۱-

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(2/02) - f(2)}{2/02 - 2} = \frac{\frac{202}{102} - 2}{\frac{202}{100} - 2} = \frac{\frac{202-204}{102}}{\frac{2}{100}} = \frac{100 \times (-2)}{102 \times 2}$$

$$f(2/02) = \frac{\frac{202}{100}}{\frac{202}{100} - 1} = \frac{\frac{202}{100}}{\frac{202-100}{100}} = \frac{202}{102}$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \boxed{-\frac{50}{51}}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع

$$f'(2) = ?$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \rightarrow f'(2) = \frac{-1}{1} = \boxed{-1}$$

$$\Longrightarrow \text{اختلاف} = \left|-\frac{50}{51} - (-1)\right| = \frac{51-50}{51} = \boxed{\frac{1}{51}}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲- نکته: جهت مشتق‌گیری از تابع تشکیل شده از ضرب چند عبارت در نقطه‌ای خاص، تنها کافی است از عامل صفرکننده آن تابع در آن نقطه مشتق گرفته و علامت گذاری کنیم.

در این سؤال عامل صفرکننده، عبارت (x^2-4) است. پس ابتدا از این عبارت مشتق‌گیری کرده و بقیه عبارت را فقط جایگذاری می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{(x^2-4) \cdot \sqrt[3]{4x^2-17}}{x^3-4}$$

عامل صفرکننده

بقیه عوامل

مشتق عامل صفرکننده

$$f'(2) = ? = (2x) \times \frac{\sqrt[3]{4x^2-17}}{x^3-4}\Bigg|_{x=2}$$

$$\Longrightarrow f'(2) = 2 \times 2 \times \frac{\sqrt[3]{16-17}}{8-4} = \boxed{-1}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۳-

$$f(x) = \frac{x^2-1}{2-x^2} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{\sqrt{4x-3}}{2} \qquad A = \sqrt{g'(x) \cdot f'(g(x))}$$

اگر به عبارت زیر رادیکال دقت کنیم، با توجه به قاعده مشتق زنجیره‌ای داریم:

$$\big(f(g(x))\big)' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

پس کافی است عبارت fog را تشکیل داده و سپس از آن مشتق بگیریم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{\frac{4x-3}{4} - 1}{2 - \frac{4x-3}{4}} = \frac{\frac{4x-3-4}{4}}{\frac{8-4x+3}{4}} = \frac{4x-7}{11-4x} = \frac{4x-7}{-4x+11}$$

تابع fog هموگرافیک بوده و از آن مشتق می‌گیریم:

$$(fog)'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \frac{44-28}{(11-4x)^2} = \frac{16}{(11-4x)^2}$$

اگر از عبارت روبرو جذر بگیریم، حاصل A به دست می‌آید:

$$A = \sqrt{\frac{16}{(11-4x)^2}} = \frac{4}{|11-4x|} \xrightarrow{1<x<2} A = \frac{4}{11-4x}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

ادامه پاسخ تشریحی سؤالات آزمون ریاضی آنلاین

۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \to ۳} \frac{f(x) - f(۳)}{x - ۳} = f'(۳) = ?$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{۳}}{\pi} \cdot \sqrt{۳ + ۲\cos\frac{\pi}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{۳}}{\pi} \cdot \frac{(۲)(\frac{\pi}{x^۲})\sin\frac{\pi}{x}}{۲\sqrt{۳ + ۲\cos\frac{\pi}{x}}} \Longrightarrow f'(۳) = \frac{\sqrt{۳}}{\pi} \times \frac{۲ \times \frac{\pi}{۹} \times \sin\frac{\pi}{۳}}{۲\sqrt{۳+۱}} = \frac{\sqrt{۳}}{\pi} \times \frac{۲\pi}{۹} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴\times۲} = \boxed{\frac{۱}{۱۲}}$$

۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{۱ + \sqrt{۱ + x^۲}}$$

جهت پیدا کردن نقطه‌ی برخورد تابع f با $y = \sqrt{۳}$، این دو مقدار را مساوی هم قرار می دهیم.

$$f(x) = \sqrt{۳} \Rightarrow \sqrt{۱ + \sqrt{۱+x^۲}} = \sqrt{۳} \Longrightarrow ۱ + \sqrt{۱+x^۲} = ۳ \rightarrow \sqrt{۱+x^۲} = ۲ \Longrightarrow x^۲ = ۳$$

$\Longrightarrow x = \pm\sqrt{۳} \longleftarrow$ طول‌های نقاط برخورد

$$f'(x) = \frac{\frac{۲x}{۲\sqrt{۱+x^۲}}}{۲\sqrt{۱+\sqrt{۱+x^۲}}} \Longrightarrow f'(\sqrt{۳}) = \frac{\frac{۲\sqrt{۳}}{۴}}{۲\sqrt{۳}} = \boxed{\frac{۱}{۴}} \quad , \quad f'(-\sqrt{۳}) = \frac{\frac{-۲\sqrt{۳}}{۴}}{۲\sqrt{۳}} = \boxed{-\frac{۱}{۴}}$$

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x + y + \sqrt{xy} = ۱$$

مماس در نقطه‌ی $A(a, b)$ برابر صفر است. لذا برای یافتن مختصات نقطه A، مشتق را برابر صفر قرار می دهیم.

مشتق ضمنی : $y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۱ + \frac{y}{۲\sqrt{xy}}}{۱ + \frac{x}{۲\sqrt{xy}}} = -\frac{\frac{۲\sqrt{xy} + y}{۲\sqrt{xy}}}{\frac{۲\sqrt{xy} + x}{۲\sqrt{xy}}} = -\frac{۲\sqrt{xy} + y}{۲\sqrt{xy} + x} = ۰ \Longrightarrow ۲\sqrt{xy} + y = ۰$

$\Rightarrow ۲\sqrt{xy} = -y$

طرفین رابطه روبرو را به توان ۲ می رسانیم. با یک شرط و آن اینکه طرف چپ مثبت است. باید طرف راست نیز مثبت باشد. چون ضریب y منفی است پس y هم باید منفی باشد. $(y \leqslant ۰)$

$$(۲\sqrt{xy})^۲ = (-y)^۲ \Longrightarrow ۴xy = y^۲ \rightarrow y^۲ - ۴xy = ۰ \Longrightarrow y(y - ۴x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۰ & ① \\ y = ۴x & ② \end{cases}$$

$① \rightarrow y = ۰ \Longrightarrow$ جایگذاری در معادله اصلی $\Longrightarrow x + ۰ + \sqrt{x \times ۰} = ۱ \Longrightarrow x = ۱ \Rightarrow \boxed{A(۱, ۰)}$

$② \Rightarrow y = ۴x \Rightarrow x + ۴x + \sqrt{x \cdot ۴x} = ۱ \Rightarrow ۵x + |۲x| = ۱ \xrightarrow{y<۰ \rightarrow x<۰} ۵x - ۲x = ۳x = ۱ \rightarrow x = \frac{۱}{۳} > ۰$ ✗

باید x هم منفی شود. چون مثبت شد پس غیر قابل قبول است.

پس در نتیجه تنها نقطه‌ی جواب نقطه‌ی (۱و۰) است. پس $\begin{cases} a = ۱ \\ b = ۰ \end{cases}$

۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \underbrace{\sin x \cdot \cos x \cdot \sin 3x}_{\text{بقیه عوامل}} \cdot \underbrace{\cos 3x}_{\text{عامل صفرکننده}} \qquad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = ?$$

همانند سؤال ۲ در این سؤال نیز تنها از عامل صفرکننده مشتق می‌گیریم.

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin x \cdot \cos x \cdot \sin 3x \cdot (-3\sin 3x)\Big|_{x=\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{2} \cdot \left(-3\sin\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 \times (-3) = \boxed{-\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

اکیداً نزولی یعنی مشتق تابع در آن بازه منفی باشد.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

لذا مشتق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم.

$$3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x		0		2	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$

می‌بینیم که در بازه‌ی $(0,2)$ تابع f اکیداً نزولی است. لذا $b - a = 2$

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$4x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-3	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f'	$-$		$+$		$-$		$+$
	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

پس $x=0$ طول نقطه‌ی max و $x = \pm\sqrt{3}$ طول نقاط min نسبی تابع

$f(0) = 5 \Rightarrow A(0,5) \rightarrow$ max نسبی تابع

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$ طول نقاط عطف

$$f(1) = 1 - 6 + 5 = 0$$
$$f(-1) = 1 - 6 + 5 = 0$$

نقاط $B(1,0)$ و $C(-1,0)$ نقاط عطف تابع f هستند. فاصله‌ی بین این نقاط تا نقطه‌ی $A(0,5)$:

$$AB = \sqrt{(1-0)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{26} \quad , \quad AC = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{26}$$

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + a}$$

اگر یک تابع دارای اکسترمم نسبی باشد، یعنی مشتق آن تابع دارای ریشه حقیقی است.

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+a) - 1 \times (x^2 - 2x)}{(x+a)^2} = \frac{2x^2 + 2ax - 2x - 2a - x^2 + 2x}{(x+a)^2} = \frac{x^2 + 2ax - 2a}{(x+a)^2}$$

اگر مشتق بخواهد ریشه داشته باشد، پس صورت کسر باید دارای ریشه باشد.

Δ صورت $\geq 0 \rightarrow 4a^2 + 8a \geq 0$

a		-2		0	
Δ	$+$	0	$-$	0	$+$

$a \leq -2$ یا $a \geq 0$

اکنون بایسم و مشتق تابع f را در نقاط $a=0$ و $a=-2$ هم بررسی کنیم.

$$f'(x)\Big|_{a=0} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \neq 0$$

$$f'(x)\Big|_{a=-2} = \frac{x^2 - 4x + 4}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2} = 1 \neq 0$$

پس نقاط $a=0$ و $a=-2$ از بازه جواب حذف می‌شوند $(a < -2$ یا $a > 0)$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$f(x) = 3x^3 - 9x \quad [0,2]$

برای یافتن بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع در یک بازه‌ی مشخص مقادیر تابع در ابتدای بازه و انتهای بازه و هم‌چنین در نقاط بحرانی تابع را یافته و از بین آن‌ها max و min مطلق را مشخص می‌کنیم.

$f'(x) = 9x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ $x = -1$ در بازه مورد نظر نیست $\Rightarrow x = 1$

$f(0) = 0$

$f(2) = 3 \times 8 - 9 \times 2 = 24 - 18 = 6 \Rightarrow$ مطلق max

$f(1) = 3 - 9 = -6 \Rightarrow$ مطلق min

$\Rightarrow$ اختلاف $= |6 - (-6)| = \boxed{12}$

۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$

نقاطی که در دامنه‌ی f تعریف شده و مشتق f در آن نقاط صفر یا تعریف نشده باشد را نقاط بحرانی f می‌گوییم.

$$f'(x) = \frac{2x(x-3) - (x^2+1)}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - x^2 - 1}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x - 1}{(x-3)^2} = 0$$

$\Rightarrow x^2 - 6x - 1 = 0 \quad \Delta = 36 + 4 = 40 > 0 \rightarrow$ پس مشتق دو ریشه حقیقی دارد یعنی ۲ نقطه‌ی بحرانی که به ازای آن‌ها $f'(x) = 0$.

اما نقطه‌ی $x = 3$ نیز می‌تواند کاندید نقطه‌ی بحرانی باشد. چون مشتق به ازای آن تعریف نشده است. ولی چون $x = 3$ در دامنه‌ی تابع قرار ندارد، پس نمی‌تواند نقطه‌ی بحرانی f باشد. لذا f دارای ۲ نقطه‌ی بحرانی است.

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$y = (x-1)\ln x$

یافتن جهت تقعر مربوط به مشتق دوم است.

$y' = (1 \times \ln x) + \frac{1}{x}(x-1) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$

$y'' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = -1$

x		-1	
y''	$-$	0	$+$

پس در بازه‌ی $(-1, +\infty)$ تقعر y به سمت بالا است. لذا $\begin{cases} a = -1 \\ b = +\infty \end{cases} \Rightarrow a - b = -1 - \infty = \boxed{-\infty}$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

جهت حل این سؤال باید بدانیم که اگر در یک بازه، تابع f نزولی باشد مشتق در آن بازه منفی است و اگر صعودی باشد مشتق در آن بازه مثبت است. هرچه شدت (شیب) نزولی و صعودی بودن بیشتر باشد، اندازه‌ی مشتق نیز بزرگتر خواهد بود. در بازه‌ی $x < 0$ تابع f نزولی است. پس مشتق باید منفی باشد. (زیر محور x ها) لذا گزینه ۴ حذف می‌شود. مشاهده می‌شود که در اطراف $x = 0$ شدت صعودی و نزولی بودن تابع f بیشتر است. پس در اطراف صفر باید اندازه‌ی مشتق بزرگتر باشد و به تدریج با دور شدن از صفر و کم شدن شدت صعود و نزول تابع اندازه‌ی مشتق نیز کمتر شود. با این تفاسیر گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$f(x) = x^4 - 7x^2 + 4x \qquad [-1,1]$

برای بررسی جهت تقعر تابع f به آزمون مشتق دوم نیاز داریم.

$f'(x) = 4x^3 - 14x + 4$

$f''(x) = 12x^2 - 14 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{7}{6} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{6}}$

مشاهده می کنیم که در نقاط $x = \pm\sqrt{\frac{7}{6}}$ که ریشه های مشتق دوم هستند جهت تقعر عوض می شود. ولی باید به این نکته سؤال توجه شود که تغییرات جهت تقعر در بازه $[-1,1]$ را خواسته است و هردو نقطه ی $x = \pm\sqrt{\frac{7}{6}}$ خارج از بازه ی مذکور هستند.
لذا در این بازه، جهت تقعر تابع f تغییر نمی کند.

۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$f(x) = \frac{x^3 + ax^2}{x^2 + bx + c}$

همانطور که در نمودار مشخص است $x=3$ مجانب قائم تابع f است.

پس مخرج تابع f باید به صورت $(x-3)^2$ باشد. $x^2 + bx + c = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 \to \begin{cases} \boxed{b=-6} \\ \boxed{c=9} \end{cases}$

اکنون باید مجانب مایل تابع را بیابیم.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + ax^2 & x^2 - 6x + 9 \\ \hline -x^3 + 6x^2 - 9x & \underbrace{x + (a+6)}_{\text{مجانب مایل}} \\ \hline (a+6)x^2 - 9x & \\ \vdots & \end{array}$$

روی نمودار مجانب مایل از نقاط $(-2,0)$ و $(0,2)$ می‌گذرد. پس خط $y = x+2$ مجانب مایل است.

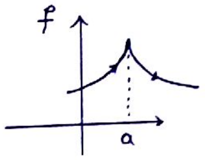
$x + 2 = x + (a+6) \Rightarrow \boxed{a=-4}$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

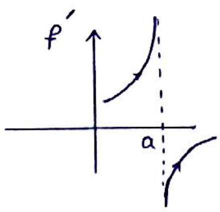
گزینه ۱ ← جهت تقعر یعنی مشتق دوم تابع. اگر جهت تقعر رو به بالا باشد یعنی مشتق دوم تابع مثبت بوده و مشتق اول صعودی خواهد بود. لذا این گزاره کاملاً صحیح است.

گزینه ۲ ← اگر تابع f نزولی باشد، مشتق آن منفی یعنی زیر محور xها است. این گزاره نیز صحیح است.

گزینه ۳ ← نقطه ی گوشه یعنی نقطه ای که در آن مشتق چپ و راست موجود ولی نابرابر است. لذا این گزینه گزاره صحیحی بیان نکرده است.



$\Rightarrow$



گزینه ۴ ← در شکل مقابل می‌بینیم که $x=a$ نقطه بازگشتی f بوده و در تابع f' همان نقطه مجانب قائم است.

۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$f(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + 4x}}{x^2 - 4}$

از آنجا که درجه صورت از درجه مخرج کمتر است، لذا مجانب افقی و مایل نداریم.

جهت یافتن مجانب قائم ریشه های مخرج را می یابیم.

$x^2 - 4 = 0 \to \underbrace{x = \pm 2}_{\text{ریشه های مخرج}}$

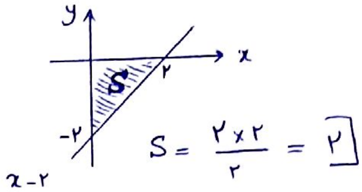
نقطه ی $x=-2$ در دامنه تابع f قرار ندارد. پس تنها نقطه ی $x=+2$ مجانب قائم بوده و تابع f در مجموع ۱ مجانب دارد.

۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + 2}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x^2 + 1 & x^2 + 2 \\ \cline{2-2} -x^3 - 2x & x - 2 \\ \hline -2x^2 - 2x + 1 & \\ 2x^2 + 4 & \\ \hline -2x + 5 & \end{array}$$

$x - 2 \longrightarrow$ مجانب مایل تابع f



$$S = \frac{2 \times 2}{2} = \boxed{2}$$

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x|x-3| = \begin{cases} x(x-3) & x \geq 3 \\ x(-x+3) & x < 3 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 3x & x \geq 3 \\ -x^2 + 3x & x < 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & x > 3 \\ \text{وجود ندارد} & x = 3 \\ -2x + 3 & x < 3 \end{cases}$$

$f'_+(3) = 3$

$f'_-(3) = -3$ $\Rightarrow$ مشتق اول در $x = 3$ وجود ندارد.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & x > 3 \\ \text{وجود ندارد} & x = 3 \\ -2 & x < 3 \end{cases}$$

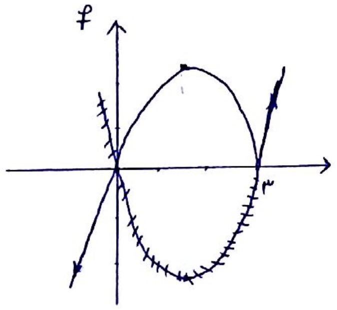
جهت تقعر تابع f در نقطه‌ی $x = 3$ تغییر کرده است.

ولی از آنجا که مشتق اول در این نقطه وجود ندارد، لذا

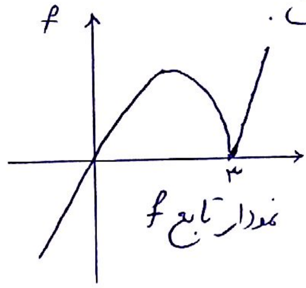
$x=3$ نقطه‌ی عطف تابع f به حساب نمی‌آید.

درنتیجه این تابع فاقد نقطه‌ی عطف است.

راه دوم: استفاده از رسم نمودار



$\Rightarrow$



نمودار تابع f

مشاهده می‌شود که نقطه‌ی عطفی برای تابع f وجود ندارد.