

$$y = (4+3x)(x^2+ax+a)$$

$$4+3x=0 \rightarrow x=-2$$

منحنی y محور x ها را در یک نقطه قطع می کند یعنی تنها یک ریشه دارد.

بدین ترتیب عامل درجه دوم y نباید دارای ریشه باشد و یا تنها دارای ریشه

مضاعف $x=-2$ باشد $\Delta < 0 \rightarrow a^2 - 4a < 0 \rightarrow a(a-4) < 0 \rightarrow \underline{0 < a < 4}$

اما اگر $x=-2$ نیز ریشه مضاعف درجه دوم باشد، مشکلی پیش نمی آید.

از اجتماع ① و ② داریم: $\underline{0 < a \leq 4}$

⑤ $(-2)^2 + a(-2) + a = 0$
 $\rightarrow 4 - 2a + a = 0 \rightarrow \underline{a=4}$

لذا گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$-x^2 + bx + c > 0 \rightarrow 2 < x < 5$$

از این گزاره نتیجه می گیریم که ۲ و ۵ ریشه های معادله ی

$$S = \frac{-b}{a} = 2 + 5 = \frac{-b}{-1} = b = 7 \rightarrow \underline{b=7}$$

$-x^2 + bx + c = 0$ خواهند بود. پس b و c مشخص می شوند.

$$P = \frac{c}{a} = 2 \times 5 = \frac{c}{-1} \rightarrow \underline{c=-10}$$

الکون b و c را در نامعادله اصلی جایگذاری می کنیم.

$$bx^2 - c \left(\frac{1}{10}x + 1\right) - 3(b+1) < 0 \Rightarrow 7x^2 + 10\left(\frac{1}{10}x + 1\right) - 3(7+1) < 0 \Rightarrow 7x^2 + 7x + 10 - 24 < 0$$

$$\Rightarrow 7x^2 + 7x - 14 < 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) < 0 \Rightarrow \underline{-2 < x < 1}$$

پس گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۳- برای حل این سوال، جدول تعیین علامت را رسم می کنیم.

x	-3	0	2
x	-	- 0 +	+
f(x)	+ 0 -	- 0 +	+
$\frac{x}{f(x)}$	- 0 +	0 - 0 +	- 0 +

$$\frac{x}{f(x)} \geq 0 \Rightarrow (-3, 0] \cup (2, +\infty)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{2x^2 - \frac{1}{4}ax - 3}{-x^2 - x - 1} \leq 3 \Rightarrow \frac{2x^2 - \frac{1}{4}ax - 3}{-x^2 - x - 1} - 3 \leq 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - \frac{1}{4}ax - 3 + 3x^2 + 3x + 3}{-x^2 - x - 1} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{5x^2 + (3 - \frac{1}{4}a)x}{-(x^2 + x + 1)} \leq 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{مخرج همواره منفی است} \\ \Delta = 1 - 4 < 0 \\ x^2 \text{ ضریب } < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مخرج همواره مثبت است.}$$

کافی است صورت را تعیین علامت کرده و صورت همواره مثبت باشد. ضمناً صورت می تواند منفی هم باشد.

$$5x^2 + (3 - \frac{1}{4}a)x = 0 \Rightarrow x(5x + 3 - \frac{1}{4}a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 5x + 3 - \frac{1}{4}a = 0 \end{cases}$$

* یکی از ریشه های صورت برابر $x=0$ است.

اگر ریشه ی دیگر عددی غیر از

صفر باشد، هیچ گاه صورت همواره مثبت نخواهد شد. پس ریشه ی دیگر نیز باید صفر باشد.
 $5x + 3 - \frac{1}{4}a = 0$
 \downarrow
 $3 - \frac{1}{4}a = 0 \rightarrow \underline{a=4}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۵- با توجه به محدوده عبارت $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ $\tan x$ بین اعداد -1 و 1 محدود می‌شود. پس $-1 < \tan x < 1$

① $-1 < \frac{1-m}{r+m} < 1 \Rightarrow \frac{1-m}{r+m} > -1 \Rightarrow \frac{1-m}{r+m} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{1-m+r+m}{r+m} > 0 \Rightarrow \frac{r}{r+m} > 0 \Rightarrow m > -r$

② $\frac{1-m}{r+m} < 1 \Rightarrow \frac{1-m}{r+m} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1-m-r-m}{r+m} < 0 \Rightarrow \frac{-2m-1}{r+m} < 0$

m	-r	-1/2
-2m-1	+	+
r+m	-	+
p	-	-

② $(-\infty, -r) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$

جواب سؤال ۵ اشتراک ① و ② است. لذا $m \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$ و $m > -\frac{1}{r}$ خواهد بود و گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۶- این سؤال را همانند بسیاری از سؤالات مثلثات، می‌توان از روش فرمولی و جایگذاری عددی حل نمود.

روش فرمولی: $A = \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x = \frac{1-2\sin^2 x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x$

$\Rightarrow A = \frac{(1-\sqrt{2} \sin x)(1+\sqrt{2} \sin x) - \sqrt{2}(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{-(1-\sqrt{2} \sin x)(\sin x + \cos x)} + \sqrt{2} \cos x$

$\Rightarrow A = -1 - \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x = -1 \Rightarrow \boxed{A = -1}$

روش عددگذاری: $\alpha = 0$ $\Rightarrow A = \frac{\cos 0}{\sqrt{2} \sin 0 - 1} - \frac{\sqrt{2} \cos 0}{\sin 0 + \cos 0} + \sqrt{2} \cos 0 = \frac{1}{-1} - \frac{\sqrt{2}}{1} + \sqrt{2} = -1$

توضیح: $\alpha = 0$ را به عنوان مثال انتخاب کردیم. عددی که هم نسبت‌های مثلثاتی آن، آسان بدست آید و هم در دامنه تابع وجود داشته باشد. پس گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$A = \tan \frac{\pi}{9} + \tan \frac{2\pi}{9} + \dots + \tan \frac{8\pi}{9} = (\tan \frac{\pi}{9} + \tan \frac{8\pi}{9}) + (\tan \frac{2\pi}{9} + \tan \frac{7\pi}{9})$

$+ (\tan \frac{3\pi}{9} + \tan \frac{6\pi}{9}) + (\tan \frac{4\pi}{9} + \tan \frac{5\pi}{9}) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0}$

نکته: اگر $a+b = \pi$ باشد، آنگاه $\tan a + \tan b = 0$ و $\cot a + \cot b = 0$ خواهد بود. پس گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

روش فرمولی: $\tan x \cdot \tan 2x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{\cos 2x} = k$

$\Rightarrow \frac{(2 \sin^2 x - 1) + 1}{\cos 2x} = \frac{-\cos 2x + 1}{\cos 2x} = k \Rightarrow -1 + \frac{1}{\cos 2x} = k \Rightarrow \frac{1}{\cos 2x} = k + 1 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{k+1}$

روش عددگذاری: به عنوان مثال x را برابر صفر انتخاب می‌کنیم. پس $\tan 0 \times \tan 0 = 0 = k$ با $\alpha = 0$ مقدار k برابر صفر می‌شود. همچنین $\cos 2x$ برای $\alpha = 0$ برابر ۱ خواهد شد. در گزینه‌ها $k=0$ را گذاشته و هر کدام برابر ۱ شد، جواب صحیح خواهد بود. می‌بینیم که گزینه‌های ۳ و ۴ این ویژگی را دارند. پس $\alpha = 0$ انتخاب مناسبی است.

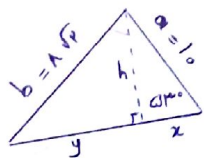
ارامه ی جواب سؤال ۸ : $x = \frac{\pi}{6}$ را انتخاب می کنیم

$$\cos \frac{2\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{1} \cdot \sqrt{3} = 3 = k$$

به ازای $k=1$ باید گزینه صحیح برابر $\frac{1}{2}$ شود. تنها گزینه ۳

دارای این شرط است. لذا گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$h = a \sin 53^\circ = 10 \times 0.8 = 8$$

$$y = \sqrt{b^2 - h^2} = \sqrt{2 \times 64 - 64} = \sqrt{64} = 8$$

$$x = \sqrt{a^2 - h^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \times h \times (x+y)$$

$$S = \frac{1}{2} \times 8 \times (6+8) = 4 \times 14 = 56$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

-9

$$\sin x = \cos 2x$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} -1 = \sin x \\ \frac{1}{2} = \sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi}{6} \\ \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow i = \{1, 5, 9\}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

-10

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \sin^2 2x \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بازه ی $[2\pi, 4\pi]$ دارای یک دوره $\sin 2x$ است. بین دو یک دوره π است. پس در یک دوره 2 بار تکرار می شود. همچنین در یک دوره 2 تناوب $\frac{1}{2}$ وجود دارد. لذا در مجموع، 8 ریشه در بازه ی مورد نظر وجود دارد. گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

-11

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A = 102^\circ$$

$$AB = 94^\circ$$

$$\Rightarrow B = 34^\circ - (102^\circ + 94^\circ + 54^\circ) = 108^\circ \leftarrow \text{زاویه بروه B}$$

$$O : \frac{24}{120} \times 340 = 54^\circ \quad \text{تفر} \quad 12 \times 4 = 48 = \frac{108}{34} \times 120 \Rightarrow \text{تعداد افراد گروه B}$$

-12

$$\text{واریانس} = \sigma^2 = 3 \Rightarrow \sigma = \sqrt{3}, \bar{x} = 19, \text{ ۱۳ داده آماری}$$

با افزودن ۱۶، ۱۹، ۲۲، داده های قبلی میانگین داده ها تغییری نمی کند.

$$\text{مجموع مربعات انحراف از میانگین} = \frac{\text{مجموع مربعات}}{12} = 3 \Rightarrow \text{مجموع مربعات} = 36 \leftarrow \text{داده های قبلی}$$

$$\text{مجموع مربعات انحراف از میانگین جدید} = 36 + (22-19)^2 + (19-19)^2 + (16-19)^2 = 36 + 9 + 9 = 54$$

$$\text{واریانس داده های جدید برابر } 36 \text{ می شود} \Rightarrow \text{انحراف معیار جدید} = \sqrt{36} = 6 \Rightarrow \text{واریانس جدید} = \frac{54}{15} = 3.6$$

معیار تغییرات = $\frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}}$ انحراف معیار بیشتر شده و میانگین تغییری نکرده است.

پس ضریب تغییرات داده های جدید بیشتر می شود. لذا گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

-۱۴

مرکز دسته	۱۶	۱۹	۲۲	۲۵	۲۸
دامان	۲	۴	۶	۳	۵

چون اعداد بزرگ بوده و ضرب و جمع و تقسیم کمی مشکل می شود،
 یک میانگین فرضی در نظر می گیریم و کل مرکز دسته ها را از آن
 کم می کنیم. در اینجا ۲۲ را به عنوان میانگین فرضی در نظر می گیریم و داریم:

$$\begin{array}{r} | -6 \quad -3 \quad 0 \quad 3 \quad 6 \\ \hline | 2 \quad 4 \quad 6 \quad 3 \quad 5 \end{array}$$

میانگین

$$\frac{2 \times (-6) + 4 \times (-3) + 6 \times (0) + 3 \times (3) + 5 \times (6)}{2 + 4 + 6 + 3 + 5} = \frac{-12 - 12 + 0 + 9 + 30}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$22 + 3a = 22 + \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4} = \boxed{0.25}$$

میانگین داده ها برابر $22 + \frac{3}{4}$ است. پس داریم:
 گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۵- ابتدا داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم.
 ۴، ۴، ۵، ۶، ۷، ۹، ۹، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۴

$$\text{میانگین کل داده ها} = \frac{4+4+5+6+7+9+9+9+10+11+14}{11} = 8 = \bar{x}$$

میانگین داده های داخل جعبه:

$$\frac{4+7+9+9+9}{5} = 8$$

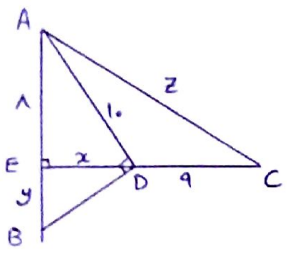
واریانس = $\frac{(4-8)^2 + (7-8)^2 + (9-8)^2 + (9-8)^2 + (9-8)^2}{5} = 1.6 = \frac{8}{5}$

معیار انحراف = $\sqrt{\frac{8}{5}}$ ضریب تغییرات = $CV = \frac{\sqrt{\frac{8}{5}}}{8}$

$$\bar{x} \cdot CV^2 = 8 \times \frac{8}{64} = \frac{1}{8} = \boxed{0.125}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

-۱۶



$$x^2 = 100 - 4y \Rightarrow x = \boxed{6}$$

$$z^2 = 4y + (4+y)^2 = 4y + 22y \Rightarrow z = \boxed{17}$$

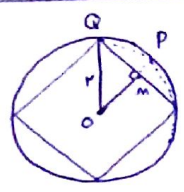
$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = BD^2 \\ BD^2 = (8+y)^2 - 10^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4^2 + y^2 = (8+y)^2 - 100 = 4y + y^2 + 16y - 100$$

$$\Rightarrow 16y = 72 \Rightarrow y = \frac{72}{16} = \boxed{\frac{9}{2}}$$

$$x - 2y + z = 6 - 9 + 17 = \boxed{14}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

-۱۷



طول ضلع PQ جواب این سوال خواهد بود.

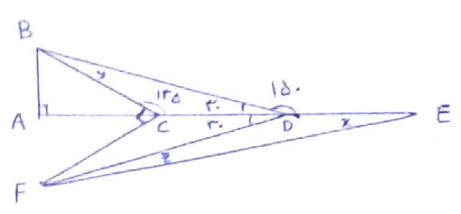
$$OM = \sqrt{2} = MQ$$

$$MP = r - \sqrt{2} \Rightarrow PQ^2 = MQ^2 + MP^2$$

$$PQ^2 = (\sqrt{2})^2 + (r - \sqrt{2})^2 = 2 + 4 + 2 - 4\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2}$$

$$PQ = \sqrt{8 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{4(2 - \sqrt{2})} = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



چون دو مثلث BCD و FCD هم نهشت هستند، پس $\hat{BDC} = \hat{FDC}$

$$\hat{y} = 180 - (135 + 20) = 15^\circ$$

با توجه به اطلاعات مسئله، نمی توان \hat{x} و \hat{z} را جداگانه بدست آورد. ولی سوال به گونه ای است که مجموع $\hat{x} + \hat{z}$ از ما خواسته شده است.

$$\hat{FDE} = 15^\circ \Rightarrow \hat{x} + \hat{z} = 30^\circ$$

$$M = (2y - x) + (y - z) = 3y - x - z = 3y - (x + z) = 3 \times 15 - 30 = 15^\circ$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

-۱۹

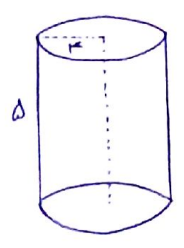
در این سوال با توجه به خطوط موازی از قضیه تالس استفاده می کنیم.

$$\left. \begin{aligned} AC \parallel BD &\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \\ BC \parallel DE &\Rightarrow \frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OD} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OE} \Rightarrow OB^2 = OA \cdot OE$$

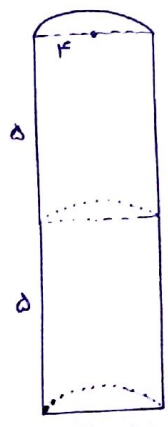
$$OB = \sqrt{3 \times 12} = 6$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

-۲۰



⇒



دو سطح جانبی نیمه + دو نیم دایره + سطح مستطیلی = سطح کل

$$S_{\text{کل}} = (10 \times 5) + \left(2 \times \frac{\pi \times 4^2}{2}\right) + (4\pi \times 5)$$

$$S_{\text{کل}} = 50 + 16\pi + 20\pi = 50 + 36\pi$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.