

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com



مدابوک



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



(فصل ۱)

ترسیم‌های هندسی و استدلال

۷	درس ۱: ترسیم‌های هندسی
۱۵	درس ۲: استدلال
۱۹	درس ۳: هم‌رسمی‌ها و نامساوی‌ها
۲۸	پاسخ تشریحی

(فصل ۲)

قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

۵۲	درس ۱: نسبت و تناسب در هندسه
۵۶	درس ۲: قضیه تالس
۶۶	درس ۳: تشابه مثلث‌ها
۷۸	درس ۴: کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها
۸۵	پاسخ تشریحی

(فصل ۴)

محسوم فضایی

۱۸۹	درس ۱: خط، نقطه و صفحه
۱۹۹	درس ۲: تفکر تجسمی
۲۲۲	پاسخ تشریحی

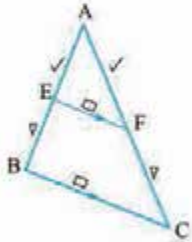
۲۵۵	پاسخ‌نامه کلیدی
-----	-----------------

(فصل ۳)

چندضلعی‌ها

۱۲۳	درس ۱: چندضلعی‌ها
۱۲۵	درس ۲: متوازی الاضلاع‌ها
۱۳۵	درس ۳: مساحت مثلث
۱۴۴	درس ۴: مساحت چهارضلعی‌ها
۱۵۴	پاسخ تشریحی

درس ۲ قضیه تالس



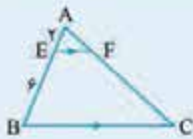
چند صد سال قبل از میلاد مسیح، یک آقای به نام تالس، قضیه مهمی را بیان کرد که هم در هندسه و هم در علوم دیگری مثل فیزیک، کلی کاربرد داشت.

صورت کلی این قضیه در مثلث را بیان می‌کنیم:

در مثلث ABC اگر EF موازی BC باشد، داریم:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

پس حواستان باشد که AE با AF، EB با FC، AB با AC و EF با BC متناسبند، مثلاً اگر پرسیدند که $\frac{AE}{EB}$ چه می‌شود با خیال راحت می‌گویید: $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$ ، فقط دقت کنید که EF وقتی وارد بازی می‌شود که $\frac{AE}{AB}$ یا $\frac{AF}{AC}$ را داشته باشیم که همان تعمیم قضیه به وجود بیاید!

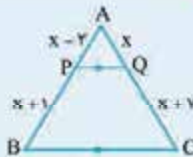


مثال با توجه به شکل مقابل، نسبت‌های $\frac{EF}{BC}$ ، $\frac{FC}{AC}$ ، $\frac{AF}{FC}$ را بیابید.

پاسخ دقت کن که $\frac{AE}{AB}$ و $\frac{AF}{AC}$ ، $\frac{EB}{AB}$ و $\frac{FC}{AC}$ متناسبند، پس بنویسیم:

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad \frac{FC}{AC} = \frac{EB}{AB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

تذکره حضور دوتا خط موازی در یک شکل، باید ما را سریعاً یاد قضیه تالس بیندازد و اگر خواسته سؤال یک نسبت یا حاصل ضرب باشد، مثلاً $\frac{AE}{FE}$ و یا AC.BD، اولین حدس‌مان استفاده از قضیه تالس است.



تست در شکل مقابل، اندازه ضلع AB کدام است؟

۱۲ (۲)

۷ (۱)

۱۶ (۴)

۱۴ (۳)

پاسخ ۲! توی شکل ۲ تا خط موازی می‌بینیم، پس برویم سراغ قضیه معروف تالس:

$$PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{x-3}{x+1} = \frac{x}{x+7} \xrightarrow{\text{تفاضیل در مخرج}} \frac{x-3}{(x+1)-(x-3)} = \frac{x}{(x+7)-x} \Rightarrow \frac{x-3}{4} = \frac{x}{7}$$

$$\Rightarrow 7x - 21 = 4x \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7$$

ضلع AB هم که $2x - 2 = 2(7) - 2 = 12$ داریم: $2x - 2 = 12$.

تست برای اندازه‌گیری ارتفاع یک درخت از تکه چوبی به طول ۸۰ cm استفاده شده است، به گونه‌ای که سایه درخت و تکه چوب در یک امتداد

بوده و نوک سایه‌ها بر هم منطبق هستند. اگر سایه درخت و تکه چوب به طور قائم به ترتیب ۲۵ و ۲ متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟

۱۰ (۴)

۱۲ (۳)

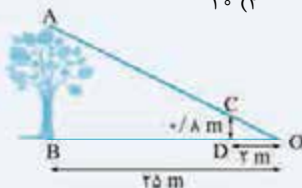
۹/۶ (۲)

۸/۴ (۱)

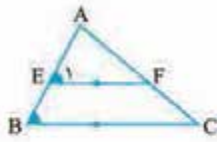
پاسخ درخت و تکه چوب هر دو بر سطح زمین عمود هستند و با هم موازی می‌باشند.

از آن‌جا که $AB \parallel CD$ است، با نوشتن تالس (جزء به کل) در مثلث AOB داریم:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{OD}{OB} \Rightarrow \frac{0.8}{AB} = \frac{2}{25} \Rightarrow AB = \frac{25 \times 0.8}{2} = 10$$

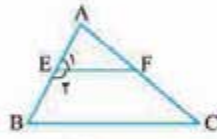


در تست‌های این فصل حتماً خواهید دید که همیشه هم نمی‌آیند خیلی تابلو بگویند که این دو خط با هم موازی‌اند، در بسیاری از تست‌ها مانند شکل‌های زیر به صورت پنهانی این حرف را می‌زنند:



می‌گویند که $\hat{E}_1 = \hat{B}$ است پس طبق قضیه خطوط موازی و مورب معلوم می‌شود که $EF \parallel BC$ است.

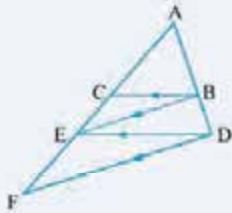
می‌گویند که $\hat{E}_2 = \hat{B}$ و $\hat{E}_1 = \hat{B}$ حُب یعنی $\hat{E}_1 = \hat{B}$ است و باز هم $EF \parallel BC$ می‌شود.



همیشه هم این‌جوری نیست که دوتا خط موازی ببینیم و یک تالس تابلو بنویسیم و به جواب برسیم، مثلاً در بعضی از مسائل ۲ جفت خط موازی داریم، پس باید ۲ بار قضیه تالس را بنویسیم و سعی کنیم بین تناسب‌های ایجادشده یک ربطی بیابیم. مثال زیر یک تمرین مهم کتاب درسی است که بارها سؤال کنکور بوده است، بیایید با هم حلش کنیم.

مثال در شکل مقابل می‌دانیم $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$. به کمک قضیه تالس، ثابت کنید که AE

واسطه هندسی AC و AF است.



پاسخ اگر AE بخواید واسطه هندسی AC و AF باشد پس باید $AE^2 = AF \times AC$ شود. حُب! حکم مسئله به صورت حاصل ضرب

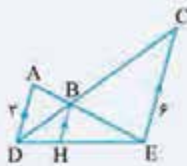
است، اما ما می‌دانیم که هر تالس به ما یک تناسب می‌دهد که بعدش خودمان ضرب می‌کنیم و به چنین چیزی می‌رسیم. این حاصل ضرب‌ها را باید به تناسب تبدیل کنیم:

$$AE^2 = AF \times AC \Rightarrow AE \times AE = AF \times AC \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AE}$$

خوب که نگاه کنید متوجه می‌شوید که با یک تالس، این تناسب ایجاد نمی‌شود، پس با توجه به این که ۲ جفت خط موازی داریم، ۲ تا قضیه تالس را می‌نویسیم. البته در نوشتن تالس‌ها هم دقت کنید که می‌خواهیم $\frac{AC}{AE}$ و $\frac{AE}{AF}$ را داشته باشیم! به سراغ مثلث‌های ADE و ADF برویم:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ADE : BC \parallel DE \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} \\ \triangle ADF : BE \parallel DF \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AD} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^2 = AC \cdot AF$$

تست در شکل مقابل، $AD \parallel BH \parallel CE$ است. اگر $AD = 3$ و $CE = 6$ باشد، اندازه BH کدام است؟



۱ (۲)

۱ (۱)

۲ (۴)

۳ (۳)

پاسخ سه تا خط موازی داریم ولی ۲ جفت خط موازی می‌توان از این ۳ تا جور کرد که ۲ تا قضیه تالس بنویسیم، یکی برای AD

و BH و یکی هم برای CE و BH :

$$\triangle ADE : BH \parallel AD \Rightarrow \frac{BH}{AD} = \frac{EH}{ED} \Rightarrow \frac{BH}{3} = \frac{EH}{ED} \quad (1)$$

$$\triangle CDE : BH \parallel CE \Rightarrow \frac{BH}{CE} = \frac{DH}{DE} \Rightarrow \frac{BH}{6} = \frac{DH}{DE} \quad (2)$$

به $\frac{EH}{ED}$ و $\frac{DH}{DE}$ دقت کنید! مخارج‌های یکسان ما را تشویق می‌کند که جمعشان کنیم: $\frac{EH}{ED} + \frac{DH}{DE} = \frac{EH+DH}{DE} = \frac{DE}{DE} = 1$

خیلی خوب شد، از شر ۲ تا نسبت خلاص شدیم و به عدد رسیدیم، پس طرفین تناسب‌های (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم:

$$\frac{BH}{3} + \frac{BH}{6} = 1 \Rightarrow \frac{2BH + BH}{6} = 1 \Rightarrow \frac{3BH}{6} = 1 \Rightarrow BH = 2$$

تست در شکل مقابل، اگر مساحت مثلث AMN با مساحت متوازی الاضلاع MNPB برابر

باشد، نسبت $\frac{AN}{NC}$ برابر با کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $\frac{4}{3}$

از نقطه N عمودی بر ضلع AB رسم می کنیم، داریم:

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle AMN} &= \frac{AM \times NH}{2} \\ S_{MNPB} &= BM \times NH \end{aligned} \right\} \xrightarrow{S_{\triangle AMN} = S_{MNPB}}$$

$$\frac{AM \times NH}{2} = BM \times NH \Rightarrow \frac{AM}{2} = BM \Rightarrow AM = 2BM$$

با نوشتن تالس (جزء به جزء) در مثلث ABC داریم:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{AM}{BM} = 2$$

عکس قضیه تالس

اگر خطی روی دو ضلع مثلثی، چهار پاره خط با اندازه های متناسب ایجاد کند، آن گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow EF \parallel BC$$

تست با توجه به شکل مقابل، اندازه پاره خط EF کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

با توجه به این که $\frac{6}{12} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ است، پس $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$ ؛ یعنی EF روی دو ضلع AB و AC، ۴ پاره خط متناسب

پدید آورده است که این کار فقط از دست یک خط موازی برمی آید، یعنی EF با BC موازی است، پس طبق خود قضیه تالس داریم:

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{6}{18} = \frac{x}{x+10} \Rightarrow \frac{x}{x+10} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x = x+10 \Rightarrow x = 5$$

یک حالت خاص مهم: اگر وسط دو ضلع یک مثلث را به هم وصل کنیم، پاره خط حاصل موازی ضلع سوم و نصف آن ضلع خواهد بود و اگر از وسط یک ضلع، موازی ضلع دیگر خطی بکشیم، این خط، ضلع سوم را در وسطش قطع می کند و باز هم پاره خط حاصل، نصف ضلعی است که با آن موازی بوده است.

نیمساز وارد می شود!

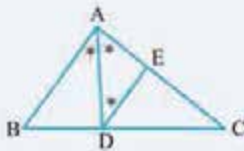
نیمساز یک زاویه، دو زاویه مساوی به وجود می آورد که تا وقتی این ها در کنار هم هستند به درد نمی خورند ولی وقتی یک خط موازی از پای نیمساز کشیده شود، داستان عوض می شود، مثلاً در شکل مقابل AD موازی AB رسم شده است، در این صورت $\hat{D}_1 = \hat{A}_1$ می شود و از قبل هم $\hat{A}_1$ و $\hat{A}_2$ با هم برابر بوده اند پس $DE = AE$ می شود. یعنی حضور این خط موازی باعث می شود دو زاویه برابر $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ در جای دیگری از مسئله دو ضلع مساوی به وجود بیاورند. از این ویژگی در سؤال های تالس و تشابه خیلی استفاده می شود که در همین فصل از کاربردهایش بیشتر خواهیم گفت.

تست در شکل زیر $AB = 21$ و $AC = 28$ است. اگر AD نیمساز زاویه A و $DE \parallel AB$ باشد، طول CE کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

قضیه خطوط موازی و مورب به ما می گوید:

$DE \parallel AB$ و مورب $AD \Rightarrow \hat{ADE} = \hat{BAD}$



از طرفی می دانیم $\hat{DAE} = \hat{BAD}$ ، لذا نتیجه می گیریم:

$$\hat{DAE} = \hat{ADE} \Rightarrow AE = DE \quad (۱)$$

حال با استفاده از قضیه تالس (جزء به کل) در مثلث ACB داریم:

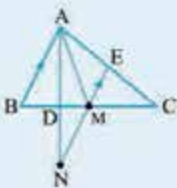
$$DE \parallel AB \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow \frac{DE}{21} = \frac{CE}{28} \Rightarrow DE = \frac{3}{4} CE \quad (۲)$$

از طرفی بنا بر فرض مسئله داریم:

$$AC = 28 \Rightarrow AE + CE = 28 \xrightarrow{(۱)} DE + CE = 28$$

$$\xrightarrow{(۲)} \frac{3}{4} CE + CE = 28 \Rightarrow \frac{7}{4} CE = 28 \Rightarrow CE = 16$$

تست در شکل مقابل، AM میانه و AD نیمساز زاویه A است. اگر $4AB = 3BC = 2AC = 12$ و



$ME \parallel AB$ باشد، اندازه پاره خط ME کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{2} \quad (۳)$$

نیمساز را که با خط موازی می بینید باید یاد حرف های همین الانم بیفتید! که گفتم

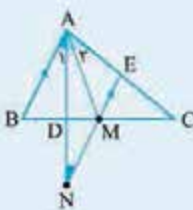
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{N}$ و در نتیجه مثلث AEN متساوی الساقین است و $EA = EN$ خواهد بود.

چون خط موازی از M وسط ضلع BC کشیده شده است پس E وسط ضلع AC است و ME هم نصف AB. خُب!

اگر E وسط AC است پس AE نصف AC است یعنی EN هم اندازه نصف AC می شود، جالب شد! چون

$$MN = EN - EM = \frac{AC}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

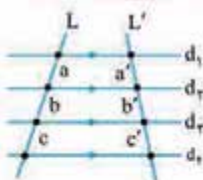
است، که می شود: $EN - EM = MN$ و $AB = 3$ و $BC = 4$ و $AC = 6$ بود!



حالت کلی قضیه تالس: اگر چندتا خط موازی داشته باشیم و ۲ تا خط بیابند و این ها را قطع کنند، خط های موازی

با دقت کامل روی این خط ها قطعات متناسب ایجاد می کنند، شکل را ببینید:

$$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$



حالت کلی قضیه تالس خیلی به کارمان نمی آید، اما یک حالت خاص آن که در دوزنقه رخ می دهد، در تست ها کلی

استفاده می شود. مثلاً دوزنقه ABCD را مانند شکل مقابل می کشند و می گویند EF با قاعده ها موازی است،

یعنی سه تا خط موازی داریم که AD و BC آن ها را قطع کرده اند، پس می توانیم بگوییم:

$$AB \parallel EF \parallel DC \Rightarrow \frac{AE}{BF} = \frac{ED}{FC} \xrightarrow{\text{بنویسیم بهتر است}} \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

که البته عکس این موضوع هم درست است، یعنی اگر $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ باشد، EF با AB موازی است!



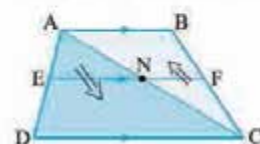
مثال در شکل مقابل، x را بیابید.

با این همه توضیحی که خوانده اید، فقط بنویسیم که:

$$\frac{x+1}{x-3} = \frac{x+3}{x-2} \Rightarrow (x+1)(x-2) = (x+3)(x-3) \Rightarrow x^2 - x - 2 = x^2 - 9 \Rightarrow -x - 2 = -9 \Rightarrow x = 7$$

در مسائل تالس در دوزنقه یادتان باشد که با رسم قطر دوزنقه دو مثلث ایجاد می شود و مسئله به تالس

در مثلث تبدیل می شود که برای ما راحت تر است و زبانش را بهتر می دانیم:



$$\triangle ADC : EN \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \dots$$

$$\triangle ABC : FN \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \dots$$

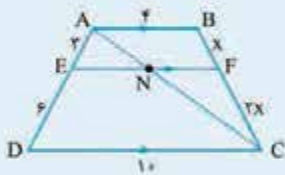
تست در دوزنقه $ABCD$ ($AB \parallel CD$)، نقاط E و F بر روی ساق‌های AD و BC طوری قرار دارند که $AE = ۳$ ، $EF \parallel AB$ و $ED = ۶$ ، $AB = ۴$ و $CD = ۱۰$ باشد، اندازه پاره خط EF کدام است؟

۶ / ۵ (۴)

۵ (۳)

۵ / ۵ (۲)

۶ (۱)



پاسخ با توجه به تعمیم قضیه تالس، $\frac{BF}{FC} = \frac{AE}{ED} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$ ، برقرار است پس اگر $BF = x$ بنامیم، FC برابر $۲x$ است.

قرار شد که در مسائل دوزنقه سریعاً قطر را بکشید! و قضیه تالس‌ها را بنویسیم، بسم الله، این شما و این هم قضیه تالس:

$$\triangle ADC: \frac{AE}{AD} = \frac{EN}{DC} \Rightarrow \frac{۳}{۹} = \frac{EN}{۱۰} \Rightarrow EN = \frac{۱۰}{۳}$$

$$\triangle ABC: \frac{CF}{CB} = \frac{FN}{AB} \Rightarrow \frac{۲x}{۳x} = \frac{FN}{۴} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{FN}{۴} \Rightarrow FN = \frac{۸}{۳}$$

و در آخر از جمع کردن اندازه‌های EN و FN ، اندازه EF به دست می‌آید: $EF = \frac{۱۰}{۳} + \frac{۸}{۳} = \frac{۱۸}{۳} = ۶$.

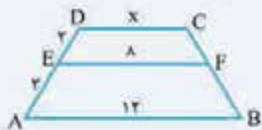
تست در شکل زیر اگر $AB \parallel CD \parallel EF$ باشد، طول DC کدام است؟

$\frac{۱۶}{۳}$ (۲)

۵ (۱)

$\frac{۲۲}{۳}$ (۴)

۶ (۳)



$$\frac{۲}{۵} = \frac{۸-x}{۱۲-x} \Rightarrow x = \frac{۱۶}{۳}$$

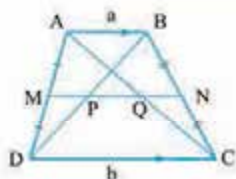
پاسخ از D به موازات CB رسم می‌کنیم.

$DCBN$ متوازی‌الاضلاع است و $DC = MF = NB = x$ در مثلث ADN ، $EM \parallel AN$

$$\frac{DE}{DA} = \frac{EM}{AN}$$

است، با نوشتن تالس (از نوع جزء به کل) داریم:

بنابراین:



اگر نقاط M و N وسط‌های ساق‌های دوزنقه $ABCD$ باشند، داریم:

$$PQ = \frac{b-a}{۲}$$

$$MN = \frac{a+b}{۲}$$

$$MN \parallel AB \parallel DC$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

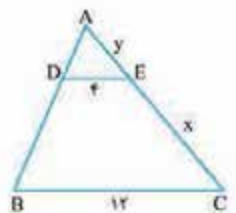
۲۲- در شکل مقابل اگر $DE \parallel BC$ و $AC = ۱۵$ باشند، $x - y$ کدام است؟

۸ (۲)

۵ (۱)

۶ (۴)

۴ (۳)



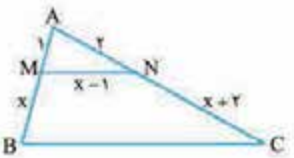
۲۳- در شکل زیر اگر $MN \parallel BC$ باشد، طول BC کدام است؟

۳ (۱)

۲ (۲)

۶ (۳)

۴ (۴)



(تمرین کتاب درسی)

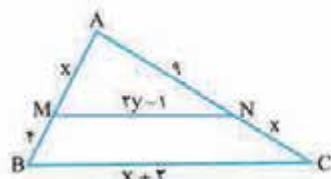
۲۴- در شکل زیر $MN \parallel BC$ است، مقادیر x و y به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟

۲ / ۹ و ۶ (۱)

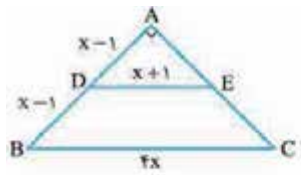
$\frac{۱۳}{۲}$ و ۶ (۲)

۶ و $\frac{۲}{۹}$ (۳)

۶ و $\frac{۱۳}{۲}$ (۴)



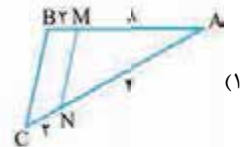
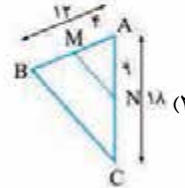
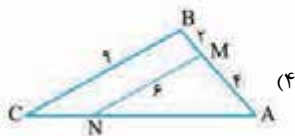
(کانون فرهنگی آموزش ۹۶)



۲۵- در شکل زیر $DE \parallel BC$ و $\hat{A} = 90^\circ$ است. اندازه پاره خط AC کدام است؟

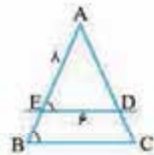
- (۱) $7\sqrt{2}$
(۲) $8\sqrt{2}$
(۳) $5\sqrt{3}$
(۴) $6\sqrt{3}$

۲۶- در کدام یک از شکل های زیر، خط MN موازی BC است؟



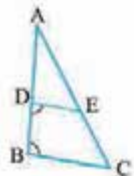
۲۷- در شکل مقابل $\hat{B} = \hat{E}$ ، $AE = 8$ ، $ED = 6$ و $BC = 9$. طول BE کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) $4/2$
(۳) $4/4$
(۴) $4/6$



۲۸- در شکل مقابل دو زاویه B و D از چهارضلعی BDEC مکمل هم هستند و $BC = \frac{4}{3}DE$ و $AB = 20$. اندازه BD کدام است؟

- (۱) $2/5$
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵



۲۹- در دوزنقه ای اندازه قاعده ها ۴ و ۹ واحد و اندازه ساق ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق ها در بیرون دوزنقه تشکیل می شود، کدام است؟

(سراسری تجربی ۹۴)

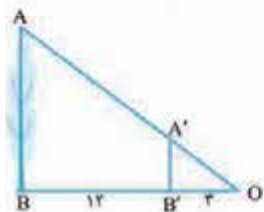
- (۱) $11/4$
(۲) $11/6$
(۳) $12/2$
(۴) $12/8$

(تمرین کتاب درسی)



۳۰- در شکل زیر اگر طول سایه درخت ۶۰ متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟

- (۱) ۳۰
(۲) ۲۰
(۳) ۱۰
(۴) ۵



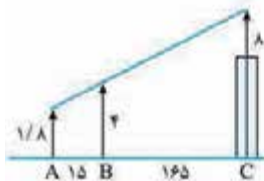
۳۱- شخصی برای اندازه گیری ارتفاع یک درخت، مطابق شکل از یک شاخص ($A'B'$) استفاده می کند. اگر شخص دیگری بخواهد زمانی که نوک سایه درخت در نقطه B' قرار می گیرد از همان شاخص استفاده کند، باید آن را چند متر به درخت نزدیک کند تا نوک سایه شاخص و درخت بر هم منطبق باشند؟

(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

- (۱) $2/4$
(۲) ۳
(۳) $3/2$
(۴) $3/6$

۳۲- در شکل زیر دکل به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشم ناظر به ارتفاع $1/8$ متر از ارتفاع دکل و تیرک ۴ متری در یک راستا است. بلندی برج چند متر است؟

(سراسری ریاضی ۸۷)



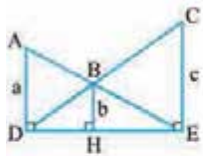
- (۱) $19/8$
(۲) $20/2$
(۳) $20/8$
(۴) $21/2$

۳۳- در مثلث ABC به اضلاع $AB = 6$ ، $AC = 4$ و $BC = 3$ نقاط D، E و F را به ترتیب بر AB، BC و AC انتخاب کرده ایم. اگر چهارضلعی ADEF لوزی باشد، آن گاه طول AD کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) $5/2$
(۳) ۳
(۴) $12/5$

۳۴- در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، مربعی را چنان محاط کرده‌ایم که یک رأس آن روی وتر مثلث و رأس دیگرش روی رأس قائمه مثلث قرار دارد. اگر طول ضلع مربع ۹ باشد، آن گاه مقدار $\frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{6}$

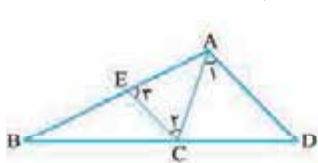


۳۵- در شکل مقابل، فاصله نقاط A، B و C را از خط DE به ترتیب a، b و c نامیده‌ایم. $\frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{abc}$ (۲) $\frac{1}{ac}$ (۳) $\frac{1}{b}$ (۴) $\frac{b}{ac}$

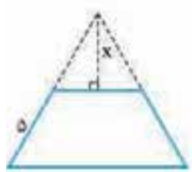
۳۶- در مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ واحد، نیمسازهای داخلی دو زاویه متقابل، قطر دیگر مستطیل را در M و N قطع می‌کنند. اندازه MN (فارغ ریاضی ۸۷) چه قدر است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{5}{7}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴) $\frac{5}{3}$



۳۷- در شکل زیر داریم: $\hat{A}_1 = \hat{E}_3 = \hat{C}_2$. اگر $AB = 15$ و $AC = 6$ باشد، آن گاه $\frac{BD}{CD}$ چه قدر است؟

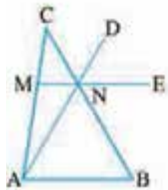
- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳



۳۸- در یک دوزنقه متساوی الساقین، طول قاعده‌ها ۱۵ و ۹ واحد و اندازه ساق‌ها ۵ واحد است. فاصله نقطه تلاقی دو ساق این دوزنقه از قاعده کوچک‌تر چند واحد است؟ (فارغ ریاضی ۱۵)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

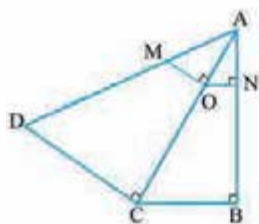
۳۹- در شکل زیر ME موازی AB و $MN = 4$ و $AB = 10$ است. اگر امتداد AN نیمساز $\hat{CNE}$ باشد، اندازه CN کدام است؟



- (۱) $\frac{14}{3}$ (۲) $\frac{14}{3}$ (۳) $\frac{10}{3}$ (۴) $\frac{20}{3}$

۴۰- در دوزنقه‌ای به طول قاعده‌های ۶ و ۹ و ارتفاع ۲ واحد، امتداد دو ساق در نقطه M متقاطع‌اند. فاصله M از قاعده بزرگ‌تر، چه قدر است؟ (سراسری تهری ۸۷)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸



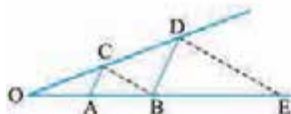
۴۱- در شکل مقابل اگر $\frac{DM}{AD} = \frac{2}{3}$ ، $CB = 6$ و $NB = 4$ باشند، مساحت مثلث OAN کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

(فارغ تهری ۹۴)

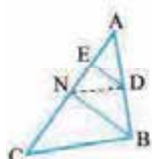
۴۲- در شکل زیر، دو جفت پاره‌خط موازی‌اند، $OA = 3$ و $AB = 5$ ، اندازه BE کدام است؟

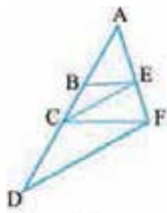
- (۱) $13\frac{1}{3}$ (۲) $12\frac{2}{3}$ (۳) $11\frac{1}{3}$ (۴) $10\frac{2}{3}$



۴۳- در شکل مقابل اگر $DN \parallel BC$ ، $DE \parallel BN$ ، $AE = 4$ و $EN = 6$ باشد، اندازه AC کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵





۴۴- در شکل مقابل $BE \parallel CF$ و $CE \parallel DF$. اگر $AB = ۵$ و $BC = ۳$ باشد، آن گاه اندازه CD کدام است؟

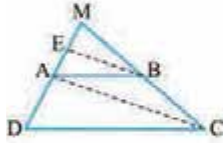
(سراسری تهرانی ۸۱)

۴ / ۸ (۲)

۴ / ۵ (۱)

۵ / ۶ (۴)

۵ / ۴ (۳)



۴۵- در دوزنقه $ABCD$ ، پاره خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = ۷$ و $AE = ۳$ باشد، فاصله MD

(فارج ریاضی ۹۳)

کدام است؟

۱۲ / ۲۵ (۲)

۱۲ (۱)

۱۲ / ۷۵ (۴)

۱۲ / ۵ (۳)

(فارج تهرانی ۸۴)

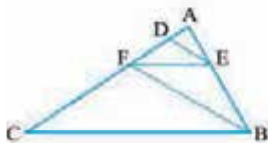
۴۶- در شکل زیر $DE \parallel FB$ و $BC \parallel EF$ است. اگر $AD = ۳$ و $DF = ۶$ ، آن گاه BC چند برابر EF است؟

۲ (۱)

۲ / ۵ (۲)

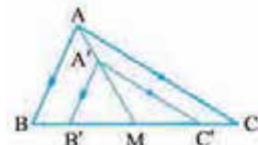
۲ / ۷۵ (۳)

۳ (۴)



۴۷- در شکل زیر $A'B' \parallel AB$ ، $A'C' \parallel AC$ و AM میانه مثلث ABC می باشد. اگر $A'M$ میانه مثلث $A'B'C'$ باشد، کدام گزینه درست

است؟



$AA' = \frac{2}{3} AM$ (۲)

$AA' = \frac{1}{2} AM$ (۱)

(۴) نمی توان اظهار نظر کرد.

$AA' = \frac{3}{4} AM$ (۳)

۴۸- در شکل روبه رو، AD نیمساز داخلی زاویه BAC و $DE \parallel AC$ است. طول پاره خط DE کدام

(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

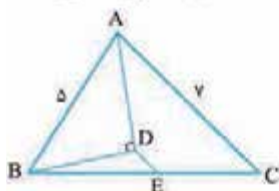
است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)



(کانون فرهنگی آموزش ۹۶)

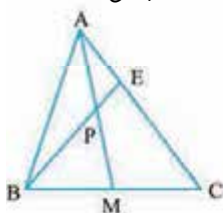
۴۹- در شکل زیر، P وسط میانه AM است. نسبت $\frac{AE}{CE}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)



۵۰- روی ضلع BC از مثلث ABC نقطه دلخواه M را اختیار می کنیم و از آن خطی موازی میانه AD رسم می کنیم تا اضلاع AB و AC یا

امتداد آن ها را در E و F قطع کند. $ME + MF$ کدام است؟

$2AD$ (۴)

$\frac{3}{2}AD$ (۳)

$\frac{4}{3}AD$ (۲)

AD (۱)

(فارج ریاضی ۹۷)

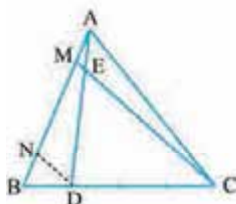
۵۱- در شکل زیر، $BD = \frac{1}{4}BC$ و $AD = \frac{1}{4}AD$ و $DN \parallel CM$ ، اندازه AB چند برابر AM است؟

۴ (۱)

۴ / ۵ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)



۵۲- در یک مربع به ضلع $۴\sqrt{2}$ خط واصل از رأس به وسط ضلع مقابل آن، قطر مربع را در M قطع می کند. فاصله نقطه M از مرکز مربع کدام

است؟

۱ (۴)

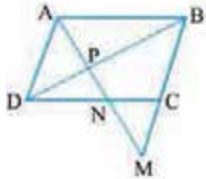
$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۲)

$\frac{5}{3}$ (۱)

۵۳- در دوزنقه $ABCD$ از نقطه O محل تلاقی قطرها، پاره‌های OE و OF را به ترتیب موازی AD و BC رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در E و F قطع کند. $\frac{AE}{FB}$ کدام است؟

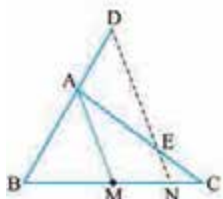
(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{AB}{CD}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{OA}{OC}$



۵۴- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، پاره‌خطی دلخواه است. کدام درست است؟

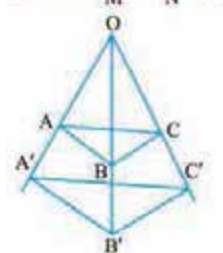
(۱) $AP^2 = AN \times AM$ (۲) $AP^2 = PN \times NM$ (۳) $AP^2 = AN \times NM$ (۴) $AP^2 = PN \times PM$

(سراسری ریاضی ۹۴)



۵۵- در مثلث ABC ($AB = \frac{2}{3}AC$) پاره‌خط ND موازی میانه AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟

(۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{5}{9}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{5}$



۵۶- در شکل روبه‌رو، $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ است. اگر $\frac{BB'}{OB} = \frac{2}{5}$ باشد، حاصل $\frac{A'C'}{AC}$ کدام است؟
(کلون فرهنگی آموزش ۹۷)

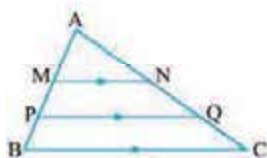
(۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) $\frac{7}{5}$

۵۷- در مثلث ABC که در آن $AB = ۸$ ، $AC = ۱۰$ و $BC = ۱۲$ است، نقاط E ، D و F به ترتیب وسط‌های اضلاع AC ، AB و BC هستند. مجموع محیط دو چهارضلعی $DEFB$ و $DECF$ برابر با کدام است؟

(۱) ۳۰ (۲) ۳۶ (۳) ۴۲ (۴) ۴۸

۵۸- در مثلث ABC نقطه M وسط BC است. نیمسازهای دو زاویه AMB و AMC دو ضلع مثلث را در P و Q قطع می‌کنند. نقطه O محل تلاقی AM و PQ است. OM برابر کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}BC$ (۲) AQ (۳) OA (۴) OP



(۱) $\frac{AM}{AP} = \frac{AN}{AQ}$ (۲) $\frac{AM}{PB} = \frac{AN}{QC}$ (۳) $\frac{AM}{AN} = \frac{MB}{NC}$ (۴) $\frac{AM}{MP} = \frac{NQ}{QC}$

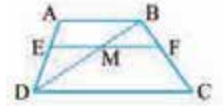
۵۹- با توجه به شکل زیر کدام یک از گزینه‌ها نادرست است؟

۶۰- در شکل مقابل طول پاره‌خط NC کدام است؟



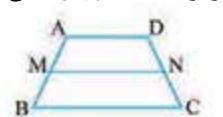
(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۶۱- در دوزنقه $ABCD$ مطابق شکل، کدام یک از روابط زیر درست است؟ ($EF \parallel AB$)



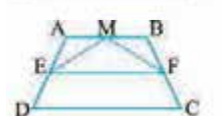
(۱) $\frac{MF}{CD} = \frac{ME}{AB}$ (۲) $\frac{BM}{BD} = \frac{AB + MF}{2AB}$ (۳) $\frac{BM}{BD} = \frac{AB}{EM}$ (۴) $\frac{BM}{BD} = \frac{AB - ME}{AB}$

۶۲- در دوزنقه $ABCD$ وسط‌های اضلاع AB و CD را به هم وصل کرده‌ایم. اگر مساحت چهارضلعی $MBCN$ دو برابر مساحت چهارضلعی $AMND$ باشد، نسبت $\frac{BC}{AD}$ کدام است؟



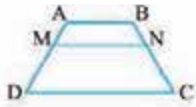
(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۴

۶۳- در دوزنقه $ABCD$ ، نقطه M وسط AB ، F وسط BC و E وسط AD است. مساحت دوزنقه چند برابر مساحت مثلث MEF است؟



(۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۸ (۴) ۶

۶۵

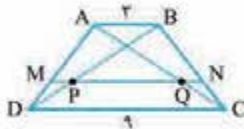


۶۴- در دوزنقه $ABCD$ ، اگر $AB = 3$ ، $DC = 6$ و $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{3}$ باشد، آن گاه MN کدام است؟

- (۱) $\frac{13}{4}$ (۲) $\frac{9}{2}$ (۳) ۴ (۴) ۵

۶۵- در دوزنقه $ABCD$ ($AB \parallel CD$)، نقطه M طوری روی AD قرار دارد که $\frac{AM}{MD} = \frac{7}{3}$ است. از نقطه M خطی موازی دو قاعده رسم می کنیم تا ساق دیگر را در N و قطرهای PQ قطع کند. نسبت $\frac{MP}{NQ}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{6}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{3}{7}$



۶۶- در دوزنقه شکل مقابل 2 است. $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ است. اندازه PQ کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{2}$ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) $\frac{13}{2}$

۶۷- در دوزنقه ای اندازه قاعده ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق ها در بیرون دوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

- (۱) $11/5$ (۲) $11/6$ (۳) $12/2$ (۴) $12/8$

۶۸- در دوزنقه ای قاعده بزرگ دو برابر قاعده کوچک است. خطی موازی قاعده ها رسم شده است. اگر بر اثر برخورد آن با قطرهای و ساق های دوزنقه، سه پاره خط مساوی روی آن ایجاد شده باشد، آن گاه این خط ساق های دوزنقه را به چه نسبتی تقسیم می کند؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) گزینه های (۱) و (۳) درست هستند.

۶۹- در دوزنقه $ABCD$ از نقطه O محل برخورد اقطار، خطی موازی قاعده رسم می کنیم تا ساق های مثلث را در E و F قطع کند. اگر $AB = 4$ و $CD = 2AD$ باشد، آن گاه کدام گزینه درست است؟

- (۱) $OE = \frac{1}{3} OF$ (۲) $OE = \frac{1}{2} OF$ (۳) $OE = \frac{2}{3} OF$ (۴) $OE = OF$

۷۰- در یک دوزنقه قائم الزاویه اگر از نقطه O محل تلاقی قطرهای، خطی موازی قاعده ها رسم شود، ساق قائم را در A و ساق مایل را در B قطع می کند. نسبت $\frac{OA}{OB}$ چگونه است؟

- (۱) کوچک تر از ۱ (۲) مساوی ۱ (۳) بزرگ تر از ۱ (۴) متغیر نسبت به اضلاع

۷۱- در دوزنقه $ABCD$ از نقطه O محل برخورد اقطار، خطی موازی قاعده رسم می کنیم تا ساق های دوزنقه را در M و N قطع کند. اگر برای قاعده های AB و CD در دوزنقه داشته باشیم $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = a$ ، آن گاه MN کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{a}$ (۲) $\frac{1}{a}$ (۳) a (۴) $2a$



۷۲- در مثلث ABC ، میانه های نظیر رأس B و رأس C بر هم عمود هستند. اگر طول اضلاع AB و AC به ترتیب ۱۹ و ۲۲ باشد، طول ضلع BC چه قدر است؟

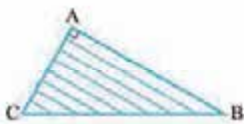
- (۱) ۱۳ (۲) ۱۵ (۳) ۱۷ (۴) ۱۹



۷۳- در لوزی شکل مقابل، M و N به ترتیب وسط های BC و CD هستند. نسبت $\frac{EF}{BD}$ کدام است؟

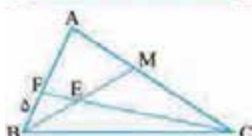
- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۷۴- ضلع AC از مثلث قائم الزاویه ABC به وسیله ۷ نقطه به ۸ قسمت مساوی تقسیم می شود. از این نقطه ها هفت پاره خط موازی AB رسم می شود. در صورتی که $AB = 10$ باشد، مجموع طول های هفت پاره خط ایجاد شده کدام است؟



- (۱) ۳۳ (۲) ۳۴ (۳) ۳۵ (۴) ۴۵

۷۵- در شکل روبه رو BM میانه و $BE = EM$ است. اگر $BF = 5$ باشد، AB کدام است؟



- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۲۲- تمرین

با توجه به این که BC و DE موازی هستند، سراغ تالس می‌رویم. با نوشتن تالس جزء به کل (تعمیم تالس) داریم:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{4}{12} \Rightarrow y = \frac{15 \times 4}{12} = 5$$

$$x + y = 15 \Rightarrow x + 5 = 15 \Rightarrow x = 10$$

$$x - y = 10 - 5 = 5$$

از طرفی $AC = 15$ است، پس:

بنابراین:

۲۳- تمرین

با توجه به این که دو خط موازی در مثلث داریم، سراغ تالس می‌رویم و چون طول یکی از اضلاع موازی خواسته شده پس

$$\frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+4} = \frac{x-1}{BC}$$

$$x + 4 = 2x + 2 \Rightarrow x = 2$$

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{BC} \Rightarrow BC = 3$$

تالس جزء به کل (تعمیم تالس) می‌نویسیم.

از طرفین وسطین $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+4}$ نتیجه می‌گیریم:

اگر $x = 2$ را در $\frac{2}{x+4} = \frac{x-1}{BC}$ جای گذاری کنیم، طول BC به دست می‌آید:

۲۴- تمرین

در این مثلث دو خط موازی داریم پس به سراغ تالس می‌رویم.

$$\frac{x}{4} = \frac{9}{x} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

ابتدا تالس جزء به جزء می‌نویسیم که x به راحتی به دست بیاید:

حال با نوشتن تالس جزء به کل و جای گذاری $x = 6$ ، y را به دست می‌آوریم.

$$\frac{x}{x+4} = \frac{9}{x+9} = \frac{2y-1}{x+2} \Rightarrow \frac{9}{6+9} = \frac{2y-1}{6+2} \Rightarrow \frac{9}{15} = \frac{2y-1}{8} \Rightarrow 2y-1 = \frac{24}{5} \Rightarrow 2y = \frac{29}{5} \Rightarrow y = \frac{29}{10} = 2.9$$

۲۵- تمرین

DE || BC است، با نوشتن تالس (جزء به کل) در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{x-1}{2x} = \frac{x+1}{4x} \Rightarrow 4x^2 - 4x = 2x^2 + 2x$$

$$2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 2x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

از آن جا که $x = 3$ شد، پس:

$$AD = 2, \quad BD = 4, \quad BC = 12, \quad AB = 6$$

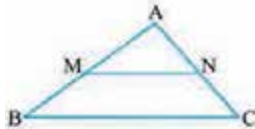
با نوشتن فیثاغورس در مثلث ABC، اندازه پاره خط AC به دست می‌آید.

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 \Rightarrow AC^2 = 144 - 36 = 108 \Rightarrow AC = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

۲۶- تمرین

در صورتی MN با BC موازی است که روی دو ضلع مثلث، چهار پاره خط با اندازه‌های متناسب ایجاد کند (عکس قضیه

تالس)؛ یعنی یکی از دو حالت زیر باید برقرار باشد تا MN موازی BC باشد.



$$\begin{cases} 1) \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \\ 2) \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \end{cases}$$

۱) پس $\frac{8}{2} \neq \frac{4}{2}$ پس MN موازی با BC نیست.

۲) پس $\frac{4}{12} \neq \frac{9}{18}$ پس MN موازی با BC نیست.

۳) با توجه به شکل $AN = 6$ است. $\frac{6}{9} \neq \frac{4}{12}$ نیست پس MN موازی با BC نیست.

۴) پس $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ پس MN موازی اند.

۲۷- تمرین

اگر خاطرتان باشد در درس نامه گفتیم که یکی از صورت‌های پنهانی برای این که بگویند دو خط

موازی است، استفاده از قضیه خطوط موازی و مورب است. چون زوایای $\hat{E}$ و $\hat{B}$ مساوی‌اند پس دو پاره خط ED و BC

موازی‌اند. پس می‌توانیم در این مثلث از تعمیم تالس (جزء به کل) استفاده کنیم.



$$\frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow \frac{8}{8+BE} = \frac{6}{9} \Rightarrow 72 = 48 + 6BE \Rightarrow 6BE = 24 \Rightarrow BE = 4$$

۲۸- گزینه

در درس نامه داشتیم یکی از صورت های پنهانی برای این که بگویند دو خط موازی اند، استفاده از مفهوم

دو زاویه مکمل است.

$$\begin{cases} \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ \\ \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ: (\text{فرض مسئله}) \end{cases} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}$$

پس طبق قضیه خطوط موازی و مورب، DE و BC موازی اند.

چون نسبت DE به BC در صورت سؤال داده شده $(\frac{DE}{BC} = \frac{3}{4})$ بنابراین از تعمیم تالس (جزء به کل) استفاده می کنیم.

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AD}{20} = \frac{3}{4} \Rightarrow AD = 15$$

$$BD = AB - AD = 20 - 15 = 5$$

در نتیجه:

۲۹- گزینه

شکل دوزنقه را با توجه به اطلاعات مسئله رسم می کنیم.

DE و BC موازی اند. در مثلث ABC تالس جزء به کل می نویسیم. داریم:

بنابراین:

$$\frac{x}{x+5} = \frac{4}{9} = \frac{y}{y+6}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{x+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9x = 4x + 20 \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4 \\ \frac{y}{y+6} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9y = 4y + 24 \Rightarrow 5y = 24 \Rightarrow y = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$ADE \text{ محیط مثلث } = x + y + 4 = 4 + 4\frac{4}{5} + 4 = 12\frac{4}{5}$$

۳۰- گزینه

اگر شکل را نام گذاری کنیم، به وضوح مشخص است که $MN \parallel BC$ است. چون طول

درخت یعنی طول یکی از اضلاع موازی خواسته شده پس تالس جزء به کل می نویسیم.

$$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{3}{60} = \frac{1}{BC} \Rightarrow BC = \frac{60 \times 1}{3} = 20$$

بنابراین بلندی درخت مورد نظر ۳۰ متر است.

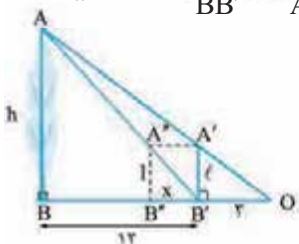
۳۱- گزینه

با استفاده از قضیه تالس در مثلث AOB داریم:

$$A'B' \parallel AB \Rightarrow \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{3}{15} = \frac{\ell}{h}$$

$$A''B'' \parallel AB \Rightarrow \frac{B'B''}{BB'} = \frac{A''B''}{AB} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{\ell}{h}$$

هم چنین با نوشتن تالس در مثلث AB'B خواهیم داشت:



$$\frac{x}{12} = \frac{3}{15} \Rightarrow x = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

از مقایسه طرفین دو تساوی بالا داریم:

۳۲- گزینه

از نقطه D موازی AC، خطی رسم می کنیم تا FC را در N و BE را در M قطع

کند. به وضوح مشخص است که $AD = MB = NC = 1/8$. حال اگر طول برج d باشد، با نوشتن تالس

$$\triangle DNF: ME \parallel NF \Rightarrow \frac{DM}{DN} = \frac{ME}{NF} \Rightarrow \frac{15}{180} = \frac{4 - 1/8}{8 + d - 1/8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{2/2}{6/2 + d} \Rightarrow 6/2 + d = 26/4 \Rightarrow d = 20/2$$

۳۳- گزینه

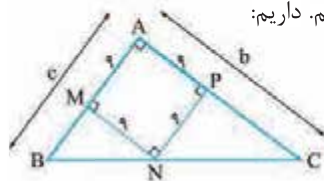
طبق فرض مسئله چهارضلعی ADEF لوزی است پس اضلاع آن با هم برابرند

و اضلاع روبه رو با هم موازی اند. اگر در مثلث ABC، تالس جزء به کل بنویسیم، داریم:

$$\triangle ABC: DE \parallel AC \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{DE}{AC} \Rightarrow \frac{6-a}{6} = \frac{a}{4} \Rightarrow 24 - 4a = 6a$$

$$\Rightarrow 10a = 24 \Rightarrow a = 2\frac{2}{5} = AD \Rightarrow AD = \frac{12}{5}$$

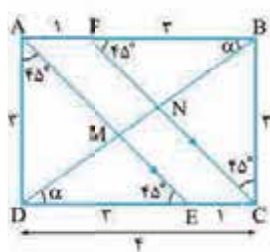
۳۴- مثلاً ABC و مربع موردنظر سؤال را رسم می‌کنیم. $APNM$ مربعی به طول ضلع ۹ است. چون اضلاع روبه‌رو به هم در مربع موازی‌اند پس $PN \parallel AB$ و $MN \parallel AC$ است. در مثلث ABC ، دو بار تالس جزء به کل می‌نویسیم. داریم:



$$\begin{cases} MN \parallel AC \Rightarrow \frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{9}{b} = \frac{BN}{BC} \\ PN \parallel AB \Rightarrow \frac{PN}{AB} = \frac{CN}{BC} \Rightarrow \frac{9}{c} = \frac{CN}{BC} \end{cases} \Rightarrow \frac{9}{b} + \frac{9}{c} = \frac{BN+CN}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{9}$$

۳۵- AD ، BH و CE هر سه بر DE عمودند، پس با هم موازی‌اند، بنابراین در مثلث‌های ADE و DCE تالس جزء به کل می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \triangle ADE : BH \parallel AD \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{HE}{DE} \\ \triangle DCE : BH \parallel CE \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{DH}{DE} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} + \frac{b}{c} = \frac{HE+DH}{DE} = \frac{DE}{DE} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b}$$



۳۶- پاره‌خط‌های AE و CF نیمساز هستند پس مثلث‌های BCF و ADE قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین می‌شوند، بنابراین:

$$\triangle BCF : BC = BF = 3$$

$$\triangle ADE : AD = DE = 3$$

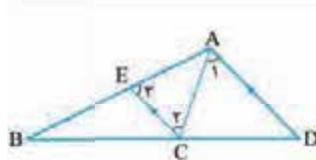
از همنهشت بودن دو مثلث DME و FNB (بنا بر حالت «ز ض ز») می‌توان نتیجه گرفت: $DM = BN$. اگر در مثلث CDN ، تالس جزء به کل بنویسیم، داریم:

$$\triangle CDN : ME \parallel NC : \frac{DM}{DN} = \frac{DE}{DC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{DM}{DM+DN} = \frac{DE}{DE+DC} \xrightarrow{DM=BN} \frac{DM}{BD} = \frac{3}{7}$$

با توجه به قضیه فیثاغورس:

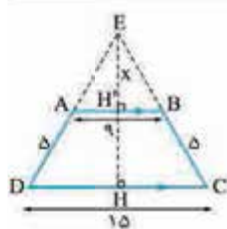
$$\triangle BCD : BD^2 = BC^2 + CD^2 \Rightarrow BD^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BD = 5$$

$$\frac{DM}{BD} = \frac{3}{7} \xrightarrow{BD=5} \frac{DM}{5} = \frac{3}{7} \Rightarrow DM = \frac{15}{7}, MN = BD - 2DM = 5 - \frac{30}{7} = \frac{5}{7}$$



۳۷- خط مورب است و چون $\hat{A}_1$ و $\hat{C}_2$ برابرند پس AD و EC موازی‌اند. با توجه به این که سؤال از ما $\frac{BD}{CD}$ (کل به جزء) خواسته، از شکل سوم تالس (یعنی جزء پایین مثلث به کل) استفاده می‌کنیم. از طرفی چون $\hat{C}_2 = \hat{E}_2$ پس مثلث AEC متساوی‌الساقین است و AC و AE هر دو برابر ۶ هستند، بنابراین با نوشتن تالس جزء به کل داریم:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AE}{AB} \xrightarrow{AE=6} \frac{CD}{BD} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{5}{2}$$



۳۸- ابتدا دوزنقه و نقاط را نام‌گذاری می‌کنیم. در مثلث ECD خطوط AB و CD موازی‌اند، با نوشتن تالس جزء به کل داریم:

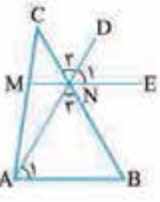
$$\triangle ECD : AB \parallel CD \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{AE}{AE+5} = \frac{9}{15} \Rightarrow 6AE = 45 \Rightarrow AE = 7.5$$

مثلث EAB متساوی‌الساقین است ($\hat{A} = \hat{B}$) بنابراین ارتفاع وارد بر قاعده AB حکم میانه را نیز دارد،

پس: $AH' = \frac{AB}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$. حال طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$\triangle EAH' : AE^2 = EH'^2 + AH'^2 \Rightarrow (7.5)^2 = x^2 + (4.5)^2 \Rightarrow 56.25 = x^2 + 20.25 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

۳۹- گزینه ۴ با نام گذاری زوایا داریم:

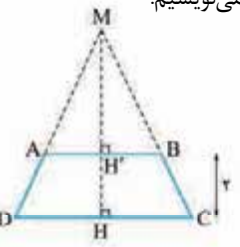


$$\left. \begin{array}{l} ME \parallel AB \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{N}_1 \\ AD \Rightarrow \hat{N}_1 = \hat{N}_2 \text{ (مورب و نیمساز)} \\ \hat{N}_2 = \hat{N}_3 \text{ (متقابل به رأس)} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{N}_3 \Rightarrow \text{مثلث ANB متساوی الساقین است} \Rightarrow AB = BN = ۱۰$$

حالا در مثلث ABC تالس جزء به کل می نویسیم:

$$MN \parallel AB \Rightarrow \frac{CN}{CB} = \frac{MN}{AB} \Rightarrow \frac{CN}{CN + NB} = \frac{۴}{۱۰} \Rightarrow \frac{CN}{CN + ۱۰} = \frac{۴}{۱۰} \xrightarrow{\text{تفاضل در مخرج}} \frac{CN}{۱۰} = \frac{۴}{۶} \Rightarrow CN = \frac{۴۰}{۶} = \frac{۲۰}{۳}$$

۴۰- گزینه ۲ ارتفاع دوزنقه است پس $HH' = ۲$. حالا در مثلث های MDH و MDC تالس جزء به کل می نویسیم:



$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle MDH : AH' \parallel DH \Rightarrow \frac{MH'}{MH} = \frac{MA}{MD} \\ \triangle MDC : AB \parallel DC \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{MA}{MD} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{MH'}{MH} = \frac{AB}{DC} = \frac{۶}{۹} \Rightarrow \frac{MH - HH'}{MH} = \frac{۶}{۹}$$

$$\Rightarrow \frac{MH - ۲}{MH} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳MH - ۶ = ۲MH \Rightarrow MH = ۶$$

۴۱- گزینه ۲ در مثلث ADC چون MO و DC هر دو بر AC عمودند پس با هم موازی اند. با نوشتن تالس جزء به کل در مثلث

$$\frac{DM}{AD} = \frac{CO}{AC} = \frac{۲}{۳}$$

ADC خواهیم داشت:

در مثلث ABC نیز اگر تالس جزء به کل بنویسیم داریم:

$$\frac{CO}{AC} = \frac{NB}{AB} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۴}{AB} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow AB = ۶ \Rightarrow AN = AB - NB = ۶ - ۴ = ۲$$

$$\frac{AN}{AB} = \frac{ON}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۶} = \frac{ON}{۶} \Rightarrow ON = ۲$$

حالا که طول AN و ON را داریم مساحت مثلث OAN به راحتی به دست می آید.

$$S_{OAN} = \frac{1}{2} \times AN \times ON = \frac{1}{2} \times ۲ \times ۲ = ۲$$

۴۲- گزینه ۲ در مثلث های OBD و OED، خطوط موازی داریم. با نوشتن تالس جزء به جزء در دو مثلث فوق به جواب سؤال می رسیم.

$$\triangle OED : BC \parallel ED \Rightarrow \frac{OC}{CD} = \frac{OB}{BE} \quad (۲) \quad \triangle OBD : AC \parallel BD \Rightarrow \frac{OC}{CD} = \frac{OA}{AB} \quad (۱)$$

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۳ + ۵}{BE} \Rightarrow BE = \frac{۴۰}{۳} = ۱۳ \frac{۱}{۳}$$

طرف اول دو رابطه (۱) و (۲) یکی است، بنابراین طرف های دوم نیز با هم برابرند.

۴۳- گزینه ۴ با استفاده از قضیه تالس در مثلث های ANB و ABC داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle ANB : DE \parallel BN \Rightarrow \frac{AE}{AN} = \frac{AD}{AB} \\ \triangle ABC : DN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AD}{AB} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{AE}{AN} = \frac{AN}{AC}$$

$$\Rightarrow AN^2 = AE \times AC \xrightarrow{AE=۴, EN=۶} ۱۰^2 = ۴ \times AC \Rightarrow AC = \frac{۱۰۰}{۴} = ۲۵$$

می توانستیم از مثال حل شده در درس نامه کمک بگیریم و خیلی سریع بگوییم در این مثلث با دو جفت خط موازی سروکار داریم پس AN

$$AN^2 = AE \times AC \xrightarrow{AE=۴, EN=۶} ۱۰^2 = ۴ \times AC \Rightarrow AC = ۲۵$$

واسطه هندسی AE و AC است؛ یعنی:

۴۴- گزینه ۲ در مثلث داده شده دو جفت خط موازی داریم. واضح است که AC واسطه هندسی AB و AD است، بنابراین:

$$AC^2 = AB \times AD \Rightarrow (۵ + ۳)^2 = ۵ \times AD \Rightarrow AD = \frac{۶۴}{۵} = ۱۲ \frac{۸}{۵}$$

$$CD = AD - AC = ۱۲ \frac{۸}{۵} - ۸ = ۴ \frac{۸}{۵}$$

در نتیجه داریم:

۴۵- گزینه

با توجه به این که $AB \parallel CD$ و $BE \parallel AC$ ، در دو مثلث AMC و MDC تالس جزءه جزء می نویسیم.

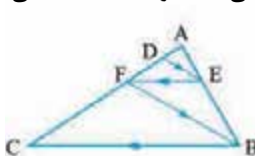
$$\left. \begin{array}{l} \triangle AMC : BE \parallel AC \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MB}{BC} \\ \triangle MDC : AB \parallel CD \Rightarrow \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x+3}{7}$$

$$\Rightarrow 7x = 3x + 9 \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = 2/25$$

$$MD = ME + AE + AD = 2/25 + 3 + 7 = 12/25$$

۴۶- گزینه

در این مثلث دو جفت خط موازی داریم، پس بدون نوشتن تالس می گوییم AF واسطه هندسی AD و AC است یعنی:



$$AF^2 = AD \times AC \xrightarrow{AD=3, DF=6} 9^2 = 3 \times AC \Rightarrow AC = 27$$

سؤال از ما $\frac{BC}{EF}$ را خواسته، اگر در مثلث ABC تعمیم تالس (جزء به کل) بنویسیم داریم:

$$\triangle ABC : EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{9}{27} = \frac{EF}{BC}$$

$$\frac{EF}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BC}{EF} = 3$$

۴۷- گزینه

در دو مثلث AMB و AMC تالس جزءه کل می نویسیم. داریم:

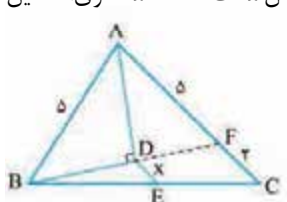
$$\left. \begin{array}{l} \triangle AMB : A'B' \parallel AB \Rightarrow \frac{MB'}{MB} = \frac{MA'}{MA} \\ \triangle AMC : A'C' \parallel AC \Rightarrow \frac{MC'}{MC} = \frac{MA'}{MA} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{MB'}{MB} = \frac{MC'}{MC} \xrightarrow{\substack{\text{AM میانه است} \\ MB=MC}} MB' = MC'$$

بنابراین یاد گرفتیم که از هر نقطه دلخواه مانند A' بر روی میانه، اگر خطوطی موازی دو ضلع رسم کنیم، همواره $A'M$ میانه مثلث $A'B'C'$ خواهد بود، پس در مورد AA' نمی توان اظهار نظر کرد و هر اندازه ای می تواند به خود اختصاص دهد.

۴۸- گزینه

امتداد BD ، ضلع AC را در F قطع می کند. در مثلث ABF ، AD نیمساز و ارتفاع است. پس مثلث ABF متساوی الساقین است و $AB = AF = 5$ و در نتیجه $FC = 7 - 5 = 2$ است.

با نوشتن تالس (جزء به کل) در مثلث BFC داریم:



$$DE \parallel FC \Rightarrow \frac{BD}{BF} = \frac{DE}{FC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 1$$

۴۹- گزینه

از نقطه M خطی موازی BE رسم می کنیم تا ضلع AC را در F قطع کند.

P وسط AM و M وسط BC است، پس:

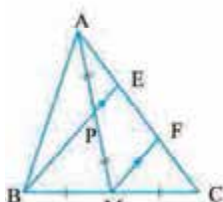
با نوشتن تالس در مثلث های AMF و CBE داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} AP = PM \\ BM = CM \end{array} \right.$$

$$\triangle AMF : PE \parallel MF \Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{AP}{PM} \xrightarrow{AP=PM} AE = EF \quad (1)$$

$$\triangle CBE : MF \parallel BE \Rightarrow \frac{CF}{FE} = \frac{CM}{MB} \xrightarrow{BM=CM} CF = EF \quad (2)$$

حالا در یک قدمی پاسخ هستیم!

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AE}{CF + FE} \xrightarrow{(2), (1)} \frac{AE}{CE} = \frac{AE}{2AE} = \frac{1}{2}$$


۵۰- نکته

ابتدا شکل را براساس داده‌های مسئله رسم می‌کنیم. در دو مثلث BAD و CMF خطوط

$$\triangle BAD : ME \parallel AD : \frac{BM}{BD} = \frac{ME}{AD}$$

$$\triangle CMF : MF \parallel AD : \frac{CD}{CM} = \frac{AD}{MF}$$

$$\xrightarrow[\text{میان AD}]{BD=DC} \begin{cases} \frac{BM}{BD} = \frac{ME}{AD} \\ \frac{CM}{BD} = \frac{AD}{MF} \end{cases} \rightarrow \frac{ME + MF}{AD} = \frac{BM + CM}{BD} = \frac{2BD}{BD} = 2$$

$$ME + MF = 2AD \quad \text{یا} \quad \frac{ME + MF}{AD} = 2$$

بنابراین:

۵۱- نکته

با توجه به این که $\frac{BD}{BC} = \frac{1}{4}$ و $\frac{AE}{AD} = \frac{1}{4}$ است، با فرض $AE = x$ و $BD = y$ داریم: $ED = 3x$ و $DC = 3y$. در

$$\frac{AM}{MN} = \frac{AE}{ED} = \frac{1}{3}$$

مثلث AND، $EM \parallel DN$ است، با نوشتن تالس جزء به جزء در این مثلث خواهیم داشت:

اگر فرض کنیم $AM = z$ ، واضح است که $MN = 3z$.

در مثلث BCM، $DN \parallel CM$ است، با نوشتن تالس جزء به جزء داریم:

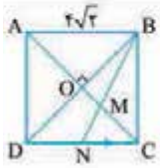
$$\frac{BN}{NM} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BN}{3z} = \frac{1}{3} \Rightarrow BN = z$$

$$\frac{AB}{AM} = \frac{z + 3z + z}{z} = \frac{5z}{z} = 5$$

شاید باور نکنید! ولی در یک قدمی پاسخ هستیم.

۵۲- نکته

ابتدا سعی می‌کنیم شکل سؤال را رسم کنیم.



اگر در شکلی دو یا چند خط موازی دیدیم یاد تالس می‌افتیم. پروانه یا دو خط موازی هم باید ما را یاد مرحوم تالس بیندازد!

در مربعی که رسم کردیم یک پروانه با دو خط موازی داریم. با نوشتن تالس خواهیم داشت (دقت داریم که $AB = DC$ است و N وسط DC است):

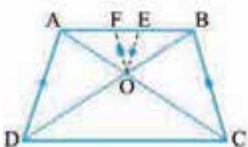
$$\frac{MC}{AM} = \frac{NC}{AB} \Rightarrow \frac{MC}{AM} = \frac{NC}{2NC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} MC = \frac{1}{3}AC \\ AM = \frac{2}{3}AC \end{cases}$$

از طرفی AC قطر مربع است پس $AC = \sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 8$ ، در نتیجه $AO = OC = 4$ و در انتها داریم:

$$MO = OC - MC = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

۵۳- نکته

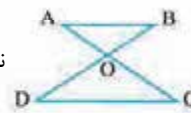
در مثلث‌های ABC و ABD خطوط موازی داریم. می‌توانیم تالس جزء به جزء بنویسیم.



$$\triangle ABD : OE \parallel AD \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{OD}{DB} \quad (2) \quad \triangle ABC : OF \parallel BC \Rightarrow \frac{BF}{AB} = \frac{OC}{AC} \quad (1)$$

نیز می‌توانیم تالس بنویسیم (زیرا AB و DC قاعده‌های دوزنقه هستند و موازی‌اند).

$$\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{DB}$$

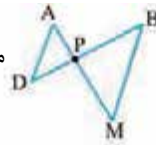


اما باید دقت کنیم در پروانه

از این‌جا نتیجه می‌گیریم طرف دوم روابط (۱) و (۲) برابرند، پس طرف‌های اول نیز برابرند. یعنی:

$$\frac{BF}{AB} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow BF = AE \Rightarrow \frac{AE}{FB} = 1$$

می‌توانیم تالس بنویسیم.



در مثلث ABC و پروانه

۵۴- گویانه

$$\left. \begin{array}{l} NC \parallel AB \Rightarrow \frac{AN}{AM} = \frac{BC}{BM} \\ AD \parallel BM \Rightarrow \frac{AP}{PM} = \frac{AD}{BM} \end{array} \right\} \xrightarrow{AD=BC} \frac{AN}{AM} = \frac{AP}{PM}$$

اگر به جای AM، AP + PM، جای گذاری کنیم (این کار را کردیم که بتوانیم از طرفین وسطین کردن کسرهای AP^2 بسازیم) داریم:

$$\frac{AN}{AP+PM} = \frac{AP}{PM} \Rightarrow AP^2 + AP \times PM = AN \times PM$$

$$\Rightarrow AP^2 = AN \times PM - AP \times PM \Rightarrow AP^2 = (AN - AP) \times PM = PN \times PM$$

اگر به شکل دقت کنیم AM و DN موازی‌اند و می‌توانیم در مثلث‌های AMC و BDN تالس بنویسیم.

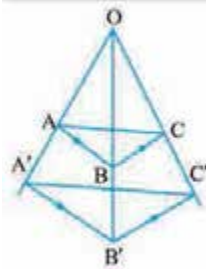
۵۵- گویانه

$$\triangle BDN : AM \parallel DN \xrightarrow{\text{تالس جزء به جزء}} \frac{AD}{AB} = \frac{MN}{BM}$$

$$\triangle AMC : EN \parallel AM \xrightarrow{\text{تالس جزء به کل}} \frac{AE}{AC} = \frac{MN}{MC}$$

از تقسیم دو رابطه بالا داریم (دقت داریم $MB = MC$):

$$\frac{\frac{AD}{AB}}{\frac{AE}{AC}} = \frac{\frac{MN}{BM}}{\frac{MN}{MC}} \Rightarrow \frac{AD \times AC}{AB \times AE} = \frac{MC}{BM} = 1 \Rightarrow \frac{AD}{AE} \times \frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$$



با نوشتن تالس در مثلث‌های $A'OB'$ و $B'OC'$ داریم:

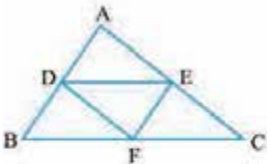
۵۶- گویانه

$$\left\{ \begin{array}{l} AB \parallel A'B' \Rightarrow \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} \\ BC \parallel B'C' \Rightarrow \frac{OC}{OC'} = \frac{OB}{OB'} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{OA}{OA'} = \frac{OC}{OC'} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} AC \parallel A'C'$$

$$\frac{BB'}{OB} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{OB}{BB'} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{OB}{OB'} = \frac{5}{7}$$

$$AC \parallel A'C' \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{A'C'}{AC} = \frac{7}{5}$$

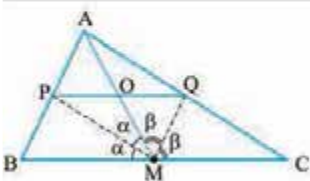
۵۷- گویانه با توجه به رابطه $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{BF}{FC} = 1$ و براساس **عکس قضیه تالس**، واضح است که $DE \parallel BC$ ، $DF \parallel AC$ و $EF \parallel AB$ و در نتیجه چهارضلعی‌های DEFB و DECF، هر دو متوازی‌الاضلاع هستند.



$$\text{محیط DEFB} = 2BF + 2BD = BC + AB = 12 + 8 = 20$$

$$\text{محیط DECF} = 2FC + 2EC = BC + AC = 12 + 10 = 22$$

بنابراین مجموع محیط‌های این دو چهارضلعی برابر با ۴۲ است.



۵۸- گویانه نیمساز هر زاویه داخلی مثلث، ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند.

۵۸- گویانه

$$MP \text{ نیمساز } \hat{M} \text{ در مثلث } AMB \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AM}{BM} \quad (1)$$

$$MQ \text{ نیمساز } \hat{M} \text{ در مثلث } AMC \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{CM} \quad (2)$$

$$M \text{ وسط } BC \Rightarrow BM = CM \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC$$

چون M میانه است، پس AO نیز میانه APQ است و O وسط PQ می‌باشد. اما $\alpha + \beta = 90^\circ$ پس PMQ در رأس M قائم‌الزاویه است و چون

$$OM = \frac{1}{2} PQ = OP$$

OM میانه نظیر وتر است، پس:

۵۹- گویانه با سه خط موازی سروکار داریم. این سه خط موازی روی اضلاع AB و AC قطعات متناسب ایجاد می‌کنند، یعنی:

۵۹- گویانه

$$\triangle ABC : MN \parallel PQ \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{MP}{NQ} = \frac{BP}{QC}$$

۶۰- نکته

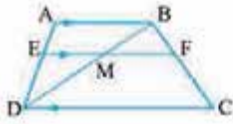
با توجه به این که با چند خط موازی سروکار داریم از حالت کلی تالس استفاده می کنیم.

$$\frac{AD}{AE} = \frac{MB}{NC} \Rightarrow \frac{AD}{MB} = \frac{AE}{NC} \Rightarrow \frac{2/5}{5} = \frac{3}{NC} \Rightarrow NC = \frac{3 \times 5}{2/5} = 6$$

می توانستیم بگوییم ۵ دو برابر ۲/۵ است پس NC هم باید دو برابر ۳ یعنی ۶ باشد.

۶۱- نکته

چون $EF \parallel AB$ است پس EM نیز با AB موازی است. اگر در مثلث ABD، تالس جزء به کل بنویسیم، داریم:



$$\triangle ABD : ME \parallel AB \Rightarrow \frac{MD}{BD} = \frac{ME}{AB}$$

$$\xrightarrow{\text{تفصیل در صورت}} \frac{BD - MD}{BD} = \frac{AB - ME}{AB} \Rightarrow \frac{BM}{BD} = \frac{AB - ME}{AB}$$

پس درست است.

۶۲- نکته

پاره خطی که وسط اضلاع دوزنقه را به هم وصل می کند با دو قاعده دوزنقه موازی است. در دوزنقه ABCD با سه خط موازی

سروکار داریم بنابراین با توجه به حالت کلی قضیه تالس، اجزای ایجاد شده روی دو ضلع دوزنقه متناسبند ($\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC}$). بنابراین از روی شکل کاملاً مشخص است که ارتفاع دوزنقه های MBCN و AMND برابر است، پس نسبت مساحت ها برابر نسبت مجموع قاعده هر مثلث است.

$$\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} = \frac{\frac{MN + BC}{2}}{\frac{AD + MN}{2}} = \frac{\frac{AD + BC}{2} + BC}{\frac{AD + BC}{2} + AD} = \frac{AD + 3BC}{BC + 3AD} \xrightarrow{\text{فرض}} \frac{AD + 3BC}{BC + 3AD} = 2$$

$$\Rightarrow AD + 3BC = 2BC + 6AD \Rightarrow BC = 5AD \Rightarrow \frac{BC}{AD} = 5$$

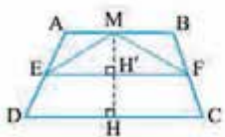
۶۳- نکته

اگر وسط اضلاع دوزنقه را به هم وصل کنیم، AB، EF و DC دایره دو با هم موازی اند، بنابراین براساس حالت کلی تالس

$$\frac{AE}{BF} = \frac{ED}{FC}, \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

اجزای ایجاد شده روی دو ضلع متناسب اند.

همان طور که از شکل نیز مشخص است می توان نتیجه گرفت ارتفاع مثلث EMF نصف ارتفاع دوزنقه ABCD است. یعنی $MH = 2MH'$ ، بنابراین:



$$\frac{S_{\text{دوزنقه}}}{S_{\text{مثلث}}} = \frac{\frac{MH \times (AB + DC)}{2}}{\frac{MH' \times EF}{2}} = \frac{MH \times EF}{MH' \times EF} = \frac{2MH' \times EF}{MH' \times EF} = 4$$

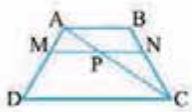
می دانستیم که طول پاره خطی که وسط های دو ضلع دوزنقه را به هم وصل می کند برابر با میانگین طول های دو قاعده دوزنقه است، یعنی:

$$EF = \frac{AB + DC}{2}$$

۶۴- نکته

چون $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{3}$ یعنی MN موازی با قاعده های دوزنقه رسم شده و AB، MN و DC دایره دو موازی اند.

از A به C وصل می کنیم تا MN را در P قطع کند. با استفاده از تعمیم تالس (جزء به کل) در دو مثلث ACD و ABC داریم:



$$\begin{cases} \triangle ACD : MP \parallel DC \Rightarrow \frac{MP}{DC} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow MP = \frac{DC}{3} = 2 \\ \triangle ABC : PN \parallel AB \Rightarrow \frac{PN}{AB} = \frac{NC}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow PN = \frac{2}{3} AB = 2 \end{cases}$$

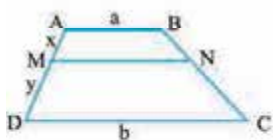
$$MN = MP + PN = 4$$

به این ترتیب:

دو شرط

بد نیست یاد بگیرید!

اگر MN موازی اضلاع دوزنقه باشد آن گاه:

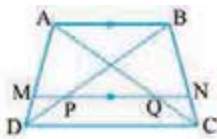


$$MN = \frac{ay + bx}{x + y}$$

مسئله گفته $\frac{AM}{AD} = \frac{1}{3}$ است، فرض کنیم $AM = 1$ و $MD = 2$ باشد.

$$MN = \frac{2 \times 2 + 6 \times 1}{1 + 2} = \frac{12}{3} = 4$$

پس:



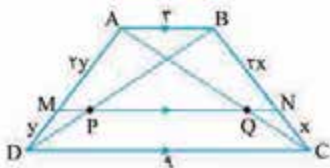
۶۵- MN، AB و DC موازی‌اند. با استفاده از حالت کلی تالس داریم:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{MD}{AD} = \frac{NC}{BC}$$

اگر در دو مثلث ABC و ADB، تعمیم تالس (جزء به کل) بنویسیم، داریم:

$$\begin{cases} \triangle ABC : NQ \parallel AB \Rightarrow \frac{QN}{AB} = \frac{CN}{CB} \\ \triangle ADB : MP \parallel AB \Rightarrow \frac{MP}{AB} = \frac{MD}{DA} \end{cases} \Rightarrow \frac{NQ}{AB} = \frac{MP}{AB} \Rightarrow NQ = MP$$

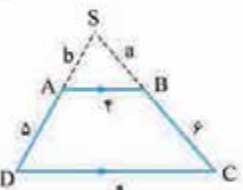
در دوزنقه ABCD (شکل بالا)، با فرض $MN \parallel AB \parallel DC$ ، بدون توجه به جایگاه M و N همواره داریم: $MP = NQ$.



۶۶- چون $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = \frac{1}{2}$ یعنی MN موازی با قاعده‌های دوزنقه رسم شده که

اجزای اضلاع دوزنقه متناسب شده‌اند. بنابراین AB، MN و BC دویه‌دو موازی‌اند. در مثلث‌های ABC و BDC، تعمیم تالس (جزء به کل) می‌نویسیم، داریم:

$$\begin{cases} \triangle BDC : PN \parallel DC \Rightarrow \frac{PN}{DC} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{PN}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow PN = 3 \\ \triangle ABC : QN \parallel AB \Rightarrow \frac{QN}{AB} = \frac{NC}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{QN}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow QN = 1 \end{cases} \Rightarrow PQ = PN - QN = 2$$



۶۷- مطابق شکل، ساق‌های دوزنقه ABCD به طول اضلاع $AB = 4$ ، $CD = 9$

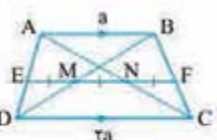
و $AD = 5$ و $BC = 6$ را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در S قطع کنند.

با نوشتن تالس (جزء به کل) در مثلث ABC داریم:

$$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{SA}{SD} = \frac{SB}{SC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{b}{b+5} = \frac{a}{a+6} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{b+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9b = 4b + 20 \Rightarrow b = 4 \\ \frac{a}{a+6} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9a = 4a + 24 \Rightarrow a = 4/5 \end{cases}$$

$$SAB \text{ محیط مثلث} = 4 + 4/5 + 4 = 12/5$$



۶۸- فرض کنیم EF موازی دو قاعده باشد و $EM = MN = NF$. برای $EM = NF$ همیشه

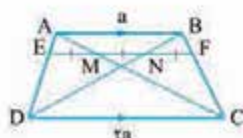
برقرار است. (در دوزنقه ABCD، با فرض $MN \parallel AB \parallel DC$ ، بدون توجه به جایگاه M و N همواره $EM = NF$).

پس باید ببینیم که $EM = MN$ چه زمانی رخ می‌دهد. فرض کنید $\frac{AE}{ED} = k$ ، در این صورت با نوشتن تعمیم تالس در دو مثلث ADC و ABD خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \triangle ADC : EN \parallel DC \Rightarrow \frac{EN}{DC} = \frac{AE}{AD} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow EN = \frac{k}{k+1} \times 2a \\ \triangle ABD : EM \parallel AB \Rightarrow \frac{EM}{AB} = \frac{ED}{AD} = \frac{1}{k+1} \Rightarrow EM = \frac{1}{k+1} \times a \end{cases} \xrightarrow{EN=EM} \frac{k}{k+1} \times 2a = \frac{1}{k+1} \times a \Rightarrow k = 1$$

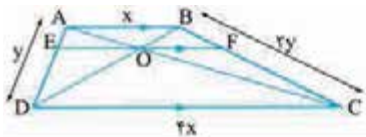
یعنی $\frac{AE}{ED} = 1$ و پاره خط EF ساق‌ها را به نسبت ۱ قطع می‌کند اما این پایان کار نیست، زیرا حالت دیگری

نیز وجود دارد که در شکل مقابل می‌بینید. با فرض $\frac{AE}{ED} = k$ و با راهی دقیقاً مشابه حالت قبل داریم:



$$\begin{cases} \triangle ADC : EM \parallel DC \Rightarrow \frac{EM}{DC} = \frac{AE}{AD} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow EM = \frac{k}{k+1} \times 2a \\ \triangle ADB : EN \parallel AB \Rightarrow \frac{EN}{AB} = \frac{ED}{AD} = \frac{1}{k+1} \Rightarrow EN = \frac{1}{k+1} \times a \end{cases} \xrightarrow{EN=EM} \frac{1}{k+1} \times a = 2 \times \frac{k}{k+1} \times 2a \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

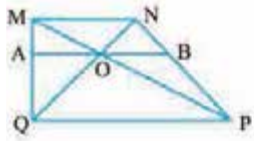
بنابراین در این حالت، پاره خط EF ساق‌ها را به نسبت ۱/۴ قطع می‌کند.



۶۹- گزیده اگر در هر دوزنقه‌ای از محل برخورد اقطار خطوطی موازی قاعده‌ها رسم کنیم، همواره دو پاره‌خط ایجادشده با هم برابر است.

$$OE = OF$$

۷۰- گزیده بد نیست بدانید!



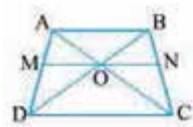
$$\begin{cases} \frac{MA}{AQ} = \frac{NB}{BP} \\ \frac{MA}{MQ} = \frac{NB}{NP}, \frac{QA}{QM} = \frac{PB}{PN} \end{cases}$$

در دوزنقه، تالس برقرار است، یعنی داریم:

با نوشتن تالس جزء به کل در دو مثلث QMN و PMN و تقسیم دو رابطه به جواب می‌رسیم.

$$\left. \begin{aligned} \frac{OA}{MN} &= \frac{AQ}{QM} \\ \frac{OB}{MN} &= \frac{BP}{PN} \end{aligned} \right\} \div \rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{AQ}{QM} \times \frac{PN}{BP} \Rightarrow \frac{OA}{OB} = 1$$

۷۱- گزیده در دوزنقه، اگر از محل برخورد قطرهای، خطی موازی دو قاعده رسم شود تا ساق‌های دوزنقه را در نقاط M و N قطع کند،

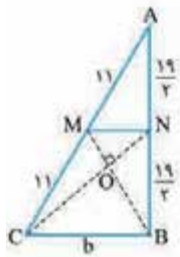


$$\begin{aligned} 1. OM &= ON \\ 2. \frac{2}{MN} &= \frac{1}{AB} + \frac{1}{DC} \quad (\text{با نوشتن دو تالس به راحتی به دست می‌آید}) \end{aligned}$$

$$\frac{2}{MN} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{DC} \Rightarrow \frac{2}{MN} = a \Rightarrow MN = \frac{2}{a}$$

بنابراین:

۷۲- گزیده M و N وسط اضلاع AB و AC هستند.



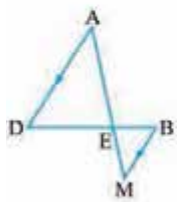
$$\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = \frac{1}{2} BC = \frac{b}{2}$$

در مثلث‌های COB و MON فیثاغورس می‌نویسیم و طرفین رابطه‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \triangle COB: b^2 &= OC^2 + OB^2 \\ \triangle MON: \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= OM^2 + ON^2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} b^2 + \frac{b^2}{4} = (OM^2 + OC^2) + (OB^2 + ON^2)$$

$$\Rightarrow \frac{5b^2}{4} = 11^2 + \left(\frac{19}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{5b^2}{4} = \frac{22^2 + 19^2}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{22^2 + 19^2}{5} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{22^2 + 19^2}{5}} = 13$$

۷۳- گزیده M را به N وصل می‌کنیم، چون M و N وسط BC و CD هستند.



هستند و $\frac{CN}{ND} = \frac{CM}{MB} = 1$ است، پس طبق عکس قضیه تالس، MN و BD موازی هستند.

چون ABCD لوزی است پس BM و AD موازی هستند و می‌توانیم در شکل تالس بنویسیم.

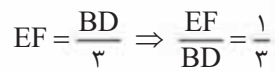
$$BM \parallel AD \Rightarrow \frac{AE}{EM} = \frac{AD}{BM} = 2 \Rightarrow \frac{AE}{AM} = \frac{2}{3}$$

$$\triangle AMN: EF \parallel MN \Rightarrow \frac{EF}{MN} = \frac{AE}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF = \frac{2}{3} MN$$

$$\triangle DBC: MN \parallel BD \Rightarrow \frac{MN}{BD} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = \frac{BD}{2}$$

$$EF = \frac{2}{3} MN = \frac{2}{3} \left(\frac{BD}{2}\right) = \frac{BD}{3} \Rightarrow \frac{EF}{BD} = \frac{1}{3}$$

که از نتایج به دست آمده داریم:



$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$