



گروه آموزشی دانش نوین

 @irandaneshnovin

 @iran_danesh_novin

برای دانلود بقیه جزوات، با کلیک روی لینک های زیر به سایت یا کانال
ما در تلگرام و سروش سر بزنید:

www.idnovin.com

<https://telegram.me/irandaneshnovin>

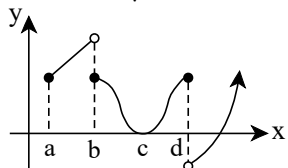
http://sapp.ir/iran_danesh_novin

۱. اندازه‌ی بیش‌ترین شدت نزول تابع $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{2}{3}$

-قلم چی-۱۳۹۵

۲. نمودار تابع f به صورت زیر است. با توجه به نمودار، تابع به ترتیب از راست به چپ چند ماکسیمم نسبی و چند می‌نیمم نسبی دارد؟



- (۱) یک-یک (۲) دو-یک (۳) یک-دو (۴) یک-صفر

-قلم چی-۱۳۹۵

۳. تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

-قلم چی-۱۳۹۵

۴. منحنی نمایش تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 7$ در کدام بازه صعودی و تقعر آن رو به پایین است؟

- (۱) $(2, +\infty)$ (۲) $(1, 2)$ (۳) $(1, \frac{3}{2})$ (۴) $(-\infty, 1)$

-قلم چی-۱۳۹۵

۵. اگر $A(1, 2)$ نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$ باشد. طول نقطه‌ی عطف آن کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) فاقد نقطه‌ی عطف

-قلم چی-۱۳۹۵

۶. کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$ در بازه‌ی $[-1, 2]$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{2}{7}$

-قلم چی-۱۳۹۵

۷. تقعر تابع $f(x) = 2x + \sqrt[3]{x}$ در بازه‌ی $(-3, 3)$ از چپ به راست چگونه است؟

- (۱) ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین است. (۲) ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالا است. (۳) همواره رو به بالا است. (۴) همواره رو به پایین است.

-قلم چی-۱۳۹۵

۸. نمودار تابع $f(x) = -x^3 - x + 1$ در اطراف نقطه‌ی عطفش چگونه است؟



-قلم چی-۱۳۹۵

۹. نمودار تابع $f(x) = x \ln x$ در حوالی $x = 1$ به کدام صورت است؟

- (۱) (۲) (۳) (۴)

-قلم چی-۱۳۹۵

۱۰. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & ; x < 1 \\ a & ; x = 1 \\ 3 - 2x & ; x > 1 \end{cases}$ در $x = 1$ ماکسیمم یا می نیمم نسبی داشته باشد، a چند مقدار صحیح را نمی تواند بپذیرد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) بی شمار

-قلم چی-۱۳۹۵

۱۱. به ازای کدام مقدار a تعمر نمودار تابع با ضابطه $y = -\frac{1}{3}ax^3 + (a^2 + 3)x^2 + x - 1$ در بازه $(-\infty, 4)$ به طرف بالا و در بازه $(4, +\infty)$ به طرف پایین است؟

- (۱) $\{1\}$ (۲) $\{-1, -3\}$ (۳) $\{1, 3\}$ (۴) $\{-3\}$

-قلم چی-۱۳۹۵

۱۲. نمودار تابع $f(x) = \frac{x^3 + x^2}{(x-1)^2 + 1}$ مجانب مایل خود را در نقطه ای با کدام طول قطع می کند؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) $1,5$ (۴) $2,5$

-قلم چی-۱۳۹۵

۱۳. تابع با ضابطه $y = xe^{x-x^2}$ در کدام بازه صعودی است؟

- (۱) $(0, 2)$ (۲) $(-\frac{1}{2}, 1)$ (۳) $(-1, 0)$ (۴) $(1, 2)$

-قلم چی-۱۳۹۵

۱۴. اگر منحنی به معادله $y = x + \sqrt{ax^2 - 4x}$ مجانب افقی داشته باشد، معادله ی مجانب مایل آن کدام است؟

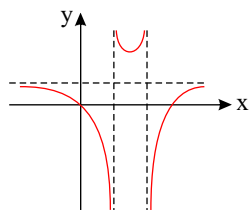
- (۱) $y = 2x - 2$ (۲) $y = 2x - 1$ (۳) $y = -2x - 1$ (۴) $y = 3x - 2$

-قلم چی-۱۳۹۵

۱۵. مقدار ماکسیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = x^4 - 8x^2$ روی بازه $[-1, 3]$ ، چقدر از مقدار می نیمم مطلق آن روی این بازه بیش تر است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۲۳ (۳) ۲۱ (۴) ۱۶

-قلم چی-۱۳۹۵



-قلم چی-۱۳۹۵

۱۶. اگر شکل روبه رو نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 + bx + c}$ باشد، دوتایی (b, c) کدام می تواند باشد؟

- (۱) $(-4, 3)$ (۲) $(-4, 0)$ (۳) $(-3, 3)$ (۴) $(3, 2)$

۱۷. مرکز تقارن نمودار منحنی $f(x) = x^3 - 3ax^2 - 16$ روی محور x ها قرار دارد. a کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۳ (۳) -۴ (۴) ۱

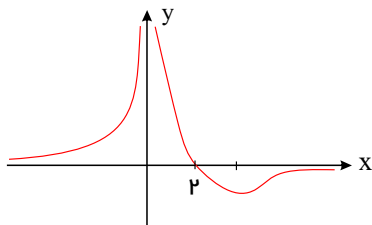
-قلم چی-۱۳۹۵

۱۸. اگر $A(1, -11)$ نقطه ی عطف نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ باشد، آنگاه مقدار $f(-1)$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

-خارج از کشور-۱۳۹۵

۱۹. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x) = \frac{ax + 2}{x^2 + b}$ است. با تعیین a و b ، عرض مینیمم نسبی این تابع کدام است؟



- (۱) $-\frac{1}{8}$
- (۲) $-\frac{1}{4}$
- (۳) $-\frac{3}{8}$
- (۴) $-\frac{1}{2}$

-خارج از کشور- ۱۳۹۵

۲۰. اگر خط $y = 4$ ، مجانب افقی $f(x) = \frac{(a+3)x^3 + 4x^2 + 3}{bx^2 - 1}$ باشد، آن‌گاه فاصله‌ی نقاط تلاقی مجانب‌های منحنی کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۲) $2\sqrt{2}$
- (۳) $\sqrt{2}$
- (۴) ۲

-قلم‌چی- ۱۳۹۵

۲۱. نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^2 + kx + 4}{x^2 + 2x + 6}$ فقط یک اکسترمم نسبی دارد. آن‌گاه عرض نقطه‌ی اکسترمم نسبی کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{3}{4}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{3}{5}$

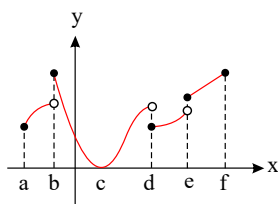
-قلم‌چی- ۱۳۹۵

۲۲. بیش‌ترین مقدار عبارت $\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{1}{4}$
- (۴) $\frac{1}{8}$

-قلم‌چی- ۱۳۹۶

۲۳. شکل زیر نمودار تابع f است. تعداد نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع به ترتیب کدام است؟



- (۱) یک - یک
- (۲) یک - دو
- (۳) دو - یک
- (۴) دو - دو

-قلم‌چی- ۱۳۹۶

۲۴. اگر $(1, -2)$ نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع درجه‌ی سوم $f(x) = ax^3 + bx$ باشد، آن‌گاه حاصل $f(2)$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۳

-قلم‌چی- ۱۳۹۶

۲۵. ماکسیمم مطلق تابع $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$ در بازه‌ی $[1, 4]$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۲
- (۳) ۴
- (۴) ۶

-قلم‌چی- ۱۳۹۶

۲۶. مینیمم نسبی تابع $y = \frac{x^2 - 1}{x^3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۲) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ (۴) $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$

قلم چی-۱۳۹۶

۲۷. منحنی به معادله $y = x^2 e^{1-x}$ در بازه (a, b) صعودی و تقعر آن به سمت بالاست. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $2 - \sqrt{2}$ (۴) 2

قلم چی-۱۳۹۶

۲۸. اگر $f(x) = [x]$ باشد، مجموعه طولهای نقاط بحرانی تابع $y = f(x + f(-x))$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) \mathbb{Z} (۲) \mathbb{R} (۳) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۴) $\mathbb{Z} - \{0\}$

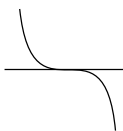
قلم چی-۱۳۹۶

۲۹. سرعت نزول تابع به معادله $y = \cos x$ در نقاطی با کدام طول بیشترین مقدار خود را دارد؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $x = 2k\pi + \pi$ (۲) $x = 2k\pi$ (۳) $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۴) $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

قلم چی-۱۳۹۶

۳۰. نمودار تابع $y = 3x^5 - 10x^3 + 3$ در حوالی نقطه‌ای با کدام طول به صورت مقابل است؟



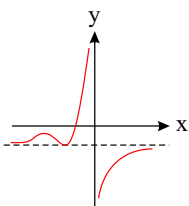
- (۱) صفر (۲) 1 (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

قلم چی-۱۳۹۶

۳۱. به ازای کدام مقدار m ، خط به معادله $x + y = 2m$ مجانب مایل منحنی به معادله $y = \sqrt{\frac{x^3 + 4x^2}{x + 2}}$ است؟

- (۱) -1 (۲) 1 (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

قلم چی-۱۳۹۶



۳۲. شکل زیر نمودار منحنی به معادله $y = \frac{x^3 + x^2 + ax + 1}{b - x^3}$ را نشان می‌دهد. $a + b$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) -1 (۳) 2 (۴) -2

قلم چی-۱۳۹۶

۳۳. تابع $f(x) = |\cos x|$ چند نقطه‌ی بحرانی در فاصله $(0, 2\pi)$ دارد؟

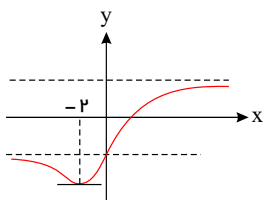
- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5

قلم چی-۱۳۹۶

۳۴. اگر طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که تقعر منحنی $f(x) = (2x + k) \ln(x - 1)$ در آن رو به پایین است، برابر 6 باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) 6 (۲) 8 (۳) 10 (۴) 12

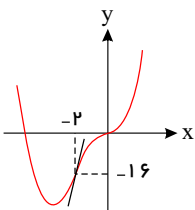
قلم چی-۱۳۹۶



قلم چی-۱۳۹۶

۳۵. شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = \frac{ax-2}{\sqrt{x^2+b}}$ را نمایش می دهد. دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

- (۱) $(1, 4)$ (۲) $(-1, 4)$
 (۳) $(2, 1)$ (۴) $(-2, 1)$



قلم چی-۱۳۹۶

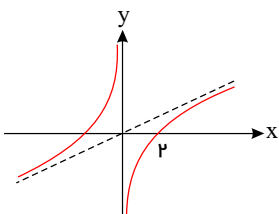
۳۶. اگر شکل مقابل مربوط به تابع $f(x) = ax^4 + bx^3$ باشد، $a \cdot b$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۴
 (۳) -۸ (۴) -۴

۳۷. نقطه ی بحرانی تابع $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}$ چگونه است؟

- (۱) مینیمم نسبی (۲) ماکسیمم نسبی (۳) عطف (۴) مشتق ناپذیر

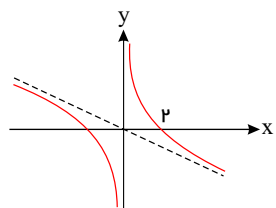
قلم چی-۱۳۹۶



سراسری-۱۳۹۶

۳۸. شکل زیر، منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{ax^2 - 1}{x + b}$ است. $a + b$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{4}$
 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲



خارج از کشور-۱۳۹۶

۳۹. شکل زیر، منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{2 + ax^2}{b + x}$ است. $a - b$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$
 (۳) صفر (۴) $\frac{1}{2}$

۴۰. منحنی به معادله ی $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ با کدام طول، مجانب خود را قطع می کند؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

خارج از کشور-۱۳۹۶

۱. گزینه ۱ منظور از بیشترین شدت نزول، کمترین مقدار مشتق تابع است.

$$f'(x) = x^2 - 3x + 2$$

مشتق تابع، درجه‌ی دوم است و کمترین مقدار تابع درجه‌ی دوم، عرض رأس سهمی است.

$$y_s = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(1)(2) - 9}{4(1)} = \frac{-1}{4}$$

۲. گزینه ۱ تابع در $x = c$ دارای Min نسبی و در $x = d$ دارای Max نسبی است. (ابتدای بازه، اکسترمم نسبی نمی‌باشد و در نقاط b و d مقدار تابع از یکی از همسایه‌های راست و چپ بالاتر و از دیگری پایین‌تر است بنابراین اکسترمم نسبی نمی‌باشند)

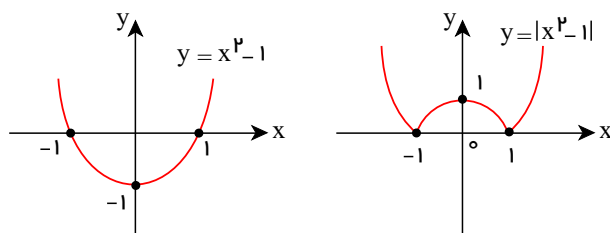
۳. گزینه ۳ روش اول:

در تابع $y = |u|$ از حل معادلات $u = 0, u' = 0$ می‌توان طول نقاط بحرانی تابع را بدست آورد.

$$\left. \begin{aligned} u = 0 &\rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = 1, x = -1 \\ u' = 0 &\rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{۳ نقطه‌ی بحرانی دارد.}$$

روش دوم:

به کمک رسم شکل، نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.



همانطور که مشاهده می‌کنید در $x = -1, x = 1$ مشتق وجود ندارد (نقاط زاویه‌دار) و در $x = 0$ ، مشتق برابر صفر است.

۴. گزینه ۴ برای آنکه تابع صعودی باشد و تقعر آن روبه پائین باشد باید $f' > 0$ و $f'' < 0$ باشد.

$$f' > 0 \rightarrow 6x^2 - 18x + 12 > 0 \rightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \rightarrow (x-1)(x-2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < 1 \text{ یا } x > 2 \text{ (I)}$$

$$f'' < 0 \rightarrow 12x - 18 < 0 \rightarrow 12x < 18 \rightarrow x < \frac{3}{2} \text{ (II)}$$

از اشتراک I و II به جواب $x < 1$ می‌رسیم.

۵. گزینه ۴ نقاط اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق پذیر دارای ۲ خاصیت هستند:

(۱) در تابع صدق می‌کنند و (۲) طولشان، مشتق را صفر می‌کند.

$$\left. \begin{aligned} \text{صدق در تابع ۱} \\ \frac{1}{2} \rightarrow 2 = \frac{a+b}{1} \rightarrow a+b=2 \\ f(x) = ax + \frac{b}{x} \rightarrow f'(x) = a - \frac{b}{x^2} \xrightarrow{f'(1)=0} a-b=0 \end{aligned} \right\} \rightarrow a=1, b=1$$

در اطراف $x = 0$ جهت تقعر عوض می‌شود ولی چون در دامنه‌ی تعریف تابع قرار ندارد نقطه‌ی عطف نمی‌باشد.

$$= \frac{2}{x^3} \rightarrow$$

۶. گزینه ۳

کافی است مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی بدست آورده و با هم مقایسه کنیم.

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x^2+3) - 2x(x^2-3x)}{(x^2+3)^2} = 0 \rightarrow 2x^3 + 6x - 3x^2 - 9 - 2x^3 + 6x^2 = 0$$

$$\rightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = -3 \end{cases}$$

غ ق ق (در بازه قرار ندارد)

$$f(-1) = 1, f(1) = -\frac{1}{2}, f(2) = -\frac{2}{7}$$

کمترین مقدار تابع برابر $-\frac{1}{2}$ می باشد.

۷. گزینه ۱

$$f(x) = 2x + x^{\frac{1}{3}} \rightarrow f'(x) = 2 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \rightarrow f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

y'' صفر نمی شود و به ازای $x = 0$, y'' وجود ندارد.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y''	+		-
y	∪		∩

با توجه به جدول در بازه $(-3, 3)$ ، ابتدا تقعر رو به بالا و سپس تقعر رو به پایین است.

۸. گزینه ۲

$$f(x) = -x^3 - x + 1 \rightarrow f'(x) = -3x^2 - 1 \rightarrow f''(x) = -6x = 0 \rightarrow x = 0$$

طول نقطه‌ی عطف: $x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y''	+	0	-
y	∪	∩	

قبل از نقطه‌ی عطف تقعر رو به بالا و بعد از آن تقعر رو به پایین است.

و در ضمن $f'(0) = -1$ می باشد یعنی شیب خط مماس در نقطه‌ی عطف، منفی است پس نمودار تابع در اطراف نقطه‌ی عطف به

صورت است.

۹. گزینه ۱

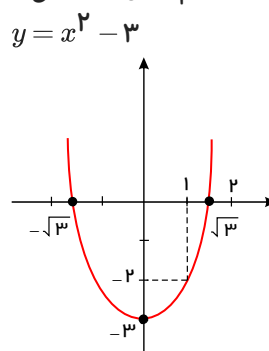
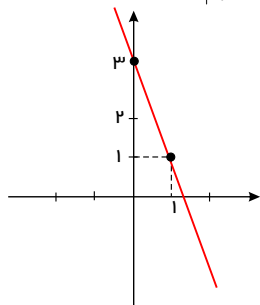
$$f'(x) = (1)\ln x + \frac{1}{x}(x) = \ln x + 1 \rightarrow f'(1) = 0 + 1 > 0 \rightarrow \text{صعودی}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f''(1) = 1 > 0 \rightarrow \text{تقعر رو به بالا}$$

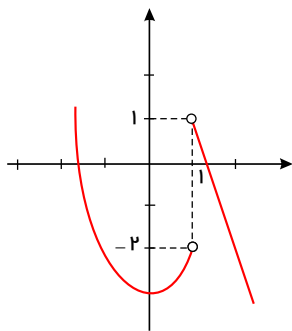
بنابراین نمودار تابع f در حوالی $x = 1$ به صورت می باشد.

۱۰. گزینه ۲ برای حل این تست از رسم شکل کمک می گیریم.

$$y = 3 - 2x \rightarrow A \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \end{vmatrix}$$



از ترکیب این دو شکل، شکل زیر حاصل می‌گردد.



دقت کنید اگر $a \geq 1$ باشد در این صورت $x = 1$ طول Max نسبی است و اگر $a < -2$ باشد در این صورت $x = 1$ طول Min نسبی است بنابراین a نمی‌تواند سه مقدار صحیح -2 و -1 و 0 را قبول کند.
 ۱۱. گزینه ۳ با توجه به صورت سوال، $x = 4$ طول نقطه‌ی عطف تابع است.

$$x_{\text{عطف}} = \frac{-b}{3a} \rightarrow 4 = \frac{-(a^2 + 3)}{3(\frac{-1}{3}a)} \rightarrow 4 = \frac{a^2 + 3}{a} \rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب=0}} \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{c}{a} = 3 \end{cases}$$

چون در صورت سوال گفته شده است اول تقعر رو به بالا و سپس رو به پائین است با توجه به شکل‌های تابع درجه‌ی سوم باید ضریب x^3 منفی باشد بنابراین هر دو جواب قابل قبول هستند.

۱۲. گزینه ۳

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 1 - 2x + 1} = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 2x + 2}$$

برای پیدا کردن مجانب مایل، کافی است صورت را بر مخرج تقسیم کنیم.

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 \quad | \quad \begin{array}{r} x^2 - 2x + 2 \\ x + 3 \end{array} \\ \hline -x^3 + 2x^2 - 2x \\ \hline 3x^2 - 2x \\ \hline -3x^2 + 6x - 6 \\ \hline 4x - 6 \end{array} \rightarrow y = x + 3 \quad \text{مجانب مایل}$$

دقت کنید ریشه‌ی باقی‌مانده، طول نقطه‌ی برخورد مجانب مایل با تابع است.

$$4x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{6}{4} = 1,5$$

۱۳. گزینه ۲ کافی است از تابع، مشتق گرفته و بزرگتر از صفر قرار دهیم.

$$y = x \cdot e^{x-x^2} \rightarrow y' = e^{x-x^2} + (1-2x)(x)e^{x-x^2} = \underbrace{e^{x-x^2}}_{>0} (1+x-2x^2) > 0 \rightarrow -2x^2 + x + 1 > 0$$

$$\rightarrow \frac{x}{y'} \quad \begin{array}{ccccccc} -\infty & & -\frac{1}{2} & & 1 & & +\infty \\ \hline & - & 0 & + & 0 & - & \end{array} \rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

۱۴. گزینه ۱ کافی است از تابع، حد در بی‌نهایت بگیریم و برای این منظور از هم‌ارزی و اندروالسی استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x + \sqrt{ax^2 - 4x}) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x + \sqrt{a} |x - \frac{4}{2a}|)$$

$$x \rightarrow +\infty : y = x + \sqrt{ax} - \frac{4\sqrt{a}}{2a} \rightarrow y = (1 + \sqrt{a})x - \frac{2\sqrt{a}}{a} \quad (I)$$

$$x \rightarrow -\infty : y = x - \sqrt{ax} + \frac{4\sqrt{a}}{2a} \rightarrow y = (1 - \sqrt{a})x + \frac{2\sqrt{a}}{a} \quad (II)$$

معادله‌ی (I) نمی‌تواند نشان‌دهنده‌ی مجانب افقی باشد زیرا معادله‌ی مجانب افقی به صورت عدد y است و ضریب x ، یعنی $1 + \sqrt{a}$ هرگز نمی‌تواند صفر شود ولی معادله‌ی (II) اگر ضریب x صفر باشد می‌تواند مجانب افقی باشد.

$$1 - \sqrt{a} = 0 \rightarrow a = 1$$

$$a = 1 \xrightarrow{I} y = 2x - \frac{2\sqrt{1}}{1} \rightarrow y = 2x - 2$$

مجانب مایل: $y = 2x - 2$

۱۵. گزینه ۱

$$f(x) = x^4 - 8x^2 \rightarrow f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

غ ق ق (در بازه قرار ندارد)

حال باید مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول‌های نقاط بحرانی بدست آورید.

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(2) = -16 \rightarrow \text{Min مطلق} \rightarrow 9 - (-16) = 25 \\ f(-1) = -7 \\ f(3) = 9 \rightarrow \text{Max مطلق} \end{cases}$$

۱۶. گزینه ۱ این تابع دارای دو مجانب قائم با طول مثبت است بنابراین مخرج باید دارای ۲ ریشه‌ی متمایز مثبت باشد.

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow b^2 - 4c > 0 \rightarrow b^2 > 4c$$

گزینه‌ی ۳ حذف می‌شود.

$$c > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow c > 0$$

گزینه‌ی ۲ حذف می‌شود.

$$b < 0 \rightarrow -b > 0 \rightarrow -b > 0 \rightarrow b < 0$$

گزینه‌ی ۴ حذف می‌شود.

۱۷. گزینه ۱ مرکز تقارن تابع درجه‌ی سوم همان نقطه‌ی عطف تابع است.

$$x_{\text{عطف}} = \frac{-b}{3a} \rightarrow x_{\text{عطف}} = \frac{3a}{3} = a \xrightarrow{\text{تابع}} y_{\text{عطف}} = a^3 - 3a^3 - 16 = -2a^3 - 16$$

چون نقطه‌ی عطف روی محور طول قرار دارد پس عرض آن صفر است.

$$-2a^3 - 16 = 0 \rightarrow 2a^3 = -16 \rightarrow a^3 = -8 \rightarrow a = -2$$

۱۸. گزینه ۳

$$x_{\text{عطف}} = \frac{-b}{3a} \rightarrow 1 = \frac{-a}{3} \rightarrow a = -3$$

$$A \begin{vmatrix} 1 & \text{صدق در تابع} \\ -11 & \end{vmatrix} \rightarrow -11 = 1 + a + b \rightarrow -11 = 1 - 3 + b \rightarrow b = -9$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ در می‌آید.

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 \rightarrow f(-1) = 5$$

۱۹. گزینه ۱ $x = 0$ مجانب قائم تابع است پس در مخرج صدق می‌کند.

$$x = 0 \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} 0 + b = 0 \rightarrow b = 0$$

چون تابع از نقطه‌ی $\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$ می‌گذرد پس مختصات این نقطه در تابع صدق می‌کند.

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 0 = \frac{2a+2}{4+b} \rightarrow 2a+2 = 0 \rightarrow a = -1$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x) = \frac{-x+2}{x^2}$ است.

$$f'(x) = \frac{-1(x^2) - 2x(-x+2)}{x^4} = \frac{-x^2 + 2x^2 - 4x}{x^4} = \frac{x^2 - 4x}{x^4} = \frac{x(x-4)}{x^4} = \frac{x-4}{x^3} = 0$$

$$\rightarrow x = 4 \xrightarrow{\text{تابع}} y = \frac{-4+2}{16} = -\frac{1}{8}$$

توجه کنید که در $x = 0$ ، مشتق وجود ندارد ولی چون در دامنه‌ی تعریف تابع قرار ندارد نمی‌تواند طول اکسترمم نسبی تابع باشد.

۲۰. گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(a+3)x^3 + 4x^2 + 3}{bx^2 - 1} = 4$$

چون حاصل حد، عددی غیر صفر است، پس باید درجه‌ی صورت و مخرج برابر باشد. پس:

$$a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 + 3}{bx^2 - 1} = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2}{bx^2} = \frac{4}{b} = 4 \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4x^2 + 3}{x^2 - 1}$$

مجانب‌های قائم: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ مخرجمحل برخورد مجانب‌ها، دو نقطه‌ی $A(1, 4)$ و $B(-1, 4)$ است. پس:

$$AB = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (4 - 4)^2} = 2$$

۲۱. گزینه ۴ برای تعیین نقطه‌ی اکسترم نسبی، ریشه یا ریشه‌های ساده‌ی مشتق را می‌یابیم.

$$f(x) = \frac{x^2 + kx + 4}{x^2 + 2x + 6} \rightarrow f'(x) = \frac{(2x + k)(x^2 + 2x + 6) - (2x + 2)(x^2 + kx + 4)}{(x^2 + 2x + 6)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 4x^2 + 12x + kx^2 + 2kx + 6k - 2x^3 - 2kx^2 - 8x - 2x^2 - 2kx - 8}{(x^2 + 2x + 6)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - kx^2 + 4x + 6k + 8}{(x^2 + 2x + 6)^2} = \frac{(2 - k)x^2 + 4x + (6k + 8)}{(x^2 + 2x + 6)^2}$$

چون در صورت سوال قید شده تابع فقط دارای یک اکسترم نسبی است پس باید صورت کسر مشتق، فقط یک ریشه‌ی ساده داشته باشد یعنی صورت از درجه اول است پس $2 - k = 0 \rightarrow k = 2$

$$f'(x) = \frac{4x + 4}{(x^2 + 2x + 6)^2} = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow f(-1) = \frac{1 - 2 + 4}{1 - 2 + 6} = \frac{3}{5}$$
 عرض اکسترم $\frac{3}{5}$

۲۲. گزینه ۲

$$\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin x$$

بیشترین مقدار عبارت $\sin x$ برابر یک می‌باشد بنابراین بیشترین مقدار عبارت $\frac{1}{2} \sin x$ برابر $\frac{1}{2}$ است.

۲۳. گزینه ۲ نقاط f, a به دلیل آنکه دو سر بازه هستند و یک طرفشان همسایه وجود ندارد اکسترم نسبی نمی‌باشند. نقطه‌ی b از دو همسایه‌ی راست و چپش بالاتر است پس نقطه‌ی Max نسبی است. نقاط c و d چون از همسایه‌های راست و چپشان پایین‌تر هستند نقطه‌ی Min نسبی می‌باشند. نقطه‌ی e از همسایه‌ی راستش پایین‌تر و از همسایه‌ی راستش بالاتر است بنابراین اکسترم نسبی نمی‌باشد. پس این تابع دارای یک ماکسیم و دو مینیمم نسبی است.

۲۴. گزینه ۳ نقاط اکسترم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر دارای دو خاصیت هستند: $\left. \begin{array}{l} 1) \text{ در تابع صدق می‌کنند.} \\ 2) \text{ طولشان، } y' \text{ را صفر می‌کند.} \end{array} \right\}$

$$A \left| \begin{array}{l} 1 \\ -2 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{صدق}} -2 = a + b$$

$$A \left| \begin{array}{l} 1 \\ -2 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{طولش } y' \text{ را صفر می‌کند}} y' = 3ax^2 + b \rightarrow 0 = 3a + b$$

$$\begin{cases} a+b = -2 \\ 3a+b = 0 \end{cases} \rightarrow a=1, b=-3 \rightarrow f(x) = x^3 - 3x \rightarrow f(2) = 8 - 6 = 2$$

۲۵. گزینه ۲ کافی است که مقدار تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و نقاط بحرانی (در صورت وجود) بدست آوریم در بین این اعداد بزرگ‌ترین آن‌ها Max مطلق و کوچک‌ترین آن‌ها Min مطلق است.

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2 \rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$$

$$x \in [1, 4] \rightarrow x = 2$$

$$f(1) = -1 + 3 - 2 = 0, \quad f(4) = -64 + 48 - 2 = -18, \quad f(2) = -8 + 12 - 2 = 2$$

بنابراین Max مطلق تابع برابر ۲ می‌باشد.

۲۶. گزینه ۴ کافی است از تابع، مشتق گرفته و سپس آن را تعیین علامت کنیم.

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^3} \rightarrow y' = \frac{2x(x^3) - 3x^2(x^2 - 1)}{x^6} = \frac{2x^4 - 3x^4 + 3x^2}{x^6} = \frac{-x^4 + 3x^2}{x^6}$$

$$= \frac{x^2(-x^2 + 3)}{x^6} = \frac{3 - x^2}{x^4} = 0 \rightarrow 3 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

و به ازای $x = 0$, y' وجود ندارد.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
y'	-	o	+	+	-
y		↘	↗	↗	↘

برای پیدا کردن عرض Min کافی است که $x = -\sqrt{3}$ را در تابع قرار دهیم.

$$x = -\sqrt{3} \xrightarrow{\text{تابع}} y_{Min} = \frac{(-\sqrt{3})^2 - 1}{(-\sqrt{3})^3} = \frac{3 - 1}{-3\sqrt{3}} = \frac{2}{-3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{9}$$

$$\boxed{y = e^u \rightarrow y' = u' \cdot e^u, (uv)' = u'v + v'u}$$

۲۷. گزینه ۳ می‌دانیم: باید فواصلی را پیدا کنیم که $y' > 0, y'' > 0$ است.

$$y' = 2xe^{1-x} + (-1)e^{1-x}x^2 = e^{1-x}(2x - x^2) > 0 \rightarrow x(2-x) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < x < 2 : I$$

$$y'' = -e^{1-x}(2x - x^2) + (2 - 2x)e^{1-x} = e^{1-x}(-2x + x^2 + 2 - 2x) = e^{1-x}(x^2 - 4x + 2) = 0$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 8 = 8 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} \\ x = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{2}$	$2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
y''	+	o	-	o
y		U	∩	U

$$\rightarrow x < 2 - \sqrt{2} \cup x > 2 + \sqrt{2} : II$$

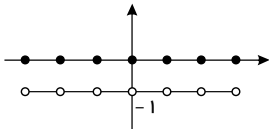
$$I \cap II : x \in (0, 2 - \sqrt{2}) \rightarrow Max(b-a) = 2 - \sqrt{2}$$

۲۸. گزینه ۲

$$f(x) = [x] \rightarrow y = f(x + f(-x)) = f(x + [-x]) = [x + \underbrace{[-x]}_{\text{صحیح}}]$$

$$= [x] + [-x] \rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \rightarrow [x] + [-x] = 0 \\ x \notin \mathbb{Z} \rightarrow [x] + [-x] = -1 \end{cases}$$

حال، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



باتوجه به شکل، نقاط صحیح، نقاط بحرانی از نوع مشتق ناپذیر هستند و در سایر نقاط (خط افقی) مشتق برابر صفر است پس این تابع بی‌شمار نقطه‌ی بحرانی دارد.

۲۹. گزینه ۴

$$y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x$$

حال، باید نقاطی را بیابیم که در آن نقاط مقدار y' منفی‌ترین است برای این منظور کافی است $\sin x$ بیشترین مقدار خود یعنی یک باشد.

$$\sin x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۳۰. گزینه ۱ طول نقطه‌ی مورد نظر را a در نظر بگیرید در سمت چپ این نقطه، تقعر رو به بالا و در سمت راست آن تقعر رو به پایین است بنابراین کافی است از تابع داده شده دو بار مشتق بگیرید و آن را تعیین علامت کنید.

$$y = 3x^5 - 10x^3 + 3 \rightarrow y' = 15x^4 - 30x^2 \rightarrow y'' = 60x^3 - 60x = 60x(x^2 - 1) = 0$$

$$\rightarrow x = 0, x = 1, x = -1 \rightarrow$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	0
y		\cap	\cup	\cap	\cup

بنابراین طول نقطه‌ی مورد نظر $x = 0$ است.

۳۱. گزینه ۳ ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم و سپس از هم‌ارزی و اندروالسی استفاده می‌کنیم.

$$\frac{x^3 + 4x^2}{-x^3 - 2x^2} \div \frac{x + 2}{x^2 + 2x - 4} = \frac{2x^2}{-2x^2 - 4x} \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 2x - 4 + \frac{8}{x+2}}$$

$$\frac{-4x}{4x + 8}$$

$$\frac{1}{2}$$

واضح است که $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8}{x+2} = 0$ است حال بر طبق هم‌ارزی و اندروالسی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{1 \times 2}} |x + 1| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x + 1|$$

$$\begin{cases} x = +\infty : y = x + 1 \\ x = -\infty : y = -x - 1 \end{cases} \xrightarrow{y = -x + 2m} 2m = -1 \rightarrow m = \frac{-1}{2}$$

به هم‌ارزی و اندروالسی با شرط $a > 0$ توجه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} \sim \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

۳۲. گزینه ۳ از روی شکل، واضح است که $x = 0$ x مجانب قائم تابع است پس $x = 0$ در مخرج تابع صدق می کند، بنابراین $b = 0$ است. از تابع، حد در بی نهایت می گیریم تا معادله ی مجانب افقی تابع بدست آید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + x^2 + ax + 1}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{-x^3} = -1 \rightarrow y = -1$$

بنابراین عرض Min تابع برابر $y = -1$ است پس کافی است که آن را با معادله ی منحنی تلاقی دهیم و معادله ی تلاقی ریشه ی مضاعف منفی دارد.

$$\begin{cases} y = \frac{x^3 + x^2 + ax + 1}{-x^3} \\ y = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \frac{x^3 + x^2 + ax + 1}{-x^3} = -1 \rightarrow x^3 + x^2 + ax + 1 = x^3$$

معادله ی تلاقی: $x^2 + ax + 1 = 0$

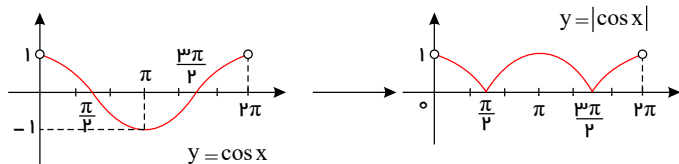
$$\Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4ac = 0 \rightarrow a^2 - 4 = 0 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = 2, a = -2$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{معادله ی تلاقی} \\ a = 2 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow (x+1)^2 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{معادله ی تلاقی} \\ a = -2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

پس $a + b = 2$ است.

۳۳. گزینه ۲ به نقاطی از درون دامنه ی تعریف که به ازای آنها مشتق برابر صفر است و یا مشتق وجود ندارد نقاط بحرانی گویند. این سؤال را به کمک رسم شکل حل می کنیم.



تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ مشتق ناپذیر است (نقاط زاویه دار) و در $x = \pi$ مشتق برابر صفر است. بنابراین تابع دارای سه نقطه ی بحرانی است.

$$\boxed{y = Lnu \rightarrow y' = \frac{u'}{u}, (uv)' = u'v + v'u} \text{ می دانیم: } \text{گزینه ۳}$$

باید بازه ای را پیدا کنیم که در آن بازه، مشتق دوم منفی است.

$$f(x) = (2x+k)Ln(x-1) \rightarrow f'(x) = 2Ln(x-1) + \frac{1}{x-1}(2x+k) = 2Ln(x-1) + \frac{2x+k}{x-1}$$

$$\rightarrow f''(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{2(x-1) - 1(2x+k)}{(x-1)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{-2-k}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1) - 2-k}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x-4-k}{(x-1)^2} < 0 \rightarrow 2x-4-k < 0 \rightarrow 2x < k+4 \rightarrow x < \frac{k+4}{2}$$

از طرفی عبارت جلوی Ln باید مثبت باشد یعنی: $x > 1 \rightarrow x-1 > 0$. از اشتراک دو جواب به دست آمده به $1 < x < \frac{k+4}{2}$

یا $x \in (1, \frac{k+4}{2})$ می رسم.

$$\text{طول بازه} = 6 \rightarrow \frac{k+4}{2} - 1 = 6 \rightarrow \frac{k+4}{2} = 7 \rightarrow k+4 = 14 \rightarrow k = 10$$

۳۵. گزینه ۱ تابع داده شده دارای دو مجانب افقی است و تابع، آن مجانب افقی را که $x \rightarrow -\infty$ روی محور عرض قطع می کند.

$$x \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax-2}{\sqrt{x^2+b}} \stackrel{\text{پر توان}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{-x} = -a \rightarrow y = -a$$

مجانب افقی: $y = -a$

بایه مثبت باشند بنابراین گزینه های دوم و چهارم حذف می شوند. $-a = \frac{-2}{\sqrt{b}} \rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{b}}$
 طول اکستریم نسبی تابع است بنابراین مشتق تابع به ازای $x = -2$ برابر صفر است.

$$f'(x) = \frac{a\sqrt{x^2+b} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+b}}(ax-2)}{x^2+b} = \frac{a(x^2+b) - x(ax-2)}{\sqrt{x^2+b}} = \frac{ax^2+ab-ax^2+2x}{(x^2+b)\sqrt{x^2+b}}$$

$$\frac{f'(-2)=0}{ab-4=0} \rightarrow ab=4 \xrightarrow{a=\frac{2}{\sqrt{b}}} a=1, b=4$$

مشاهده ی گزینه ها

۳۶. گزینه ۲ با توجه به شکل داده شده نقطه ی $A \begin{vmatrix} -2 \\ -16 \end{vmatrix}$ نقطه ی عطف تابع می باشد که در تابع صدق می کند و طولش، مشتق دوم را صفر می کند.

$$A \begin{vmatrix} -2 \\ -16 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} -16 = 16a - 8b \rightarrow 2a - b = -2$$

$$A \begin{vmatrix} -2 \\ -16 \end{vmatrix} \xrightarrow{f''(-2)=0} f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 \rightarrow f''(x) = 12ax^2 + 6bx \rightarrow 48a - 12b = 0$$

$$\rightarrow 4a - b = 0$$

$$\begin{cases} 2a - b = -2 \\ 4a - b = 0 \end{cases} \rightarrow a = 1, b = 4 \rightarrow a \times b = 4$$

۳۷. گزینه ۱ نقاط بحرانی نقاطی از درون دامنه ی تعریف هستند که به ازای آن ها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد. توجه کنید دامنه ی تعریف تابع داده شده $Df = R - \{0\}$ است.

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} + x = \frac{-1+x^3}{x^2} = \frac{x^3-1}{x^2}$$

بحرانی نمی باشد زیرا در دامنه ی تعریف تابع قرار ندارد $\rightarrow x = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x^3 = 0$ صورت $= 0$ \rightarrow بحرانی $x = 1$ \rightarrow صورت $= 0$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y		\searrow	\searrow Min \nearrow	

بنابراین $x = 1$ طول نقطه ی Min نسبی تابع است.

۳۸. گزینه ۲ $x = 0$ مجانب قائم تابع است پس در مخرج صدق می کند.

$$x = 0 \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} 0 + b = 0 \rightarrow b = 0$$

تابع از نقطه ی 0 می گذرد بنابراین این نقطه در تابع صدق می کند.

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow 0 = \frac{4a-1}{2+0} \rightarrow a = \frac{1}{4} \rightarrow a+b = \frac{1}{4}$$

۳۹. گزینه ۲ از روی شکل مشخص است که محور عرض یعنی $x = 0$ مجانب قائم تابع است پس $x = 0$ در مخرج صدق می کند.

$$x = 0 \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} b + 0 = 0 \rightarrow b = 0 \rightarrow f(x) = \frac{2+ax^2}{x}$$

از طرفی تابع از نقطه‌ی $\frac{2}{0}$ عبور می‌کند بنابراین مختصات آن در تابع صدق می‌کند.

$$\left| \frac{۲}{۰} \right| \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} ۰ = \frac{۲ + ۴a}{۲} \rightarrow ۲ + ۴a = ۰ \rightarrow ۴a = -۲ \rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

پس $a + b = -\frac{۱}{۲}$ است.

۴۰. گزینه ۱ طبق هم‌ارزی واندروالسی، $\sqrt[۳]{ax^۳ + bx^۲ + cx + d} \sim \sqrt[۳]{a} \left(x + \frac{b}{۳a}\right)$ است.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[۳]{x^۳ - x^۲} \sim \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[۳]{1} \left(x - \frac{1}{1 \times ۳}\right) \rightarrow y = x - \frac{1}{۳}$$

اکنون مجانب مایل را با منحنی تلاقی می‌دهیم.

$$\sqrt[۳]{x^۳ - x^۲} = x - \frac{1}{۳} \xrightarrow{\text{توان ۳}} x^۳ - x^۲ = x^۳ - x^۲ + \frac{1}{۳}x - \frac{1}{۲۷}$$

$$\rightarrow \frac{1}{۳}x = \frac{1}{۲۷} \rightarrow x = \frac{1}{۹}$$

توجه کنید که $(a - b)^۳ = a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳$ است.

پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۳۷۰۵۱۷

۴ -۵	۴ -۴	۳ -۳	۱ -۲	۱ -۱
۲ -۱۰	۱ -۹	۲ -۸	۱ -۷	۳ -۶
۱ -۱۵	۱ -۱۴	۲ -۱۳	۳ -۱۲	۳ -۱۱
۴ -۲۰	۱ -۱۹	۳ -۱۸	۱ -۱۷	۱ -۱۶
۲ -۲۵	۳ -۲۴	۲ -۲۳	۲ -۲۲	۴ -۲۱
۱ -۳۰	۴ -۲۹	۲ -۲۸	۳ -۲۷	۴ -۲۶
۱ -۳۵	۳ -۳۴	۲ -۳۳	۳ -۳۲	۳ -۳۱
۱ -۴۰	۲ -۳۹	۲ -۳۸	۱ -۳۷	۲ -۳۶