 + 8k' - 1}_{\text{بر ۸ بخش پذیر است}} - 1 + 6$$

با توجه به این که $8k^2 + 8k' - 1$ بر ۸ بخش پذیر است باقی مانده کل عبارت بر ۸ برابر است با ۶.

۱۱۹- گزینه ۲ عددها در تقسیم به ۴ به یکی از حالت‌های زیرند:

$$4k$$

$$4k+1 \Rightarrow \text{فرد است.}$$

$$4k+2$$

$$4k+3 \Rightarrow \text{فرد است.}$$

بنابراین عددهای زوج به صورت $4k$ یا $4k+2$ است. حالا:

$$(4k)^2 = 16k^2 = 8(2k^2) = 8q$$

$$(4k+2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 8(\underbrace{2k^2 + 2k}_q) + 4 = 8q + 4$$

پس باقی مانده صفر است یا ۴، یعنی دو حالت دارد.

۱۲۰- گزینه ۲ می دانیم مربع هر عدد فرد را می توان به صورت $8q+1$ نمایش داد. داریم:

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \Rightarrow a^4 - b^4$$

$$= (8q+1 - 8q'+1)(8q+1 + 8q'+1) = (8q - 8q')(8q + 8q' + 2)$$

$$= [8(q - q')]2(4q + 4q' + 1) = 16(q - q')(4q + 4q' + 1)$$

پس عبارت، همواره بر ۱۶ بخش پذیر است.

۱۲۱- گزینه ۲ اگر b فرد باشد، پس $b+4$ هم فرد است. پس مقسوم علیه آن، یعنی $a+3$ هم فرد است. یعنی a زوج می شود. اگر ۱ اضافه و کم کنیم، داریم:

$$a^2 + 2a + b^2 + 3 = a^2 + 2a + 1 + b^2 + 3 - 1$$

$$= \underbrace{(a+1)^2}_{\text{فرد}} + b^2 + 2 = (8q+1) + (8q'+1) + 2 = 8k + 4$$

دقت کنید که اگر a زوج باشد، $a+1$ فرد می شود، پس $(a+1)^2$ دوباره $8q+1$ می شود.

به ازای $n \geq 3$ و $n \leq -3$ صورت کسر از مخرج، کوچک تر می شود که اگر $n+6$ و n^2+2 عددهایی غیر صفر باشند، $n+6$ نمی تواند بر n^2+2 بخش پذیر باشد.

اما اگر $n = -6$ باشد، صورت کسر صفر می شود و حاصل کسر برابر صفر می شود، پس به ازای دو عدد $n = 0$ و $n = -6$ کسر عدد صحیحی می شود.

۱۱۱- گزینه ۲ عدد 2^n را ببینید. فقط عامل دو دارد؛ یعنی فقط بر اعداد 2^m که $0 \leq m \leq n$ است، بخش پذیر می باشد؛ یعنی n باید توانی از ۲ باشد. توان‌های ۲ که سه رقمی هستند را امتحان کنیم.

$$n = 128 = 2^7 \Rightarrow (128)^2 \mid 2^{128} \Rightarrow 2^{14} \mid 2^{128}$$

$$n = 256 \Rightarrow (256)^2 \mid 2^{256} \Rightarrow 2^{16} \mid 2^{256}$$

شبه همین به ازای $n = 512$ هم رابطه درست می شود، توان ۲ بعدی 1024 می شود که دیگر سه رقمی نیست. پس شد ۳ تا.

۱۱۲- گزینه ۲ $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ می شود، پس داریم:

$$\frac{n(n-1)}{2} \mid n^2 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} q = n^2$$

$$\xrightarrow{\div n \times 2} (n-1)q = 2n \Rightarrow n-1 \mid 2n$$

می توان ریشه سمت چپ، یعنی $n=1$ را در راست جای گذاری کنیم، می شود:

$$n-1 \mid 2$$

پس:

$$\begin{cases} n-1=1 \Rightarrow n=2 \\ n-1=2 \Rightarrow n=3 \end{cases}$$

هر دو مقدار در رابطه مسئله هم صدق می کنند، پس شد دو مقدار طبیعی!

۱۱۳- گزینه ۲ **روش اول** باقی مانده a بر ۴ برابر ۳ است؛ یعنی داریم: $a = 4k + 3$

$$a^2 = 16k^2 + 24k + 9 = \underbrace{16k^2 + 24k + 8}_{\text{از ۸ فاکتور می گیریم}} + 1$$

$$= 8(2k^2 + 3k + 1) + 1 = 8q + 1$$

بنابراین باقی مانده a^2 بر ۸ برابر ۱ است.

روش دوم از این که $a = 4k + 3$ است می فهمیم که a فرد است و با توجه به این که مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقی مانده‌ای برابر ۱ دارد، پس باقی مانده a^2 بر ۸ برابر ۱ است.

۱۱۴- گزینه ۲ با توجه به این که $a = 4k + 3$ و $b = 6k' + 1$ دو عدد فردند، مربع هر عدد فرد به صورت $8q+1$ است.

$$a^2 + b^2 + 5 = (8q+1) + (8q'+1) + 5 = 8k'' + 7$$

یعنی باقی مانده برابر ۷ می شود.

۱۱۵- گزینه ۲ همه گزینه‌ها فرد هستند. این خبر خوبی برای شما است. چرا؟ چون مربع عدد فرد، فرد است. از طرفی مربع هر عدد فرد به صورت $8q+1$ است، پس اگر باقی مانده تقسیم عدد فردی بر ۸ برابر ۱ نباشد، آن عدد مربع کامل نیست. باقی مانده تقسیم گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ بر ۸ برابر ۱ نمی شود، پس هیچ کدام مربع کامل نیستند.

البته توجه داشته باشید که رقم یکان هیچ مربع کاملی نمی تواند ارقام ۲، ۳، ۷ یا ۸ باشد. با این نکته می توانیم ۳ را زودتر رد کنیم.

۱۱۶- گزینه ۱ از دو عدد متوالی، یکی زوج و دیگری فرد است. توان سوم آن‌ها هم، یکی زوج و دیگری فرد می شود. اگر آن‌ها را کم کنیم، فرد می شود (فرد منهای زوج، فرد می شه). حالا مربع هر عدد فرد، به صورت $8q+1$ است، پس باقی مانده آن بر ۸، برابر یک می شود.

۱۲۲- گزینه ۲

$4 \times 3^{10} - 9 \times 3^4 = 2^2 \times 3^{10} - 3^2 \times 3^4 = 3^{12} - 3^6$
 می‌دانیم $a^n - b^n$ همواره بر $a - b$ بخش پذیر است اما اگر n زوج باشد بر $a + b$ نیز بخش پذیر است. داریم:
 $3^{12} - 3^6 = (3^6)^2 - (3^3)^2 = 64^2 - 27^2 = (64 - 27)(64 + 27)$
 $= 37 \times 91 = 37 \times 7 \times 13$
 پس عدد داده شده بر ۱۱ بخش پذیر نیست.

۱۲۳- گزینه ۲

روش اول اگر $n = 1$ باشد، ۱ و ۳ رد می‌شوند. اگر $n = 3$ باشد، ۲ رد می‌شود. اما چرا ۴ درست است؟ از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$(n^2 + 2) \mid (n^4 - 2n^2 + 4) = n^6 + 8 \Rightarrow n^2 + 2 \mid n^6 + 8$$

روش دوم

سه تا نکته داریم که از اتحادهایی که در حسابان ۲ خواندید به دست آمده است. n و k دو عدد طبیعی هستند.

۱ $a^k - b^k \mid a^n - b^n$ وقتی برقرار است که n بر k بخش پذیر باشد؛ مثلاً $a^2 - b^2 \mid a^6 - b^6$.

۲ $a^k + b^k \mid a^n + b^n$ وقتی برقرار است که $\frac{n}{k}$ فرد باشد؛ یعنی n مضرب فرد k باشد. در ۴. $(n^2)^3 + 3^3$ برقرار است چون $\frac{3}{1} = 3$ می‌شود که فرد است.

۳ $a^k + b^k \mid a^n - b^n$ وقتی برقرار است که $\frac{n}{k}$ زوج باشد.

۱۲۴- گزینه ۳

ابتدا توان‌ها را یکی می‌کنیم:
 $3^{39} + 7^{26} = (3^3)^{13} + (7^2)^{13} = 27^{13} + 49^{13}$
 می‌دانیم اگر n فرد باشد $a^n + b^n$ بر $a + b$ بخش پذیر است، بنابراین $27^{13} + 49^{13}$ بر $27 + 49 = 76$ بخش پذیر است و با توجه به این که $4 \times 19 = 76$ ، این عدد بر ۱۹ بخش پذیر است.

۱۲۵- گزینه ۲

می‌دانیم اگر n زوج باشد $a^n - b^n$ هم بر $a - b$ بخش پذیر است و هم بر $a + b$. در این نوع سؤال‌ها اول باید توان‌ها را یکسان کنیم:
 $3^{42} - 3^{18} = (3^7)^6 - (3^3)^6 = 128^6 - 27^6$
 این عدد بر $101 = 128 - 27$ و $128 + 27 = 155 = 5 \times 31$ بخش پذیر است. بنابراین در میان عددهای داده شده $3^{42} - 3^{18}$ فقط بر ۶۱ بخش پذیر نیست.

۱۲۶- گزینه ۳

می‌دانیم $5^0 = 1 + 1 = 7^2$ است که بر ۲۵ بخش پذیر است. از طرفی اگر n فرد باشد $a^n + b^n$ بر $a + b$ نتیجه می‌توان نوشت:
 $7^2 + 1 \mid (7^2)^{k+1} + 1 \Rightarrow 5^0 \mid 7^{4k+2} + 1$
 یعنی عددهای به فرم $7^{4k+2} + 1$ بر 5^0 و در نتیجه بر ۲۵ بخش پذیرند. پس $7^6 + 1$ بر ۲۵ بخش پذیر است.

روش دوم

$$7^6 + 1 = (7^2)^3 + 1 = \underbrace{(7^2 + 1)}_{5^0} (7^4 + 1 - 7^2)$$

۱۲۷- گزینه ۲

می‌دانیم $a^n - b^n$ همواره بر $a - b$ بخش پذیر است و اگر n زوج باشد $a^n - b^n$ بر $a + b$ نیز بخش پذیر است. با توجه به همین نکته، $5^n - 2^n$ همواره بر $5 - 2 = 3$ بخش پذیر است. اما ما می‌خواهیم

این عبارت مضرب ۱۳ باشد.

سعی می‌کنیم برای n حالت‌های مختلفی در نظر بگیریم تا ببینیم می‌توانیم کاری کنیم $a^n - b^n$ مضرب ۱۳ شود.

(الف) اگر n زوج باشد، داریم:
 $5^{2k} - 2^{2k} = 25^k - 4^k$
 که مضرب $21 = 4 - 25$ است. (که به درد ما نمی‌خورد!)
 (ب) اگر n مضرب ۳ باشد، داریم:

$5^{3k} - 2^{3k} = 125^k - 8^k$
 که بر $117 = 125 - 8$ بخش پذیر است. حالا با توجه به این که $13 \times 3^2 = 117$ ، پس اگر n مضرب ۳ باشد $5^n - 2^n$ بر ۱۳ بخش پذیر است. در میان گزینه‌ها فقط ۸۴ مضرب ۳ است.

۱۲۸- گزینه ۳

می‌دانیم اگر n فرد باشد: $a^n + b^n \mid a + b$ به عبارت دیگر رابطه $a^{2k+1} + b^{2k+1} \mid a + b$ همواره برقرار است. با توجه به این که $28 = 3^3 + 1$ است، می‌توان نوشت:
 $3^3 + 1 \mid (3^2)^{k+1} + 1^{2k+1} \Rightarrow 28 \mid 3^{6k+2} + 1$
 پس اگر n به صورت $6k + 3$ باشد رابطه برقرار است. با توجه به این که n عددی طبیعی و کوچک‌تر از ۶۰ است داریم:

$$1 \leq 6k + 3 < 60 \Rightarrow -2 \leq 6k < 57$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{57}{6} = 9.5 \Rightarrow k = 0, 1, 2, \dots, 9$$

پس به ازای ۱۰ عدد رابطه برقرار است.

این سؤال‌ها با هم‌نهشتی راحت‌تر حل می‌شوند در درس بعد روش حل این سؤال‌ها با هم‌نهشتی را نیز می‌بینید.

۱۲۹- گزینه ۳ برای به دست آوردن ب.م.م هر عدد کافی است هر دو عدد را تجزیه کرده، عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب کنیم:
 $(180, 144) = (2^2 \times 3^2 \times 5, 2^4 \times 3^2) = 2^2 \times 3^2 = 36$

۱۳۰- گزینه ۱ می‌دانیم اگر عدد a عدد b را بشمارد ب.م.م.شان می‌شود $|a|$ ، بنابراین:

$$\begin{cases} a \mid b \Rightarrow (a, b) = |a| \xrightarrow{a < b} (a, b) = -a \\ |a| \mid 0 \Rightarrow (a, 0) = |a| = -a \end{cases}$$

۱۳۱- گزینه ۱ برای به دست آوردن ب.م.م دو عدد باید عددها را تجزیه کرد و عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب کرد. اما گاهی همان‌طور که می‌بینید تجزیه عددها کار سختی است. در این‌جور موارد همان‌طور که در درس‌نامه هم گفتیم می‌توانیم از روش نردبانی استفاده کنیم:

q	۳	۱	۱	
۶۶۳	۱۸۷	۱۰۲	۸۵	۱۷
r	۱۰۲	۸۵	۱۷	

$$\begin{array}{r} 663 \overline{) 187} \\ 561 \\ \hline 102 \end{array}$$

۶۶۳ را بر ۱۸۷ تقسیم کرده و باقی‌مانده و خارج قسمت را در جدول قرار می‌دهیم چون باقی‌مانده صفر نشده، باقی‌مانده را به سطر وسط منتقل کرده دوباره عددها را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 187 \overline{) 102} \\ 102 \\ \hline 0 \end{array}$$





۲ نادرست است، چون ممکن است ب.م. دو عدد عددی بزرگتر از ۲ شود:

$$a = 12 \Rightarrow (a, b+1) = (12, 6) = 6$$

$$b = 5$$

۳ نادرست است، چون ممکن است a زوج و b مضرب ۷ باشد:

$$a = 14 \Rightarrow (14, 7) = 7$$

۴ درست است، چون اختلاف دو عدد فرد و زوج همواره فرد است و ب.م. هر عدد فرد با ۲ برابر ۱ است.

۱۳۷- گزینه ۴ $3 \times 2^2 = 12$ است، پس a نه زوج است و نه مضرب ۳.

از بین اعداد یک‌رقمی، $a = 1, 5, 7$ می‌تواند باشد، پس a سه مقدار دارد.

۱۳۸- گزینه ۲ می‌دانیم:

$$(4n+1, 18) = d \Rightarrow \begin{cases} d | 18 \\ d | 4n+1 \end{cases}$$

$4n+1$ فرد است پس d نمی‌تواند زوج باشد اما هر یک از مضارب فرد ۱۸

می‌تواند باشد. $d = 1, 3, 9$

۱۳۹- گزینه ۲ می‌دانیم ۱۳ عدد اول است، بنابراین بزرگترین

مقسوم‌علیه مشترک یک عدد دیگر با ۱۳ یا برابر ۱ است و یا برابر ۱۳. (برای

مثال $1 = (20, 113)$ می‌شه ولی پون ۳۹ مقبره ۱۳: $13 = (39, 113)$ می‌شه.) حالا

در این سؤال می‌دانیم $(n-3, 13)$ بزرگتر از ۱ است. بنابراین این مقدار

برابر ۱۳ است و در نتیجه $n-3$ حتماً باید مضرب ۱۳ باشد.

$$n-3 = 13k \Rightarrow n = 13k+3$$

می‌خواهیم n دورقمی باشد پس $99 \geq n \geq 10$ داریم:

$$10 \leq 13k+3 \leq 99 \Rightarrow 7 \leq 13k \leq 96 \Rightarrow 0/6 \leq k \leq 7/3$$

$$\Rightarrow k = 1, 2, \dots, 7$$

یعنی به ازای ۷ مقدار دورقمی n رابطه برقرار است.

۱۴۰- گزینه ۴ می‌دانیم که d هر دو عدد را می‌شمارد. داریم:

$$\left. \begin{aligned} d | 3n+5 &\xrightarrow{\times n} d | 3n^2+5n \\ d | 3n^2-2n+6 &\xrightarrow{(-)} d | 7n-6 \end{aligned} \right\}$$

$$d | 7n-6 \xrightarrow{\times 2} d | 14n-12$$

$$d | 3n+5 \xrightarrow{\times 7} d | 21n+35$$

$$\Rightarrow d = 53 \quad (d \neq 1 \text{ گفته})$$

برای مثال به ازای $n = 16$ داریم: $(53, 742) = 53$

روش تستی کافی است ریشه $3n+5$ را در $3n^2-2n+6$ قرار

دهیم و صورت کسر حاصل را در نظر بگیریم:

$$3n+5=0 \Rightarrow n = -\frac{5}{3} \Rightarrow 3n^2-2n+6$$

$$= 3 \times \left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{5}{3}\right) + 6 = \frac{53}{3} \Rightarrow d | 53 \Rightarrow d = 53$$

۱۴۱- گزینه ۲ $(20! \cdot 19! - 18!) = (20 \times 19 \times 18! \cdot 18! \cdot (19-1))$

$$= (20 \times 19 \times 18! \cdot 18! \times 18) = 18! \cdot (20 \times 19 \cdot 18) = 2 \times 18!$$

۱۴۲- گزینه ۲ می‌دانیم اگر $(a, b) = d$ باشد آن‌گاه $d | a$ و $d | b$.

$$(n, 24) = 12 \Rightarrow 12 | n \Rightarrow n = 12q$$

اما q نمی‌تواند زوج باشد چون q زوج باشد، n مضرب ۲۴ می‌شود و در

دوباره باقی‌مانده را به ردیف وسط می‌بریم و الگوریتم را تکرار می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 102 \overline{) 85} \\ \underline{85} \\ 0 \end{array}$$

و بالاخره چون ۸۵ بر ۱۷ بخش‌پذیر است پس ب.م. دو عدد ۱۷ است.

$$\text{مضرب } 7 \text{ است. } 2d+1=35 \Rightarrow d=17$$

۱۳۲- گزینه ۱ می‌توانیم عوامل مشترک را از ب.م.م فاکتور بگیریم.

$$(3m, 9m^2) = 3m(1, 3m) = 12$$

بنابراین:

$$3m = 12 \Rightarrow m = 4 \quad \text{می‌دانیم همواره } (1, a) = 1 \text{ است پس:}$$

۱۳۳- گزینه ۱

اگر $(a, b) = d$ باشد $(a^2, b^2) = d^2$ و $(\Delta a, \Delta b) = \Delta d$ است. بنابراین:

$$d^2 - \Delta d = 14 \Rightarrow d^2 - 5d - 14 = 0$$

$$\Rightarrow (d-7)(d+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d=7 \\ d=-2 \text{ غق} \end{cases}$$

۱۳۴- گزینه ۳ قبل از این که تست را حل کنیم، چند نکته مهم کتاب

درسی را مرور می‌کنیم:

۱ دو عدد متوالی، نسبت به هم اول‌اند (پس ۱ درسته)

۲ دو عدد فرد متوالی، نسبت به هم اول‌اند.

۳ ب.م.م دو عدد زوج متوالی، برابر ۲ می‌شود.

خب حالا $4m+1$ و $4m+3$ دو عدد فرد متوالی هستند، پس نسبت به

هم اول‌اند. (۲ درسته) شبیه همین، (۴ هم درست است، اما چرا ۳)

غلط است؟ خیلی ساده $m=1$ بگیرد. می‌بینیم $(6, 8) = 2$ می‌شود نه.

اما برای درک بهتر یکی از گزینه‌ها را ثابت می‌کنیم که چرا ب.م.م‌شان برابر

۱ می‌شود. گزینه ۲ را نگاه کنید. فرض کنید: $d = (4m+1, 4m+3)$

$$\left\{ \begin{aligned} d | 4m+1 &\xrightarrow{(-)} d | 2 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 2 \\ d | 4m+3 &\xrightarrow{(-)} d | 2 \end{aligned} \right.$$

اما d نمی‌تواند برابر ۲ باشد، زیرا هر دو عدد $4m+1$ و $4m+3$ فردند و

عددهای فرد نمی‌توانند بر ۲ بخش‌پذیر باشند.

۱۳۵- گزینه ۳ یک نکته خیلی مهمی که باید بدانیم این است که اگر

$(a, b) = d$ باشد، d نه تنها ب.م.م دو عدد a و b است بلکه بر بقیه

مقسوم‌علیه‌های مشترک a و b نیز بخش‌پذیر است.

به بیان دیگر اگر $(a, b) = d$ و x نیز یک مقسوم‌علیه مشترک دو عدد باشد

یعنی $a | x$ و $b | x$ می‌توان نتیجه گرفت $d | x$.

اگر $(a, b) = d$ باشد:

$$x | a, x | b \Rightarrow x | d$$

بنابراین در این سؤال وقتی ب.م.م دو عدد ۳۶ است، هر یک از مقسوم‌علیه‌های

۳۶ نیز یک مقسوم‌علیه مشترک دو عدد است.

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} = \text{مجموعه مقسوم‌علیه‌های } 36$$

یعنی به ازای ۹ عدد، رابطه برقرار است.

۱۳۶- گزینه ۴

۱ نادرست است، چون برای مثال ممکن است هر دو مضرب ۳ باشند:

$$\begin{aligned} a &= 6 \Rightarrow (6, 3) = 3 \\ b &= 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow d|11n+2 \xrightarrow{\times 7} d|77n+14 &\xrightarrow{(-)} d|41 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 41 \\ d|7n+5 \xrightarrow{\times 11} d|77n+55 \end{aligned}$$

پس ب.م.م دو عدد ۱ است و یا ۴۱ و بنابراین هیچ وقت نمی تواند ۳ باشد.

۱۴۸- گزینه ۱ ب.م.م دو عدد را d فرض می کنیم. داریم:

$$(n+2, 7n+1) = d$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d|n+2 \xrightarrow{\times 7} d|7n+14 &\xrightarrow{(-)} d|12 \\ d|7n+1 &\xrightarrow{(+)} d|13 \end{aligned}$$

چون گفته $d \neq 1$ پس $d=13$ است پس هر دو عدد $n+2$ و $7n+1$ باید بر ۱۳ بخش پذیر باشند.

$$n+2=13k \Rightarrow n=13k-2 \Rightarrow 41 \leq 13k-2 \leq 100$$

$$\Rightarrow 43 \leq 13k \leq 102 \Rightarrow \frac{43}{13} \leq k \leq \frac{102}{13}$$

$$\Rightarrow k=4, 5, 6, 7$$

پس به ازای ۴ عدد رابطه برقرار است.

۱۴۹- گزینه ۲ می دانیم $15a+3$ و $15a-12$ هر دو بر ۳ بخش پذیرند. پس عدد ۳ یک مقسوم علیه مشترک دو عدد است. یعنی d یک عامل ۳ دارد.

$$(15a-12, 15a+3) = d \Rightarrow \begin{aligned} d|15a-12 &\xrightarrow{(-)} d|15 \\ d|15a+3 \end{aligned}$$

چون d از یک طرف مضرب است و از طرف دیگر ۱۵ را می شمارد، پس ۱۵ یا ۳ یا $d=15$ اما $d=15$ نیز نمی تواند باشد، چون برای مثال عدد $15a+3$ در تقسیم به ۱۵ باقی مانده ای برابر ۳ دارد و نمی تواند بر ۱۵ بخش پذیر باشد. بنابراین ب.م.م این دو عدد همواره برابر ۳ است.

با یک مثال هم می شد فهمید!

$$a=1 \Rightarrow (15a+3, 15a-12) = (18, 3) = 3$$

۱۵۰- گزینه ۲ $(2k-3, k^2+6k-1) = d$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d|2k-3 \xrightarrow{\times k} d|2k^2-3k \\ d|k^2+6k-1 \xrightarrow{\times 2} d|2k^2+12k-2 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{(-)} d|15k-2 \quad (I)$$

حالا این رابطه (I) را با رابطه اول می گیریم:

$$d|2k-3 \xrightarrow{\times 15} d|30k-45$$

$$d|15k-2 \xrightarrow{\times 2} d|30k-4$$

$$\xrightarrow{(-)} d|41 \Rightarrow d=41$$

روش دوم ریشه عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار می دهیم و صورت کسر را در نظر می گیریم:

$$2k-3=0 \Rightarrow k=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{9}{4}+9-1=\frac{41}{4}$$

$$\Rightarrow d|41 \Rightarrow d=41 \text{ یا } 1$$

چون $d \uparrow 1$ پس $d=41$ است.

۱۵۱- گزینه ۲ چون $(n, 10) = 2$ است پس n زوج است ولی مضرب ۵ نیست

می دانیم تعداد عددهای طبیعی زوج کوچک تر مساوی ۳۰ برابر است با:

$$\left\lfloor \frac{30}{2} \right\rfloor = 15$$

نتیجه $(n, 24)$ برابر ۲۴ می شود. پس q فرد است.

$$q=2k+1 \Rightarrow n=12(2k+1)=24k+12$$

n دورقمی است، بنابراین:

$$10 \leq 24k+12 \leq 99 \Rightarrow -2 \leq 24k \leq 87$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{24} \leq k \leq \frac{87}{24} \Rightarrow k=0, 1, 2, 3$$

پس به ازای چهار عدد، رابطه برقرار است.

۱۴۳- گزینه ۲

$$(6a, 10b) = 44 \Rightarrow 2(3a, 5b) = 44 \Rightarrow (3a, 5b) = 22$$

بنابراین $3a$ و $5b$ هر دو بر ۲۲ بخش پذیر است و چون ۳ و ۵ نسبت به ۲۲ اول اند پس a و b هر دو بر ۲۲ بخش پذیرند و در نتیجه $(a, b) = 22$ پس **۱** نادرست است.

۲ درست است، چون اگر a مضرب ۵ باشد، با توجه به این که $5b$ نیز بر ۵ بخش پذیر است پس 5 در ب.م.م دو عدد نیز می آید:

$$(3a, 5b) = 22 \times 5 = 110$$

۳ نادرست است، b مضرب ۳ نیست چون اگر b مضرب ۳ بود حاصل $(3a, 5b) = 66$ می شود. (پس $3a$ هم مضرب ۳ است و 3 می شه عامل مشترک و تو ب.م.م می آید).

۴ دلیلی ندارد $a+b$ بر ۴۴ بخش پذیر باشد. برای مثال اگر $a=22$ و $b=44$ باشد $a+b=66$ بر ۴۴ بخش پذیر نیست.

۱۴۴- گزینه ۱ روش اول ب.م.م دو عدد (a, c) را برابر d فرض می کنیم. داریم:

$$(a, c), d \Rightarrow \begin{cases} d|a \\ d|c \end{cases}$$

در صورت سؤال گفته شده $c|a-b$ ، بنابراین:

$$d|c, c|a-b \Rightarrow \begin{aligned} d|a-b &\xrightarrow{(+)} d|b \\ d|b \end{aligned}$$

پس d یک مقسوم علیه مشترک a و b است اما با توجه به این که a و b نسبت به هم اول اند (خود سؤال گفته) بنابراین تنها مقسوم علیه مشترکشان عدد ۱ است و در نتیجه $d=1$.

روش دوم این مدل سؤال ها را با عددگذاری هم می شود حل کرد. برای مثال در این سؤال $a=5$ ، $b=3$ ، $c=2$ باشد، در این صورت $c|a-b$ و $(c, a) = (2, 5) = 1$:

۱۴۵- گزینه ۲ ب.م.م دو عدد را d فرض می کنیم. داریم:

$$(25n+9, 11n+4) = d$$

$$d|11n+4 \xrightarrow{\times 25} d|275n+100$$

$$\Rightarrow d|1 \Rightarrow d=1$$

$$d|25n+9 \xrightarrow{\times 11} d|275n+99$$

یعنی به ازای همه مقادیر n دو عدد همواره نسبت به هم اول اند. خب چند عدد دورقمی داریم؟ درست است، ۹۰ تا!

۱۴۶- گزینه ۱ می دانیم $(a, b) = d$ باشد، $d|a$ و $d|b$. داریم:

$$(5n-2, 12n+7) = d$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} d|5n-2 &\xrightarrow{\times 12} d|60n-24 \\ d|12n+7 &\xrightarrow{\times 5} d|60n+35 \end{aligned} \right. &\xrightarrow{(-)} d|59 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 59 \end{aligned}$$

پس اگر دو عدد نسبت به هم اول نباشند ب.م.م شان ۵۹ است.

۱۴۷- گزینه ۱ ب.م.م دو عدد را d می نامیم، داریم:

$$(7n+5, 11n+2) = d$$



$$\left\{ \begin{array}{l} m=0 \\ n=4 \end{array} \right. \Rightarrow X_{\max} = 10^4 = 10000$$

$$\Rightarrow 10000 - 1296 = 8704$$

این سؤال از مباحث کتاب درسی نیست ولی در کنکور آمده است.

۱۵۴- گزینه ۲ خوب است یک بار دیگر یادآوری کنیم: برای پیدا کردن

ب.م.م دو عدد فقط عوامل مشترک را با توان کوچکتر در هم ضرب می‌کنیم. اما برای پیدا کردن ک.م.م دو عدد، عوامل مشترک را با توان بزرگتر در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم. یک نکته دیگر را هم در این سؤال یاد بگیریم: اثباتش را بی‌خیال شوید، هر چند واقعاً سخت نیست.

برای پیدا کردن مقدار مقسوم‌علیه‌های طبیعی یک عدد کافی است عدد را تجزیه کرده توان‌ها را با یک جمع کرده در هم ضرب کنیم:

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

$$n \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی } = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x|a \\ x|b \end{array} \right\} \Rightarrow x|(a, b) \text{ دیدیم که } \left. \begin{array}{l} x|a \\ x|b \end{array} \right\} \Rightarrow x|(a, b) \text{ ، بنابراین:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x|2^3 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2 \\ x|2^5 \times 3^2 \times 5^p \times 11 \end{array} \right. \Rightarrow x|2^{\min\{3,5\}} \times 3^{\min\{4,2\}} \times 5^{\min\{3,p\}}$$

می‌دانیم $\min\{3, p\}$ یا ۳ است و یا p . اگر ۳ باشد، داریم:

$$x|2^3 \times 3^2 \times 5^3 \Rightarrow \text{تعداد مقسوم‌علیه‌های } x = 4 \times 3 \times 4 = 48$$

که امکان‌پذیر نیست. پس $\min\{3, p\} = p$ است. یعنی $x|2^3 \times 3^2 \times 5^p$. تعداد مقسوم‌علیه‌های x برابر است با:

$$(3+1)(2+1)(p+1) = 12(p+1)$$

اما می‌دانیم تعداد مقسوم‌علیه‌ها ۲۴ تا است (۲۳ تا به جز یک که با عدد ۱ می‌شود ۲۴ تا). پس: $12(p+1) = 24 \Rightarrow p+1 = 2 \Rightarrow p = 1$. حالا ک.م.م دو عدد را پیدا می‌کنیم:

$$A = 2^3 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2 \Rightarrow [A, B] = 2^5 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2 \times 11$$

$$B = 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 11$$

که تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن برابر است با:

$$(5+1)(4+1)(3+1)(2+1)(1+1) = 720$$

۱۵۵- گزینه ۱ $(5a + 3b, 8a + 5b) = d$ می‌گیریم، پس:

$$d|5a + 3b \xrightarrow{\times 8} d|40a + 24b \Rightarrow d|b$$

$$d|8a + 5b \xrightarrow{\times 5} d|40a + 25b$$

دقیقاً شبیه همین (بالایی رو تو ۵ و پایینی رو تو ۳ ضرب کن) ثابت می‌شود $d|a$. گفته شده a و b نسبت به هم اول‌اند؛ یعنی ب.م.م آن‌ها برابر ۱ است. حالا d مقسوم‌علیه مثبتی از a و b است. یک حالت بیشتر ندارد و آن هم این که $d = 1$ بشود.

خوب است این نکته را هم بلد باشید. اگر $(a, b) = d$ باشد آن‌گاه

$$mn' - nm' = \pm 1 \text{ است. اگر داشته باشیم: } (ma + nb, m'a + n'b) = d$$

در این سؤال $(a, b) = 1$ است و با توجه به این که $5 \times 5 - 8 \times 3 = 1$ می‌توانیم نتیجه بگیریم: $(5a + 3b, 8a + 5b) = 1$.

۱۵۶- گزینه ۲ خب x عددی است که هم ۶ آن را عاد می‌کند و هم ۸

(۸ یا ۸ فرقی ندارد). حالا کوچکترین عدد مثبت x را می‌خواهیم.

بنابراین ک.م.م دو عدد را به دست می‌آوریم. $[6, 8] = 24$ می‌شود که مجموع ارقام آن برابر ۶ است.

اما از این ۱۵ عدد زوج، عددی ۱۰، ۲۰ و ۳۰ مضرب ۵ اند که قابل قبول نیستند و در نتیجه $12 = 15 - 3$ عدد به جای n می‌توان قرار داد.

۱۵۲- گزینه ۲ این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی است اما متأسفانه در کنکور سراسری آمده است.

همان‌طور که در درس‌نامه گفتیم خوب است بدانید اگر عدد n به صورت $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ تجزیه شود، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی این عدد برابر است با:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

بنابراین تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد $X = 2^m \times 5^n$ برابر است با:

$$(m+1)(n+1)$$

$$\frac{X}{40} = \frac{2^m \times 5^n}{2^3 \times 5} = 2^{m-3} \times 5^{n-1}$$

حالا با توجه به این‌که:

$$(m-2) \times n \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت } \frac{X}{40} \text{ برابر است با:}$$

$$\frac{X}{40}$$

اختلاف تعداد مقسوم‌علیه‌ها ۱۲ تا است، بنابراین:

$$(m+1)(n+1) - n(m-2) = 12$$

$$\Rightarrow mn + m + n + 1 - nm + 2n = 12$$

$$\Rightarrow m + 3n = 11$$

دقت کنید که $m \geq 3$ و $n \geq 1$ است و گزینه $\frac{X}{40}$ عددی طبیعی نمی‌شود.

دو حالت برای n و m وجود دارد:

$$\text{الف) } m = 8, n = 1 \Rightarrow X = 2^8 \times 5 = 1280$$

$$\text{ب) } m = 5, n = 2 \Rightarrow X = 2^5 \times 5^2 = 800$$

و چون حداقل مقدار X خواسته شده همین ۸۰۰ را در نظر می‌گیریم.

۱۵۳- گزینه ۲ اگر عدد n به صورت $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$

تجزیه شود، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد برابر است با:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

بنابراین تعداد مقسوم‌علیه‌های عبارت زیر:

$$X = 6^m \times 10^n = 2^m \times 3^m \times 2^n \times 5^n = 2^{m+n} \times 3^m \times 5^n$$

$$(m+n+1)(m+1)(n+1)$$

برابر است با:

از طرفی:

$$15X = 3 \times 5 \times 2^{m+n} \times 3^m \times 5^n = 2^{m+n} \times 3^{m+1} \times 5^{n+1}$$

$\Rightarrow 15X$ تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی

$$= (m+n+1)(m+2)(n+2)$$

اختلاف دو عدد برابر ۳۵ است، در نتیجه:

$$(m+n+1)(m+2)(n+2) - (m+n+1)(m+1)(n+1) = 35$$

$$= 35$$

$$\Rightarrow (m+n+1) \left(\frac{(m+2)(n+2) - (m+1)(n+1)}{mn+2m+2n+4} \right) = 35$$

$$\Rightarrow (m+n+1)(m+n+3) = 35$$

ضرب دو عدد برابر ۳۵ شده است پس یکی ۵ و دیگری ۷ است.

$$m+n+1=5 \Rightarrow m+n=4$$

اگر بخواهیم عدد، کوچکترین مقدار را داشته باشد، توان بزرگتر را به ۶ و اگر بخواهیم عدد، بیشترین مقدار خود را داشته باشد، توان ۱۰ را ماکزیم می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} m=4 \\ n=0 \end{array} \right. \Rightarrow X_{\min} = 6^4 = 1296$$

کوچکترین عدد



۱۶۵- گزینه ۲ یک بار دیگر این نکته را با هم مرور کنیم:

$$a | b \Rightarrow \begin{cases} (a, b) = |a| \\ [a, b] = |b| \end{cases}$$

یک نکته مهم دیگر هم خوب است همیشه بدانید: عددها بر م.م.م. بخش پذیرند و ک.م.م. بر عددها بخش پذیر است. بگذارید یک مثال بزنیم. فرض کنید عددهای ما ۱۲ و ۱۸ باشند. در این صورت: $(12, 18) = 6$ می بینید که عددها، یعنی ۱۲ و ۱۸ هر دو بر ۶ بخش پذیرند.

$$[12, 18] = 36$$

می بینید ک.م.م. یعنی ۳۶ بر هر دو عدد ۱۲ و ۱۸ بخش پذیر است.

حالا برویم سراغ حل سؤال:

۱) طبق چیزی که گفتیم ب.م.م. عددها را می شمارد و عددها ک.م.م. را. یعنی:

$$(a, b) | a, a | [a, b] \Rightarrow (a, b) | [a, b] \Rightarrow ((a, b), [a, b]) = (a, b)$$

$$((12, 18), [12, 18]) = (6, 36) = 6$$

با عددگذاری:

$$(a, b) | a \Rightarrow [(a, b), a] = a$$

ب.م.م. عدد را می شمارد پس:

$$[(12, 18), 12] = [6, 12] = 12$$

با عددگذاری:

پس همین گزینه پاسخ سؤال است.

$$(a, b) | b \Rightarrow ((a, b), b) = (a, b)$$

طبق چیزی که گفتیم:

$$((12, 18), 18) = (6, 18) = 6$$

با عددگذاری:

$$a | [a, b] \Rightarrow (a, [a, b]) = a$$

۴

$$(12, [12, 18]) = (12, 36) = 12$$

با عددگذاری:

۱۶۶- گزینه ۲ می دانیم اگر a و b دو عدد طبیعی باشند و $a | b$ آن گاه:

$$[a, b] = b$$

$$[a^x b, ab^y c] = ab[a, bc]$$

از طرفی:

$$a^x | c \xrightarrow{\text{سمت راست } b \times} a | c \xrightarrow{\text{سمت چپ } +a} a | bc$$

بنابراین $[a, bc] = bc$ و در نتیجه:

$$[a^x b, ab^y c] = ab[a, bc] = ab \times bc = ab^y c$$

۱۶۷- گزینه ۲ **روش اول** از $(m, 6) = 3$ می توان نتیجه گرفت که m

بر ۳ بخش پذیر است (دست کم یک عامل ۳ دارد). ولی زوج نیست.

$$[5m^2, 90] = 5[m^2, 18] = 5[m^2, 2 \times 3^2]$$

وقتی m دست کم یک عامل ۳ دارد پس m^2 دست کم ۲ عامل ۳ دارد و عامل ۲ نیز ندارد. حالا چون ۲ عامل مشترک نیست در ک.م.م. نیز می آید.

$$5[m^2, 2 \times 3^2] = 10m^2$$

بنابراین:

روش دوم با عددگذاری به سؤال، جواب می دهیم. اگر $m = 3$ باشد،

$$[45, 90] = 90 = (3, 6)$$

۱۶۸- گزینه ۲ می دانیم برای به دست آوردن ک.م.م. دو عدد عوامل

مشترک را با توان بزرگتر در عوامل غیر مشترک ضرب می کنیم. عددها را تجزیه می کنیم. داریم:

$$[m, 120] = 600 \Rightarrow [m, 2^3 \times 3 \times 5] = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

m فقط می تواند عوامل ۲، ۳ و ۵ داشته باشد و عامل های دیگری ندارد. (پون

آله برای مثال m عامل ۷ هم داشت باید توی ک.م.م. هم ۷ بیاورد)

پس فرم کلی m به صورت $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$ است.

γ صددرصد برابر ۲ است چون در تجزیه ۱۲۰ توان عدد برابر ۱ است ولی

در ک.م.م. توان عدد ۵ برابر ۲ است، پس $\gamma = 2$ است.

$$157- \text{گزینه ۲} \quad \text{می دانیم: } a | b \Rightarrow \begin{cases} (a, b) = |a| \\ [a, b] = |b| \end{cases} \quad (\text{هواستون باشه تو})$$

این حالت ب.م.م. می شه قدر مطلق کوپیک تره و ک.م.م. قدر مطلق بزرگ تره. در این سؤال $[a, b] = a$ شده است، بنابراین می توانیم نتیجه بگیریم: $a | b$ و بنا به همان نکته وقتی $a | b$ آن گاه $(b, a) = |b|$.

۱۵۸- گزینه ۳ ب.م.م. دو عدد ۳۴۱ و ۴۰۳ را پیدا می کنیم چون تجزیه

دو عدد کمی سخت به نظر می رسد، از روش نردبانی استفاده می کنیم:

q	۱	۵	۲
۴۰۳	۳۴۱	۶۲	۳۱
r	۶۲	۳۱	۰

$$[(341, 403) + 1, 112] = [32, 112] = [2^5, 2^4 \times 7] = 2^5 \times 7 = 224$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 2 + 2 + 4 = 8$$

۱۵۹- گزینه ۲ اول $(627, 429)$ را پیدا می کنیم. برای این کار دو عدد

$$\text{را تجزیه می کنیم: } (627, 429) = (3 \times 11 \times 19, 3 \times 11 \times 13) = 33$$

حالا کوچکترین مضرب مشترک دو عدد ۳۳ و ۱۵۴ را پیدا می کنیم:

$$[33, 154] = [3 \times 11, 11 \times 14] = 3 \times 11 \times 14 = 462$$

۱۶۰- گزینه ۳ وقتی عددی بر سه عدد ۱۵، ۲۱ و ۳۵ بخش پذیر است

یعنی بر ک.م.م. آن ها نیز بخش پذیر است. بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} 15 | x \\ 21 | x \\ 35 | x \end{aligned} \right\} \Rightarrow [15, 21, 35] | x \Rightarrow [3 \times 5, 3 \times 7, 7 \times 5] | x$$

$$\Rightarrow 105 | x \Rightarrow x = 105q$$

حالا مقادیر سه رقمی x را پیدا می کنیم:

$$100 \leq 105q < 1000 \Rightarrow 0/9 \leq q < 9/52$$

$$\Rightarrow q = 1, 2, 3, \dots, 9$$

پس به ازای ۹ عدد رابطه برقرار است.

۱۶۱- گزینه ۲ خیلی ساده می توانید ثابت کنید که اگر ب.م.م. و ک.م.م. دو عدد

a و b مساوی باشند، (یعنی $(a, b) = [a, b]$) نتیجه می گیریم $|a| = |b|$.

$$|n^2 - 1| = 8 \begin{cases} n^2 - 1 = 8 \Rightarrow n = \pm 3 \\ n^2 - 1 = -8 \Rightarrow n^2 = -7 \end{cases}$$

پس:

جواب ندارد. $n^2 = -7$

پس به ازای دو مقدار.

$$162- \text{گزینه ۲} \quad a^3 | a^y \Rightarrow [a^3, a^y] = a^y$$

$$a^4 | a^y \Rightarrow (a^y, a^4) = a^4$$

$$([a^3, a^y], a^4) = a^4$$

به بیان دیگر:

۱۶۳- گزینه ۲ طبق آن چه گفتیم:

$$4a | 8a \quad \text{پس ب.م.م. می شود، } (4a, 8a) = |4a| \quad (\text{کوپیک تره، از طرفی})$$

$$3a | 12a^2 \quad \text{پس ک.م.م. می شود، } |12a^2| = |12a^2| = 12a^2$$

$$4a | 12a^2 \quad \text{پس ب.م.م. دوباره } |4a| = 4 |a| \quad \text{می شود.}$$

۱۶۴- گزینه ۱ از $3x | y$ می توان نتیجه گرفت که $x | y$ و $3 | y$. بنابراین:

$$x | y \Rightarrow [x, y] = |y| \Rightarrow (|y|, 3) = 3$$

$$3 | y \Rightarrow (3, y) = 3 \quad \text{چون } 3 | y$$

$$([x, y], (3, y)) = 3$$

به بیان دیگر:



۱۷۲- گزینه ۲ دو رابطه را بر حسب a' و b' می‌نویسیم:
 $(a, b) = \gamma \Rightarrow d = \gamma$
 $[a, b] = 420 \Rightarrow a'b'd = 420$

	جای‌گذاری	$a'b' = 60$	
(۱)	۱	۶۰	✓
(۲)	۲	۳۰	✗
(۳)	۳	۲۰	✓
(۴)	۴	۱۵	✓
(۵)	۵	۱۲	✓
(۶)	۶	۱۰	✗

دو حالت $b' = 30$ و $a' = 2$ و $b' = 20$ و $a' = 6$ و $b' = 10$ را رد می‌کنیم چون a' و b' باید نسبت به هم اول باشند. در بقیه حالت‌ها $a + b$ را پیدا می‌کنیم.

(۱) $a + b = 7 \times (60 + 1) = 427$

(۲) $a + b = 7 \times (20 + 3) = 161$

(۳) $a + b = 7 \times (4 + 15) = 133$

(۴) $a + b = 7 \times (5 + 12) = 119$

بنابراین $a + b$ نمی‌تواند برابر ۲۲۴ باشد.

۱۷۳- گزینه ۳ دو رابطه را بر حسب a' و b' و d می‌نویسیم:
 $(a, b) = 8 \Rightarrow d = 8$

$a + b = 104 \Rightarrow a'd + b'd = 104$

بجای‌گذاری $d \rightarrow 8(a' + b') = 104 \Rightarrow a' + b' = 13$

می‌خواهیم $[a, b]$ ماکزیمم شود. می‌دانیم $[a, b] = a'b'd$.
 بنابراین از میان حالت‌هایی که $a' + b' = 13$ می‌شود حالتی را در نظر بگیریم که ضربشان ماکزیمم است.

a'	b'	$a'b'$	
۱	۱۲	۱۲	$\Rightarrow \max[a, b]$
۲	۱۱	۲۲	$= 42 \times 8 = 336$
۳	۱۰	۳۰	
۴	۹	۳۶	
۵	۸	۴۰	
۶	۷	۴۲	✓

۱۷۴- گزینه ۲ رابطه را بر حسب d و b' و a' بازنویسی می‌کنیم:

$[a, b] = (a, b) + 1 \Rightarrow a'b'd = d + 1$

$\Rightarrow a'b'd - d = 1 \Rightarrow d(a'b' - 1) = 1$

حاصل ضرب دو عدد برابر ۱ شده پس هر دو برابر ۱ هستند.

$d = 1 \Rightarrow a'b' - 1 = 1 \Rightarrow a'b' = 2$

$\Rightarrow a = 1, b = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5$

۱۷۵- گزینه ۳ رابطه را بر حسب a' و b' و d بازنویسی می‌کنیم:

$5[a, b] = 9(a, b) + 11 \Rightarrow 5a'b'd = 9d + 11$

$\Rightarrow 5a'b'd - 9d = 11 \Rightarrow d(5a'b' - 9) = 11$

حاصل ضرب دو عدد برابر ۱۱ شده است، بنابراین یکی از آن‌ها ۱ و دیگری برابر ۱۱ است اما از آن‌جا که در صورت سؤال گفته شده $d \neq 1$ است، بنابراین:

$d = 11$

$5a'b' - 9 = 1 \Rightarrow 5a'b' = 10 \Rightarrow a'b' = 2$

$a' = 1 \Rightarrow a = 11$
 $b' = 2 \Rightarrow b = 22 \Rightarrow a + b = 33$

۱۷۶- گزینه ۴ می‌دانیم اگر $(a, b) = d$ باشد، آن‌گاه:

$d|a \Rightarrow a = a'd$

$d|b \Rightarrow b = b'd$

$[a, b] = [a'd, b'd] = a'b'd$

β می‌تواند صفر یا ۱ باشد چون هم در تجزیه ۱۲۰ و هم در تجزیه ۶۰۰ توان عدد ۳ برابر ۱ است.

و بالاخره با همین استدلال α نیز می‌تواند برابر صفر یا ۱ یا ۲ یا ۳ باشد.

$\alpha \beta \gamma$
 $4 \times 2 \times 1 = 8$
 $\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$

پس به ازای ۸ مقدار m رابطه برقرار می‌شود. برای درک بهتر، این ۸ حالت را می‌نویسیم:

$m = 5^2, 5^2 \times 3, 5^2 \times 2, 5^2 \times 2 \times 3$

$, 5^2 \times 2^2, 5^2 \times 2^2 \times 3, 5^2 \times 2^3, 5^2 \times 2^3 \times 3$

۱۶۹- گزینه ۲ روش اول برای پاسخ‌دادن به این سؤال باید دو نکته را بدانیم:

۱) مربع هر عدد فرد را به صورت $8k + 1$ می‌توان نوشت.

۲) اگر $a | b$ ، آن‌گاه $(a, b) = |a|$ و $[a, b] = |b|$.

a فرد است بنابراین $a + 1$ زوج است یعنی:

$a + 1 = 2q \Rightarrow (a + 1)^2 = 4q^2 \Rightarrow (8k + 1, 4q^2) = 8$

چون که $8 | 4q^2$ $\Rightarrow 2 | q^2$ $\Rightarrow 2 | q$ $\Rightarrow q = 2r$

$\Rightarrow [8, 4r^2] = 4r^2$

چون $8 | 4r^2$ بنابراین حاصل عبارت برابر $4r^2$ یا همان $a^2 - 1$ است.

روش دوم رابطه را به ازای یک عدد فرد بررسی می‌کنیم. برای مثال اگر

$a = 5$ باشد داریم: $[(5^2, 8), 4 \times 6] = [8, 24] = 24$

که همان $a^2 - 1$ است.

۱۷۰- گزینه ۱ می‌دانیم $a' = \frac{a}{d}$ و $b' = \frac{b}{d}$ و نسبت به هم اول اند. رابطه‌ها را بر حسب a' ، b' و d می‌نویسیم:

$(a, b) = 5 \Rightarrow d = 5$
 $ab = 500 \Rightarrow a'b'd^2 = 500$

حالت‌ها را بررسی می‌کنیم:

a'	b'		
۱	۲۰	(I)	
۲	۱۰	✗	غیر قابل قبول زیرا $(2, 10) = 2$
۴	۵	(II)	

حالا می‌خواهیم $a + b$ کم‌ترین مقدار خود را داشته باشد:

$a + b = d(a' + b') = 5(a' + b')$

یعنی باید حالتی را در نظر بگیریم که $a' + b'$ کم‌تر است، بنابراین حالت

(II) را انتخاب می‌کنیم: $a + b = 5(4 + 5) = 45$

۱۷۱- گزینه ۲ می‌دانیم اگر $(a, b) = 7$ باشد، آن‌گاه $a = 7a'$ و

$b = 7b'$ و $(a', b') = 1$ بنابراین:

$(\frac{a^2}{\gamma}, [a, b]) = (\frac{49a'^2}{\gamma}, [7a', 7b'])$

$= (7a'^2, 7[a', b']) = (7a'^2, 7a'b')$

چون a' و b' نسبت به هم اول اند، ک.م.م.شان با ضربشان برابر است.

$\Rightarrow (7a'^2, 7a'b') = 7|a'| (a', b') = 7|a'| = |a|$

۱۸۰- گزینه ۲ می‌دانیم:

$$a \mid b \\ _ \\ r \quad q \Rightarrow a = bq + r, 0 \leq r < b$$

همهٔ عددهای اول به جز ۲ فردند. اما اگر b و q و r هر سه فرد باشند $a = bq + r$ زوج می‌شود که امکان‌پذیر نیست پس یکی از r و b و یا q حتماً باید برابر ۲ باشد.
(دقت کنید b نمی‌تواند برابر ۲ باشد چون در آن صورت رابطه $r < b$ برقرار نمی‌شود.)

۱۸۱- گزینه ۲ یک راه ساده، شب مثلاً $5^2 = 25$ را بگیریم. ۲۵ هم به صورت $8k + 1$ است و هم $12k + 1$ است، هم $24k + 1$ ، پس جواب (۳) می‌شود. در کتاب درسی آمده است که هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به صورت $6k + 1$ یا $6k + 5$ است. (تو درس نامه دلیلش رو بری!) $6k + 5$ را هم می‌توانیم به صورت $6k' - 1$ بنویسیم، پس، هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به صورت $6k \pm 1$ درمی‌آید.

$$P^2 = (6k \pm 1)^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 = 12k(3k \pm 1) + 1$$

(k رو به بار زوج است. k رو به بار فرد بگیر و ببین!)
پس $2k'(3k \pm 1) = 6k'$ می‌شود؛ یعنی مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به صورت $24k' + 1$ می‌شود.

۱۸۲- گزینه ۲ می‌دانیم هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم به ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۵ دارد و مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم به ۶ همواره باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

بنابراین:

$$p^2 = 6k' + 1, q = 6k + 1 \Rightarrow 6k + 5 \\ \xrightarrow{q=6k+1} 6k' + 1 + 6k + 1 = 6(k' + k) + 2 \\ \Rightarrow p^2 + q \\ \xrightarrow{q=6k+5} 6k' + 1 + 6k + 5 = 6(k' + k + 1)$$

پس باقی‌ماندهٔ $p^2 + q$ بر ۶ برابر صفر یا ۲ است و ۲ حالت دارد.

۱۸۳- گزینه ۳ روش اول در بخش درس‌نامه دیدیم که باقی‌ماندهٔ هر عدد اول مانند P در تقسیم به ۶ یا ۱ است و یا ۵ یعنی:

$$P = 6k + 1 \Rightarrow P^2 = 36k^2 + 12k + 1$$

مضرب ۶

$$P = 6k + 5 \Rightarrow P^2 = 36k^2 + 60k + 24 + 1$$

مضرب ۶

همان‌طور که می‌بینید در هر دو حالت P^2 در تقسیم به ۶ باقی‌ماندهٔ برابر ۱ دارد؛ (تو حالت اول که مشغله تو حالت دوم هم باقی‌ماندهٔ ۲۵ به ۶ برابر یک). یعنی:

$$P^2 = 6q + 1$$

حالا برویم سراغ گزینه‌ها:

(۱) $P^2 + 1$ عددی زوج است، پس هیچ وقت نمی‌تواند اول باشد.

(۲) $P^2 + 2 = 6q + 1 + 2 = 6q + 3$

مضرب ۳ است پس اول نیست.

(۴) $P^2 + 5 = 6q + 1 + 5 = 6q + 6$

مضرب ۶ است پس اول نیست.

بنابراین فقط $P^2 + 4$ می‌تواند دوباره عددی اول باشد.

در حالت کلی اگر P عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد، P^2 را می‌توان به صورت $24k + 1$ نوشت.

$(a', b') = 1$ چرا که در غیر این صورت d ب.م.م نمی‌شود.

بنابراین در این سؤال داریم:

$$[a, b] = 60(a, b) \Rightarrow a'b'd = 60d \Rightarrow a'b' = 60$$

$$\begin{array}{l|l} a' + b' = 61 & \leftarrow 1 \quad 60 \\ & 2 \quad 30 \times \\ a' + b' = 13 & \leftarrow 3 \quad 10 \\ a' + b' = 19 & \leftarrow 4 \quad 15 \\ a' + b' = 17 & \leftarrow 5 \quad 12 \\ & 6 \quad 10 \times \end{array}$$

این دو حالت غیرقابل قبول اند. (چون نسبت به هم اول نیستند.)

از طرفی مجموع دو عدد برابر ۱۳۶ است. یعنی:

$$a + b = 136 \Rightarrow a'd + b'd = 136d \Rightarrow d(a' + b') = 136d$$

حالا با توجه به این که $136 = 2^3 \times 17$ است، تنها حالت قابل قبول برای $a' + b'$ حالت $a' + b' = 17$ است بنابراین:

$$17d = 136 \Rightarrow d = 8 \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \times 12 = 96 \\ b = 8 \times 5 = 40 \end{cases} \\ \Rightarrow a - b = 56$$

۱۷۷- گزینه ۲ دو رابطه را برحسب d و b' و a' می‌نویسیم:

$$[a, b] = 1001 \Rightarrow a'b'd = 1001 \quad (I)$$

$$2a + b = 245 \Rightarrow 2a'd + b'd = 245 \quad (II)$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a'b'd}{d(2a' + b')} = \frac{1001}{245}$$

در کسر سمت چپ d را ساده می‌کنیم و کسر سمت راست نیز به ۷ ساده می‌شود. (این‌ها به زبون بی‌زبونی سؤال داره بهمون می‌گه $d = 7$):

$$\frac{a'b'}{2a' + b'} = \frac{143}{35} \Rightarrow \begin{cases} a'b' = 143 \\ 2a' + b' = 35 \end{cases}$$

از رابطهٔ $a'b' = 143$ می‌شود فهمید که $a' = 11$ و $b' = 13$ است و می‌بینیم که به ازای این دو مقدار $2a' + b' = 35$ می‌شود.

حالا با قرار دادن در رابطهٔ (I) d را پیدا می‌کنیم:

$$a'b'd = 1001 \Rightarrow 143d = 1001 \Rightarrow d = 7$$

بنابراین عدد بزرگ‌تر برابر است با:

$$b = b'd = 13 \times 7 = 91 \Rightarrow 91 + 1 = 92$$

۱۷۸- گزینه ۱ در $10!$ عامل ۷ وجود دارد بنابراین می‌توان از ۷ فاکتور گرفت و در نتیجه $10! + 7$ اول نیست:

$$10! + 7 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 7 \\ = 7(10 \times 9 \times 8 \times 6 \times \dots \times 1 + 1)$$

با همین استدلال در $20!$ عامل ۱۳ وجود دارد و در نتیجه $20! + 13$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است و اول نیست:

$$20! + 13 = 13(20 \times 19 \times \dots \times 14 \times 12 \times \dots \times 1 + 1)$$

می‌دانیم $93 = 3 \times 31$ بنابراین با توجه به این که در $30!$ نیز عامل ۳ وجود دارد از عدد ۳ می‌توان فاکتور گرفت پس $30! + 93$ نیز اول نیست.

$$30! + 93 = 3k$$

۱۷۹- گزینه ۲ همهٔ عددهای اول به جز ۲ فردند. اما اگر سه عدد فرد را با هم جمع کنیم حاصل فرد می‌شود. این‌جا مجموع سه عدد برابر ۲۰۰ شده پس قطعاً یکی از آن‌ها برابر ۲ است و حاصل ضرب این سه عدد زوج است.

(ب) می‌دانیم $a^n - b^n$ همواره بر $a - b$ بخش پذیر است، پس $1 - 6^{17}$ بر $5 - 1 = 4$ بخش پذیر است و اول نیست.

(پ) $1 - 4^{22} = 1 - 4^{11}$

که بر $3 - 1 = 2$ بخش پذیر است و این هم اول نیست.

۱۹۰- گزینه ۴

۱) اگر $p = 2$ باشد $3p + 1 = 7$ اول می‌شود.

۲) اگر $p = 2$ باشد $4^2 + 1 = 17$ اول می‌شود.

۳) اگر $p = 3$ باشد $3^2 + 2 = 11$ اول می‌شود.

۴) می‌دانیم $a^n - b^n$ بر $a - b$ بخش پذیر است. داریم:

$1 - 4^{2p} = 4^p - 1$

بر $3 - 1 = 2$ بخش پذیر است و در نتیجه هیچ‌گاه نمی‌تواند اول باشد و همواره مرکب است.

۱۹۱- گزینه ۲

عدد به صورت $1 + 97 \times 89 \times \dots \times 17 \times 13 \times 11$ است. این عدد زوج است چون $97 \times 89 \times \dots \times 17 \times 13 \times 11$ ضرب تعدادی عدد فرد و در نتیجه فرد است و وقتی با ۱ جمع می‌شود، زوج می‌شود.

اما این عدد هیچ شمارنده دورقمی اولی ندارد چون بر همه آن‌ها باقی مانده‌ای برابر ۱ دارد.

۱۹۲- گزینه ۲ n اول است پس بر ۳ بخش پذیر نیست مگر آن‌که برابر ۳ باشد.

اما اگر $n = 3$ آن‌گاه $7 = 4 + n$ و $11 = 8 + n$ که هر سه عدد اول می‌شوند. پس تا این‌جا کار یک حالت پیدا کردیم.

در سایر حالت‌ها اگر n مضرب ۳ باشد اول نیست، پس n نمی‌تواند مضرب ۳ باشد پس یا به صورت $n = 3k + 1$ است یا به صورت $n = 3k + 2$ است.

اگر $n = 3k + 1$ باشد، $9 + 3k = 8 + n$ که مضرب ۳ می‌شود و اول نیست. اگر $n = 3k + 2$ باشد، $6 + 3k = 4 + n$ مضرب ۳ است و اول نیست.

پس فقط به ازای یک مقدار n (یعنی $n = 3$) هر سه عدد اول‌اند.

۱۹۳- گزینه ۲ دو نکته مهم برای پاسخ‌گویی به این سؤال باید بدانید.

(این‌ها قارچ از کتابن اما دوستانتش فروری ندره.)

(۱) برای پیدا کردن تعداد صفرهای سمت راست یک عدد، توان عددهای ۲ و ۵ عدد را در تجزیه پیدا می‌کنیم هر کدام کم‌تر بود تعداد صفرهای

سمت راست عدد است. به بیان دیگر اگر $n = 2^\alpha \times 5^\beta \times \dots$ آن‌گاه تعداد صفرهای سمت راست n برابر است با $\min\{\alpha, \beta\}$ (برای مثال تعداد

صفرهای سمت راست عدد $5^7 \times 3^8 \times 2^{11}$ برابر است با ۷)

(۲) توان عدد اول p را در تجزیه $n!$ می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

برای مثال اگر بخواهیم پیدا کنیم در تجزیه $30!$ توان عددهای ۲ و ۵ چند است، داریم:

$$7 + 1 + 0 = 6 + 1 + 0 = 7 \quad \left\lfloor \frac{30}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{125} \right\rfloor + \dots$$

$$\dots + \left\lfloor \frac{30}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{2} \right\rfloor : \text{توان عدد } 2$$

$$26 = 15 + 7 + 3 + 1$$

روش دوم یک عدد اول بزرگ‌تر از ۳ را در نظر بگیرید. برای مثال ۵ و

گزینه‌ها را بررسی کنید:

اول نیست. $26 = 1 + 2^5 = P^2$

اول نیست. $27 = 2 + 2^5 = P^2$

اول است. $29 = 4 + 2^5 = P^2$

اول نیست. $30 = 5 + 2^5 = P^2$

۱۸۴- گزینه ۳ مربع کامل را با a^2 نشان می‌دهیم. داریم:

$$32 = a^2 - p^2 \Rightarrow (a-p)(a+p) = 32$$

ضرب دو پرانتز برابر ۳۲ شده است. حالت‌های ممکن را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} a-p=1 \\ a+p=32 \end{cases} \text{دستگاه جواب طبیعی ندارد.}$$

$$\begin{cases} a-p=2 \\ a+p=16 \end{cases} \Rightarrow a=9, p=7$$

$$\begin{cases} a-p=4 \\ a+p=8 \end{cases} \Rightarrow a=6, p=2 \text{ فرد نیست.}$$

پس $p=7$ است و در نتیجه $51 = 2 + p^2$ مضرب ۱۷ است.

۱۸۵- گزینه ۲ مکعب کامل را با a^3 نشان می‌دهیم:

$$5p - 1 = a^3 \Rightarrow a^3 + 1 = 5p \Rightarrow (a+1)(a^2 - a + 1) = 5p$$

حاصل ضرب دو پرانتز برابر ۵p شده پس یکی از آن‌ها برابر p و دیگری ۵ است. داریم:

$$\begin{cases} a+1=5 \Rightarrow a=4 \Rightarrow p=13 \\ a^2 - a + 1 = p \end{cases} \text{ یا}$$

$$\begin{cases} a+1=p \\ a^2 - a + 1 = 5 \Rightarrow a^2 - a - 4 = 0 \end{cases}$$

معادله ریشه طبیعی ندارد.

پس فقط به ازای یک مقدار p، عدد $5p - 1$ مربع کامل می‌شود.

۱۸۶- گزینه ۳ وقتی $12a \mid p$ یعنی کسر $\frac{12a}{p}$ عددی صحیح است.

برای این‌که این کسر عددی صحیح شود باید p در مخارج کسر ساده شود. خب $(p, a) = 1$ است یعنی p با a ساده نمی‌شود. پس p باید با ۱۲ ساده

شود. با توجه به این‌که $3 \times 2^2 = 12$ و p عددی اول است پس فقط می‌تواند برابر ۲ یا ۳ باشد.

۱۸۷- گزینه ۱ خب یک طرفین وسطین انجام بدهیم ببینیم چه

می‌شود؟ $19 \mid 17P \Rightarrow 19a = 17P \Rightarrow P + a = 18P - 18a$

P عددی اول است، از طرفی هم $\frac{17P}{19}$ صحیح است، پس $P = 19$ می‌شود.

با جای‌گذاری، $a = 17$ به دست می‌آید؛ بنابراین $aP = 17 \times 19 = 323$.

۱۸۸- گزینه ۲ از $(a, p^3) = p^3$ می‌توان نتیجه گرفت دقیقاً ۳ عامل

p دارد. از $(b^2, p^3) = p^3$ می‌توان نتیجه گرفت b دقیقاً یک عامل p دارد.

(چون اگر b دو عامل p داشت b^2 چهارتا عامل p داشت و $(b^2, p^3) = p^3$ می‌شد.)

بنابراین ab دقیقاً ۴ عامل p دارد. در نتیجه:

$$(ab, p^6) = p^6$$

۱۸۹- گزینه ۱ (الف) می‌دانیم اگر n فرد باشد $a^n + b^n$ بر $a + b$

بخش پذیر است پس $1 + 2^{17}$ بر $3 = 1 + 2$ بخش پذیر است و اول نیست.



۱۹۷- گزینه ۱: روش اول اگر ۱۰۷ را بر ۱۳ تقسیم کنیم، داریم:

$$\begin{array}{r} 13 \overline{) 107} \\ 104 \\ \hline 3 \end{array}$$

و می‌دانیم: $107 = 13 \times 8 + 3$ حال اگر $107 - 1$ را بر ۱۳ تقسیم کنیم و خارج قسمت را $-8 = q$ بگیریم، داریم: $-107 = 13 \times (-8) - 3$ اما ۴- را به عنوان باقی‌مانده نمی‌توان در نظر گرفت زیرا طبق قضیه تقسیم باقی‌مانده باید نامنفی و کوچک‌تر از مقسوم‌علیه باشد. $(0 \leq r < b)$ در این صورت با اضافه و کم کردن مضارب مثبتی از مقسوم‌علیه شرایط قضیه تقسیم را برقرار می‌کنیم:

$$-107 = 13 \times (-8) - 3 + 13 - 13 = (13 \times (-8) - 13) + (13 - 3)$$

۱۳ تا اضافه و کم می‌کنیم

$$= 13 \left(\frac{-8-1}{q} \right) + 10 = 13 \times -9 + 10 \Rightarrow r = 10$$

روش دوم: طبق نکته‌ای که در قسمت آموزش توضیح دادیم، اول ۱۰۷ را بر ۱۳ تقسیم می‌کنیم، پس چون باقی‌مانده $107 - 1$ را بر ۱۳ می‌خواهیم از رابطه $r = b - r'$ باقی‌مانده $107 - 1$ را بر ۱۳ به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r} 13 \overline{) 107} \\ 104 \\ \hline 3 \end{array} \Rightarrow r' = 3 \Rightarrow r = b - r' = 13 - 3 = 10$$

$$\begin{array}{r} a \overline{) 15} \\ q \\ \hline r \end{array} \Rightarrow a = 15q + r$$

۱۹۸- گزینه ۱: از طرفی $r + q = 5$ بنابراین:

$$r = 5 - q \Rightarrow a = 15q + 5 - q = 14q + 5$$

واضح است که $a - 5$ بر ۱۴ بخش پذیر است.

۱۹۹- گزینه ۲: رابطه‌های تقسیم را می‌نویسیم و بعد $a - 2b$ را می‌سازیم:

$$\begin{cases} a = 11q + 5 \\ b = 11q' + 9 \end{cases} \Rightarrow a - 2b = 11q + 5 - 2(11q' + 9)$$

$$= 11(q - 2q') - 13 = 11k - 13$$

حالا کافی است باقی‌مانده -13 را بر ۱۱ پیدا کنیم چون باقی‌مانده نمی‌تواند منفی باشد.

$$\begin{array}{r} 11 \overline{) 11} \\ 11 \\ \hline 0 \end{array} \Rightarrow r = 11 - 2 = 9$$

اگر مثبت تقسیم کنیم داریم:

روش سوم: با عددگذاری به سؤال پاسخ می‌دهیم. دیدیم که $a = 11q + 5$ و $q' + 9 = 11q' + b$. برای مثال اگر $q = 2$ و $q' = 0$ باشد، داریم:

$$a = 27 \Rightarrow a - 2b = 27 - 18 = 9$$

$$b = 9$$

$(q' + 9)$ رو به پهنی گرفتیم که $a - 2b$ مثبت بشه و کارمون راحت تر بشه.

روش سوّم: اگر به جای عددها خود باقی‌مانده‌ها را هم قرار می‌دهیم می‌توانیم به سؤال پاسخ دهیم. (یعنی جای a بنده 5 و جای b بنده 9)

$$a = 5 \Rightarrow a - 2b = 5 - 18 = -13$$

$$b = 9$$

و بقیه پاسخ مثل روش اول است. باقی‌مانده -13 را بر ۱۱ به دست می‌آوریم که برابر ۹ است.

حالا تعداد صفرهای سمت راست $125^6 \times 30!$ را پیدا می‌کنیم:

$$30! \times 125^6 = (2^{26} \times 5^7 \times \dots) \times (5^3)^6$$

$$= (2^{26} \times 5^7 \times \dots) \times 5^{18} = 2^{26} \times 5^{25} \times \dots$$

پس سمت راست این عدد به ۲۵ صفر ختم می‌شود.

۱۹۴- گزینه ۱: رابطه را به صورت یک کسر می‌نویسیم:

$$\frac{25!}{P} = \frac{25 \times 24 \times 23 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{P}$$

واضح است که اگر بخواهیم این کسر عددی صحیح باشد P را حداکثر برابر ۲۳ می‌توان قرار داد پس $P = 23$ حالا می‌خواهیم $n! \mid 23^2$ اگر دوباره رابطه را به صورت کسر بنویسیم، داریم:

$$\frac{n!}{23^2} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{23 \times 23}$$

یعنی باید دوتا ۲۳ مخرج با عبارت صورت ساده شوند. یعنی دست‌کم دوتا از عددهای صورت باید بر ۲۳ بخش پذیر باشند. اولین مضرب ۲۳ که خود عدد ۲۳ است اما دومین مضرب ۲۳ عدد ۴۶ است. بنابراین $46! \mid 23^2$ بخش پذیر است چون یکی از ۲۳‌های مخرج را می‌توان با ۲۳ ساده کرد و یکی دیگر را با ۴۶. نگاه کنید:

$$\frac{46!}{23^2} = \frac{46 \times 45 \times \dots \times 24 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{23 \times 23}$$

۱۹۵- گزینه ۳: می‌دانیم همه عددهای اول به جز ۲ فردند. اگر p و q هر سه فرد باشند p^2 و q^2 و r^2 نیز فرد خواهند شد و مجموعشان نیز عددی فرد می‌شود. اما با توجه به این که $r^2 + q^2 + p^2 = 150$ زوج است یعنی هر سه عدد نمی‌توانند فرد باشند و یکی از آن‌ها زوج است و چون تنها عدد اول زوج عدد ۲ است پس $p = 2$ است. (دقت کنید که $r < q < p$ است یعنی p از همه کوچک‌تر است)

$$p = 2 \Rightarrow 4 + q^2 + r^2 = 150 \Rightarrow q^2 + r^2 = 146$$

حالا مجموع مربعات دو عدد اول برابر ۱۴۶ شده است. واضح است که هیچ‌کدام از q و r نمی‌توانند ۱۳ یا بزرگ‌تر از ۱۳ باشند (پس که $169 = 13^2$ می‌شه که از ۱۴۶ بزرگ‌تره) بنابراین q و r باید دو تا از عددهای اول بین ۲ تا ۱۳ باشند یعنی ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۱۱ مربع‌های این عددها را می‌نویسیم و بررسی می‌کنیم مجموع کدام یک از آن‌ها برابر ۱۴۶ می‌شود:

$$3^2 = 9$$

$$5^2 = 25$$

$$7^2 = 49$$

$$11^2 = 121$$

با یک نگاه ساده می‌شود فهمید که $121 + 25$ برابر ۱۴۶ می‌شود یعنی r و q یکی برابر ۵ و دیگری برابر ۱۱ است. در نتیجه:

$$r + q - p = 11 + 5 - 2 = 14$$

۱۹۶- گزینه ۲: شکل این اعداد چه جوری است؟ خب عدد سه رقمی a بر ۲۱ تقسیم شده و باقی‌مانده برابر ۱۵ به دست آمده است. پس $a = 21q + 15$ باید باشد. حالا گفته این a سه رقمی باشد. پس:

$$1000 \leq 21q + 15 < 10000 \Rightarrow \frac{985}{21} \leq q < \frac{9885}{21}$$

$$\Rightarrow 47 \leq q < 470 \Rightarrow 47 \leq q < 470$$

به ازای هر q ، دقیقاً یک عدد برای a به دست می‌آید. حالا مجموعه $\{46, \dots, 46\}$ چند عضو دارد؟ $42 = 46 - 5 + 1$ تا.



$$a \begin{array}{l} \underline{8} \\ q' \Rightarrow a = 8q' + 7 \\ \underline{7} \end{array}$$

باید این دو رابطه را تبدیل به یک رابطه کنیم. برای این کار بالایی را در ۸ و پایینی را در ۷ ضرب می‌کنیم. داریم:

$$a = 7q + 5 \xrightarrow{\times 8} 8a = 56q + 40$$

$$a = 8q' + 7 \xrightarrow{\times 7} 7a = 56q' + 49$$

$$\ominus \rightarrow a = 56 \underbrace{(q - q')}_{k} - 9$$

پس عدد ما به صورت $a = 56q - 9$ است. این عدد باید سه رقمی باشد، بنابراین:

$$100 \leq a \leq 999 \Rightarrow 100 \leq 56q - 9 \leq 999$$

$$\Rightarrow 109 \leq 56q \leq 1008 \Rightarrow 1/94 \leq q \leq 18$$

پس $q \in \{2, 3, \dots, 18\}$ که این مجموعه دارای $17 - 2 + 1 = 16$ عضو است.

۲۰۵- گزینه ۲ $a = 6q + 2$ و $a = 8q' + 4$ می‌شود. باید کاری کنیم که مقسوم‌علیه برابر ۱۲ شود. از طرفی: $3 \times 4 = 12$

$$\begin{cases} a = 6q + 2 = 3(2q) + 2 = 3k + 2 \xrightarrow{\times 4} 4a = 12k + 8 \\ a = 8q' + 4 = 4(2q' + 1) = 4k' \xrightarrow{\times 3} 3a = 12k' \end{cases}$$

دو طرف را از هم کم کنیم، می‌شود: $a = 12(k - k') + 8 = 12k'' + 8$
حالا $3 + 5a$ را می‌سازیم:

$$5a + 3 = 12(5k'') + \frac{43}{36+7}$$

$$= 12(5k'' + 3) + 7$$

پس باقی‌مانده برابر ۷ می‌شود.

(اون آفرش می‌تونستید به پای این کار، خیلی راحت باقی‌مانده ۳۳ رو بر ۱۳ به دست بیارید.)

۲۰۶- گزینه ۱ خارج قسمت‌ها را q و q' فرض می‌کنیم. داریم:

$$a \begin{array}{l} \underline{13} \\ q \Rightarrow a = 13q + 7 \\ \underline{7} \end{array}$$

$$a \begin{array}{l} \underline{7} \\ q' \Rightarrow a = 7q' + 6 \\ \underline{6} \end{array}$$

بینید ما باید دو رابطه را در عددی ضرب کنیم که دوتا اتفاق بیفتد.

اول این که مضرب ۹۱ ایجاد شود و دوم این که وقتی دو رابطه را از هم کم می‌کنیم اختلاف یک شود. به همین خاطر رابطه بالایی را در ۱۴ و رابطه پایینی را در ۱۳ ضرب می‌کنیم.

(هواستون باشه که این مدل سوال‌ها رو با همونست آسون تر می‌شه حل کرد اما چون دیده شده در بعضی از آزمون‌های آزمایشی از این ایده در این درس سوال می‌دهند، ما هم بد ندریم شما از این روش هم بتوانید به این جور سوال‌ها جواب دهید. تو بخش همونشی هم از این سوال‌ها داریم که اون‌ها راه همونشی رو هم می‌بینید!)

$$a = 13q + 7 \xrightarrow{\times 14} 14a = 182q + 98 \quad (I)$$

$$a = 7q' + 6 \xrightarrow{\times 13} 13a = 91q' + 78 \quad (II)$$

۲۰۰- گزینه ۲ $a = 14q + 1$ می‌شود و $b = 21q' + 2$. باقی‌مانده بر ۷ را خواسته است، پس مقسوم‌علیه را به ۷ تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{cases} a = 14q + 1 = 7(2q) + 1 = 7k + 1 \\ b = 21q' + 2 = 7(3q') + 2 = 7k' + 2 \end{cases}$$

حالا $2a + 3b$ را می‌سازیم:

$$2a + 3b = 2(7k + 1) + 3(7k' + 2) = 7(2k + 3k') + 8$$

$$= 7(2k + 3k' + 1) + 1 = 7k'' + 1$$

پس باقی‌مانده برابر ۱ می‌شود.

روش دوم a را برابر ۱ و b را برابر ۲ فرض می‌کنیم. در این صورت:

$$2a + 3b = 2 + 6 = 8$$

و باقی‌مانده ۸ بر ۷ برابر ۱ است.

۲۰۱- گزینه ۴ $x = 20q + 7$ می‌شود، پس $7x + 1 = 140q + 50$.

حالا از یک ۱۴ فاکتور می‌گیریم. $140q + 50 = 14(10q + 3) + 8 = 14k + 8$
یعنی باقی‌مانده برابر ۸ می‌شود.

۲۰۲- گزینه ۳

$n = 20q' + 17$ و $m = 24q + 7$ می‌شود. حالا $5m - 3n$ را می‌سازیم:
 $5m - 3n = 5(24q + 7) - 3(20q' + 17) = 120q - 60q' - 16$
حالا باید از ۱۵ فاکتور بگیریم:

$$120q - 60q' - 15 - 1 = 15(\underbrace{8q - 4q'}_{k} - 1) - 1$$

$$= 15k - 1 = 15(k - 1) + 14$$

دقت کنید باقی‌مانده نمی‌تواند برابر ۱- باشد.

روش دوم m را برابر ۷ و n را برابر ۱۷ فرض می‌کنیم در این صورت:

$$5m - 3n = 35 - 51 = -16$$

حالا باقی‌مانده ۱۶- را بر ۱۵ به دست می‌آوریم:

$$16 \begin{array}{l} \underline{15} \\ 1 \Rightarrow r = 15 - 1 = 14 \end{array}$$

۲۰۳- گزینه ۲ خب دو رابطه تقسیم به صورت $n = 6q + 4$ و $n = 7q' + 6$ می‌شود. ما سعی می‌کنیم که مقسوم‌علیه برابر ۴۲ بشود. اولی را در ۷ و دومی را در ۶ ضرب می‌کنیم، پس:

$$\begin{cases} 7n = 42q + 28 \\ 6n = 42q' + 36 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم}} n = 42 \underbrace{(q - q')}_{k} - 8$$

باقی‌مانده نمی‌تواند منفی باشد، پس عدد ۴۲ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$n = 42(k - 1) + 42 - 8 = 42(k - 1) + 34$$

توجه کنید در این سؤال‌ها هر وقت عدد ثابت منفی شد ما می‌توانیم آن قدر مضارب مقسوم‌علیه را به آن اضافه کنیم تا مثبت شود.

۲۰۴- گزینه ۴ عدد a و خارج قسمت‌ها بر ۷ و ۸ را به ترتیب q' و q فرض می‌کنیم. داریم:

$$a \begin{array}{l} \underline{7} \\ q \Rightarrow a = 7q + 5 \\ \underline{5} \end{array}$$



۲۱۲- گزینه ۲ خارج قسمت عدد سه واحد بیشتر از باقی مانده است،

$$\begin{array}{r} a \overline{) 11} \\ \underline{r+3} \\ r \end{array}$$

$$a = 11(r+3) + r, 0 \leq r < 11$$

$$\Rightarrow a = 11r + 33 + r = 12r + 33 \Rightarrow a - 9 = 12r + 24$$

واضح است که اگر r زوج باشد $a - 9$ بر ۲۴ بخش پذیر و اگر r فرد باشد، $a - 9$ بر ۲۴ بخش پذیر نیست.

مقادیر زوج r عبارتند از: $0, 2, 4, 6, 8, 10$

و تعداد کل مقادیر r نیز ۱۱ تا است، بنابراین احتمال آن که r زوج باشد،

$$\frac{6}{11}$$

۲۱۳- گزینه ۴ ممی دانیم $q+r=17$ است. داریم:

$$\begin{array}{r} a \overline{) 13} \\ \underline{q} \\ r \end{array} \Rightarrow a = 13q + r \Rightarrow a = 12q + q + r$$

$$= 12q + 17 \Rightarrow a - 8 = 12q + 17 - 8 = 12q + 9$$

اگر فرض کنیم باقی مانده $a - 8$ بر ۳۶ برابر ۲۱ است، داریم:

$$12q + 9 \equiv 21 \pmod{36} \Rightarrow 12q \equiv 12 \pmod{36} \xrightarrow{\div 12} q \equiv 1 \pmod{3}$$

حالا دقت کنید که: $0 \leq r < 13$ (I)

یعنی r سیزده حالت مختلف دارد. با توجه به این که $q+r=17$ است،

$$q = 17 - r \Rightarrow 17 - r \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow r \equiv 16 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow r = 3k + 1 \text{ (II)}$$

با توجه به دو رابطه (I) و (II) مقادیر قابل قبول برای r عبارتند از:

$$r = 1, 4, 7, 10$$

پس احتمال این که r این چهار مقدار را داشته باشد، برابر است با:

$$\frac{4}{13}$$

۲۱۴- گزینه ۳ می دانیم در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b

$$a = bq + r, 0 \leq r < b$$

در این جا:

$$\begin{array}{r} a \overline{) 47} \\ \underline{q} \\ q^2 \end{array} \Rightarrow a = 47q + q^2, 0 \leq q^2 < 47 \Rightarrow q = 0, 1, 2, \dots, 6$$

چون بزرگ ترین عدد را می خواهیم q را برابر ۶ فرض می کنیم:

$$a = 47 \times 6 + 26 = 318$$

$$\text{مجموع ارقام} = 3 + 1 + 8 = 12$$

۲۱۵- گزینه ۴ می دانیم در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b :

$$a = bq + r, 0 \leq r < b$$

داریم:

$$\begin{array}{r} a \overline{) 37} \\ \underline{q} \\ q^2 - 2 \end{array} \Rightarrow a = 37q + q^2 - 2, 0 \leq q^2 - 2 < 37$$

$$\Rightarrow 2 \leq q^2 < 39 \Rightarrow q = 2, 3, 4, 5, 6$$

بیشترین مقدار q عدد ۶ است، بنابراین:

$$a = 37 \times 6 + 36 - 2 = 256$$

که مضرب ۱۶ است.

حالا دو رابطه را از هم کم می کنیم:

$$(I) - (II): 14a - 13a = 182q + 98 - 91q' - 78$$

$$\Rightarrow a = 91(2q - q') + 20$$

بنابراین باقی مانده a بر ۹۱ برابر ۲۰ است.

۲۰۷- گزینه ۲ می دانیم در تقسیم عدد a بر b ، خارج قسمت برابر است با:

$$q = \left[\frac{a}{b} \right]$$

$$q = \left[\frac{13! - 1}{13} \right] = \left[\frac{13!}{13} + \frac{-1}{13} \right] = [12!] + \left[-\frac{1}{13} \right] = 12! - 1$$

۲۰۸- گزینه ۱ $246 = b(18) + r$ می شود. دیگر چه داریم؟ شرط

باقی مانده می گوید که $0 \leq r < b$ را حساب کرده و در این رابطه جای گذاری می کنیم. یعنی:

$$0 \leq 246 - 18b < b \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 246 - 18b \Rightarrow b \leq \frac{246}{18} = 13 \dots \\ 246 - 18b < b \Rightarrow 12 \dots < b \end{cases}$$

پس $b = 13$ فقط می تواند باشد؛ یعنی یک مقدار دارد.

روشنی خارج قسمت برابر است با $\left[\frac{246}{b} \right]$ که برابر ۱۸ شده است.

بنابراین:

$$\left[\frac{246}{b} \right] = 18 \Rightarrow 18 \leq \frac{246}{b} < 19$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{246}{b} < 19 \Rightarrow 19b > 246 \Rightarrow b > 12/9 \\ \frac{246}{b} \geq 18 \Rightarrow 18b \leq 246 \Rightarrow b \leq 13/6 \end{cases}$$

پس b فقط می تواند برابر ۱۳ باشد.

۲۰۹- گزینه ۲ باقی مانده و خارج قسمت را r و q می نامیم. داریم:

$$\begin{array}{r} a \overline{) b} \\ \underline{q} \\ r \end{array} \Rightarrow a = bq + r \text{ (I)}$$

به مقسوم ۵۳ واحد اضافه شده؛ یعنی a تبدیل شده به $a + 53$. به خارج

قسمت ۵ واحد اضافه شده. یعنی q شده $q + 5$ و از باقی مانده ۲ واحد کم

شده؛ یعنی r شده $r - 2$. داریم: $a + 53 = b(q+5) + r - 2$ (II)

حال دو رابطه (I) و (II) را از هم کم می کنیم:

$$(II) - (I): 53 = b(q+5) + r - 2 - bq - r \Rightarrow 55 = 5b \Rightarrow b = 11$$

۲۱۰- گزینه ۳

$$\begin{array}{r} a \overline{) 17} \\ \underline{q} \\ q \end{array} \Rightarrow a = 17q + 13 \xrightarrow[\text{اضافه می کنیم.}]{\text{واحد به مقسوم}} a + 61 = 17q + 74$$

می دانیم در تقسیم به ۱۷ باقی مانده باید کم تر از ۱۷ باشد. با توجه به این که:

$$74 = 4 \times 17 + 6$$

$$a + 61 = 17q + 4 \times 17 + 6 \Rightarrow a + 61 = 17(q+4) + 6$$

پس به خارج قسمت ۴ واحد اضافه شده و باقی مانده برابر ۶ شده است.

$$a = 63q + 17 \Rightarrow a + 60 = 63q + 77$$

۲۱۱- گزینه ۱

می دانیم در تقسیم یک عدد بر ۶۳ باقی مانده باید کم تر از ۶۳ باشد. بنابراین:

$$a + 60 = 63q + 63 + 14 = 63(q+1) + 14$$

باقی مانده جدید ۱۴ است که نسبت به باقی مانده قبلی ۳ واحد کم شده و

خارج قسمت جدید $q+1$ است که نسبت به خارج قسمت قبلی یکی زیاد

شده است.



۲۱۶- گزینه ۱ رابطه تقسیم، $bq + q^2 = 91$ می شود که $0 \leq q^2 < b$ است. دو طرف را به صورت ضرب درمی آوریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} q=1 \Rightarrow b=90 \\ q=7 \Rightarrow b+7=13 \Rightarrow b=6 \\ q=13 \Rightarrow b+13=7 \Rightarrow b=-6 \\ q=91 \Rightarrow b+91=1 \Rightarrow b=-90 \end{cases}$$

آن هایی که علامت * دارند، شرط باقی مانده را ندارند، پس مورد قبول نیستند.

۲۱۷- گزینه ۳ a و b عددهایی متمایز و مثبت اند.

$$\frac{a}{q} \left| \begin{array}{l} 23 \\ 2q^2 \end{array} \right. \Rightarrow a = 23q + 2q^2, 0 \leq 2q^2 < 23 \Rightarrow q = 1, 2$$

$$\frac{b}{q'} \left| \begin{array}{l} 23 \\ 2q'^2 \end{array} \right. \Rightarrow b = 23q' + 2q'^2, 0 \leq 2q'^2 < 23 \Rightarrow q' = 1, 2$$

چون قرار است a و b متمایز باشند، پس یا $q = 1$ است و $q' = 2$ یا $q = 2$ و $q' = 1$. هر دو حالت را بررسی می کنیم:

$$\begin{cases} q=1 \Rightarrow a=25 \\ q'=2 \Rightarrow b=62 \end{cases} \Rightarrow 2a+b=50+62=112$$

$$\begin{cases} q=2 \Rightarrow a=62 \\ q'=1 \Rightarrow b=25 \end{cases} \Rightarrow 2a+b=149$$

۲۱۸- گزینه ۲ می دانیم در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، داریم:

$$0 \leq r < b, a = bq + r$$

چون باقی مانده حداکثر مقدار خود را دارد، پس $r = b - 1$ ؛ بنابراین:

$$a = bq + b - 1 \Rightarrow a + 1 = b(q + 1) \Rightarrow b | a + 1$$

از طرفی $a - 1 = b | a - 1$ ؛ بنابراین: $b | 2 \Rightarrow b = 1$ یا 2

$b > 1$ است، پس $b = 2$ قابل قبول است.

$a + 1$ و $a - 1$ بر ۲ بخش پذیرند، پس هر دو زوج اند و a فرد است، در نتیجه a^2 نیز فرد است و باقی مانده آن در تقسیم به ۲ برابر ۱ است.

۲۱۹- گزینه ۳ باقی مانده a را بر ۱۵ برابر r فرض می کنیم و داریم:

$$a = 15q + r, 0 \leq r < 15$$

$$-a = 15q' + r - 1, 0 \leq r - 1 < 15$$

اگر دو رابطه را با هم جمع کنیم داریم:

$$0 = 15(q + q') + 2r - 1 \Rightarrow 2r - 1 = 15(-q' - q)$$

یعنی $2r - 1$ بر ۱۵ بخش پذیر است. حالا با توجه به این که:

$$0 \leq r < 15 \Rightarrow 0 \leq 2r < 30 \Rightarrow -1 \leq 2r - 1 < 29$$

یعنی $2r - 1$ عددی است که بر ۱۵ بخش پذیر است و در فاصله -1 تا 29 قرار دارد پس $2r - 1 = 15$ یا صفر است و یا ۱۵:

$$2r - 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \text{ غ ق ق}$$

$$2r - 1 = 15 \Rightarrow r = 8$$

بنابراین $a = 15q + 8$ است. می خواهیم بزرگترین عدد دورقمی با این شرایط را پیدا کنیم:

$$15q + 8 \leq 99 \Rightarrow 15q \leq 91 \Rightarrow q \leq 6 \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow q_{\max} = 6 \Rightarrow q_{\max} = 15 \times 6 + 8 = 98$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 9 + 8 = 17$$

۲۲۰- گزینه ۲

$$\frac{107}{3} \left| \begin{array}{l} b \\ q \end{array} \right. \Rightarrow 107 = bq + 3, 3 < b \Rightarrow 104 = bq$$

$$\Rightarrow b | 104 \Rightarrow b | 2^3 \times 13 \quad (I)$$

$$\frac{83}{5} \left| \begin{array}{l} b \\ q' \end{array} \right. \Rightarrow 83 = bq' + 5, 5 < b \Rightarrow 78 = bq'$$

$$\Rightarrow b | 78 \Rightarrow b | 2 \times 3 \times 13 \quad (II)$$

با توجه به دو رابطه (I) و (II) داریم:

$$\frac{b}{2^3 \times 13} \Rightarrow b | 26 \Rightarrow b = 1, 2, 13, 26$$

$$\frac{b}{2 \times 3 \times 13}$$

و با توجه به شرط رابطه تقسیم، یعنی $b > 5$ فقط دو مقدار ۱۳ و ۲۶ برای b قابل قبول است.

۲۲۱- گزینه ۱ a فرد است، آن را به صورت $2k + 1$ در نظر می گیریم. هم چنین باقی مانده مربع کامل است، پس آن را با r^2 نشان می دهیم. داریم:

$$\frac{2k+1}{r^2} \left| \begin{array}{l} 200 \\ q \end{array} \right. \Rightarrow 2k+1 = 200q + r^2, 0 \leq r^2 < 200 \Rightarrow 0 \leq r \leq 14$$

اما اگر r زوج باشد، سمت راست تساوی عددی زوج و سمت راست آن عددی فرد خواهد شد که امکان پذیر نیست. بنابراین r عددی فرد بین صفر تا ۱۴ است.

اگر بخواهیم عدد، بیشترین مقدار خود را داشته باشد، کافی است q را برابر ۴ (اگر $q = 5$ باشد، عدد، چهاررقمی می شود) و r را برابر ۱۳ فرض کنیم، در این صورت:

$$a = 200 \times 4 + 13^2 = 969$$

که رقم دهگان آن ۶ است.

۲۲۲- گزینه ۲ عدد را a می نامیم. با توجه به اطلاعات سؤال داریم:

$$\frac{a}{r} \left| \begin{array}{l} 23 \\ q \end{array} \right. \Rightarrow a = 23q + r \quad (I), 0 \leq r < 23$$

$$\frac{a+x}{\frac{r}{3}} \left| \begin{array}{l} 23 \\ q+3 \end{array} \right. \Rightarrow a+x = 23(q+3) + \frac{r}{3} \quad (II)$$

اگر دو رابطه (I) و (II) را از هم کم کنیم، داریم:

$$(II) - (I): x = 23 \times 3 - \frac{2r}{3} \quad (III)$$

از طرفی با توجه به این که $r < 23$ و r مضرب ۳ است. (چون در تقسیم دوم، باقی مانده $\frac{r}{3}$ شده و اگر r مضرب ۳ نباشد، باقی مانده کسری می شود که نادرست است.)

اگر $r = 3k$ باشد، با توجه به شرط رابطه اول؛ یعنی $0 \leq r < 23$ داریم:

$$0 \leq 3k < 23 \Rightarrow 0 \leq k \leq 7 \quad (IV)$$

حالا در رابطه (III) به جای $\frac{r}{3}$ معادل آن، یعنی k را قرار می دهیم:

$$x = 69 - 2k \Rightarrow k = \frac{69-x}{2}$$

با توجه به رابطه (IV) داریم: $69 - x \leq 14 \Rightarrow x \geq 55$



۲۲۳- گزینه ۳: a را بر ۶ تقسیم می‌کنیم در این صورت طبق قضیه تقسیم خواهیم داشت:

$(۱): a = 6k$
 $(۲): a = 6k + 1$
 $(۳): a = 6k + 2$
 $(۴): a = 6k + 3$
 $(۵): a = 6k + 4$
 $(۶): a = 6k + 5$

در حالت‌های (۱)، (۳) و (۵) عدد a زوج است. با توجه به حالت‌های (۲)، (۴) و (۶) باقی‌مانده a بر ۶ برابر ۱ یا ۳ یا ۵ است. یعنی سه حالت مختلف دارد.

۲۲۴- گزینه ۴: a مضرب ۳ است. پس به صورت $3q$ است. حالا چون فرد است، آن هم q باید فرد باشد؛ یعنی $q = 2k + 1$ باشد. پس a به صورت $3(2k + 1) = 6k + 3$ درمی‌آید. یک راه دیگر هم داشتیم. چندتا عدد فرد مضرب ۳ مثال بزنیم. بعد ببینیم با کدام گزینه جور درمی‌آید. خب اجازه بدهید، مثل ۳، ۹، ۱۵ و ... (۴) دقیقاً همین‌ها است!

۲۲۵- گزینه ۱: هر عدد صحیح به یکی از صورت‌های $4k + 1$ ، $4k + 2$ یا $4k + 3$ نوشته می‌شود. (\mathbb{Z} به این چهارتا افراز می‌شه!)

۲۲۶- گزینه ۱: این سؤال هم نکته مهمی دارد که در تمرین کتاب درسی‌تان به آن اشاره شده است. $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$. از طرفی $n-1$ ، n و $n+1$ سه عدد متوالی هستند، پس ضرب آن‌ها بر ۳! یا ۶ بخش‌پذیر است. بنابراین a باید مضرب ۶ باشد. در بین گزینه‌ها فقط ۴۸ است که مضرب ۶ است.

۲۲۷- گزینه ۳: عدد صحیح فرد را $2k + 1$ در نظر می‌گیریم. عدد قبلی $2k$ و بعدی‌اش $2k + 2$ می‌شود.

\mathbb{Z}		
$2k$	$4k + 1$	C

پس: $A = 2k(2k + 1)(2k + 2) = 4k(k + 1)(2k + 1)$

از طرفی k و $k + 1$ دو عدد متوالی هستند، (یعنی یکی زوج و دیگری فرد)، پس ضرب آن‌ها حتماً زوج می‌شود؛ یعنی: $4k(k + 1)(2k + 1) = 8q(2k + 1)$

از طرفی ضرب ۳ عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است، پس عدد A هم به ۳ می‌خورد و هم به ۸، یعنی به ۲۴ می‌خورد.

۲۲۸- گزینه ۳: فرد اولی را $2k + 1$ می‌گیریم، پس دومی $2k + 3$ می‌شود. حالا از اتحاد چاق و لاغر داریم:

۲۲۹- گزینه ۱: می‌دانیم در تقسیم عدد k بر عدد ۵، پنج نوع باقی‌مانده مختلف وجود دارد. در هر ۵ حالت، باقی‌مانده $k^2 + 1$ را بر ۵ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} (2k+3)^2 - (2k+1)^2 &= (2k+3 - (2k+1))(2k+3 + (2k+1)) \\ &= \underbrace{(2k+3)^2}_{a^2} + \underbrace{(2k+3)(2k+1)}_{ab} + \underbrace{(2k+1)^2}_{b^2} \\ &= 2(4k^2 + 12k + 9 + 4k^2 + 8k + 3 + 4k^2 + 4k + 1) \\ &= 2(12k^2 + 24k + 13) = 24k^2 + 48k + 26 + 2 \\ &= 12q^2 + 8q \end{aligned}$$

۲۳۰- گزینه ۲: دو عدد متوالی را n و $n + 1$ فرض می‌کنیم. می‌دانیم از دو عدد متوالی یکی فرد و دیگری زوج است، پس حاصل ضرب آن‌ها حتماً زوج است.

$$\begin{aligned} 4k + 1 &= 4n(n + 1) + 1 = 4(2q) + 1 = 8q + 1 \\ \text{اگر } q \text{ زوج باشد:} & 8q + 1 = 8(2k) + 1 = 16k + 1 \\ \text{در تقسیم به } 16 \text{ باقی‌مانده‌ای برابر } 1 \text{ دارد.} & \\ \text{و اگر } q \text{ فرد باشد:} & 8q + 1 = 8(2k + 1) + 1 = 16k + 9 \\ \text{در تقسیم به } 16 \text{ باقی‌مانده‌ای برابر } 9 \text{ دارد.} & \\ \text{پس باقی‌مانده } 4k + 1 \text{ در تقسیم به } 16 \text{ دو حالت دارد.} & \end{aligned}$$

یک راه این است که عددگذاری کنیم. مثلاً $1^2 + 1^2 = 2$ که در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده ۲ دارد. $1^2 + 1^2 = 2$ که باقی‌مانده آن بر ۴ برابر ۲ است. $2^2 + 2^2 = 8$ که بر ۴ بخش‌پذیر است، پس باقی‌مانده مجموع مربعات، صفر، ۱ و ۲ می‌تواند باشد، پس لابد ۳ نمی‌تواند باشد.

هر عدد صحیح در تقسیم بر ۴ را به یکی از صورت‌های $4k + 1$ ، $4k + 2$ و $4k + 3$ می‌توان نوشت. چون گفته مربع عدد صحیح در هر یک از حالت‌های زیر باقی‌مانده مربع عدد را بر ۴ به دست می‌آوریم:

بر ۴ بخش‌پذیر است. $x = 4k \Rightarrow x^2 = 16k^2 \Rightarrow$

بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. $x = 4k + 1 \Rightarrow x^2 = 16k^2 + 8k + 1 \Rightarrow$

بر ۴ بخش‌پذیر است. $x = 4k + 2 \Rightarrow x^2 = 16k^2 + 16k + 4 \Rightarrow$

بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. $x = 4k + 3 \Rightarrow x^2 = 16k^2 + 24k + 9 \Rightarrow$

پس مربع هر عدد صحیح در تقسیم بر ۴، یا باقی‌مانده‌اش صفر است و یا باقی‌مانده‌اش ۱ است. حالا سه حالت پیش می‌آید.

۱) اگر هر مربع دو عدد صحیح باقی‌مانده‌شان بر ۴ برابر صفر باشد، باقی‌مانده مجموعشان بر ۴ نیز برابر صفر است.

۲) اگر مربع یکی از عددهای صحیح در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ و مربع عدد صحیح دیگر در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر صفر داشته باشد، باقی‌مانده مجموع مربعات دو عدد در تقسیم بر ۴ برابر ۱ می‌شود.

۳) اگر مربع هر دو عدد صحیح در تقسیم بر ۴ برابر ۱ شود، باقی‌مانده مجموع مربعات دو عدد در تقسیم به ۴ برابر ۲ می‌شود.

بنابراین باقی‌مانده مجموع مربعات دو عدد در تقسیم بر ۴ هیچ‌وقت نمی‌تواند برابر ۳ شود.

۲۳۱- گزینه ۱: می‌دانیم در تقسیم عدد k بر عدد ۵، پنج نوع باقی‌مانده مختلف وجود دارد. در هر ۵ حالت، باقی‌مانده $k^2 + 1$ را بر ۵ به دست می‌آوریم:

$k = 5q \Rightarrow k^2 + 1 = 25q^2 + 1 \Rightarrow$

در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. $k = 5q + 1 \Rightarrow k^2 + 1 = 25q^2 + 10q + 2 \Rightarrow$

۲۳۰- گزینه ۲: دو عدد متوالی را n و $n + 1$ فرض می‌کنیم. می‌دانیم از دو عدد متوالی یکی فرد و دیگری زوج است، پس حاصل ضرب آن‌ها حتماً زوج است.

زوج است. $4k + 1 = 4n(n + 1) + 1 = 4(2q) + 1 = 8q + 1$

اگر q زوج باشد: $8q + 1 = 8(2k) + 1 = 16k + 1$

در تقسیم به ۱۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. $8q + 1 = 8(2k + 1) + 1 = 16k + 9$

در تقسیم به ۱۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۹ دارد. $8q + 1 = 8(2k + 3) + 1 = 16k + 25$



در تقسیم به ۵ باقی مانده‌ای برابر ۲ دارد.

$$k = 5q + 2 \Rightarrow k^2 + 1 = 25q^2 + 20q + 5 \Rightarrow$$

$$k = 5q + 3 \Rightarrow k^2 + 1 = 25q^2 + 30q + 10 \Rightarrow$$

$$k = 5q + 4 \Rightarrow k^2 + 1 = 25q^2 + 40q + 17 \Rightarrow$$

در تقسیم به ۵ باقی مانده‌ای برابر ۲ دارد.

بنابراین باقی مانده $k^2 + 1$ در تقسیم به ۵ هیچ‌گاه نمی‌تواند برابر ۳ و ۴ باشد.

۲۳۲- گزینه ۳ می‌دانیم باقی مانده هر عدد صحیح در تقسیم به ۷، هفت حالت مختلف دارد. (از صفر تا ۶)

اما چون گفته باقی مانده به ۷ فرد است پس یکی از حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:

$$a = 7k + 1, a = 7k + 3, a = 7k + 5$$

در هر سه حالت مربع عدد را پیدا کرده، باقی مانده آن را بر ۷ به دست

$$a^2 = (7k+1)^2 = 49k^2 + 14k + 1$$

می‌آوریم. در تقسیم به ۷ باقی مانده‌ای برابر ۱ دارد. مضرب ۷

$$a^2 = (7k+3)^2 = 49k^2 + 42k + 9$$

در تقسیم به ۷ باقی مانده‌ای برابر ۲ دارد.

$$a^2 = (7k+5)^2 = 49k^2 + 70k + 25$$

در تقسیم به ۷ باقی مانده‌ای برابر ۴ دارد.

پس باقی مانده a^2 ۷ نمی‌تواند برابر ۳ باشد.

۲۳۳- گزینه ۳ باقی مانده آن عدد بر ۴، برابر ۳ است، پس آن عدد به فرم $4k + 3$ است. k دو حالت دارد: یا زوج است یا فرد. پس:

$$k = 2q \Rightarrow 4(2q) + 3 = 8q + 3$$

$$k = 2q + 1 \Rightarrow 4(2q + 1) + 3 = 8q + 7$$

پس باقی مانده آن بر ۸ برابر ۳ یا ۷ می‌شود.

۲۳۴- گزینه ۴ خارج قسمت را برابر q فرض می‌کنیم. داریم:

$$\begin{array}{l} a \overline{) 24} \\ \underline{q} \\ 15 \end{array} \Rightarrow a = 24q + 15 \Rightarrow \frac{a}{3} = 8q + 5$$

حالا باقی مانده را بر ۱۶ می‌خواهیم، بنابراین باید برای q دو حالت مختلف در نظر بگیریم:

$$q = 2k \Rightarrow \frac{a}{3} = 8(2k) + 5 = 16k + 5$$

باقی مانده برابر ۵ است.

$$q = 2k' + 1 \Rightarrow \frac{a}{3} = 8(2k' + 1) + 5 = 16k' + 13$$

باقی مانده برابر ۱۳ است.

بنابراین باقی مانده $\frac{a}{3}$ بر ۱۶ برابر ۵ یا ۱۳ است.

(دقت کنید اگر مثلاً تو این سؤال باقی مانده $\frac{a}{3}$ را بر ۲۴ می‌خواستیم باید $3k + 2$ و $3k + 10$ ، $3k$ را سه حالت می‌کردیم، $3k + 2$ و $3k + 10$ ، $3k$)

۲۳۵- گزینه ۳ هر عدد صحیح a به یکی از صورت‌های $3k + 1$ ، $3k$ یا $3k + 2$ است. اگر $a = 3k$ باشد که خب همین عدد، مضرب ۳ است.

اگر $a = 3k + 2$ باشد، $a + 4 = 3k + 6$ ، مضرب ۳ می‌شود، اما اگر $a = 3k + 1$ باشد، نه a و نه $a + 4$ هیچ‌کدام مضرب ۳ نمی‌شوند. پس

$a + m = 3k + (m + 1)$ باید مضرب ۳ بشود. از این نتیجه می‌گیریم که

$m + 1$ باید مضرب ۳ باشد. در بین گزینه‌ها فقط به ازای $m = 8$ این اتفاق

می‌افتد. ایده این سؤال از یک تمرین کتاب درسی گرفته شده است. «برای هر عدد

صحیح a ، از بین $a + 2$ ، $a + 4$ و $a + 6$ ، دقیقاً یکی بر ۳ بخش پذیر است.» ببینید،

اعداد صفر، ۲ و ۴ دارند با a جمع می‌شوند. باقی مانده این‌ها بر ۳ باید صفر، ۱ و ۲

را تولید کند. در آن صورت این نکته درست می‌شود. صفر، ۴ و ۸ را اگر بر ۳ تقسیم

کنیم، باقی مانده‌های صفر، ۱ و ۲ می‌دهد؛ یعنی این نکته درست می‌شود که از بین a ،

$a + 4$ و $a + 8$ ، حتماً یکی مضرب ۳ است، یا مثلاً از بین $a + 2$ و $a + 4$ ، یکی

مضرب ۳ است. چون باقی مانده‌های صفر، ۲ و ۴ بر ۳، دقیقاً صفر، ۲ و ۱ می‌شود.

۲۳۶- گزینه ۳

$$21 \mid a + 5 \Rightarrow a + 5 = 21k \Rightarrow a = 21k - 5$$

$$\Rightarrow a - 2 = 21k - 7 \Rightarrow a - 2 = 7(3k - 1)$$

$a - 2$ بر ۷ بخش پذیر است اما می‌خواهیم باقی مانده آن را بر ۱۴ به دست آوریم.

اگر k فرد باشد $3k - 1$ زوج می‌شود و بنابراین $7(3k - 1)$ بر ۱۴ بخش پذیر می‌شود.

اما اگر k زوج باشد داریم:

$$k = 2q \Rightarrow a - 2 = 7(3(2q) - 1) = 42q - 7$$

$42q$ بر ۱۴ بخش پذیر است پس فقط کافی است باقی مانده -7 را بر ۱۴

به دست آوریم. خود ۷ را بر ۱۴ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} 7 \overline{) 14} \\ \underline{7} \\ 7 \end{array} \Rightarrow 7 = 14 - 7 = 7$$

بنابراین در این حالت نیز باقی مانده برابر ۷ است، بنابراین باقی مانده فقط می‌تواند برابر صفر یا ۷ باشد.

$$a = 25q + 7 \Rightarrow a + 3 = 25q + 10$$

می‌خواهیم باقی مانده $a + 3$ را بر ۱۵ به دست آوریم. حال q را بر حسب باقی مانده‌اش به ۳ حالت بندی می‌کنیم:

$$q = 3k \Rightarrow a + 3 = 25(3k) + 10 \Rightarrow$$

مضرب ۱۵

$$q = 3k' + 1 \Rightarrow a + 3 = 25(3k' + 1) + 10 = 75k' + 35$$

مضرب ۱۵

باقی مانده ۳۵ بر ۱۵ برابر ۵ است، پس باقی مانده کل عبارت بر ۱۵، برابر ۵ است.

$$q = 3k'' + 2 \Rightarrow a + 3 = 25(3k'' + 2) + 10 = 75k'' + 60$$

مضرب ۱۵

بنابراین باقی مانده عبارت بر ۱۵ در این حالت برابر صفر است.

۲۳۸- گزینه ۳ خب یک طرفین وسطین کنیم، می‌شود $ad = bc$

پس $a \mid bc$ و $b \mid ad$ درست هستند. $d \mid abc$ پس $d \mid abc$ یعنی **۴**

هم درست است. برای رد کردن **۲** کافی است $a = 4$ ، $b = 2$ ، $c = 6$ و

$$d = 3 \text{ باشد، در این صورت: } \frac{4}{3} = \frac{6}{3} \text{ ولی } \frac{4}{3} \nmid \frac{6}{3} \text{، زیرا: } 6 \nmid 2 \times 4$$

۲۳۹- گزینه ۴ می‌دانیم سمت راست رابطه عاقد کردن را می‌توان در هر

عدد دلخواهی ضرب و سمت چپ رابطه عاقد کردن را می‌توان بر هر کدام از

مقسوم‌علیه‌های آن تقسیم کرد. بنابراین:

۱ $6 \mid b \rightarrow$ سمت چپ تقسیم بر ۳ $18 \mid b$

۲ $a \mid b \rightarrow$ سمت راست ۳ $a \mid b \Rightarrow a \mid 18, 18 \mid b$

۳ $a \mid 54 \rightarrow$ سمت راست ۳ $a \mid 18$



کسر $\frac{a^3}{4 \times 3}$ باید عددی صحیح باشد. چهار عامل ۲ در مخرج داریم، بنابراین a باید دست کم دو عامل ۲ داشته باشد. (دقت کنید که اگر a فقط یک عامل ۲ داشته باشد، یعنی عددی مثل ۶ باشد، وقتی به توان ۳ می‌رسد دارای سه عامل ۲ است و مخرج ۴ عامل ۲ دارد، پس کسر ساده نمی‌شود). بنابراین a باید دست کم دو عامل ۲ و یک عامل ۳ داشته باشد.

پس: $a_{\min} = 2^2 \times 3 = 12$

از طرفی: $375 | b^2 \Rightarrow 3 \times 5^3 | b^2 \Rightarrow \frac{b^2}{3 \times 5^3} \in \mathbb{Z}$

کسر $\frac{b^2}{3 \times 5^3}$ باید عددی صحیح باشد. با استدلال مشابه، b باید دست کم ۲ عامل ۵ و یک عامل ۳ داشته باشد. بنابراین: $b_{\min} = 25 \times 3 = 75$
در نتیجه کمترین مقدار $a + b$ برابر است با: $75 + 12 = 87$

۲۴۵- گزینه ۲ اگر بخواهیم رابطه $3^m | 3^n$ برقرار باشد باید کسر $\frac{3^n}{3^m}$ عددی صحیح باشد. پس $m \leq n$. از طرف دیگر اگر بخواهیم رابطه $5^{2m} | 5^{n+3}$ برقرار باشد، باید کسر $\frac{5^{2m}}{5^{n+3}}$ عددی صحیح باشد و در نتیجه $n + 3 \leq 2m$ باشد.

در میان گزینه‌ها، فقط $n = 7$ و $m = 5$ است که در هر دو رابطه صدق می‌کند.

۲۴۶- گزینه ۳ قدم اول این است که بفهمیم سؤال اصلاً چه می‌گوید! m چه عددی باشد تا a عددی اول به دست آید. ابتدا باید با ضرب و تفریق، k را حذف کنیم.

$$a | 9k + 4 \xrightarrow{\times 5} a | 45k + 20 \xrightarrow{(-)} a | 20 - 9m$$

$$a | 5k + m \xrightarrow{\times 9} a | 45k + 9m$$

حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$m = 5 \Rightarrow a | -25 \Rightarrow a = 5$ یا $a = 25$ پس a لزوماً اول نیست.

$m = 6 \Rightarrow a | -34 \Rightarrow$

$a = 2$ یا $a = 17$ یا $a = 34$ ، پس a الزاماً اول نیست.

$m = 7 \Rightarrow a | -43 \xrightarrow{a > 1} a = 43 \checkmark$

$m = 8 \Rightarrow a | -52 \Rightarrow$

برای مثال $a = 52$ می‌تواند باشد، پس a لزوماً اول نیست.

۲۴۷- گزینه ۱ رشد عبارت سمت چپ سریع‌تر است بنابراین عدهای کوچک را امتحان می‌کنیم.

$n = 1 \Rightarrow 2 | 1 \quad \times \quad n = 2 \Rightarrow 6 | 8 \quad \times$

$n = 3 \Rightarrow 24 | 27 \quad \times \quad n = 4 \Rightarrow 120 | 64 \quad \times$

از این جا به بعد نیاز به امتحان نداریم، چون هر چه جلو برویم، $(n+1)!$ بزرگ‌تر از n^2 می‌شود، پس دیگر رابطه عاد کردن درست در نمی‌آید، پس این شد که هیچ n طبیعی پیدا نمی‌شود.

۲۴۸- گزینه ۱ a فقط دو مقسوم‌علیه طبیعی دارد، یعنی a عددی اول است. از طرفی $5, 3, a \neq 3, 5$ ، چون اگر a برابر ۳ یا ۵ باشد، ۲۲۵ را عاد می‌کند. بقیه اعداد اول به جز ۳ و ۵، عامل مشترک مثبتی با ۱۵ به جز یک ندارند، پس همواره $(a, 15) = 1$.

۲۴۹- گزینه ۱

$$(a, b) = d \Rightarrow \left. \begin{aligned} d | a &\xrightarrow{\times a} d | a^2 \\ d | b \end{aligned} \right\}$$

$\xrightarrow{(-)} d | a^2 - b$

اما گزینه $b | 2a$ ممکن است درست نباشد، مثلاً اگر a و b هر دو ۱۸ باشند، رابطه $b | 3a$ برقرار نیست.

۲۴۰- گزینه ۱ $a | 9k + 7$ و $a | 7k + 6$. اول این k را حذف کنیم.

$$a | 9k + 7 \xrightarrow{\times 7} a | 63k + 49$$

$$a | 7k + 6 \xrightarrow{\times 9} a | 63k + 54$$

$a \neq 1$ و عددی طبیعی است، پس $a = 5$ می‌شود. حالا باید ببینیم، اولین عدد k که به ازای آن، $5 | 9k + 7$ و $5 | 7k + 6$ ، هر دو برقرار می‌شوند، کدام است. با امتحان گزینه‌ها به ازای $k = 2$ هر دو رابطه برقرار می‌شود، خودش است. **۱** می‌شود جواب!

۲۴۱- گزینه ۲ گفتیم در این نوع سؤال‌ها می‌توان ریشه عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار داد.

$$n+1 | n^5 + 3n^2 - n + 6$$

$$\xrightarrow{n=1} n+1 | (-1)^5 + 3(-1)^2 - (-1) + 6 \Rightarrow n+1 | 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = -2 \end{cases} \\ n+1 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \checkmark \\ n = -4 \end{cases} \\ n+1 = \pm 9 \Rightarrow \begin{cases} n = 8 \checkmark \\ n = -10 \end{cases} \end{cases}$$

که دو مقدار آن طبیعی است.

۲۴۲- گزینه ۳

$$a^2 | a + b \xrightarrow{\times a} a^2 | a^2 + ab$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 | a^2 \\ a^2 | a^2 + ab \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)} a^2 | ab \xrightarrow{\div a} a | b$$

۱ درست است. $a | b \xrightarrow{\text{به توان } 2} a^2 | b^2$

۲ درست است. $a | b \Rightarrow a | 3b \xrightarrow{(-)} a | 3b - 2a$

$a | a \Rightarrow a | 2a$

۴ $a | b \Rightarrow a^2 | b^2 \Rightarrow a^2 | a^2 + b^2$

$a | a \Rightarrow a^2 | a^2$

۳ ممکن است درست نباشد.

برای مثال اگر $a = 3$ و $b = 6$ باشد، $a^2 | a + b$ زیرا $9 | 6 + 3$ اما:

$9 | 3 - 6$

۲۴۳- گزینه ۳ $a | b + 3 \Rightarrow b + 3 = aq \Rightarrow b = aq - 3$

$a | c - 2 \Rightarrow c - 2 = aq' \Rightarrow c = aq' + 2$

دو رابطه را در هم ضرب می‌کنیم: $bc = \underbrace{a^2 qq' + 2aq - 3aaq'}_{\text{بر } a \text{ بخش پذیر است}} - 6$

سه جمله اول، بر a بخش پذیر است. از طرفی می‌دانیم باقی‌مانده نمی‌تواند عددی منفی باشد، بنابراین:

$$bc + 1 = a \overbrace{(aq' + 2q - 3q')}^k - 5 = ak - 5 = ak - a + a - 5$$

$$= a \underbrace{(k-1)}_r + a - 5$$

بنابراین باقی‌مانده برابر $a - 5$ است.

۲۴۴- گزینه ۴ $48 | a^2 \Rightarrow 2^4 \times 3 | a^2 \Rightarrow \frac{a^2}{2^4 \times 3} \in \mathbb{Z}$

۲۵۵- گزینه ۱ مقسوم، ۲۰ برابر باقی مانده است؛ یعنی $a = 20r$ و چون باقی مانده ماکزیمم است و می دانیم $0 \leq r < b$ ، بیشترین مقدار r برابر است با:

$$r = b - 1$$

$$\frac{20(b-1)}{b-1} \mid b \Rightarrow 20(b-1) = bq + b - 1$$

داریم:

$$\Rightarrow 19(b-1) = bq \Rightarrow \frac{b}{b-1} = \frac{19}{q}$$

$b-1$ و b نسبت به هم اولاند (یعنی کسر، ساده نمی شود)، بنابراین b برابر ۱۹ است.

۲۵۶- گزینه ۳ هر عدد صحیح به یکی از صورت های $6k+1$ ، $6k+2$ ، $6k+3$ ، $6k+4$ یا $6k+5$ می تواند باشد. چون گفته زوج ولی مضرب ۳ نباشد، صورت های $6k+1$ ، $6k+3$ ، $6k+5$ و $6k+2$ کنار می رود، یعنی هر عدد صحیح زوج که مضرب ۳ نباشد، به صورت $6k+4$ یا $6k+4$ می تواند باشد. پس باقی مانده بر ۶ برابر ۲ یا ۴ می شود.

۲۵۷- گزینه ۱ **روش اول** می دانیم در تقسیم به ۴ مجموعه \mathbb{Z} به ۴ کلاس افراز می شود:

$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
------	--------	--------	--------

حالا اگر بخواهیم از میان عددهای $a+x$ ، $a+y$ ، $a+z$ و $a+t$ دست کم یکی بر ۴ بخش پذیر باشد x ، y ، z و t هر کدام باید عضو یکی از کلاس های بالا باشند. یعنی یکیشان بر ۴ بخش پذیر باشد، یکی بر ۴ باقی مانده اش یک باشد و ...

بنابراین اگر بخواهیم همواره یکی از عددهای a ، $a+5$ ، $a+10$ و b بر ۴ بخش پذیر باشد با توجه به این که باقی مانده ۵ بر ۴ برابر ۱ و ۱۰ بر ۴ برابر ۲ است، اگر $b = a + m$ باشد، باقی مانده m بر ۴ باید برابر ۳ باشد، یعنی $b - a$ باید به صورت $4k+3$ باشد.

روش دوم با عددگذاری سؤال را حل می کنیم. اگر $a = 1$ باشد هیچ کدام از عددهای a ، $a+5$ و $a+10$ بر ۴ بخش پذیر نمی شود، پس b باید مضرب ۴ باشد. (مثلاً ۸ باشد). در این صورت باقی مانده $b - a$ بر ۴ برابر است با باقی مانده $7 = 8 - 1$ بر ۴ که برابر ۳ می شود.

از طرفی می دانیم $d \mid a^2 - b + 7$. اگر سمت راست این دو رابطه را از هم کم کنیم داریم:

$$d \mid a^2 - b \xrightarrow{(-)} d \mid 7 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 7$$

$$d \mid a^2 - b + 7$$

اما چون گفته $d > 1$ است، پس $d = 7$ است.

$$7 \mid a \Rightarrow a = 7k \Rightarrow a + b = 7(k + k')$$

$$7 \mid b \Rightarrow b = 7k'$$

یعنی $a + b$ باید مضرب ۷ باشد که در گزینه ها فقط ۸۴ چنین ویژگی ای دارد.

۲۵۰- گزینه ۲ داریم:

$$a \mid 19 \Rightarrow a = 19q + 7 \Rightarrow a + 49 = 19q + 56$$

حالا کافی است باقی مانده و خارج قسمت $a + 49$ را بر ۱۹ به دست آوریم:

$$a + 49 = 19q + 56 = 19q + 38 + 18 = 19(q+2) + 18$$

باقی مانده خارج قسمت جدید

همان طور که می بینید خارج قسمت ۲ واحد اضافه شده و باقی مانده برابر ۱۸ می شود.

۲۵۱- گزینه ۱ ب.م.م دو عدد را d می نامیم. در این صورت:

$$(9n-1, n+2) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid n+2 \xrightarrow{\times 9} d \mid 9n+18 \\ d \mid 9n-1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} d \mid 19 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 19$$

از آن جایی که ب.م.م عددی بزرگ تر از ۱ است، پس $d = 19$ و دو عدد، بر ۱۹ بخش پذیرند: $19k > 102 \Rightarrow 19k - 2 > 100 \Rightarrow n = 19k - 2$ و $n + 2 = 19k \Rightarrow k > 5/3 \xrightarrow{k=6} n = 112 \Rightarrow 1 + 1 + 2 = 4$

۲۵۲- گزینه ۱ داریم:

$$a \mid b \Rightarrow a = bq + 34, 34 < b$$

$$\frac{a}{34} \mid q$$

کم ترین مقدار b ، عدد ۳۵ است.

$$a = 35q + 34$$

با توجه به این که q عددی طبیعی است، اگر $q = 1$ باشد، $a = 69$ است و اگر $q > 1$ باشد، a عددی بزرگ تر از ۷۰ خواهد شد، پس فقط به ازای یک مقدار a ، رابطه برقرار است.

۲۵۳- گزینه ۲ رابطه تقسیم، $a = 8q + r$ می شود، که $r = \sqrt{q}$ است. از طرفی شرط باقی مانده می گوید که $0 \leq \sqrt{q} < 8$ باشد. اگر بیشترین مقدار q را به دست آوریم، بیشترین مقدار a هم به دست می آید. \sqrt{q} باید عددی صحیح باشد. پس بیشترین مقدار q برابر ۴۹ می شود.

$$a = 8(49) + 7 = 399$$

حالا داریم:

۲۵۴- گزینه ۲

$$a \mid b \Rightarrow a = bq + 10, 10 < b$$

$$\frac{a}{10} \mid q$$

$$a + 100 \mid b \Rightarrow a + 100 = bq' + 10, 11 < b$$

$$\frac{a}{11} \mid q'$$

$$\xrightarrow{(-)} 100 = b(q' - q) + 10 \Rightarrow 99 = b(q' - q)$$

با توجه به این که $b > 11$ است، پس تنها حالت قابل قبول برای b عددهای ۳۳ و ۹۹ است که کم ترین مقدار b عدد ۳۳ است.