

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com

+



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



فصل ۱
دایره

۷	درس ۱: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره
۲۰	درس ۲: رابطه‌های طولی در دایره
۲۷	درس ۳: اوضاع نسبی دو دایره و مماس‌های مشترک
۳۸	درس ۴: چندضلعی‌های محاطی و محیطی
۵۱	پاسخ تشریحی

فصل ۲
تبدیل‌های هندسی و کاربردها

۸۵	درس ۱: تبدیل
۸۷	درس ۲: بازتاب
۹۴	درس ۳: انتقال و دوران
۱۰۴	درس ۴: تجانس و همانی
۱۱۲	پاسخ تشریحی

فصل ۳
روابط طولی در مثلث

۱۳۲	درس ۱: قضیه سینوس‌ها
۱۳۸	درس ۲: قضیه کسینوس‌ها
۱۴۷	درس ۳: نیمسازها
۱۵۳	درس ۴: مساحت و طول ارتفاع
۱۶۲	پاسخ تشریحی

۱۹۳ پاسخ‌نامه کلیدی

دایره

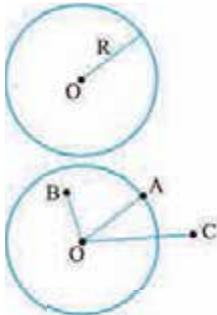
(فصل ۱)

درس ۱

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره



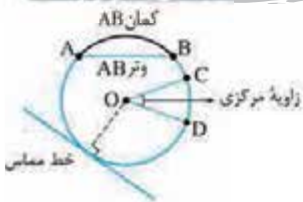
در سال‌های قبل با دایره آشنا شدیم و فهمیدیم که فاصله هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر شعاع است. یک دایره به مرکز O و شعاع R را با نماد $C(O, R)$ نشان می‌دهیم. حالا یک دایره به شعاع 6 و مرکز O را در نظر بگیرید، هر نقطه‌ای را که در صفحه در نظر بگیرید، نسبت به دایره ۳ حالت می‌تواند داشته باشد:



- ۱ اگر فاصله این نقطه از مرکز دایره 6 باشد، این نقطه روی دایره قرار دارد.
- ۲ اگر فاصله این نقطه از مرکز دایره بیشتر از 6 باشد، بدیهی است که بیرون دایره می‌افتد.
- ۳ اگر هم فاصله این نقطه از مرکز دایره کمتر از 6 باشد، درون دایره می‌افتد.

مثال اگر فاصله نقطه‌ای از مرکز دایره‌ای به شعاع 6 برابر با $3m - 1$ باشد، محدوده m را طوری تعیین کنید که این نقطه درون دایره باشد.

پاسخ اولاً که این فاصله باید عددی مثبت باشد پس:
 و از طرفی برای این که این نقطه درون دایره بیفتد باید فاصله‌اش از مرکز دایره کمتر از شعاع باشد:
 پس محدوده m می‌شود: $\frac{1}{3} < m < \frac{7}{3}$.



تعریف کمان، وتر، زاویه مرکزی و خط مماس بر دایره را که می‌دانید و یادتان هست که کل دایره 360° است. و راستی یادتان هست که دو کمان AB داریم یکی کمان کوچک‌تره و یکی هم کمان بزرگ‌تره! یک چیز دیگر را هم یادآوری کنم و برویم سراغ هندسه سال یازدهم، زاویه مرکزی، با کمان مقابلش برابر است یعنی $\widehat{CD} = \hat{O}$.

تست در شکل مقابل، حاصل $x + y + z$ کدام است؟

180° (۱) 225° (۲) 270° (۳) 245° (۴)

پاسخ گزینه ۳

مجموع کمان‌های دایره 360° است، پس x به دست می‌آید:
 $3x + 3x + 2x = 360^\circ \Rightarrow 8x = 360^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$

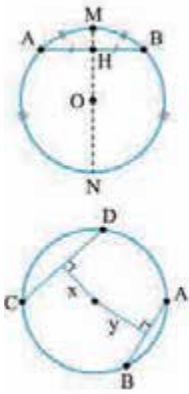
پس کمان AB که $2x$ است می‌شود: $\widehat{AB} = 90^\circ$ و زاویه مرکزی مقابلش هم باید 90° شود پس $y = 90^\circ$. حالا باید z را پیدا کنیم، اول از هر چیزی باید حواسمان باشد که OA و OB شعاع‌های دایره هستند پس OA و OB برابرند، یعنی مثلث AOB متساوی‌الساقین است و در نتیجه داریم:
 پس $x + y + z$ می‌شود: $x + y + z = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$

مثال ثابت کنید اگر دو کمان از دایره‌ای با هم برابر باشند، وترهای متناظر آن‌ها نیز با هم برابرند.

پاسخ مطابق شکل فرض می‌کنیم که کمان‌های AB و CD برابر باشند، می‌خواهیم ثابت کنیم که وترهای AB و CD با هم برابرند.
 کمان‌های AB و CD برابرند، پس زاویه‌های مرکزی روبه‌روی آن‌ها نیز با هم برابرند.
 یعنی: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ، حالا چون OA و OB و OC و OD همگی شعاع‌اند می‌توانیم درباره مثلث‌های OAB و OCD بگوییم:

$$\begin{cases} OA = OC \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OB = OD \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow AB = CD$$

کتاب مهم

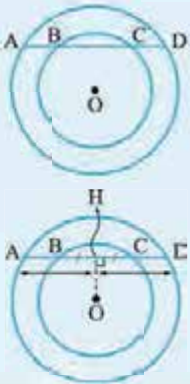


۱ اگر از مرکز دایره عمودی بر یک وتر رسم کنیم، وتر را که نصف می‌کند هیچ، کمان‌های متناظر این وتر را هم نصف می‌کند. شکل هم می‌گوید که از O عمودی بر AB رسم کردیم که هم وتر (AH = HB) AB و هم کمان کوچک‌تر (AM = MB) AB و همین‌طور کمان بزرگ‌تر (AN = NB) AB را نصف کرده است. (چرا؟) از طرفی AB کوتاه‌ترین وتر گذرنده از H درون دایره است.

۲ هر چه قدر که یک وتر به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد، طولش بزرگ‌تر می‌شود. مثلاً در شکل مقابل چون CD به مرکز دایره نزدیک‌تر از AB است، می‌فهمیم که $CD > AB$ و شاید بعضی‌ها بگویند چون بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است.

۳ اگر دو وتر دایره برابر باشند، فاصله آن‌ها از مرکز دایره برابر است.

مثال در شکل مقابل مرکز هر دو دایره نقطه O است، ثابت کنید: $AB = CD$.



پاسخ از O عمودی بر وتر AD رسم می‌کنیم، در دایره کوچک‌تر داریم:

$$OH \perp BC \Rightarrow BH = HC$$

$$OH \perp AD \Rightarrow AH = HD$$

$$AH - BH = DH - CH \Rightarrow AB = CD$$

و در دایره بزرگ‌تر نیز داریم:

حالا می‌توانیم بگوییم که:

تست در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره است. اگر $AB = 8$ و $CD = 6$ و $OH = 10 - m$ و $OK = 3m - 2$

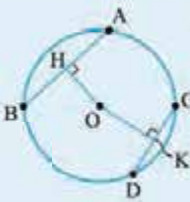
محدوده m کدام است؟

$$m < 3 \quad (2)$$

$$m > 3 \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} < m < 10 \quad (4)$$

$$3 < m < 10 \quad (3)$$



چون AB از CD بزرگ‌تر است پس OH از OK کوچک‌تر است، یعنی وتر AB نزدیک‌تر بوده که بزرگ‌تر شده!

$$OK > OH \Rightarrow 3m - 2 > 10 - m \Rightarrow 4m > 12 \Rightarrow m > 3$$

پس داریم:

$$\begin{cases} 10 - m > 0 \Rightarrow m < 10 \\ 3m - 2 > 0 \Rightarrow m > \frac{2}{3} \end{cases}$$

از طرفی طول هر پاره‌خط باید عددی مثبت باشد. در نتیجه:

$$3 < m < 10 \text{ داریم. بازه داریم.}$$

اوضاع نسبی خط و دایره

یک خط و دایره سه‌تا حالت می‌توانند داشته باشند:

۱ **متقاطع:** اگر خط دایره را قطع کند به این خط قاطع می‌گویند و در این حالت به خط و دایره متقاطع می‌گویند.

$$OH < R$$

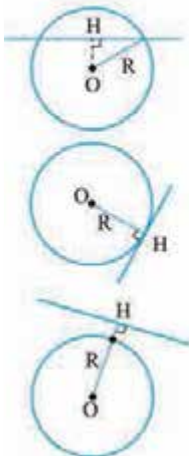
۲ **ماس:** اگر خط و دایره، یک نقطه مشترک داشته باشند، خط و دایره مماس هستند.

$$OH = R$$

اگر از مرکز دایره به نقطه مشترک شعاع بکشیم، این شعاع بر خط مماس عمود می‌شود.

$$OH > R$$

۳ **متخارج:** گاهی خط و دایره کاری با هم ندارند و خط از بیرون دایره عبور می‌کند.



مثال دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۵ مطابق شکل مماس خارج‌اند و امتداد وتر AB در T بر دایره کوچک‌تر مماس است. محیط مثلث OAB را بیابید.

پاسخ $O'T$ بر AT عمود است. از O نیز بر AB عمود می‌کنیم. (قطر عمود بر وتر) می‌دانیم $O'H = O'T = 3$ و داریم:

ΔOHB : $OB^2 = OH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \Rightarrow 25 = 9 + \frac{AB^2}{4} \Rightarrow AB = 8$

$2P_{\Delta OAB} = 5 + 5 + 8 = 18$

تست خطی به فاصله ۳ از مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ عبور می‌کند. طول پاره خطی که دایره از این خط جدا می‌کند، کدام است؟

۴ (۱) $2\sqrt{34}$ (۳) 8 (۲) $2\sqrt{34}$ (۴)

پاسخ گزینه ۳

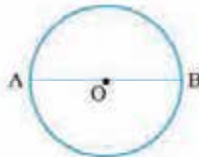
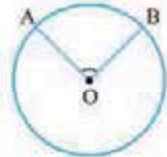
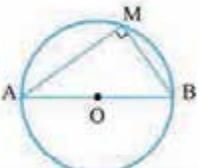
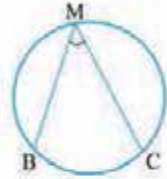
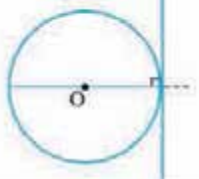
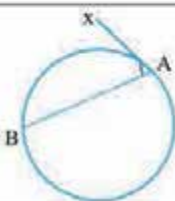
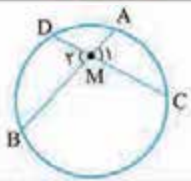
فاصله نقطه از خط یعنی عمودی که از آن نقطه بر خط رسم می‌شود پس مطابق شکل $OH = 3$ است و از طرفی این خط عمود، وتر AB را نصف می‌کند. می‌خواهیم طول AB را حساب کنیم، برای این کار از O به A وصل می‌کنیم، $OA = 5$ حالا در مثلث قائم‌الزاویه AOH قضیه فیثاغورس را می‌نویسیم:

$\Delta AOH: \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow AO^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + AH^2 \Rightarrow AH^2 = 16 \Rightarrow AH = 4$

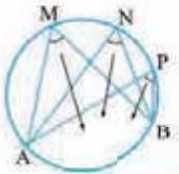
پس AB دو برابر AH یعنی $2 \times 4 = 8$ می‌شود.

انواع زاویه‌ها در دایره

در دایره ۵ مدل زاویه داریم که در جدول زیر آن‌ها را می‌بینید.

حالت خاص مهم	اندازه	قیافه	اسم
<p>قطر دایره را به دو نیم دایره تقسیم می‌کند.</p>  <p>$\hat{AOB} = 180^\circ$</p>	$\hat{AOB} = \widehat{AB}$		زاویه مرکزی
<p>زاویه محاطی روبه‌رو به قطر، 90° است.</p>  <p>$\hat{M} = 90^\circ$</p>	$\hat{BMC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$		زاویه محاطی
<p>شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.</p> 	$x\hat{AB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$		زاویه ظلی
-	$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$		زاویه تری داخلی

اسم	قیافه	اندازه	حالت خاص مهم
زاویه وتری خارجی		$\hat{M} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2}$	۱- حالت خاص $\hat{M} = \frac{\widehat{x} - \widehat{y}}{2}$
			۲- حالت خاص $\hat{M} = \frac{\widehat{x} - \widehat{y}}{2}$



$$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \dots = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

همه زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان با هم برابرند.

مثال در شکل مقابل، وترهای AB و CD موازی‌اند، ثابت کنید: $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

پاسخ از A به D وصل می‌کنیم، مطابق شکل زاویه‌های \hat{A}_1 و \hat{D}_1 با هم برابرند، از طرفی این زاویه‌ها محاطی‌اند، پس می‌توانیم بگوییم که:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \hat{C}_1 = \frac{\widehat{AD}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{AC}$$


تذکره اگر $\widehat{BD} = \widehat{AC}$ ، الزاماً AB و CD موازی نیستند، نگاه کنید:

تست در شکل مقابل، $\widehat{AB} = 80^\circ$ و $\hat{B} = 60^\circ$ است. اندازه \hat{A} کدام است؟

(۱) 25° (۲) 30° (۳) 35° (۴) 20°

پاسخ گزینه ۳ وقتی که زاویه مرکزی O برابر 90° باشد، کمان CD هم 90° خواهد بود، \hat{B} زاویه محاطی است پس کمان مقابلش باید دو برابر این زاویه باشد پس $\widehat{AD} = 120^\circ$. حالا تکلیف همه کمان‌ها به جز \widehat{BC} مشخص است.

کل دایره 360° است پس داریم:

$$\widehat{BC} = 360 - (80 + 120 + 90) = 70^\circ$$

زاویه A هم که محاطی است و روبه‌رو به همین کمان BC، پس: $\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$

تست در شکل مقابل، y کدام است؟

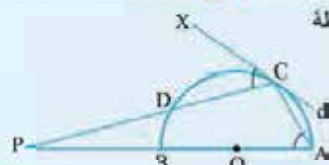
(۱) 20° (۲) 30° (۳) 40° (۴) 60°

پاسخ گزینه ۳ زاویه M وتری داخلی است، پس داریم:

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} \Rightarrow 70^\circ = \frac{x + 30^\circ}{2} \Rightarrow x + 30^\circ = 140^\circ \Rightarrow x = 110^\circ$$

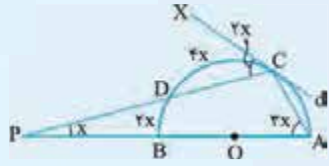
زاویه P وتری خارجی است، پس داریم:

$$\hat{P} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow y = \frac{110^\circ - 30^\circ}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$



تست در شکل مقابل، امتداد قطر AB و وتر DC یکدیگر را در نقطه P قطع می‌کنند و خط d در نقطه C بر دایره مماس است. اگر $\widehat{XCD} = 2x$ و $\hat{P} = x$ و $\hat{A} = 3x$ باشد، کمان AC چند درجه است؟

- (۱) 8°
 (۲) 9°
 (۳) 12°
 (۴) 72°



پاسخ گزینه ۴: زاویه \widehat{XCD} ظلّی است پس وقتی این زاویه $2x$ باشد کمان مقابلش یعنی $CD = 4x$ باید دو برابر آن باشد، پس: $\widehat{CD} = 4x$.

زاویه A محاطی است پس $\widehat{BC} = 2\hat{A} = 6x$ پس کمان BD برابر با $2x$ است. حالا سراغ آخرین اطلاعات مسئله برویم، زاویه P وتری خارجی است، پس داریم:

$$\hat{P} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{2} \Rightarrow x = \frac{\widehat{AC} - 2x}{2} \Rightarrow 2x = \widehat{AC} - 2x \Rightarrow \widehat{AC} = 4x$$

خب سؤال که الکی نگفته قطر AB ، حتماً به یک دردی می‌خورد! قطر AB است پس با یک نیم‌دایره روبه‌روایم، یعنی مجموع کمان‌ها نصف یک دایره کامل یعنی 180° است:

$$\widehat{BD} + \widehat{DC} + \widehat{AC} = 180^\circ \Rightarrow 2x + 4x + 4x = 180^\circ \Rightarrow 10x = 180^\circ \Rightarrow x = 18^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 4x = 4(18^\circ) = 72^\circ$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱- دایره $(O, 5)$ و نقاط A, B, C مفروض هستند. اگر $OA = 5$ و $OB = 3$ و $OC = 7$ باشند کدام گزینه می‌تواند نادرست باشد؟

- (۱) نقطه A روی دایره است.
 (۲) نقطه B درون دایره و نقطه C بیرون دایره است.
 (۳) فاصله نقاط B و C بیشتر از شعاع دایره است.
 (۴) فاصله نقاط A و B حداکثر ۸ واحد است.

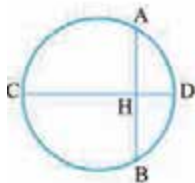
۲- نقطه ثابت A در صفحه مفروض است. تمام نقاطی که فاصله آن‌ها از A کم‌تر از ۳ سانتی‌متر باشد چه مساحتی از صفحه را پوشش می‌دهند؟

- (۱) 3π
 (۲) 9π
 (۳) $\frac{3\pi}{2}$
 (۴) $\frac{9\pi}{2}$

۳- نقطه A به فاصله $5 - 2x$ از نقطه O قرار دارد. اگر نقطه A درون دایره به شعاع ۵ و مرکز O و بیرون دایره به شعاع ۳ و مرکز O قرار داشته باشد، محدوده x کدام است؟

- (۱) $4 < x < 5$
 (۲) $8 < x < 10$
 (۳) $x > 5$
 (۴) $x > 10$

۴- با توجه به شکل مقابل، کدام گزینه نادرست است؟



(۱) اگر قطر دایره باشد نقاط H و D به ترتیب وسط وتر و کمان AB هستند.

(۲) اگر نقاط H و D روی عمود منصف وتر AB باشند، قطر دایره است.

(۳) اگر D وسط کمان AB و H وسط وتر AB باشند، قطر دایره است.

(۴) اگر قطر دایره و D وسط کمان AB باشد، قطر CD عمود منصف وتر AB است.

۵- در شکل مقابل $AB = 6$ ، $OH = 1$ و $\angle OHA = 90^\circ$. شعاع دایره چه قدر است؟

- (۱) $\sqrt{13}$
 (۲) $\sqrt{12}$
 (۳) $\sqrt{11}$
 (۴) $\sqrt{10}$

۶- در دایره $(O, 5)$ فاصله وتر AB از مرکز دایره برابر ۳ است. طول وتر AB کدام است؟

- (۱) ۴
 (۲) ۸
 (۳) ۳
 (۴) ۶

۷- در دایره‌ای به شعاع $2m$ ، وتر $AB = 4m - 8$ به فاصله $m + 3$ از مرکز دایره قرار دارد. m کدام است؟

- (۱) ۵
 (۲) ۶
 (۳) $2\sqrt{2}$
 (۴) $3\sqrt{2}$

۸- در دایره‌ای به شعاع $3\sqrt{2}$ اگر فاصله نقطه A از مرکز دایره ۴ باشد، اندازه کوچک‌ترین وتر گذرنده از A کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

۹- در دایره‌ای به قطر 10 ، وتر AB به طول ۸ واحد رسم شده است. نقطه C بر روی دایره متحرک است. بیشترین مساحت مثلث CAB کدام است؟

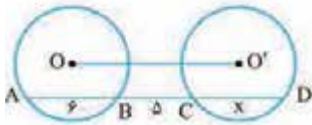
- (۱) ۳۲
 (۲) ۳۶
 (۳) ۴۰
 (۴) ۴۸

۱۰- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) اگر در یک دایره فاصله دو وتر از مرکز دایره برابر باشد طول این دو وتر یکسان است.
 (۲) بزرگ‌ترین وتری که از نقطه A درون دایره می‌گذرد، وتری است که بر قطر گذرنده از نقطه A عمود است.
 (۳) از بین دو وتر در یک دایره، وتری بزرگ‌تر است که به مرکز دایره نزدیک‌تر است.
 (۴) تمام وترهایی از دایره که طول یکسانی دارند، فاصله وسطشان از مرکز دایره با هم برابر است.
- ۱۱- در دایره $C(O, r)$ طول وترهای AB و CD به ترتیب ۱۰ و ۱۲ است. اگر فاصله O از وترهای AB و CD به ترتیب $2x+6$ و $3-5x$ باشد، حدود x کدام است؟

- (۱) $x < 3$ (۲) $x > 3$ (۳) $0 < x < 3$ (۴) $\frac{3}{5} < x < 3$

۱۲- در شکل زیر، شعاع دایره‌ها برابر ۵ است. مطابق شکل، اگر $AD \parallel OO'$ باشد، اندازه CD کدام است؟



- (۱) ۵ (۲) ۵/۵ (۳) ۶ (۴) $4\sqrt{2}$

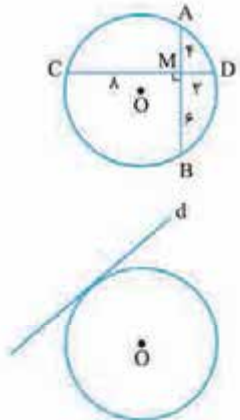
۱۳- خط Δ دایره‌ای به شعاع $2\sqrt{3}$ را قطع می‌کند. اگر زاویه خط مماس بر دایره با خط Δ در نقطه تلاقی برابر با 30° درجه باشد، فاصله مرکز دایره تا Δ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\sqrt{3}$

۱۴- وسط تمام وترهایی به طول ۱۶ واحد در دایره‌ای به شعاع 10 واحد، روی کدام شکل هستند؟

- (۱) دایره‌ای به شعاع ۸ (۲) دایره‌ای به شعاع ۶ (۳) قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۶ (۴) قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۸

۱۵- در شکل مقابل دو وتر AB و CD برهم عمودند. اندازه شعاع دایره چه قدر است؟



- (۱) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ (۳) $5\sqrt{5}$ (۴) $3\sqrt{3}$

۱۶- خط d بر دایره $C(O, 5)$ مماس است. اگر فاصله O از خط d برابر $3-2x$ باشد کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۷- خط d به فاصله $1-3x$ از مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ قرار دارد. اگر $x > 2$ باشد کدام گزینه درست است؟

- (۱) ممکن است خط d بر دایره مماس شود. (۲) ممکن است خط d و دایره متقاطع باشند. (۳) خط d و دایره نقطه مشترکی ندارند. (۴) اگر $x < 5$ باشد، خط d دایره را قطع می‌کند.

۱۸- خط d مفروض است. مرکز همه دایره‌هایی که شعاع آنها مقدار ثابت R است و بر این خط مماس هستند روی چه شکلی قرار دارند؟

- (۱) خطی موازی خط d و به فاصله R از آن (۲) دو خط موازی خط d و به فاصله R از آن (۳) خطی عمود بر خط d (۴) دو نقطه به فاصله R از خط d

۱۹- خط d مفروض است. مرکز همه دایره‌هایی که در نقطه ثابت A روی خط d بر آن مماس هستند، روی چه شکلی قرار دارند؟

- (۱) یک خط عمود بر خط d (۲) دو خط عمود بر هم که نقطه تلاقی آنها A است. (۳) دو خط موازی خط d (۴) یک خط موازی خط d

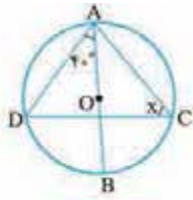
۲۰- دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸ واحد، در نقطه A مماس درونی هستند. وتر BC از دایره بزرگ، موازی خط‌المرکزین و بر دایره کوچک در

(ریاضی ۹۷)

نقطه P مماس است. اندازه $PB \times PC$ کدام است؟

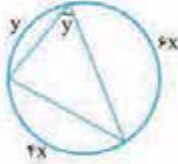
- (۱) ۲۴ (۲) ۳۲ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

انواع زاویه‌ها



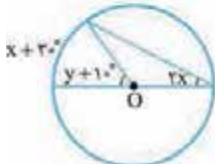
۲۱- در شکل مقابل مقدار x چه قدر است؟

- ۵۰° (۱)
- ۶۰° (۲)
- ۷۰° (۳)
- ۸۰° (۴)



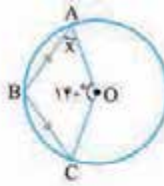
۲۲- در شکل مقابل $x + y$ کدام است؟

- ۵۰° (۱)
- ۱۰۰° (۲)
- ۸۰° (۳)
- ۹۰° (۴)



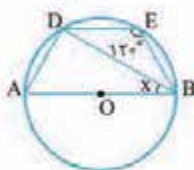
۲۳- در شکل مقابل O مرکز دایره است. مقدار $x + y$ چه قدر است؟

- ۱۰° (۱)
- ۲۰° (۲)
- ۳۰° (۳)
- ۴۰° (۴)



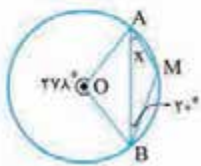
۲۴- در شکل مقابل مقدار x چه قدر است؟

- ۴۰° (۱)
- ۴۵° (۲)
- ۵۰° (۳)
- ۵۵° (۴)



۲۵- در شکل مقابل O مرکز دایره است. مقدار x چه قدر است؟

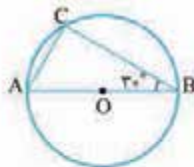
- ۲۵° (۱)
- ۴۰° (۲)
- ۳۰° (۳)
- ۵۰° (۴)



۲۶- با توجه به شکل، اندازه زاویه \widehat{MAB} کدام است؟

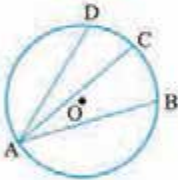
- ۲۳° (۱)
- ۲۱° (۲)
- ۲۴° (۳)
- ۱۸° (۴)

۲۷- در شکل مقابل، \widehat{AB} قطر و $\widehat{B} = 30^\circ$ است. اگر شعاع دایره برابر ۶ باشد، اندازه \widehat{BC} کدام است؟



- ۳√۳ (۱)
- ۶√۳ (۲)
- ۶ (۳)
- ۶√۲ (۴)

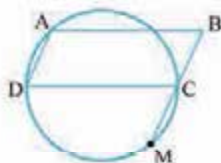
۲۸- در دایره به مرکز O و شعاع ۶۰ واحد مطابق شکل مقابل طول کمان‌های \widehat{BC} و \widehat{CD} به ترتیب 24π



و 10π است. نسبت دو زاویه محاطی \widehat{BAD} به \widehat{DAC} کدام است؟

- ۱۲/۵ (۱)
- ۱۷/۱۲ (۲)
- ۱۷/۲۴ (۴)
- ۱۷/۵ (۳)

۲۹- در متوازی‌الاضلاع ABCD، دایره‌ای که از رئوس A، C و D می‌گذرد، امتداد BC را در M قطع می‌کند. اگر $AB = 6$ ، $AD = 3$ و $\widehat{A} = 100^\circ$ باشد، فاصله AM کدام است؟

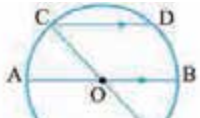


- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۷ (۳)
- ۸ (۴)

۳۰- در شکل مقابل مقدار x چه قدر است؟

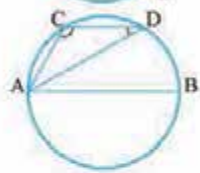


- ۴۰° (۱)
- ۵۰° (۲)
- ۸۰° (۳)
- ۱۰۰° (۴)



۳۱- در شکل روبه‌رو قطر AB و وتر CD موازی‌اند. اگر $\widehat{DCE} = 65^\circ$ باشد، کمان BE چند درجه است؟

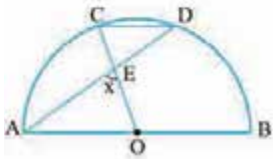
- ۱) 25°
- ۲) $32/5^\circ$
- ۳) 35°
- ۴) 65°



۳۲- مطابق شکل در دایره‌ای به قطر AB ، وتر CD موازی قطر AB رسم شده است. اندازه $\widehat{ACD} - \widehat{ADC}$ کدام است؟

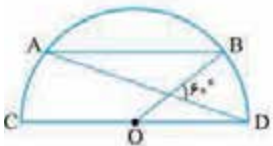
- ۱) 30°
- ۲) 45°
- ۳) 60°
- ۴) 90°

(کتاب درسی)



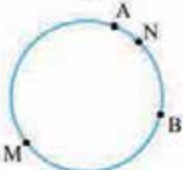
۳۳- در شکل زیر، O مرکز نیم‌دایره و $CD \parallel AB$ است. اگر $\widehat{CD} = 40^\circ$ باشد، اندازه زاویه x کدام است؟

- ۱) 70°
- ۲) 75°
- ۳) 80°
- ۴) 85°



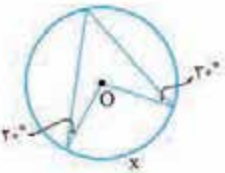
۳۴- در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره و $CD \parallel AB$ است. اندازه کمان AB کدام است؟

- ۱) 70°
- ۲) 80°
- ۳) 90°
- ۴) 100°



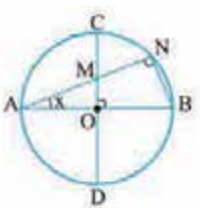
۳۵- در شکل روبه‌رو $\widehat{AMB} = 4\widehat{ANB}$ ، کمان \widehat{ANB} چه کسری از محیط دایره است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$
- ۲) $\frac{1}{3}$
- ۳) $\frac{1}{6}$
- ۴) $\frac{1}{5}$



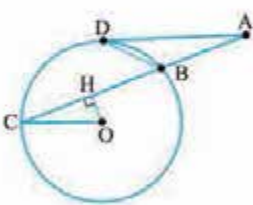
۳۶- در شکل مقابل x کدام است؟

- ۱) 50°
- ۲) 100°
- ۳) 80°
- ۴) 90°



۳۷- در شکل مقابل دو قطر AB و CD بر هم عمودند. اگر $NM = NB$ باشد، مقدار x کدام است؟

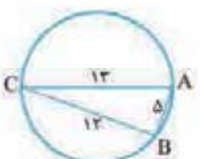
- ۱) 30°
- ۲) $22/5^\circ$
- ۳) 15°
- ۴) 25°



۳۸- در شکل مقابل AD مماس بر دایره به مرکز O و OH عمود بر AC است. اگر $\widehat{DBC} = 2\widehat{DCA}$ باشد، زاویه \widehat{COH} چند برابر زاویه \widehat{DAC} است؟

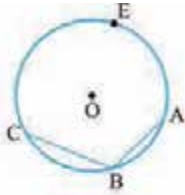
(ریاضی ۹۷)

- ۱) $2/5$
- ۲) 3
- ۳) $3/5$
- ۴) 4



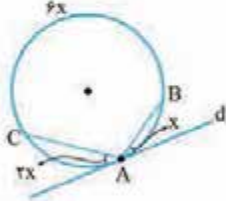
۳۹- در دایره مقابل، $AB = 5$ ، $BC = 12$ ، $AC = 13$ است. اندازه کمان AC کدام است؟

- ۱) 180°
- ۲) 150°
- ۳) 120°
- ۴) 90°



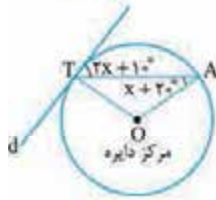
۴۰- در دایره $C(O, 2)$ و $AB = 2$ و $BC = 2\sqrt{2}$ است. اندازه کمان AEC کدام است؟

- ۱) 225°
- ۲) 23°
- ۳) 19°
- ۴) 21°



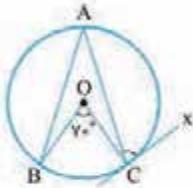
۴۱- در شکل مقابل خط d بر دایره مماس است. x چند درجه است؟

- ۱) 1°
- ۲) 2°
- ۳) 3°
- ۴) 4°



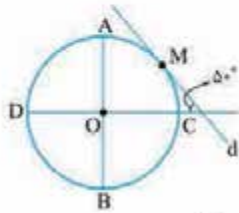
۴۲- در شکل مقابل خط d بر دایره مماس است. مقدار x چه قدر است؟

- ۱) 2°
- ۲) 25°
- ۳) 3°
- ۴) 25°



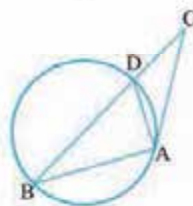
۴۳- در شکل مقابل، $AB = AC$ و $\widehat{BOC} = 70^\circ$ است. زاویه ظلّی ACx چند درجه است؟

- ۱) $62/5^\circ$
- ۲) 65°
- ۳) $67/5^\circ$
- ۴) $72/5^\circ$



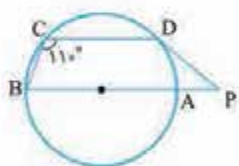
۴۴- در شکل مقابل قطرهای AB و CD بر هم عمود و خط d بر دایره مماس است. اندازه زاویه MOA کدام است؟

- ۱) 6°
- ۲) 65°
- ۳) 5°
- ۴) 55°



۴۵- در شکل مقابل، AC بر دایره مماس بوده و $AB = AC = 6$. اگر محیط مثلث ABD برابر ۱۶ باشد، اندازه BC کدام است؟

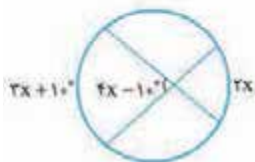
- ۱) ۸
- ۲) ۱۲
- ۳) ۹
- ۴) ۱۰



۴۶- در شکل داده شده اگر AB قطر دایره و $\widehat{C} = 11^\circ$ باشد، آنگاه اندازه زاویه P چه قدر است؟

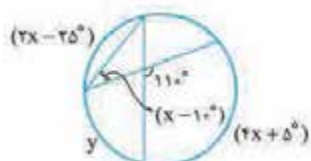
(PD مماس بر دایره است.)

- ۱) 5°
- ۲) 6°
- ۳) 45°
- ۴) 55°



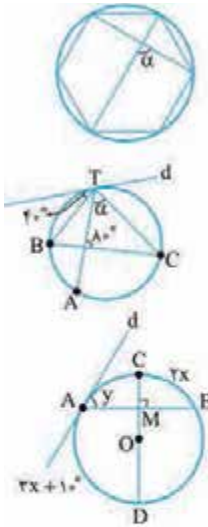
۴۷- در شکل مقابل x چند درجه است؟

- ۱) 1°
- ۲) 15°
- ۳) 2°
- ۴) 25°



۴۸- با توجه به شکل مقابل، مقدار $y - x$ کدام است؟

- ۱) 2°
- ۲) 3°
- ۳) 4°
- ۴) 5°



(ریاضی ۸)

۴۹- در شکل مقابل ۶ ضلعی، منتظم است. α چند درجه است؟

- ۹۰° (۱)
- ۱۲۰° (۲)
- ۱۰۵° (۳)
- ۱۳۰° (۴)

۵۰- در شکل مقابل، اندازه زاویه α کدام است؟ (خط d بر دایره مماس است.)

- ۶۰° (۱)
- ۵° (۲)
- ۴۰° (۳)
- ۳۰° (۴)

۵۱- در شکل مقدار y کدام است؟ (O مرکز دایره و d بر دایره مماس است.)

- ۳۴° (۱)
- ۴۲° (۲)
- ۵۶° (۳)
- ۶۸° (۴)

۵۲- در شکل، O مرکز دایره و $\hat{A} = 65^\circ$ و $\hat{B} = 35^\circ$ زاویه C چند درجه است؟

- ۶۰° (۱)
- ۶۱° (۲)
- ۶۲° (۳)
- ۶۳° (۴)

۵۳- در شکل مقابل، M وسط کمان AB و N وسط کمان AC است. کدام گزینه درست است؟

- $AE = EB$ (۱)
- $AF = FC$ (۲)
- $AB = AC$ (۳)
- $AE = AF$ (۴)

۵۴- در شکل مقابل، M وسط کمان AB است، مجموع $\hat{FKL} + \hat{LEF}$ چند درجه است؟

- ۹۰ (۱)
- ۱۸۰ (۲)
- ۱۳۵ (۳)
- ۱۵۰ (۴)

۵۵- در شکل مقابل، اندازه α چند درجه است؟

- ۵° (۱)
- ۲۰° (۳)
- ۱۰° (۲)
- ۲۰° (۴)

۵۶- در شکل مقابل، مقدار $x + y + z$ چه قدر است؟

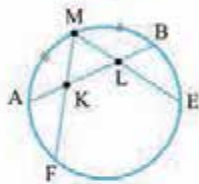
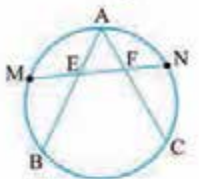
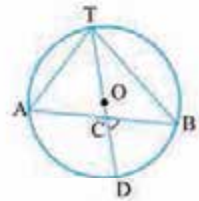
- ۱۸۰° (۱)
- ۱۶۰° (۳)
- ۱۷۰° (۲)
- ۱۵۰° (۴)

۵۷- فاصله هر دو نقطه متوالی روی دایره با هم برابر است. زاویه α چند درجه است؟

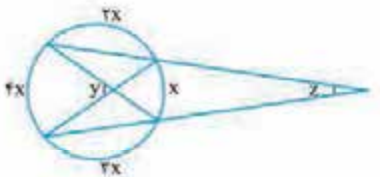
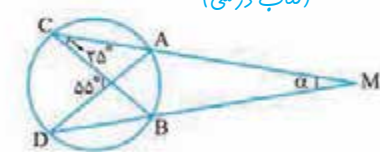
- ۲۲/۵° (۱)
- ۲۷/۵° (۳)
- ۲۵° (۲)
- ۳۰° (۴)

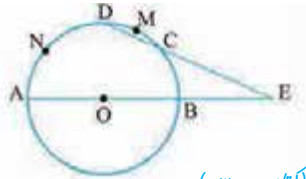
۵۸- در شکل مقابل $\hat{A} = 27^\circ$ و $\hat{O} = 71^\circ$ ، کمان BC چند درجه است؟

- ۹۸° (۱)
- ۱۰۲° (۳)
- ۱۰۰° (۲)
- ۱۰۴° (۴)

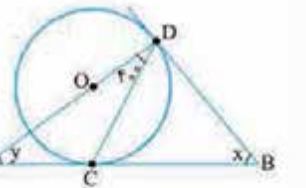
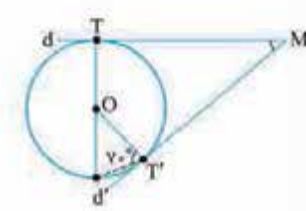
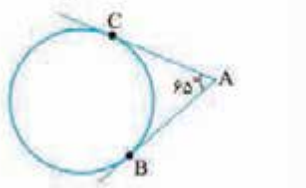
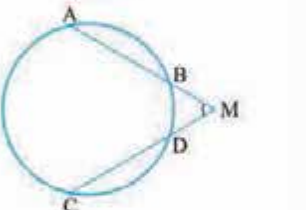
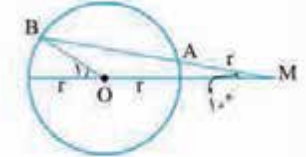


(کتاب درسی)

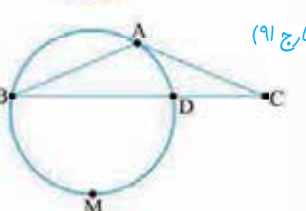
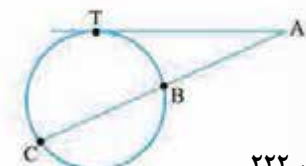
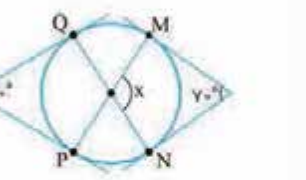




(کتاب درسی)



(کتاب درسی)



(ریاضی قارچ ۹۱)

۵۹- O مرکز دایره، $\widehat{DMC} = 30^\circ$ و $\widehat{E} = 30^\circ$ ، مقدار \widehat{AND} کدام است؟

- ۱) 85°
- ۲) 95°
- ۳) 105°
- ۴) 115°

۶۰- در شکل MA برابر شعاع دایره است. اندازه زاویه O_1 چند درجه است؟

- ۱) 20°
- ۲) 25°
- ۳) 30°
- ۴) 35°

۶۱- در شکل روبه‌رو، $AB = CD$ است. هرگاه $\widehat{M} = 60^\circ$ باشد اندازه کمان \widehat{ACD} چه قدر است؟

- ۱) 22°
- ۲) 24°
- ۳) 26°
- ۴) 28°

۶۲- در شکل مقابل $\widehat{A} = 65^\circ$ ، کمان بزرگ‌تر BC کدام است؟

- ۱) 235°
- ۲) 245°
- ۳) 255°
- ۴) 265°

۶۳- در شکل مقابل O مرکز دایره و خطوط d و d' مماس بر دایره هستند. مقدار زاویه

M کدام است؟

- ۱) 40°
- ۲) 50°
- ۳) 60°
- ۴) 70°

۶۴- در شکل مقابل O مرکز دایره و نقاط C و D محل مماس شدن خطوط بر دایره هستند. مقدار

$x - y$ کدام است؟

- ۱) 80°
- ۲) 85°
- ۳) 70°
- ۴) 75°

۶۵- در شکل مقابل x چند درجه است؟

- ۱) 105
- ۲) 110
- ۳) 115
- ۴) 120

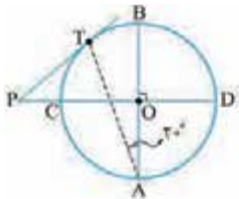
۶۶- در شکل، AT مماس و $\widehat{BC} = \widehat{CT} = 2\widehat{BT}$ ، زاویه A چند درجه است؟

- ۱) 18°
- ۲) 72°
- ۳) 36°
- ۴) 144°

۶۷- در شکل مقابل، طول مماس AC بر دایره با طول وتر AB از دایره برابر است. اگر کمان DMB برابر ۲۲۲

درجه باشد، زاویه C چند درجه است؟

- ۱) 21°
- ۲) 22°
- ۳) 23°
- ۴) 24°



۶۸- در شکل مقابل $\hat{A} = 20^\circ$ و PT بر دایره مماس است. زاویه P چند درجه است؟

- (۱) 20° (۲) 30° (۳) 40° (۴) 50°

۶۹- در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) نقطه O در امتداد AC مرکز دایره‌ای است که در نقطه B بر ضلع AB مماس است و امتداد BC را در نقطه D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟

(ریاضی ۹۴)

- (۱) متساوی الساقین (۲) قائم الزاویه (۳) قائم الزاویه و متساوی الساقین (۴) غیر مشخص

۷۰- دو خط d_1 و d_2 متقاطع اند. چند دایره می توان رسم کرد که شعاع آن‌ها ۲، مرکزشان روی خط d_1 و بر خط d_2 مماس باشند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۷۱- دو خط d_1 و d_2 موازی اند. مرکز همه دایره‌هایی که بر این دو خط مماس هستند، روی چه شکلی قرار دارند؟

- (۱) دو خط موازی با خط d_1 و d_2 (۲) یک خط عمود بر خط d_1 و d_2 (۳) یک خط موازی با خط d_1 و d_2 (۴) سه خط موازی با خط d_1 و d_2

۷۲- دو خط متقاطع d_1 و d_2 مفروض اند که نقطه A محل تلاقی آن‌ها است. مرکز همه دایره‌هایی که بر هر دو خط d_1 و d_2 مماس اند، روی چه شکلی هستند؟

- (۱) دو خط موازی (۲) یک خط گذرنده از نقطه A (۳) دو خط عمود بر هم که نقطه A محل تلاقی آن‌ها است (۴) چهار خط دایره دو موازی

۷۳- نقاط A و B مفروض اند. مرکز همه دایره‌هایی که از این دو نقطه عبور می کنند، روی چه شکلی هستند؟

- (۱) خطی موازی پاره خط AB (۲) دو خط عمود بر پاره خط AB که از نقاط A و B عبور می کنند. (۳) عمود منصف پاره خط AB (۴) دو خط موازی پاره خط AB

۷۴- از دو نقطه به فاصله ۵ چند دایره می گذرد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۷۵- از دو نقطه به فاصله ۵ چند دایره به شعاع ۳ عبور می کند؟

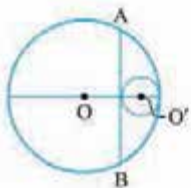
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۷۶- از دو سر پاره خط $AB = 4$ فقط یک دایره به شعاع $2 - 2m$ عبور می کند، چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

سوی

۷۷- مطابق شکل دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۴ مماس داخل اند. اگر پاره خط AB کوتاه ترین وتر از دایره بزرگ تر باشد که بر دایره کوچک تر مماس است. اندازه کمان AB چند درجه است؟

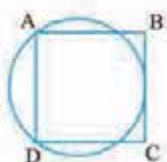


- (۱) 120° (۲) 135° (۳) 150° (۴) 160°

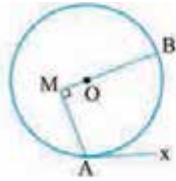
۷۸- در یک مستطیل به ابعاد ۲۶ و ۱۲، دو نیم دایره به قطر طول مستطیل، اضلاع مستطیل را در چهار نقطه قطع می کنند. مساحت چهارضلعی حاصل از این چهار نقطه کدام است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۱۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۲۱۰

۷۹- مربع $ABCD$ به ضلع ۸ مفروض است. شعاع دایره‌ای که از دو رأس A و D می گذرد و بر ضلع BC مماس است کدام است؟



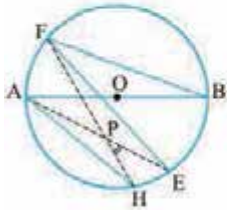
- (۱) ۴ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ (۴) ۵



۸۰- در شکل مقابل $\widehat{xAM} = 12^\circ$ است. کمان AB چه کسری از محیط دایره است؟

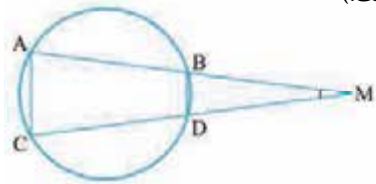
- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) $\frac{3}{5}$
- (۴) $\frac{3}{7}$

۸۱- در شکل AB قطری از دایره و $AH \parallel EF$ است، اگر $\widehat{FBA} = 2^\circ$ در این صورت زاویه HPE برابر است با:



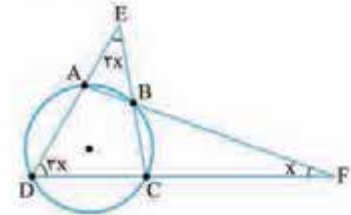
- (۱) 25°
- (۲) 3°
- (۳) 35°
- (۴) 4°

۸۲- در شکل، $AC = \sqrt{2}R$ و $BD = R$ ، آن گاه اندازه زاویه M برابر است با: (R شعاع دایره است.)



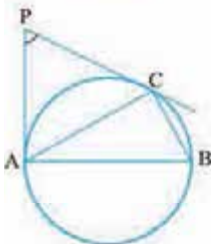
- (۱) 15°
- (۲) 3°
- (۳) 45°
- (۴) 6°

۸۳- در شکل مقابل، x چند درجه است؟



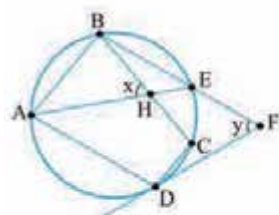
- (۱) 15°
- (۲) 2°
- (۳) 25°
- (۴) 3°

۸۴- در شکل مقابل $BC = 1$ ، $AC = \sqrt{3}$ و $AB = 2$ است. زاویه P کدام است؟



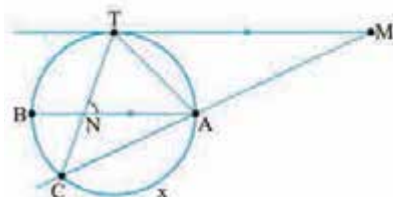
- (۱) 25°
- (۲) 3°
- (۳) 4°
- (۴) 6°

۸۵- در شکل زیر، DF بر دایره مماس است. اگر $AD \parallel BF$ ، $AB \parallel DC$ ، $\widehat{AB} = 80^\circ$ و $\widehat{CD} = 40^\circ$ باشد مقدار $x - y$ کدام است؟



- (۱) 2°
- (۲) 3°
- (۳) 4°
- (۴) صفر

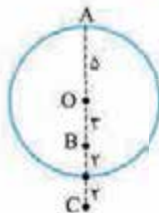
۸۶- در شکل زیر MT مماس بر دایره و AB موازی MT است. اگر $\widehat{M} = 25^\circ$ و $\widehat{ANT} = 80^\circ$ باشد، کمان AC چند درجه است؟



- (۱) 11°
- (۲) 10°
- (۳) 12°
- (۴) 9°

پاسخ تشریحی دایره

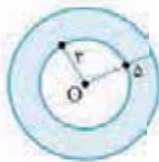
۱- گزینه ۳: فاصله نقطه A از مرکز برابر شعاع دایره است، پس A روی دایره نشسته است. فاصله B و C از مرکز به ترتیب کم تر و بیشتر از شعاع است و این یعنی B داخل و C خارج دایره هستند. برای این که ببینید چرا غلط است و چرا درست به این شکل نگاه کنید.



B از A: $5 + 3 = 8$
 $BC = 2 + 2 = 4 < 5$

۲- گزینه ۲: این نقاط درون دایره ای به شعاع ۳ قرار می گیرند. پس باید مساحت این دایره را پیدا کنیم که می شود 9π .

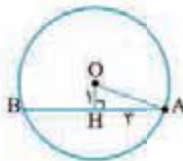
۳- گزینه ۳: باید فاصله نقطه A از O بیشتر از ۳ و کم تر از ۵ باشد:



$3 < 2x - 5 < 5$
 $\Rightarrow 8 < 2x < 10$
 $\Rightarrow 4 < x < 5$

۴- گزینه ۴: حواستان باشد هر قطری از وسط وتر و کمان AB عبور نمی کند. باید این قطر بر وتر عمود باشد تا از وسط وتر و کمان آن عبور کند.

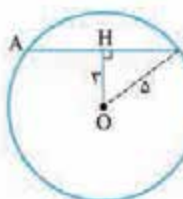
۵- گزینه ۵: می دانیم در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر را نصف می کند، پس طبق قضیه فیثاغورس در مثلث OHA داریم:



$\Delta OHA : OA^2 = OH^2 + AH^2$
 $\Rightarrow OA^2 = 3^2 + 4^2$
 $\Rightarrow OA = \sqrt{25} = 5$

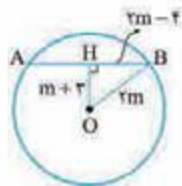
۶- گزینه ۲: خوب کافی است این شکل را بکشیم و در مثلث BHO فیثاغورس بنویسیم:

$OH^2 + BH^2 = BO^2$
 $\Rightarrow 3^2 + BH^2 = 5^2 \Rightarrow BH = 4$



پس طول وتر AB می شود $8 = 2 \times 4$.

۷- گزینه ۱: با توجه به این که می دانیم در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر را نصف می کند، طبق قضیه فیثاغورس در مثلث OHB داریم:



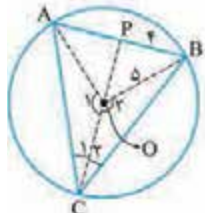
$\Delta OHB : OB^2 = OH^2 + BH^2$
 $\Rightarrow (2m)^2 = (m+3)^2 + (2m-4)^2$

$\Rightarrow 4m^2 = m^2 + 6m + 9 + 4m^2 - 16m + 16$
 $\Rightarrow m^2 - 10m + 25 = 0 \Rightarrow (m-5)^2 = 0 \Rightarrow m = 5$

۸- گزینه ۱: می دانیم کوچک ترین وتر گذرنده از A، نقطه ای درون دایره، وتری عمود بر شعاع OA می باشد و قطر عمود بر هر وتر، آن وتر را نصف می کند، بنابراین داریم:

$\Delta OAC \Rightarrow OC^2 = OA^2 + AC^2$
 $\Rightarrow (3\sqrt{2})^2 = 4^2 + AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}$
 $\Rightarrow BC = 2AC = 2\sqrt{2}$

۹- گزینه ۱: بیشترین مقدار مساحت زمانی به دست می آید که زاویه C در دورترین فاصله از AB قرار بگیرد. این مقدار زمانی به دست می آید که مثلث ABC متساوی الساقین باشد. در این حالت ارتفاع CP، نیمساز و میانه نیز هست. در مثلث OBP ابتدا اندازه OP را به دست می آوریم:



$OP^2 = OB^2 - PB^2$
 $= 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow OP = 3$

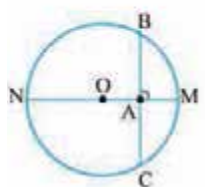
در نتیجه ارتفاع CP برابر است با:

$CP = CO + OP = 5 + 3 = 8$

مساحت مثلث در بیشترین حالت برابر است با: $S = \frac{8 \times 8}{2} = 32$

۱۰- گزینه ۲: بزرگ ترین وتری که از هر نقطه می گذرد، می شود قطر گذرنده از آن جا.

کوچک ترین وتری که از هر نقطه می گذرد، می شود وتر عمود بر قطر گذرنده از آن جا.

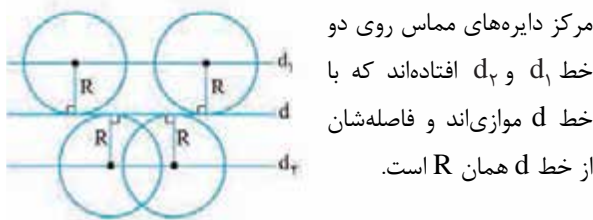


در این شکل کوتاه ترین و بلندترین گذرنده از نقطه A به ترتیب وتر BC و قطر MN هستند.

۱۶- **گزینه ۳** فاصله یک خط از مرکز دایره‌ای که بر آن مماس است می‌شود همان شعاع دایره. پس معادله $2x - 3 = 5$ را داریم که می‌رسیم به $x = 4$.

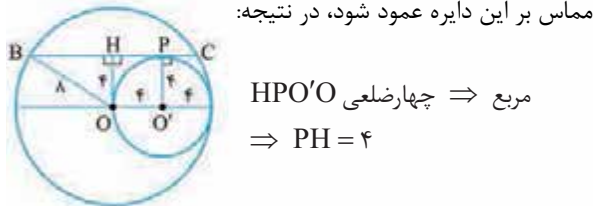
۱۷- **گزینه ۳** پس $x > 2$ است، پس $3x > 6$ و $3x - 1 > 5$ می‌شود. این یعنی فاصله خط d از مرکز دایره بیشتر از شعاع است. در نتیجه خط d دایره را قطع نمی‌کند.

۱۸- **گزینه ۳** دایره‌ای که بر خط d مماس باشد باید فاصله مرکزش تا خط d برابر R باشد. به این شکل نگاه کنید.



۱۹- **گزینه ۳** وقتی خط d بر دایره‌ای در نقطه A مماس باشد، بر شعاع گذرنده از نقطه A عمود است. پس مرکز این دایره‌ها روی خطی عمود بر خط d قرار می‌گیرند که از نقطه A عبور می‌کند. (خط d')

۲۰- **گزینه ۳** شکل را رسم می‌کنیم و از مرکز دایره عمود OH را بر وتر BC رسم می‌کنیم که می‌دانیم OH وتر BC را نصف می‌کند، شعاع $O'P$ را در دایره کوچک‌تر هم می‌کشیم که بر خط مماس بر این دایره عمود شود، در نتیجه:



مربع \Rightarrow چهارضلعی $HPO'O$
 $\Rightarrow PH = 4$

ΔOBH در: $BH = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3}$

$OH \Rightarrow$ قطر عمود بر وتر $BH = HC = 4\sqrt{3}$

$PC = HC - HP = 4\sqrt{3} - 4$

$PB = BH + HP = 4\sqrt{3} + 4$

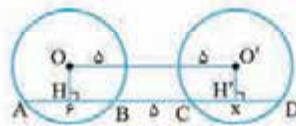
$PC \times PB = (4\sqrt{3} - 4)(4\sqrt{3} + 4)$

$= 16 \times 3 - 16 \times 1 = 16 \times 2 = 32$

۱۱- **گزینه ۳** یادتان باشد هر وتری که بزرگ‌تر باشد به مرکز نزدیک‌تر است. پس در این‌جا باید $2x + 6 < 5x - 3$ باشد که نتیجه‌اش می‌شود $x < 3$.

صبر کنید، عجله نکنید! فاصله عددی نامنفی است، پس:
 $2x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$
 $5x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{5}$
حالا باید از سه نامساوی به دست آمده اشتراک بگیریم که می‌رسیم به:
 $\frac{3}{5} < x < 3$

۱۲- **گزینه ۳** AD و OO' موازی هستند، پس مرکز دو دایره فاصله یکسانی از وترهای AB و CD دارند. این یعنی طول این دو وتر یکسان است و در نتیجه $x = 6$.



۱۳- **گزینه ۳** می‌دانیم شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است. پس در مثلث TOH داریم:

$\Delta TOH : \hat{HTO} = 6^\circ \Rightarrow \sin \hat{T}_1 = \frac{OH}{OT}$
 $\Rightarrow \sin 6^\circ = \frac{OH}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OH}{2\sqrt{3}}$
 $\Rightarrow OH = 3$

۱۴- **گزینه ۳** از نقطه O بر وتر AB عمود می‌کشیم تا مثلث OHB تشکیل شود. با توجه به رابطه فیثاغورس داریم:

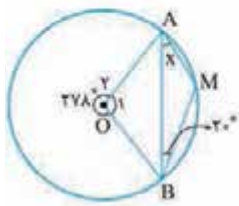
$\Delta OHB : OB^2 = OH^2 + HB^2$
 $\frac{HB=8}{OB=R=10} \Rightarrow 10^2 = OH^2 + 8^2 \Rightarrow OH = 6$

پس فاصله وسط این وترها از مرکز دایره مقدار ثابت ۶ می‌باشد؛ در نتیجه مکان هندسی این نقاط، دایره‌ای به شعاع ۶ و به مرکز O است.

۱۵- **گزینه ۳** یک چیزی برایتان بگویم که خیالتان راحت شود. هرگاه سؤالی داشتیم که به طول وتر و شعاع دایره مربوط بود از مرکز بر وتر عمود رسم کنید. دقت کنید که این عمود درست می‌خورد به وسط وتر. با این حساب یک چنین شکلی و چنین اندازه‌هایی داریم. حالا کافی است در مثلث BHO یا CGO فیثاغورس بنویسیم. فرقی ندارد:

$\Delta BHO : OH^2 + BH^2 = BO^2$
 $\Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 5^2 = r^2$
 $\Rightarrow r = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

۲۶- گزینه ۲: می دانیم اندازه هر زاویه محاطی برابر با نصف



اندازه کمان مقابلش است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 &= 36^\circ \\ \Rightarrow 278^\circ + \hat{O}_1 &= 36^\circ \\ \Rightarrow \hat{O}_1 &= 82^\circ \end{aligned}$$

$$\hat{O}_1 = \widehat{AMB} \xrightarrow{\hat{O}_1 = 82^\circ} \widehat{AMB} = 82^\circ \quad (1)$$

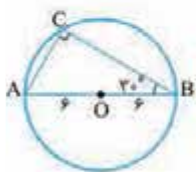
$$\hat{B} = \frac{\widehat{AM}}{2} \xrightarrow{\hat{B} = 2^\circ} 2^\circ = \frac{\widehat{AM}}{2} \Rightarrow \widehat{AM} = 4^\circ \quad (2)$$

با استفاده از رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{aligned} \widehat{AMB} &= \widehat{AM} + \widehat{MB} \\ \Rightarrow 82^\circ &= 4^\circ + \widehat{MB} \Rightarrow \widehat{MB} = 42^\circ \end{aligned}$$

$$x = \hat{A} = \frac{\widehat{MB}}{2} = \frac{42^\circ}{2} = 21^\circ$$

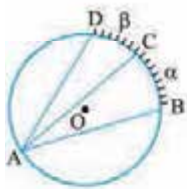
۲۷- گزینه ۲: مثلث ABC در رأس C قائمه است زیرا زاویه



محاطی روبه رو به قطر قائمه است. داریم:

$$\begin{aligned} \cos 3^\circ &= \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{12} \\ \Rightarrow BC &= 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

۲۸- گزینه ۲: از رابطه زاویه مرکزی \times شعاع = طول کمان که در



درس حسابان می خوانید، داریم:

$$\begin{aligned} \widehat{BC} \text{ طول} &= \frac{\alpha}{36^\circ} \times 2\pi \times 60 = 24\pi \\ \Rightarrow \alpha &= 72^\circ \end{aligned}$$

$$\widehat{DC} \text{ طول} = \frac{\beta}{36^\circ} \times 2\pi \times 60 = 10\pi \Rightarrow \beta = 3^\circ$$

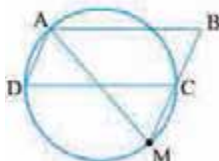
حالا نسبت زاویه ها را حساب می کنیم:

$$\frac{\hat{B}AD}{\hat{D}AC} = \frac{\frac{\alpha + \beta}{2}}{\frac{\beta}{2}} = \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{102}{30} = \frac{34}{10} = \frac{17}{5}$$

۲۹- گزینه ۲: بیاید M را به A وصل کنیم تا ببینیم چه خبر

است. خوب قبول دارید که $\hat{D} = \hat{M}$ است؟ چون هر دو می شوند

از طرفی $\frac{\widehat{AC}}{2}$ است (متوازی الاضلاع که یادتان هست!)

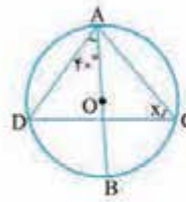


پس $\hat{M} = \hat{B}$ می شود و این یعنی مثلث

ABM متساوی الساقین است بنابراین

$$AM = AB = 6$$

۲۱- گزینه ۲: زاویه محاطی 40° ای



که داده شده به ما می گوید $\widehat{DB} = 8^\circ$.

پس $\widehat{AD} = 10^\circ$ (چرا؟) و این یعنی:

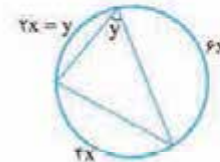
$$\hat{x} = \frac{10^\circ}{2} = 5^\circ$$

۲۲- گزینه ۲: زاویه محاطی y به ما می گوید که $y = \frac{4x}{2} = 2x$

پس کمان y را می نویسیم $2x$ و این یعنی $2x + 4x + 6x = 36^\circ$

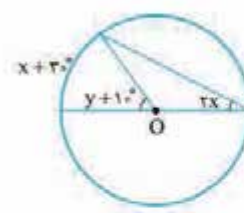
در نتیجه $x = 3^\circ$ بنابراین

$$x + y = 9^\circ$$



۲۳- گزینه ۲: زاویه محاطی و $y + 1^\circ$ زاویه مرکزی

است. پس:



$$\begin{cases} 2x = \frac{x + 3^\circ}{2} \Rightarrow 4x = x + 3^\circ \\ \Rightarrow x = 1^\circ \\ y + 1^\circ = x + 3^\circ \\ \xrightarrow{x = 1^\circ} y = 3^\circ \end{cases}$$

حالا $x + y$ را می خواهیم که می شود 4° .

۲۴- گزینه ۲: به خاطر زاویه مرکزی O می توانیم بگوییم

$\widehat{ABC} = 14^\circ$ و این یعنی کمان بزرگ تر AC می شود

$$36^\circ - 14^\circ = 22^\circ$$

پس زاویه محاطی B برابر با

$$\frac{22^\circ}{2} = 11^\circ$$

که $\hat{A} = \hat{C} = x$ (چرا؟) و در چهارضلعی

ABCO داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{O} = 36^\circ \Rightarrow 2x + 25^\circ = 36^\circ$$

$$\Rightarrow 2x = 11^\circ \Rightarrow x = 5.5^\circ$$

۲۵- گزینه ۲: با توجه به این که اندازه هر زاویه محاطی برابر

با نصف اندازه کمان مقابلش است، داریم:

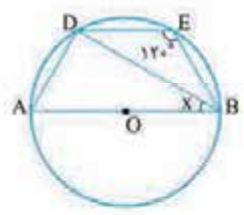
$$\hat{E} = 12^\circ \Rightarrow \widehat{DAB} = 24^\circ$$

$$\widehat{DAB} = \widehat{AB} + \widehat{AD}$$

$$\xrightarrow{\widehat{AB} = 18^\circ} 24^\circ = 18^\circ + \widehat{AD}$$

$$\Rightarrow \widehat{AD} = 6^\circ$$

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{6^\circ}{2} = 3^\circ$$



۳۰- گزینه: کمان‌های بین دو وتر موازی برابر هستند. پس شکل این‌طوری می‌شود و

$$x = \frac{70^\circ + 30^\circ}{2} = 50^\circ$$

زاویه مرکزی \hat{O}_1 و زاویه محاطی است، پس $\hat{O}_1 = x$ و $\hat{D}_1 = \frac{x}{2}$. در نتیجه $60^\circ = x + \frac{x}{2}$ که نتیجه‌اش $x = 40^\circ$ است. حالا به راحتی می‌رسیم به $y = 100^\circ$.

۳۵- گزینه: می‌دانیم مجموع کمان‌های یک دایره برابر با 360° می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{AMB} &= 4\widehat{ANB} \\ \widehat{AMB} + \widehat{ANB} &= 360^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow 4\widehat{ANB} + \widehat{ANB} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{ANB} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$\frac{\widehat{ANB}}{\widehat{AMB}} = \frac{72^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{5}$$

محیط دایره

دقت کنید که البته نیازی به محاسبه مقدار \widehat{ANB} نبود، زیرا با کمک خواص تناسب این نسبت به سادگی محاسبه می‌شود:

$$\frac{\widehat{ANB}}{\widehat{AMB}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\widehat{ANB}}{\widehat{AMB} + \widehat{ANB}} = \frac{1}{5}$$

۳۶- گزینه: از نقطه O به A وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند. با توجه به این‌که مثلث‌های OAC و OAB متساوی‌الساقین اند، داریم:

$$\triangle AOB : \hat{A}_r = \hat{B} \Rightarrow \hat{A}_r = 20^\circ$$

$$\triangle AOC : \hat{A}_1 = \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_1 = 30^\circ$$

\hat{O}_1 و \hat{O}_r به ترتیب زوایای خارجی مثلث‌های OAB و OAC می‌باشند، پس:

$$\hat{O}_1 = \hat{A}_1 + \hat{C} \Rightarrow \hat{O}_1 = 60^\circ, \hat{O}_r = \hat{A}_r + \hat{B} \Rightarrow \hat{O}_r = 40^\circ$$

$$x = \widehat{BDC} = \widehat{BD} + \widehat{CD} \xrightarrow[\hat{O}_r = \widehat{BD}]{\hat{O}_1 = \widehat{CD}} \hat{x} = 100^\circ$$

۳۷- گزینه: از M به B وصل می‌کنیم، زاویه N روبرو به قطر AB بوده، پس برابر 90° درجه است، در نتیجه $\hat{M}_1 = \hat{B}_r = 45^\circ$ خواهد بود.

از طرفی چون M بر روی عمود منصف AB است از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، در نتیجه $MA = MB$ و در واقع $\hat{B}_1 = x$ است. \hat{M}_1 زاویه خارجی مثلث AMB است، بنابراین داریم:

$$\hat{M}_1 = x + \hat{B}_1 \xrightarrow{\hat{B}_1 = x} \hat{M}_1 = 2x = 45^\circ \Rightarrow x = 22.5^\circ$$

۳۱- گزینه: با توجه به این‌که زوایای O_1 و O_r متقابل به رأس و زوایای مرکزی می‌باشند ($\hat{O}_1 = \hat{O}_r \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BE}$) می‌دانیم در یک دایره، کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، با هم برابرند. بنابراین داریم:

۳۲- گزینه: می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی در یک دایره، با هم برابرند. بنابراین داریم:

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

$$\xrightarrow{\widehat{AC} = \widehat{BE}} \widehat{BE} = \widehat{BD}$$

$$\widehat{DCE} = \frac{\widehat{DE}}{2} \xrightarrow{\widehat{DCE} = 65^\circ} \widehat{DE} = 130^\circ$$

$$2\widehat{BE} = 130^\circ \Rightarrow \widehat{BE} = 65^\circ$$

۳۳- گزینه: $CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$

$$\Rightarrow \widehat{ACD} - \widehat{ADC} = \frac{\widehat{DBA}}{2} - \frac{\widehat{AC}}{2}$$

$$= \frac{\widehat{BD} + \widehat{AB} - \widehat{AC}}{2}$$

با توجه به تساوی دو کمان \widehat{BD} و \widehat{AC} خواهیم داشت:

$$\widehat{ACD} - \widehat{ADC} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

۳۴- گزینه: $CD \parallel AB$ است و این یعنی $\widehat{AC} = \widehat{BD}$.

از طرفی مجموع کمان‌های نیم‌دایره 180° است و این یعنی باید $\widehat{AC} = \widehat{BD} = 70^\circ$ چون $\widehat{CD} = 40^\circ$ بود حالا زوایای A_1 و O_1 در دستان شما است:

$$\hat{A}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ, \hat{O}_1 = 70^\circ$$

پس می‌توانیم زاویه x را پیدا کنیم:

$$x + \hat{A}_1 + \hat{O}_1 = 180^\circ \Rightarrow x = 75^\circ$$

۳۵- گزینه: کمان‌ها را این‌طوری نام‌گذاری می‌کنیم. دقت کنید که $AB \parallel CD$ است و این یعنی $\widehat{AC} = \widehat{BD}$. حالا این روابط را داریم:

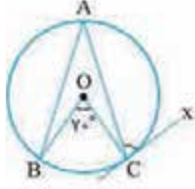
$$(مجموع کمان‌های نیم‌دایره) \quad x + x + y = 180^\circ$$

$$\hat{O}_1 + \hat{D}_1 = 60^\circ \quad (\text{زاویه خارجی مثلث})$$



۴۳- کربنه مجموع کمان‌های ایجاد شده در دایره برابر با 36° است.

$\widehat{AB} + \widehat{AC} + \widehat{BC} = 36^\circ \xrightarrow{\widehat{O}=\widehat{BC}=7^\circ} \widehat{AB} + \widehat{AC} = 29^\circ$
با توجه به این که کمان‌های نظیر دو وتر مساوی در یک دایره، با هم برابرند، بنابراین داریم:



$$AB = AC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC}$$

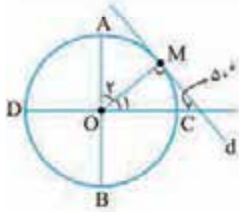
$$= \frac{29^\circ}{2} = 14.5^\circ$$

می‌دانیم اندازه هر زاویه ظلی برابر با نصف اندازه کمان مقابلش است،

لذا خواهیم داشت:

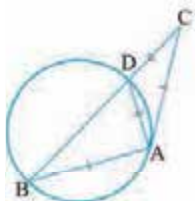
$$\widehat{AC}x = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{14.5^\circ}{2} = 7.25^\circ$$

۴۴- کربنه کافی است O را به M وصل کنیم که OM بر d عمود می‌شود. پس $\widehat{O}_1 = 4^\circ$ و در نتیجه $\widehat{O}_2 = 5^\circ$ می‌شود.



۴۵- کربنه می‌دانیم اندازه هر زاویه ظلی و محاطی برابر با نصف اندازه کمان مقابلش است. بنابراین داریم:

$$\triangle ABC: AB = AC \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \xrightarrow{\widehat{B}=\widehat{AD}} \widehat{B} = \widehat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} \quad (1)$$



$$\widehat{CAD} = \frac{\widehat{AD}}{2} \xrightarrow{(1)} \widehat{CAD} = \widehat{C}$$

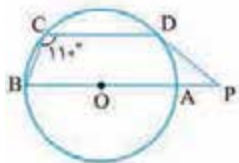
$$\Rightarrow AD = CD$$

$$\triangle ABD: AB + AD + BD = 16$$

$$\xrightarrow{AC=6, AD=CD} 6 + CD + BD = 16$$

$$\Rightarrow CD + BD = BC = 10$$

۴۶- کربنه می‌دانیم اندازه هر زاویه محاطی برابر با نصف اندازه کمان مقابلش است. داریم:



$$\widehat{C} = \frac{\widehat{DAB}}{2} \Rightarrow 110^\circ = \frac{\widehat{DAB}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{DAB} = 220^\circ$$

$$\widehat{DAB} = \widehat{AB} + \widehat{AD} \xrightarrow{\widehat{AB}=18^\circ} 220^\circ = 18^\circ + \widehat{AD}$$

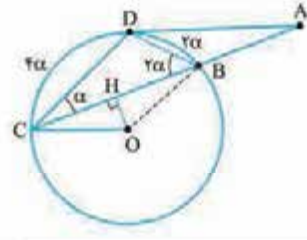
$$\Rightarrow \widehat{AD} = 4^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 180^\circ - 4^\circ = 140^\circ$$

با توجه به این که زاویه بین مماس و امتداد یک وتر، برابر با نصف تفاضل کمان‌های روبه‌رو به آن است، لذا خواهیم داشت:

$$\widehat{P} = \frac{\widehat{BCD} - \widehat{AD}}{2} = \frac{140^\circ - 4^\circ}{2} = 68^\circ$$

۳۸- کربنه نقطه D را به C و B و O وصل می‌کنیم.

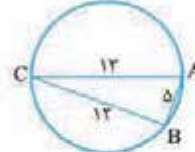
حالا با نام‌گذاری شکل را قشنگ‌تر می‌بینیم کمان BD روبه‌روی زاویه α است، پس $\widehat{BD} = 2\alpha$ و به همین شکل می‌توانیم بگوییم $\widehat{CD} = 2 \times \widehat{DBC} = 4\alpha$ حالا با توجه به اینکه OH بر BC عمود است باید گفت: $\widehat{C\hat{O}H} = \frac{1}{2} \times \widehat{C\hat{O}B} = 3\alpha$ ، زیرا $\widehat{C\hat{O}B} = \widehat{BC}$. پیدا کردن زاویه A هم که کاری ندارد: $\widehat{A} = \frac{\widehat{DC} - \widehat{DB}}{2} = \alpha$ دیگه بقیه‌اش را خودتان بگویید بی‌زحمت.



۳۹- کربنه در مثلث ABC بین اضلاع رابطه فیثاغورس برقرار است:

$$13^2 = 5^2 + 12^2$$

پس مثلث ABC قائم‌الزاویه است و این یعنی $\widehat{B} = 90^\circ$ و در نتیجه آن $\widehat{AC} = 180^\circ$.

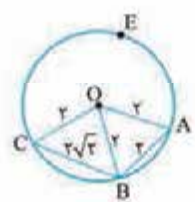


۴۰- کربنه بیایید نقطه O را به سه نقطه A، B، C وصل کنیم. مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است چون هر سه ضلع آن برابر هستند. در مثلث OBC هم رابطه فیثاغورس برقرار است، چون

$$2^2 + 2^2 = (2\sqrt{2})^2$$

در نتیجه:

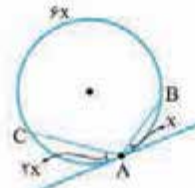
$$\widehat{COA} = 90^\circ + 6^\circ = 150^\circ$$



این یعنی اندازه کمان ABC می‌شود 150° پس $\widehat{AEC} = 360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$

۴۱- کربنه هر زاویه ظلی نصف کمانش است. پس

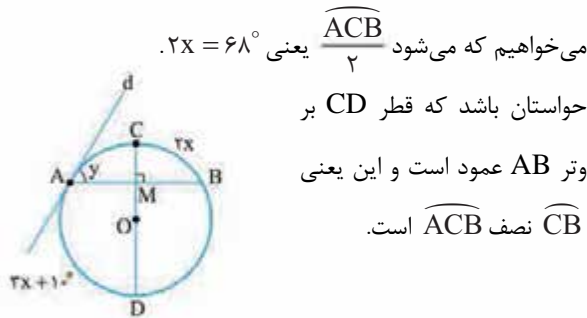
حالا می‌توانیم بگوییم $\widehat{AC} = 4x$ و $\widehat{AB} = 2x$ (مجموع کمان‌ها در دایره) که این یعنی $x = 30^\circ$.



۴۲- کربنه مثلث OTA متساوی‌الساقین است

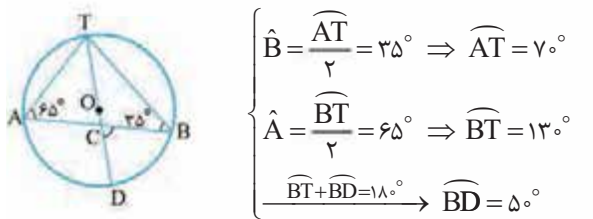
($OT = OA = R$) و این یعنی $\widehat{O\hat{T}A} = \widehat{A} = x + 2^\circ$ حالا می‌دانیم که شعاع OT بر خط مماس عمود است. در نتیجه $(2x + 10^\circ) + (x + 2^\circ) = 90^\circ$ می‌شود که می‌رسیم به $x = 20^\circ$.

۵۱- **گزینه ۳** زاویه وتری M به ما می‌گوید که $2x = 18^\circ + 3x$ یعنی $x = 34^\circ$. حالا زاویه ظلی y را



می‌خواهیم که می‌شود $\frac{\widehat{ACB}}{2}$ یعنی $2x = 68^\circ$.
حواستان باشد که قطر CD بر وتر AB عمود است و این یعنی \widehat{CB} نصف \widehat{ACB} است.

۵۲- **گزینه ۳** اندازه هر زاویه محاطی با نصف اندازه کمان مقابلش برابر است، بنابراین داریم:

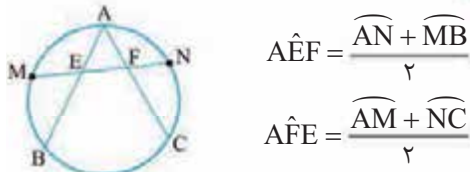


$$\begin{cases} \widehat{B} = \frac{\widehat{AT}}{2} = 35^\circ \Rightarrow \widehat{AT} = 70^\circ \\ \widehat{A} = \frac{\widehat{BT}}{2} = 65^\circ \Rightarrow \widehat{BT} = 130^\circ \\ \widehat{BT} + \widehat{BD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 50^\circ \end{cases}$$

می‌دانیم اندازه زاویه بین دو وتر متقاطع، برابر با نصف مجموع اندازه کمان‌های مقابلش است. لذا خواهیم داشت:

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{AT}}{2} = \frac{50^\circ + 70^\circ}{2} = 60^\circ$$

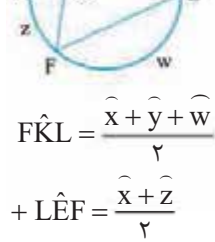
۵۳- **گزینه ۳** به دو زاویه وتری E و F توجه کنید:



$$\begin{aligned} \widehat{AEF} &= \frac{\widehat{AN} + \widehat{MB}}{2} \\ \widehat{AFE} &= \frac{\widehat{AM} + \widehat{NC}}{2} \end{aligned}$$

حالا با توجه به M و N که وسط کمان‌ها هستند متوجه می‌شویم که $\widehat{AN} = \widehat{NC}$ و $\widehat{AM} = \widehat{MB}$ و این یعنی $\widehat{AEF} = \widehat{AFE}$. پس مثلث AEF متساوی‌الساقین است و در نتیجه $AE = AF$.

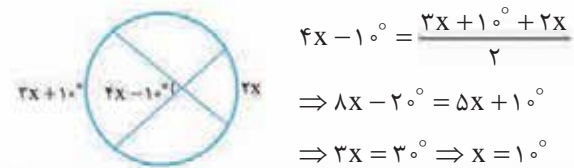
۵۴- **گزینه ۳** کافی است از E به F وصل کنید و زاویه‌ها را بنویسیم:



$$\begin{aligned} \widehat{FKL} &= \frac{\widehat{x} + \widehat{y} + \widehat{w}}{2} \\ + \widehat{LEF} &= \frac{\widehat{x} + \widehat{z}}{2} \end{aligned}$$

$$\widehat{FKL} + \widehat{LEF} = \frac{2\widehat{x} + \widehat{y} + \widehat{w} + \widehat{z}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

۴۷- **گزینه ۳** یک زاویه وتری داخلی داریم. پس راحت فرمولش را می‌نویسیم:

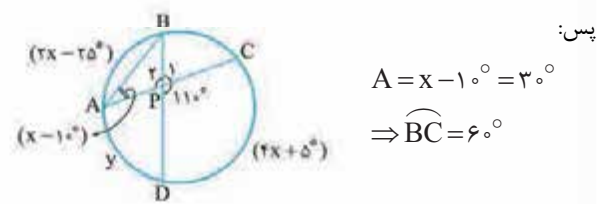


$$\begin{aligned} 4x - 10^\circ &= \frac{3x + 10^\circ + 2x}{2} \\ \Rightarrow 8x - 20^\circ &= 5x + 10^\circ \\ \Rightarrow 3x &= 30^\circ \Rightarrow x = 10^\circ \end{aligned}$$

۴۸- **گزینه ۳** می‌دانیم زاویه بین دو وتر متقاطع، برابر با نصف مجموع اندازه کمان‌های مقابلش است. بنابراین داریم:

$$\widehat{P} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} = \frac{(2x - 25) + (4x + 5)}{2} = 11^\circ$$

$$\Rightarrow 6x - 20^\circ = 22^\circ \Rightarrow x = 4^\circ$$



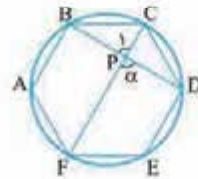
$$\begin{aligned} A &= x - 10^\circ = 3^\circ \\ \Rightarrow \widehat{BC} &= 6^\circ \end{aligned}$$

زاویه P_1 مجانب زاویه P_2 است. پس: $P_1 = 180^\circ - 11^\circ = 169^\circ$.
طبق رابطه زاویه بین دو وتر متقاطع داریم:

$$P_1 = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} \Rightarrow 169^\circ = \frac{y + 6^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow y = 322^\circ \Rightarrow y - x = 318^\circ$$

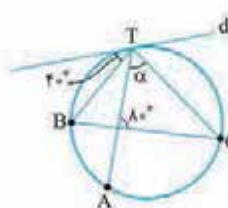
۴۹- **گزینه ۳** می‌دانیم کمان‌های نظیر دو وتر مساوی در یک دایره با هم برابرند. بنابراین همه کمان‌های نظیر اضلاع شش‌ضلعی منتظم با هم برابر و 60° هستند.



طبق رابطه محاسبه زاویه بین دو وتر متقاطع داریم:

$$\alpha = \frac{\widehat{DF} + \widehat{BC}}{2} = \frac{120^\circ + 60^\circ}{2} = 90^\circ$$

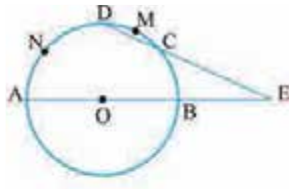
۵۰- **گزینه ۳** زاویه ظلی داده شده به ما می‌گوید $\widehat{BT} = 8^\circ$.
حالا یک زاویه وتری داخلی داریم که نتیجه‌اش می‌شود:



$$\begin{aligned} \frac{\widehat{AB} + \widehat{CT}}{2} &= 8^\circ \\ \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{CT} &= 16^\circ \end{aligned}$$

بنابراین کمان AC می‌شود 12° ، چون مجموع کمان‌های دایره 360° است.

حالا زاویه α را می‌خواهیم که هست $\frac{\widehat{AC}}{2}$ یعنی 6° .



۵۹- کزینة می دانیم اندازة زاویة بین امتداد دو وتر برابر با نصف تفاضل کمان های روبه رو به آن است، بنابراین:

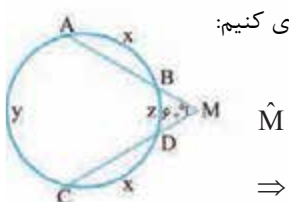
$$\left. \begin{aligned} \hat{E} &= \frac{\widehat{AND} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow 3^\circ = \frac{\widehat{AND} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{AND} - \widehat{BC} = 6^\circ \\ \widehat{AND} + \widehat{DMC} + \widehat{BC} &= 180^\circ \xrightarrow{\widehat{DMC} = 3^\circ} \widehat{AND} + \widehat{BC} = 150^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{AND} = \frac{6^\circ + 150^\circ}{2} = \frac{210^\circ}{2} = 105^\circ$$

۶۰- کزینة این جا باید O را به A وصل کنیم تا چیزهای زیادی گیرمان بیاید:



مثلت AOM متساوی الساقین است:
 $AM = AO = r \Rightarrow \hat{O}_p = \hat{M} = 1^\circ$
 زاویة \hat{O}_p مرکزی است، پس:
 $\widehat{AD} = \hat{O}_p = 1^\circ$
 زاویة \hat{M} وتری خارجی است. پس:
 $\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AD}}{2}$
 $\Rightarrow 1^\circ = \frac{\widehat{BC} - 1^\circ}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 3^\circ$
 در نتیجه زاویة \hat{O}_1 هم می شود 3° .
 همیشه در شکل مقابل فرمول $\hat{O}_1 = 3\alpha$ را داریم.

۶۱- کزینة $AB = CD$ است و این یعنی $\widehat{AB} = \widehat{CD}$



بیا باید کمان ها را این طوری نام گذاری کنیم:
 حالا به کمک زاویة \hat{M} می نویسیم:
 $\hat{M} = \frac{y - z}{2} = 6^\circ \Rightarrow y - z = 12^\circ$
 $\Rightarrow z = y - 12^\circ$
 برویم سراغ همه کمان های دایره یعنی فرمول $2x + y + z = 36^\circ$
 پس $2x + 2y = 48^\circ$ یعنی $2x + y + y - 12^\circ = 36^\circ$
 تست از ما کمان ACD را می خواهد که می شود $x + y$ یعنی 24° .

۶۲- کزینة می دانیم اندازة زاویة بین دو مماس رسم شده بر یک دایره، برابر با نصف تفاضل اندازة کمان های روبه رو آن است، بنابراین خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{BDC} + \widehat{BC} &= 36^\circ \\ \hat{A} &= \frac{\widehat{BDC} - \widehat{BC}}{2} = 65^\circ \\ &\Rightarrow \widehat{BDC} - \widehat{BC} = 130^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{BDC} = \frac{36^\circ + 130^\circ}{2} = 245^\circ$$

۵۵- کزینة یک زاویة وتری داخلی و یک زاویة وتری خارجی داریم. بیا باید فرمول هایشان را بنویسیم:

$$\left\{ \begin{aligned} 55^\circ &= \frac{\widehat{CD} + \widehat{AB}}{2} \\ \alpha &= \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2} \end{aligned} \right.$$

حالا به زاویة $\hat{C} = 25^\circ$ نگاه کنید که به ما می گوید $\widehat{AB} = 5^\circ$.
 $55^\circ = \frac{\widehat{CD} + 5^\circ}{2} \Rightarrow \widehat{CD} = 6^\circ$
 پس:

$$\frac{6^\circ - 5^\circ}{2} = 5^\circ \text{ که می آید که می شود}$$

۵۶- کزینة قبل از هر چیز بیا باید X را به دست بیاوریم که کار راحتی است: $2x + 4x + 3x + x = 36^\circ$ پس $x = 36^\circ$.
 حالا راحت Y و Z به دست می آیند:

$$\left\{ \begin{aligned} y &= \frac{4x + x}{2} = \frac{5x}{2} = 9^\circ \\ z &= \frac{4x - x}{2} = \frac{3x}{2} = 54^\circ \end{aligned} \right.$$

تست از ما $x + y + z$ را خواسته که می شود 18° .

۵۷- کزینة با توجه به این که اندازة کمان های ایجاد شده با هم برابر است، می توان گفت که اندازة هر یک از آنها برابر $2^\circ = \frac{36^\circ}{18}$ می باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{aligned} \widehat{AB} &= 4 \times \frac{36^\circ}{18} = 8^\circ \\ \widehat{CD} &= \frac{36^\circ}{18} = 2^\circ \end{aligned} \right. \Rightarrow \alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} = \frac{8^\circ - 2^\circ}{2} = 3^\circ$$

۵۸- کزینة با توجه به روابط محاسبه زاویة بین دو وتر و امتداد دو وتر خواهیم داشت:

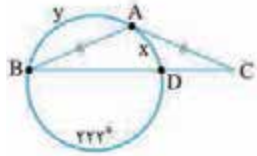


$$\left\{ \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{BC} - \widehat{DE}}{2} \Rightarrow 27^\circ = \frac{\widehat{BC} - \widehat{DE}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} - \widehat{DE} = 54^\circ \\ \hat{O} &= \frac{\widehat{BC} + \widehat{DE}}{2} \Rightarrow 71^\circ = \frac{\widehat{BC} + \widehat{DE}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} + \widehat{DE} = 142^\circ \end{aligned} \right. \Rightarrow \widehat{BC} = \frac{142^\circ + 54^\circ}{2} = \frac{196^\circ}{2} = 98^\circ$$

با توجه به این که زاویه بین مماس و وتر، برابری نصف تفاضل کمان‌های روبه‌رو به آن است، لذا خواهیم داشت:

$$\hat{A} = \frac{\widehat{CT} - \widehat{BT}}{2} = \frac{2\widehat{BT} - \widehat{BT}}{2} = \frac{\widehat{BT}}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

۶۷- دقت کنید که مثلث ABC متساوی‌الساقین



یعنی $\hat{B} = \hat{C}$ است. پس:

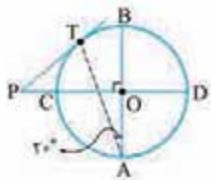
$$\frac{y-x}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow y = 2x$$

از طرفی $y + x = 138^\circ$ است. پس $3x = 138^\circ$ یعنی $x = 46^\circ$

می‌شود. حالا سوال \hat{C} را خواسته که با \hat{B} برابر است و می‌شود $\frac{x}{2} = 23^\circ$.

۶۸- می‌دانیم اندازه زاویه بین امتداد دو وتر، برابر با

نصف تفاضل کمان‌های روبه‌روی آن است. بنابراین داریم:



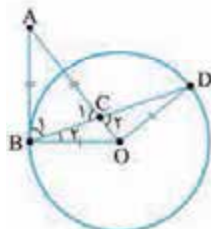
$$\hat{A} = \frac{\widehat{BT}}{2} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{BT} = 40^\circ$$

$$\widehat{BD} + \widehat{BT} + \widehat{CT} = 180^\circ$$

$$\frac{\widehat{BT}=40^\circ}{\widehat{BD}=\hat{O}=90^\circ} \rightarrow 90^\circ + 40^\circ + \widehat{CT} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{CT} = 50^\circ$$

$$\hat{P} = \frac{\widehat{DT} - \widehat{CT}}{2} = \frac{130^\circ - 50^\circ}{2} = 40^\circ$$

۶۹- بیایید شکل سوال را بکشیم که این طوری می‌شود:



دایره بر ضلع AB عمود است و این

یعنی $\hat{B}_1 + \hat{B}_2$ برابر 90° است. از طرفی

مثلث ABC متساوی‌الساقین است و این

یعنی $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$ زوایای C_1 و C_2 هم که

متقابل به رأس هستند، پس $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$.

این‌ها را که کنار هم قرار دهیم می‌رسیم به $\hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 90^\circ$ حالا

برویم سراغ مثلث BOD که آن هم متساوی‌الساقین است (چرا؟)

در نتیجه $\hat{B}_2 = \hat{D}$ بنابراین در نهایت $\hat{D} + \hat{C}_2$ می‌شود 90° و این

یعنی مثلث OCD قائم‌الزاویه است.

۷۰- مرکز دایره‌هایی که به شعاع ۲ بر خط d_1

مماس هستند روی خط d_3 و d_4 می‌نشینند که موازی d_1 و به

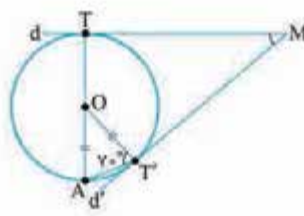
فاصله ۲ از آن هستند. حالا d_3 و d_4 در دو نقطه d_1 را قطع

می‌کنند که مرکز همان دایره‌های

دلخواه ما هستند (نقاط O و O')



۶۳- زاویه M را می‌خواهیم که به خاطر فرمولش می‌شود:



$$\hat{M} = \frac{\widehat{TAT'} - \widehat{TT'}}{2}$$

حالا دوتا نکته:

۱- مثلث OAT' متساوی‌الساقین

(OA = OT') است و این یعنی $\hat{A} = 7^\circ$ ، پس $\widehat{TT'} = 14^\circ$.

۲- کمان TAT' مساوی است با $\widehat{TA} + \widehat{AT'}$. کمان TA

که $180^\circ - 14^\circ = 166^\circ$ است و کمان AT' می‌شود $4^\circ - 14^\circ = 180^\circ$

در نتیجه $\widehat{TAT'} = 22^\circ$. بنابراین زاویه M برابر می‌شود با

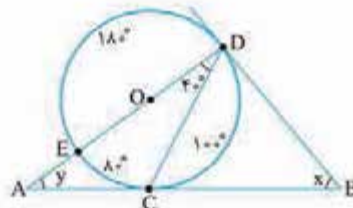
$$\frac{22^\circ - 14^\circ}{2} = 4^\circ$$

۶۴- با توجه به قطر DE و زاویه $\hat{D} = 40^\circ$ می‌توانیم

کمان‌ها را این طوری عدد

گذاری کنیم.

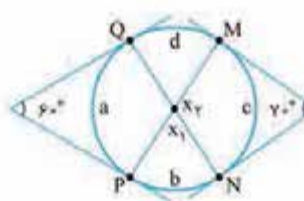
حالا x و y را می‌خواهیم:



$$\begin{cases} x = \frac{\widehat{DEC} - \widehat{DC}}{2} = \frac{26^\circ - 10^\circ}{2} = 8^\circ \\ y = \frac{\widehat{DC} - \widehat{EC}}{2} = \frac{10^\circ - 8^\circ}{2} = 1^\circ \end{cases} \Rightarrow x - y = 7^\circ$$

۶۵- بیایید برای راحتی اندازه کمان‌ها را این طوری

بنویسیم و بعدش برویم سراغ فرمول‌ها:



$$\begin{cases} 1) x_1 = \frac{b+d}{2} \\ 2) 60^\circ = \frac{b+c+d-a}{2} \\ 3) 70^\circ = \frac{a+b+d-c}{2} \end{cases}$$

اگر رابطه ۲ و ۳ را جمع کنیم می‌رسیم به $b+d = 130^\circ$ پس x_1

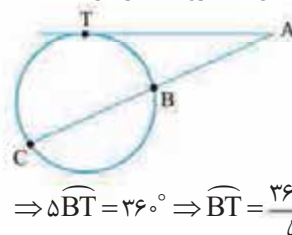
می‌شود 65° و x_2 مکمل آن یعنی 115° است.

در این جور شکل‌ها x_1 میانگین دو زاویه داده شده است.

$$\left(\frac{60^\circ + 70^\circ}{2} \right) \text{ (این جا)}$$

۶۶- ابتدا اندازه کمان‌های روی دایره را محاسبه

می‌کنیم:



$$\widehat{BT} + \widehat{BC} + \widehat{CT} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BT} + 2\widehat{BT} + 2\widehat{BT} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 5\widehat{BT} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BT} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

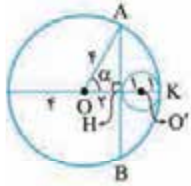
۷۶- **کریه** با توجه به این که مرکز دایره روی عمودمنصف

پاره خط AB واقع است و فقط یک دایره از این دو نقطه می گذرد، می توان نتیجه گرفت که مرکز آن نقطه O وسط AB می باشد؛ بنابراین داریم:

$$OB = OA = R = \frac{AB}{2} \Rightarrow 4m - 2 = 2 \Rightarrow m = 1$$

۷۷- **کریه** چون پاره خط AB بر دایره کوچک تر مماس

است، پس شعاع OH بر آن عمود است، در نتیجه در مثل قائم الزاویه AOH داریم:



$$\cos \alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\widehat{AK} = \widehat{BK} = 60^\circ$$

$$\widehat{AB} = 120^\circ$$

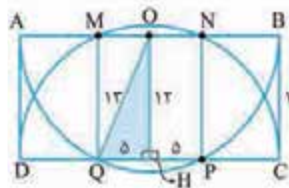
۷۸- **کریه** قطر نیم دایره برابر ۲۶ است، پس شعاع آن ها

۱۳ است، پس در مثل قائم الزاویه OHQ داریم:

$$OH = 12 \text{ ضلع مستطیل} \quad OQ = 13 \text{ شعاع دایره}$$

و طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$\Delta OHQ \text{ در: } HQ = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$



$$QP = 2 \times 5 = 10$$

$$S_{MNPQ} = 10 \times 12 = 120$$

۷۹- **کریه** بیایید مرکز دایره را بگذاریم O. O را به A

وصل می کنیم و قطری که بر AD و BC عمود باشد را می کشیم.

حالا با فیثاغورس در مثل AHO می رسمیم به:

$$AH^2 + OH^2 = AO^2 \Rightarrow 4^2 + y^2 = x^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 - 16}$$

قبول دارید که x + y می شود یک ضلع مربع؟ (به HM نگاه کنید)

در نتیجه:

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 - 16} &= 8 \\ \Rightarrow \sqrt{x^2 - 16} &= 8 - x \\ \Rightarrow x^2 - 16 &= 64 - 16x + x^2 \\ \Rightarrow 16x &= 80 \Rightarrow x = 5 \end{aligned}$$

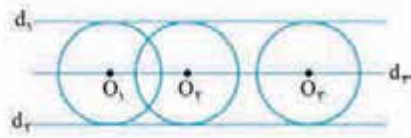
۸۰- **کریه** از نقطه O به A وصل می کنیم. با توجه به

این که شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، داریم:

$$\Delta AOM: x \hat{A}M = \hat{A}_1 + \hat{A}_r$$

$$\hat{A}_1 = \hat{OAx} = 90^\circ \rightarrow 120^\circ = 90^\circ + \hat{A}_r \Rightarrow \hat{A}_r = 30^\circ$$

۷۱- **کریه** چه بگوییم بهتر از این شکل!



۷۲- **کریه** مرکز دایره ای که به هر دو خط d1 و d2 مماس

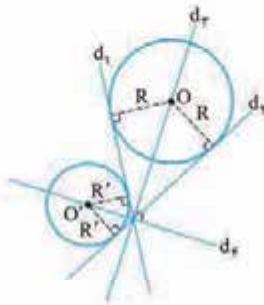
باشد از این دو خط به یک فاصله

است. پس مرکز چنین دایره ای باید

روی نیمساز زاویه های بین d1 و

d2 باشد. حواستان باشد که این دو

نیمساز بر هم عمودند (چرا؟)

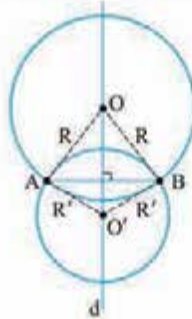


۷۳- **کریه** مرکز دایره ای که

از نقاط A و B عبور کند از این دو

نقطه به یک فاصله است. این یعنی روی

عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد.



۷۴- **کریه** اگر نقطه ای مثل O پیدا

کنیم که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد

و سپس دایره ای به مرکز O و شعاع AO رسم

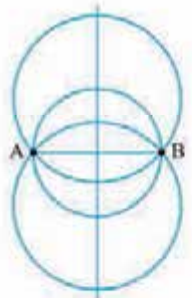
کنیم می رسمیم به دایره ای که از A و B می گذرد.

حالا چند نقطه داریم که از A و B به یک فاصله

باشند؟ بله، بی شمار نقطه روی عمودمنصف

پاره خط AB پیدا می شود. پس بی شمار دایره

پیدا می شود که از نقاط A و B عبور کند.



۷۵- **کریه** فرض کنیم نقاط A و B به فاصله ۵ هستند و

می خواهیم دایره ای بکشیم که از A و B عبور کند و شعاعش ۳

باشد. مرکز این دایره باید روی عمودمنصف پاره خط AB باشد

(چرا؟) پس این عمودمنصف را رسم می کنیم. حالا کمائی به شعاع ۳

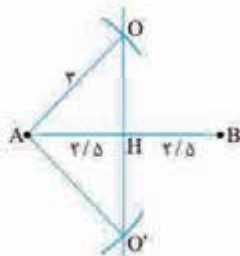
و مرکز A می زنیم تا عمودمنصف را در

نقاط O و O' قطع کند. این دو نقطه

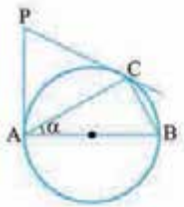
همان مرکز دایره های ما هستند.

بنابراین دایره هایی به شعاع ۳ و مرکز

O و O' جواب این مسئله هستند.



۸۴- گزینه ۳ عکس قضیه فیثاغورس برای مثلث ABC



برقرار است، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\Delta ABC: AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow \hat{C} = 90^\circ \xrightarrow{\hat{C} = \frac{AB}{2}} \widehat{AB} = 180^\circ$$

$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \xrightarrow{\hat{A} = \frac{BC}{2}} \widehat{BC} = 60^\circ$$

$$\widehat{AC} = 120^\circ \text{ و } \widehat{ABC} = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$$

پس: حال طبق رابطه محاسبه زاویه بین دو وتر خواهیم داشت:

$$\hat{P} = \frac{\widehat{ABC} - \widehat{AC}}{2} \Rightarrow \hat{P} = \frac{240^\circ - 120^\circ}{2} = 60^\circ$$

۸۵- گزینه ۳ از ظاهر شلوغ شکل نترسید. سؤال در واقع همه

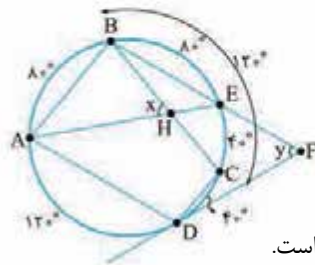
کمان‌ها را به ما داده! این طوری که $\widehat{AB} = 80^\circ$ و $\widehat{CD} = 40^\circ$.

پس $\widehat{AD} + \widehat{BC} = 240^\circ$. حالا $AB \parallel CD$ است که این یعنی

$\widehat{AD} = \widehat{BC} = 120^\circ$ هم موازی‌اند که نتیجه آن

می‌شود $\widehat{AB} = \widehat{ED} = 80^\circ$ پس $\widehat{EC} = 40^\circ$ و $\widehat{BE} = 80^\circ$. بیایید

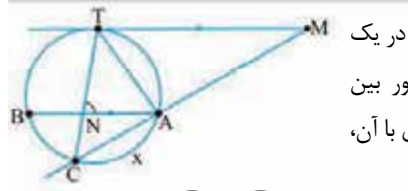
برویم سراغ زوایای خواسته‌شده:



$$x = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CE}}{2} = 60^\circ$$

$$y = \frac{\widehat{BAD} - \widehat{DCE}}{2} = 60^\circ$$

بنابراین $x = y$ و $x - y = 0$ است.



۸۶- گزینه ۳ در یک

دایره کمان‌های محصور بین

یک وتر و مماس موازی با آن،

با هم برابرند.

$$AB \parallel TM \Rightarrow \widehat{BT} = \widehat{AT}$$

حال با توجه به روابط مربوط به محاسبه زاویه بین دو وتر و امتداد

$$\hat{M} = \frac{\widehat{CBT} - \widehat{AT}}{2}$$

$$\xrightarrow{\widehat{CBT} = \widehat{BC} + \widehat{BT}} 25^\circ = \frac{\widehat{BC} + \widehat{BT} - \widehat{AT}}{2}$$

$$\xrightarrow{\widehat{BT} = \widehat{AT}} 25^\circ = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 50^\circ$$

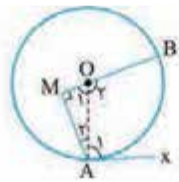
$$\hat{ANT} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AT}}{2} \Rightarrow 18^\circ = \frac{50^\circ + \widehat{AT}}{2}$$

$$\Rightarrow 16^\circ = 50^\circ + \widehat{AT} \Rightarrow \widehat{AT} = 110^\circ$$

مجموع کمان‌های یک دایره برابر 360° می‌باشد، لذا خواهیم داشت:

$$\widehat{AT} + \widehat{BT} + \widehat{BC} + \widehat{AC} = 360^\circ$$

$$\xrightarrow{\widehat{BT} = \widehat{AT}} 110^\circ + 110^\circ + 50^\circ + \widehat{AC} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 90^\circ$$



$$\Delta AOM: \hat{O}_1 = 90^\circ - \hat{A}_1$$

$$= 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

زاویه‌های O_1 و O_2 مجانب یکدیگرند. پس:

$$\hat{O}_2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

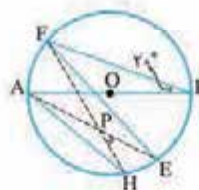
$\hat{O}_2 = \widehat{AB} = 120^\circ$ زاویه مرکزی است. در نتیجه:

$$\frac{AB}{360^\circ} = \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$$

۸۱- گزینه ۳ در یک دایره، کمان‌های محصور بین دو وتر

موازی، با هم برابرند. بنابراین داریم: $\hat{B} = \frac{\widehat{AF}}{2} \Rightarrow \widehat{AF} = 40^\circ$

$$AH \parallel EF \Rightarrow \widehat{AF} = \widehat{HE} = 40^\circ$$



می‌دانیم اندازه بین دو وتر متقاطع، برابر

نصف مجموع اندازه کمان‌های مقابلش

است، لذا خواهیم داشت:

$$\hat{HPE} = \frac{\widehat{AF} + \widehat{HE}}{2} = \frac{40^\circ + 40^\circ}{2} = 40^\circ$$

۸۲- گزینه ۳ از نقطه O مرکز دایره به نقاط A، B، C، D

وصل می‌کنیم. با توجه به شکل داریم:



$$\Delta OBD: OB = OD = BD$$

$$\Rightarrow \hat{BOD} = 60^\circ \xrightarrow{\widehat{BOD} = \widehat{BD}} \widehat{BD} = 60^\circ$$

$$\Delta OAC: \begin{cases} OA = OC = R \\ AC^2 = OA^2 + OC^2 \end{cases} \rightarrow AC = \sqrt{2}R$$

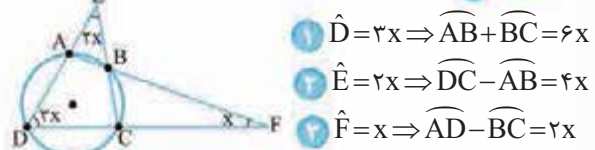
$$\hat{AOC} = 90^\circ \xrightarrow{\hat{AOC} = \widehat{AC}} \widehat{AC} = 90^\circ$$

می‌دانیم اندازه زاویه بین امتداد دو وتر، برابر با نصف تفاضل کمان‌های

مقابلش است، لذا خواهیم داشت:

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{2} = \frac{90^\circ - 60^\circ}{2} = 15^\circ$$

۸۳- گزینه ۳



$$1 \hat{D} = 3x \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{BC} = 6x$$

$$2 \hat{E} = 2x \Rightarrow \widehat{DC} - \widehat{AB} = 4x$$

$$3 \hat{F} = x \Rightarrow \widehat{AD} - \widehat{BC} = 2x$$

حالا اگر سه رابطه را جمع بزنیم می‌رسیم به:

$$1 \widehat{AD} + \widehat{DC} = 12x$$

خب بیایید روابط ۱ و ۴ را جمع کنیم تا همه کمان‌های دایره جمع

شوند:

$$\widehat{AD} + \widehat{DC} + \widehat{AB} + \widehat{BC} = 360^\circ \Rightarrow 18x = 360 \Rightarrow x = 20^\circ$$