مجموعه اعداد

یکی از مهمترین مفاهیم در ریاضیات مجموعه‌ها هستند که در این میان مجموعه‌های اعداد از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار می‌باشد و به شرح زیر بیان می‌گردد.

مجموعه اعداد طبیعی $N=\{۱,۲,۳,۴,۵,...\}$

مجموعه اعداد حسابی $W=\{۰,۱,۲,۳,۴,۵,...\}$

مجموعه اعداد صحیح $Z=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,+۱,+۲,+۳,...\}$

نکته : بی‌شمار مجموعه اعداد گویا داریم

مجموعه اعداد گویا $Q=\left\{\frac{a}{b}\middle| b\neq ۰,\ a,b\in Z\right\}$

مجموعه اعداد گنگ یا اصم $Q'=\{$همه اعدادی که گویا نیستند$\}$

مجموعه اعداد حقیقی $R=\{$شامل کلیه اعداد$\}$

برای تشخیص اعداد گویا و گنگ موارد زیر را باید در نظر بگیریم.

۱- هر عدد اعشاری مختوم (با پایان) عدد گویا می‌باشد.

۲- هر عدد اعشاری نامختوم که دور در گردش نداشته باشد گنگ است.

۳- هر عدد رادیکالی که جذر دقیق نداشته باشد گنگ است.

مجموعه اعداد اول:

اعدادی که جز بر خودشان و یک بر عدد دیگری بخش‌پذیر نباشند.

تذکر۱: عدد یک جزء اعداد اول محسوب نمی‌شود.

$P=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,...\}$

تذکر ۲: تنها عدد زوج اول، عدد ۲ می‌باشد.

تجزیه عدد: گوییم عدد A تجزیه شده است اگر به عوامل اول تجزیه شده باشد.

تذکر:

تعداد اعضای مجموعه $A \Rightarrow n(A)$

تعداد اعضای مجموعه $B \Rightarrow n(B)$

اگر B , A دو مجموعه نامتناهی باشند و بتوان بین اعضای B , A تناظر یک به یک برقرار نمود گوئیم A , B دو مجموعه هم‌ارزند مانند هم‌ارز بودن اعداد طبیعی زوج و فرد.

$$\begin{matrix} E=\{۲, & ۴, & ۶, & ۸, & ...\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ O=\{۱, & ۳, & ۵, & ۷, & ...\} \end{matrix} \Rightarrow E\sim O$$

مجموعه تهی: مجموعه‌ای است که خالی از عضو باشد و با علامت زیر نمایش داده می‌شود.

$\emptyset=\{\ \}$

مجموعه مرجع

مجموعه‌ای است که شامل تمام مجموعه‌هاست و با M یا U نمایش می‌دهیم

زیرمجموعه:

A را زیرمجموعه B گوئیم اگر تمام اعضای A داخل B باشد و به صورت زیر می‌نویسیم $A\subset B$.

نکته ۱: هر مجموعه زیرمجموعه خودش است.

نکته ۲: تهی زیرمجموعه تمام مجموعه‌هاست.

تذکر: برای محاسبه تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

(n تعداد اعضاء) $۲^n=$ تعداد زیرمجموعه

یک مجموعه ۵ عضوی چند زیرمجموعه دارد.

$۲^n\ (n=۵)=۲^۵=۳۲$ = تعداد زیرمجموعه

اجتماع دو مجموعه:

اگر A و B دو مجموعه باشند اجتماع آن دو مجموعه را به صورت زیر نمایش می‌دهیم. $\boxed{A\cup B}$

$A\cup B=\{x | x\in A$ یا $x\in B\}$

۱) $A\cup B=B\cup A$

۲) $A\cup M=M$

۳) $A\cup\emptyset=A$

طرف اول   طرف دوم

۴) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

اشتراک دو مجموعه:

اگر A و B دو مجموعه باشند اشتراک A و B را به صورت زیر نمایش می‌دهیم $A\cap B$ و نمودار آن به شرح زیر است. (نمودار ون)

$A\cap B=\{x | x\in A\ ,\ x\in B\}$

رابطه بین اعضای دو مجموعه و اجتماع و اشتراک دو مجموعه به شرح زیر است.

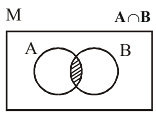
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

۱) $A\cap B=B\cap A$

۲) $A\cap\phi=\phi$

۳) $A\cap M=A$

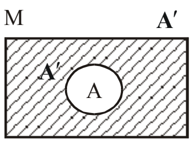
۴) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$



متمم یک مجموعه:

اگر A یک مجموعه باشد متمم مجموعه A را به صورت A' نمایش می‌دهیم نمودار ون آن به شرح زیر می‌باشد.

$A'=\{x | x\notin A\}$

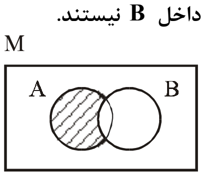


تفاضل دو مجموعه:

اگر A و B دو مجموعه باشند تفاضل دو مجموعه A و B را به شرح زیر نمایش می‌دهیم.

$\boxed{A-B}$

یعنی همه‌ی اعضایی که داخل A هستند و داخل B نیستند.



قانون تفاضل:

اگر A و B دو مجموعه باشند در این صورت همواره داریم:

$A-B=A\cap B'$

مجموعه‌های باز و بسته:

برای بررسی باز و بسته بودن یک مجموعه کافیست دو عضو آن مجموعه را نسبت به خودش یا نسبت به عضو دیگر در نظر بگیریم اگر حاصل نسبت به آن عمل داخل مجموعه بود در این صورت نسبت به آن عمل بسته و در غیر این صورت باز است.

چند خاصیت محاسباتی در رادیکال‌ها:

۱) $a\sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{a^m \times x}$

۲) $\sqrt[m]{x^n} = \sqrt[\frac{m}{k}]{x^{\frac{n}{k}}} = \sqrt[m\times k]{x^{n\times k}}$

۳) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[e]{\sqrt[f]{x}}}} = \sqrt[mnef]{x}$

۴) $(\sqrt[m]{x})^p = \sqrt[m]{x^p} = \sqrt[\frac{m}{p}]{x}$

تمرین : حاصل $A\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3....\sqrt{3}}}}$ را به دست آورید؟

حاصل برابر $A = 3$ می‌باشد.

نکته: همواره داریم: $\sqrt{A\sqrt{A\sqrt{A...\sqrt{A}}}} = A$

تذکر: در هر رادیکال همواره داریم:

$$\sqrt[n]{a\times b} = \sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a\pm b} \neq \sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}$$

تذکر: برای ساده کردن رادیکال بالا از نکته زیر استفاده می‌کنیم.

$$\sqrt[2]{x^1\sqrt[3]{x^1\sqrt[2]{x^1}}} = \sqrt[\text{ضرب فرجه‌ها}]{x^{\text{هر توان در فرجه‌های مقابل ضرب می‌شود و با هم جمع شوند}}}$$

$$= \sqrt[2\times3\times2]{x^{(1\times3\times2)+(1\times2)+1}} = \sqrt[12]{x^{6+2+1}} = \sqrt[12]{x^9}$$

معادلات:

معادله درجه ۱: معادله‌ای که بزرگترین توان x آن عدد یک باشد.

هر معادله درجه ۱، یک جواب دارد.

نکته: اگر معادله کسری برابر صفر باشد کافیست صورت کسر را برابر صفر قرار دهیم و با مخرج کاری نداریم.

معادلات ممتنع و معادلات مبهم:

معادله‌ای که فاقد جواب باشد معادله ممتنع است.

معادله‌ای که دارای بی‌شمار جواب باشد معادله مبهم است.

نکته: در هر معادله مبهم و ممتنع x از بین می‌رود.

دستگاه دو معادله دو مجهولی:

فرم کلی هر دستگاه در معادله دو مجهول به شرح زیر است:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

حل و بحث دستگاه دو معادله دو مجهول:

۱) $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b_1}$ دستگاه جواب دارد

۲) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ دستگاه جواب ندارد (ممتنع)

۳) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد. (مبهم)

معادلات درجه ۲

فرجه کلی هر معادله درجه ۲ به شرح $ax^2+bx+c=0$ زیر است.

مهمترین قسمت در معادله درجه ۲ ضرب c,b,a هستند.

برای حل ابتدا Δ را تشکیل می‌دهیم. سپس از طریق فرمول b ریشه‌ها را به دست می‌آوریم.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 & \text{در ریشه نابرابر داریم} \Rightarrow \text{دو ریشه متمایز} \Rightarrow x_1 \neq x_2 \\ \Delta = 0 & \text{دو ریشه برابر داریم} \Rightarrow \text{دو ریشه مضاعف} \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \Delta < 0 & \text{ریشه نداریم} \end{cases}$$

$$x_1,x_2 = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

نکته۱: برای محاسبه ضرب ریشه‌ها داریم:

$$P = X_1\times X_2 = \frac{c}{a}$$

نکته۲: برای تفاضل ریشه داریم:

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

نکته۳: برای محاسبه مجموعه‌ها مربعات ریشه‌ها از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2p$$

$$S = -\frac{b}{a} \qquad p = \frac{c}{a}$$

نکته۴: در معادله درجه۲، $ax^2+bx+2=0$ اگر $c=0$ باشد یکی از ریشه‌ها حتما صفر است.

نکته۵: در معادله درجه۲، $ax^2+bx+c=0$ اگر $b=0$ باشد دو ریشه قرینه یکدیگرند.

نکته۶: در معادله درجه۲، $ax^2+bx+c=0$ اگر $a=c$ باشد دو ریشه عکس یکدیگرند.

نکته۷: در معادله درجه۲، $ax^2+bx+c=0$ اگر $ac<0$ باشد دو ریشه مختلف العلامت هستند.

نکته۸: در معادله درجه۲، $ax^2+bx+c=0$ اگر $b=a+c$ باشد

در این صورت یکی از ریشه‌ها $x_1=-1$ و دیگری $x_2=-\frac{c}{a}$ است.

نکته۹: در معادله درجه۲، $ax^2+bx+c=0$ اگر $a+b+c=0$ باشد در این صورت یکی از ریشه‌ها $x_1=1$ و دیگری $x_2=\frac{c}{a}$ است.

نکته۱۰: هرگاه معادله ریشه مضاعف داشت و با فرمول زیر ریشه را به دست آوریم. $x=-\frac{b}{2a}$

نامعادله

کلیه قوانین حاکم بر معادلات در نامعادلات نیز وجود دارد.

نکته: هرگاه طرفین نامعادله را در منفی ضرب کنیم جهت نامعادله عوض می‌گردد.

خواص نامساوی‌ها:

۱) $a<b \Rightarrow a+c<b+c$

۲) $a<b \Rightarrow a-c<b-c$

۳) $a<b \Rightarrow a^n<b^n$

۴) $a<b \Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}$

۵) $a<b \xrightarrow{c>0} ac<bc$

۶) $a<b \xrightarrow{c<0} ac>bc$

۷) $a<b \Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

توضیح و یادآوری:

$۱)\ x^۲ = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$

$۲)\ x^۲ \le a \Rightarrow -\sqrt{a} \le x \le +\sqrt{a}$

$۳)\ x^۲ \ge a \Rightarrow x \ge \sqrt{a}$ یا $x \le -\sqrt{a}$

مقایسه:

$\begin{cases} |x| \le a \to -a \le x \le +a \\ x^۲ \le a \to -\sqrt{a} \le x \le +\sqrt{a} \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} |x| = a \Rightarrow x = \pm a \\ x^۲ = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a} \end{cases}$

تغییرات $x^۲$:

بازه مثبت (۱)

$a \le x \le b \Rightarrow a^۲ \le x^۲ \le b^۲$

بازه منفی (۲)

$-a \le x \le -b \Rightarrow b^۲ \le x^۲ \le a^۲$

$$-a \le x \le b \to \begin{cases} -a \le x \le ۰ \overset{\text{توان}}{\underset{۲}{\Rightarrow}} ۰ \le x^۲ \le a^۲ \\ ۰ \le x \le b \overset{\text{توان}}{\underset{۲}{\Rightarrow}} ۰ \le x^۲ \le b^۲ \end{cases}$$

استدلال ریاضی

فهرست مطالب این فصل طبق زیر است:

۱) درک شهودی۲) استدلال تمثیلی ۳) استدلال استقرایی ۴) استدلال ریاضی ۵) استدلال استنتاجی ۶) مثال نقض

درک شهودی:

درک آنچه در اطراف ما می‌گذرد، بدون استدلال، درک شهودی نامیده می‌شود. انسان از زمان‌های قدیم تاکنون به طور فطری خود را تا حدودی با محیط اطرافش هماهنگ می‌کرده است و برای درک آنچه پیرامونش می‌گذشته است از شهودش کمک می‌گرفته است. مثلا: تغییر اوقات شرعی در مسائل دینی از طریق درک شهودی و یا اندازه‌گیری طول اجسام از طریق سایهٔ آنها.

استدلال تمثیلی:

تمثیل یعنی یافتن مشابهت بین مفاهیم گوناگون، در کارهای سطحی تا موفقیت‌های علمی و هنری می‌توانیم از تمثیل استفاده کنیم.

مثال:

می‌توانیم به داستان طولی و بازرگان که در کتاب درسی ریاضی پایه دورهٔ پیش‌دانشگاهی و یا به عنوان مثال دیگر بیان کنیم اگر مخزن آبی در اختیار داشته باشیم می‌توانیم وارد شدن آب را به مخزن مثبت و خارج شدن آب از مخزن را منفی در نظر بگیریم.

استدلال استقرایی:

روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات است.

مثال: شخصی وارد شهری می‌شود و با اولین فرد و دومین فرد و سومین فرد و... مواجه می‌شود که همهٔ آنها چشمان آبی داشتند، آیا می‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم که همه افراد آن شهر چشمان آبی دارند؟ مسلما خیر. در ریاضی نیز می‌توانیم از استدلال استقرایی استفاده کنیم:

استقرای ریاضی:

اگر حکمی به ازاء $n = ۱$ درست باشد.

و فرض کنیم به ازای $n = k$ درست می‌باشد.

و ثابت کنیم به ازای $n = k + ۱$ نیز درست است در این صورت می‌توانیم عنوان کنیم این حکم در حالت کلی درست است.

مراحل اثبات به کمک استقراء ریاضی

۱) به جای n عدد یک را در رابطه قرار داده و ثابت می‌کنیم درست است.

۲) فقط به جای n مساوی آن k را در رابطه قرار داده و فرض می‌کنیم درست است.

۳) به جای n مساوی آن $k + ۱$ را در رابطه قرار داده و در این قسمت ثابت می‌کنیم درست است.

نکته: اصل استقرایی ریاضی فقط برای مجموعه اعداد طبیعی و یا زیر مجموعه‌ای از آن کاربرد دارد.

استدلال استنتاجی:

روش نتیجه‌گیری کلی با استفاده از حقایقی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم.

مثال نقض:

گاهی اتفاق می‌افتد که عمومیت که حدس می‌زدیم درست است، با یک مثال نقض شود یعنی حتی اگر یک مثال نیز پیدا شود که حدس ما را نادرست کند، آن حکم دیگر درست نیست.

دنباله

دنباله آرایشی از اعداد است که هر عدد یا جمله آن با یک آهنگ خاصی به دنبال جمله قبلی می‌آید.

$۱, ۲, ۴, ۷, ۱۱, ۱۶$

$\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۶}, \frac{۱}{۱۲}, \frac{۱}{۲۰}$

می‌توان دنباله را به عنوان یک تابع در نظر گرفت که از $N \to R$ تعریف می‌شود.

یعنی مؤلفه‌های اول آن (x) همگی از مجموعه‌ی اعداد طبیعی انتخاب می‌شوند.

دنباله حسابی (تصاعد حسابی)

هرگاه یک رشته از اعداد چنان به دنبال هم قرار گیرند که هر جمله بعلاوه مقداری ثابت بنام قدر نسبت، جمله بعدی را تشکیل دهد، آن رشته عددی را تصاعد حسابی یا عددی گویند. (نماد $\div$ که سمت چپ جمله اول قرار می‌گیرد علامت تصاعد حسابی می‌باشد.)

نکته ۱:

اگر جمله‌ی اول a باشد، جمله دوم $a + d$ و جمله سوم $a + ۲d$ و جمله چهارم .... می‌باشد.

جمله اول	جمله دوم	جمله سوم	جمله چهارم		جمله n ام
a ,	$a+d$,	$a+۲d$,	$a+۳d$,	....	$a+(n-۱)d$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	....	$\downarrow$
$t_۱$	$t_۲$	$t_۳$	$t_۴$	....	t_n

نتیجه می‌گیریم بین a و d و n و a_n رابطه‌ی زیر برقرار است:

$a_n = a_۱ + (n - ۱)d$

نکته ۲:

اگر a و b و c سه جمله متوالی یک تصاعد عددی باشند در این صورت خواهیم داشت:

$\div\ a, b, c \Rightarrow ۲b = a + c$

نکته ۳:

اگر دو جمله از تصاعد حسابی معلوم باشد قدرنسبت را از رابطه‌ی زیر بدست می‌آوریم:

قدر نسبت (d) جمله‌ی m ام (t_m)

جمله‌ی n ام (t_n) شماره جمله m ام (m)

شماره جمله n ام (n) $d = \frac{t_n - t_m}{n-m}$

نکته ۴:

بـرای بدسـت آوردن چـند واسـطه عددی بین دو عدد از رابطه زیر می‌توان استفاده نکرد.

$a \leftarrow$ جمله اول $m \leftarrow$ تعداد واسطه‌ها $d = \frac{b-a}{m+1}$

$b \leftarrow$ جمله آخر $d \leftarrow$ قدر مطلق

نکته ۵:

در تصاعد حسابی حاصل جمع جملات متساوی‌البعد با هم برابرند.

یعنی اگر $m+n=p+q$ آنگاه $t_m + t_n = t_p + t_q$

محاسبه‌ی مجموع n جمله‌ی تصاعد حسابی

اگر جمله اول و آخر و تعداد جملات مشخص باشد از رابطه زیر می‌توانیم مجموع n جمله اول تصاعد عددی را حساب کنیم.

$$S = \frac{n[a+L]}{2}$$

مجموع n جمله اول $\to S$ جمله آخر $\to L$

جمله اول $\to a$ تعداد جملات $\to n$

نکته ۶:

اگر مجموع n جمله و همچنین مجموع $n-1$ جمله در اختیار باشد آنگاه جمله nام برابر است با:

$$t_n = S_n - S_{n-1}$$

تصاعد هندسی

هرگاه یک دسته از اعداد چنان به دنبال هم قرار گیرند که هر جمله ضربدر مقدار ثابت، جمله بعدی را تشکیل دهد آن دسته اعداد را تصاعد هندسی می‌گوییم. (نماد $\div\div$ علامت تصاعد هندسی می‌باشد.)

نکته ۱:

اگر قدرنسبت منفی باشد جملات یک در میان منفی و مثبت می‌باشند.

نکته ۲:

بین a و n و t_n و q رابطه زیر برقرار است:

$$t_n = a \times q^{n-1}$$

نکته ۳:

اگر دو جمله از تصاعد هندسی معلوم باشد آنگاه قدر نسبت عبارتست از:

$$q^{n-m} = \frac{t_n}{t_m}$$

جمله nام $\leftarrow t_n$ شماره جمله nام $\leftarrow n$

جمله mام $\leftarrow t_m$ شماره جمله mام $\leftarrow m$

نکته ۴:

اگر a و b و c سه جمله متوالی یک تصاعد هندسی باشند، همواره داریم:

$$\div\div\, a,b,c \Rightarrow b^2 = ac$$

نکته ۵:

در تصاعد هندسی حاصلضرب جملات متساوی‌البعد برابرند:

یعنی اگر $m+n=p+q$ آنگاه $t_m \times t_n = t_p \times t_q$

نکته ۶:

برای بدست آوردن وتسطه‌های هندسی می‌توانیم از رابطه زیر نیز استفاده کنیم، که در اولین رابطه m تعداد واسطه‌ها است.

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{t_n}{a}}$$

نکته ۷:

برای بدست آوردن حاصلضرب جملات یک تصاعد هندسی در صورتیکه جملات اول و آخر و تعداد جملات معلوم باشد از این رابطه استفاده می‌کنیم:

$$P_n = \sqrt{(a \times L)^n}$$

مجموع جملات یک تصاعد هندسی

مجموع n جمله از تصاعد هندسی از روش‌های زیر محاسبه می‌شود.

روش اول: اگر قدر نسبت و جملات اول و آخر مشخص باشد از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$S_n = \frac{L_q - a}{q-1}$$

روش دوم : اگر قدر نسبت و جمله اول و مقدار جملات مشخص باشد از رابطه زیر برای محاسبه مجموع n جمله اول از تصاعد هندسی استفاده می‌کنیم.

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q-1}$$

محاسبه حد مجموع یک تصاعد بی پایان

حـد مجمـوع یک تصاعد هندسی یا قدر نسبت $0 < q < 1$ اگر جمله اول a و تعداد جملات بی نهایت باشد عبارت است از:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} \quad \text{یا} \quad S_\infty = \frac{a}{1-q}$$

دنباله مربعی

اگـر اعـداد زبیعـی متوالـی را به توان ۲ برسانیم (در خودش ضرب کنیم)، دنباله مربعی خواهیم داشت.

اعداد طبیعی $\leftarrow$ ۱,۲,۳,۴, ۵,۶,....

دنباله مربعی $\leftarrow$ ۱,۴,۹,۱۶, ۲۵,۳۶,....

دنباله مثلثی

جمله اول این دنباله عدد یک و برای بدست آوردن جمات بعد کافیست به ترتیب اعداد ....,۲,۳,۴,۵,۶ را به جمله قبل اضافه کنیم: ....,۱,۳,۶,۱۰,۱۵,۲۱,۲۸

یعنی اگر ۲ واحد به جمله اول اضافه شود، جمله دوم و سه واحد به جمله دوم اضافه شود، جمله سوم و اگر ۴ واحد به جمله سوم اضافه شود جمله چهارم بدست می‌آید.

دنباله فیبوناچی

دنـباله‌ای اسـت کـه جملـه اول و دوم آن ۱ و هر جمله بعدی عبارت اسـت از مجمـوع دو جملـه قبلـی، یعنی برای جمله‌های سوم ه بعد داریم:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,۵۵,۸۹,۱۴۴

لگاریتم:

تعریف لگاریتم: وقتی می‌گوییم لگاریتم عدد ۹ در مبنای ۳ می‌شود ۲ یعنی اینکه اگر عدد ۳ را به توان ۲ برسانیم ۹ می‌شود و می‌نویسیم:

$$\log_{۳}^{۹} = ۲ \Rightarrow ۳^{۲} = ۹$$

$\log_{۴}^{۱۶} = ?$ یعنی عدد ۶ به توان چه عددی ۱۶ می‌شود:

$$\log_{۴}^{۱۶} = ۲ \Rightarrow ۴^{۲} = ۱۶$$

نکته۱:

به طور کلی، لگاریتم a در مبنای b می‌شود c یعنی عدد b باید به توان c برسد تا a حاصل شود و به این صورت نوشته می‌شود:

$$\log_b^a = c \to b^c = a$$

اگر $a < ۰ \ ,\ b > ۰ \ ,\ b \neq ۱$

نکته۲:

لگاریتم‌های در مبنای ۱۰ را بدون مبنا می‌نویسم، یعنی می‌توانیم عدد ۱۰ را در جای مبنا بنویسیم.

خاصیت‌های لگاریتم

۳ خاصیت مهم لگاریتم عبارتند از:

۱- لگاریتم حاصلضرب چند عدد در یک مبنا برابر است با مجموع لگاریتم‌های آن اعداد در همان مبنا یعنی:

$$\log_b^{mn} = \log_b^m + \log_b^n$$

۲- لگاریتم خارج‌قسمت دو عدد در یک مبنا برابر است با تفاضل لگاریتمی آن در همان مبنا:

$$\log_b^{\frac{m}{n}} = \log_b^m - \log_b^n$$

۳- لگاریتم هد عدد توان‌دار برابر است با حاصلضرب توان در لگاریتم آن عدد در همان مبنا:

$$\log_b^{A^n} = n\log_b^A$$

نکته۱:

می‌دانیم اگر $a^x = N$ باشد طبق تعریف $\log_a^N = x$ حال اگر به جای x مساوی آن را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\log_a^N = x \Rightarrow a^x = N \Rightarrow a^{\log_a^N} = N$$

نکته ۲:

$$\log_a^x = \frac{\log_c^x}{\log_c^a}$$

نکته۳:

$$\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$$

نکته۴:

$$\log_{a^n}^{x^m} = \frac{m}{n}\log_a^x$$

نکته۵: اگر

$$\log_b^a = \frac{۱}{\log_a^b}$$

نکته۶:

$$a^{\log x} = x^{\log a}$$

حل معادلات لگاریتمی:

$$\log_a^x = \log_a^y \Rightarrow x = y$$

نکته۷:

برای تعیین لگاریتم‌هائی که مبنای آنها ۱۰ می‌باشد، می‌توانیم به روش زیر عمل کنیم:

ابتدا قسمت صحیح (مفسر) را به دست آورده و سپس مانتیس (قسمت اعشاری) را می‌توانیم با استفاده از جدول لگاریتمی تعیین کنیم.

$$\log ۴۷ = ۱/۶۷۲۱$$

مانتیس مفسر

برای تعیین مفسر کافیست ارقام عدد ۴۷ را شمرده (که دو رقم دارد) و یک واحد از آن کم نموده و جای مفسر قرار می‌دهیم و برای تعیین مانتیس به جدول لگاریتمی کتاب در ستون مربوطه مراجعه می‌کنیم.

نکته ۸:

اگر عدد بین صفر و یک باشد (با اعشار شروع شود) برای محاسبه مفسر، صفرهای قبل و بعد را شمرده و به جای آن عدد نوشته و بالای آن عدد علامت منفی قرار می‌دهیم.

کاربرد لگاریتم:

الف) سنجش زلزله:

ژول $E_{\circ} = ۱۰^{۴/۴}$ انرژی آزاد شده از زلزله‌ای با قدرت بسیار کم که به عنوان مبنای استاندارد در نظر گرفته می‌باشد و برای تعیین قدرت زلزله‌های دیگر با مقایسه با آن می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$M = \frac{۲}{۳}\log\frac{E}{E_{\circ}}$$

$E =$ انرژی آزاد شدهٔ به وسیله زلزله

$E_{\circ} = ۱۰^{۴/۴}$ انرژی آزاد شده توسط خفیف‌ترین زلزله قابل احساس

$M =$ قدرت زلزله برحسب واحد ریشتر

ب) شدت صدا

بلندترین صدایی که گوش یک انسان سالم قادر به شنیدن آن است شدتی معادل یک تریلیون ($۱۰^{۱۲}$) برابر شدت کوتاه‌ترین صدایی است که همان انسان قادر به شنیدن آن است و $I_{\circ}$ شدت کمترین صدای قابل شنیدن و برابر $۱۰^{-۱۲}$ وات در هر مترمربع می‌باشد و از رابطه زیر می‌توانیم تعداد واحدهای دسی‌بل را پیدا کنیم.

$$D = ۱۰\log\frac{I}{I_{\circ}}$$

$D =$ سطح دسی‌بل صدا

$I = (\frac{W}{m^{۲}})$ شدت صدا برحسب وات در هر مترمربع

$I_{\circ} =$ وات در هر مترمربع

مدل سازی ریاضی

در شروع آموزش کلیه دروس از جمله ریاضی برای درک بهتر بسیاری از مفاهیم برای دانش‌آموز از مدل و الگو استفاده می‌کنیم.

رشد و زوال

بعضی از پدیده‌ها به طور مرتب در حال افزایش هستند و همچنین بعضی از پدیده‌ها مرتبا کاهش می‌یابند. مثلا جمعیت در شهرهای بزرگ با آهنگ خاصی مرتبا در حال افزایش است که در این صورت می‌گوییم با رشد روبرو هستند و همچنین جمعیت در بسیاری از

روستاها با آهنگ خاصی در حال کاهش هستند، در این صورت نیز می‌گوئیم با مسئله زوال روبرو هستند.

اگر در حالت کلی آهنگ رشد را با ۲ در نظر بگیریم به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$A_0 =$ مقدار اولیه   زمان یا سال‌های موردنظر $= t$

$$A_t = A_0(1+r)^t$$

آهنگ رشد سالیانه $= r$ مقدار بعد از t سال $= A_t$

بهینه‌سازی:

مسائل بهینه‌سازی با روش‌های مختلف مطرح و حل می‌شوند. اما در اینجا مسائلی از بهینه‌سازی طرح می‌شود که از طریق توابع قابل بررسی باشند، لذا ابتدا رسم نمودار تابع درجه دوم مطالعه می‌شود.

نمودار تابع درجه دوم:

هر تابع به صورت $y = ax^2 + bx + c$ باشد تابع درجه دوم و نمودار آن منحنی سهمی می‌باشد.

و برای رسم آن به روش زیر عمل می‌کنیم:

۱) ابتدا c, b, a را مشخص می‌کنیم.

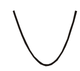
۲) از رابطهٔ $x = \frac{-b}{2a}$ معادله محور تقارن را تعیین می‌نماییم.

۳) آن را در جدولی به شکل زیر قرار داده و حداقل دو نقطه ما قبل و ما بعد آن را مشخص می‌کنیم.

x	ماقبل	(محور تقارن)	ما بعد
y			

۴) به ازاء هر سه عدد به دست آمده در ضابطه قرار داده و y را تعیین می‌کنیم آنگاه منحنی را رسم می‌کنیم.

نکته: اگر $a > 0$ باشد سهمی رو به بالا () بوده و دارای نقطهٔ min می‌باشد.

اگر $a < 0$ باشد سهمی رو به پایین () بوده و دارای نقطه max می‌باشد.

بازاریابی:

هدف این است که بتوان معادلاتی تشکیل داد و با توجه به این معادلات، نقاطی را تعیین نمود که سود یا درآمد در آن نقاط max می‌شود. به زبان ساده‌تر اینکه چه مقدار تولید کنیم تا بیشترین درآمد را داشته باشیم و همچنین چه مقدار تولید کنیم تا کمترین هزینه را داشته باشیم.

معادله سود

هزینه − درآمد = سود

$$p(x) = R(x) - c(x)$$

اگر از درآمد یک مؤسسه هزینه‌های مختلف را کم نمائیم سود مؤسسه به دست می‌آید.

احتمال

بعضی از پدیده‌ها قطعی هستند مثلا اگر تکه یخی را حرارت دهیم، آب می‌شود و یا اگر آب را حرارت دهیم بر اثر گرما بخار می‌شود اما بعضی از پدیده‌ها تصادفی می‌باشند مثلا اگر سکه‌ای را پرتاب کنیم احتمال دارد خط بیاید و یا اینکه یک بنگاه تولیدی اگر احتمال بدهد که سرمایه‌گذاری جدید سودآور خواهد بود، علاقه‌مند می‌شود سرمایه‌گذاری جدید نماید.

پدیده‌های قطعی و پدیده‌های تصادفی

پدیده‌های قطعی: پدیده‌هایی هستند که می‌توان نتیجه کار را به طور قطع تعیین کرد.

پدیده‌های تصادفی: پدیده‌هایی هستند که نمی‌توان نتیجه کار را پیش از وقوع آن تعیین کرد.

سؤال: چرا پرتاب یک سکه یا تاس آزمایش تصادفی محسوب می‌شوند؟

جواب: چون نتیجه این آزمایش را از قبل نمی‌توان به طور قطع مشخص کرد.

فضای نمونه

به مجموعه همه نتایج ممکن که از یک آزمایش تصادفی بدست می‌آید فضای نمونه می‌گوییم برای مثال اگر تاسی را پرتاب کنیم یکی از اعداد ۱ تا ۶ ممکن است بیاید که نتیجه فضای نمونه‌ای آن را به صورت $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ می‌نویسیم.

فراوانی نسبی:

در یک آزمایش تصادفی اگر تعداد حالات مساعد را بر تعداد کلی آزمایش تقسیم کنیم فراوانی نسبی ایجاد می‌شود. مثلا اگر سکه‌ای را ۱۰۰ بار پرتاب کنیم و ۵۲ بار روی سکه (شیر) بیاید. که چنین می نویسیم:

$$\text{فراوانی نسب} = \frac{\text{تعداد حالات مساعد}}{\text{تعداد کل آزمایش}} = \frac{52}{100}$$

پیشامد:

زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای حاصل از آزمایش تصادفی می‌باشد مثلا اگر تاسی را پرتاب کنیم احتمال اینکه عدد فرد بیاید عبارت است از:

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$ فضای نمونه

$A = \{1,3,5\}$ (حالات مساعد) پیشامد

که در این صورت به A یک پیشامد می‌گوییم و احتمال وقوع پیشامد A عبارت است از:

$$P(A) = \frac{3}{6}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد عضوی پیشامد } A}{\text{تعداد عضوهای فضای نمونه } S}$$

نکته ۱: همواره احتمال وقوع یک پیشامد بزرگ‌تر یا مساوی صفر و کوچک‌تر یا مساوی یک می‌باشد یعنی:

$$0 \le P(A) \le 1$$

برآمد: هریک از نتایج ممکنه یک آزمایش تصادفی را برآمد گوییم.

احتمال تجربی و احتمال نظری:

اگر یک سکه را ۵۰ بار پرتاب کنیم ممکن است ۲۲ بار یا ۲۴ بار یا ۲۳ بار یا ۲۷ بار و ... خط (پشت سکه) بیاید که در این صورت فراوانی نسبی به ترتیب $\frac{22}{50}, \frac{24}{50}, \frac{23}{50}, \frac{27}{50}, \ldots$ می‌باشند که به آن‌ها احتمال تجربی گوییم و می‌بینیم حاصل آن‌ها تقریبا برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود اما در محاسبات احتمال آمدن خط را در یک بار پرتاب دقیقا $\frac{1}{2}$ درنظر می‌گیریم که به آن احتمال نظری می‌گوییم. به هرحال در احتمال تجربی فوق نیز اگر پرتاب‌ها را به تعداد بسیار زیاد

تکرار کنیم می‌بینیم میانگین حاصل آن‌ها به $\frac{۱}{۲}=\frac{۲۵}{۵۰}$ نزدیک‌تر می‌شود.

پیشامد متمم یا مکمل:

پیشامد A' را متمم پیشامد A گوییم به طوری که عضوهای A' در A نباشد ولی در فضای نمونه باشد.

$P(A)+P(A')=۱$ یا

$P(A)=۱-P(A')$ یا $P(A')=۱-P(A)$

مثال: تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آن را حساب کنید که مجموع شماره‌های ظاهر شده حداقل <u>۱۱</u> باشد. (یازده یا کمتر از یازده)

$n(S)=۶\times۶=۳۶$

احتمال اینکه از ۱۱ بیشتر باشد:

$A'=\{(۶,۶)\}$ $\qquad P(A')=\frac{۱}{۳۶}$

احتمال اینکه حداقل ۱۱ باشد:

$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۳۶}=\frac{۳۵}{۳۶}$

یادآوری در مورد اصل شمارش:

اگر کاری در n صورت و به دنبال آن کاری در m صورت بگیرد آن دو کار با هم در $m\times n$ صورت انجام می‌گیرند.

جمع احتمال‌ها:

جمع پیشامد $A\cup B$ پیشامدی است که با وقوع آن لااقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ می‌دهد و همان‌طوری که می‌دانیم $A\cup B$ شامل عضوهایی است که به A یا B یا هر دو تعلق دارد. (کلمه یا بین دو جمله مفهوم اجتماع دو پیشامد را می‌دهد و برای محاسبه $P(A\cup B)$ ابتدا باید $P(A)$ آن‌گاه $P(B)$ و بالاخره $P(A\cap B)$ را محاسبه نموده و از فرمول زیر $P(A\cup B)$ را حساب می‌کنیم.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

نکته:اگر دو پیشامد A و B جدا از هم باشند یعنی $A\cap B=\phi$، در این صورت دو پیشامد را ناسازگار گوییم و خواهیم داشت:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

مستقل بودن و غیرمستقل بودن دو پیشامد:

اگر وقوع پیشامد A در وقوع پیشامد B مؤثر نباشد دو پیشامد مستقل‌اند و اگر وقوع پیشامد B در وقوع پیشامد A مؤثر باشد دو پیشامد نامستقل‌اند.

شرط اینکه دو پیشامد مستقل باشند:

شرط مستقل بودن: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

شرط نامستقل بودن (وابسته بودن)

$P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$

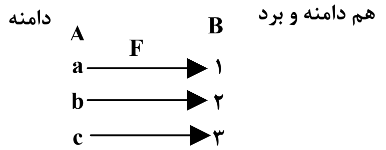
ضرب احتمالات:

اگر در بعضی از پیشامدها بیشتر از یک مورد احتمال داشته باشیم می‌توانیم جداگانه احتمال‌های مربوط را محاسبه نموده و طبق اصل شمارش درهم ضرب کنیم و یا اینکه از فرمول ترکیب $C\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ استفاده کنیم که انتخاب r شیء از n شیء را نشان می‌دهد (بدون آن که طرز قرار گرفتن اشیاء انتخاب شده در کنار هم درنظر گرفته شود.)

تابع

برای بیان مفهوم چهار حالت بیان می‌کنیم .

۱-روش گراف

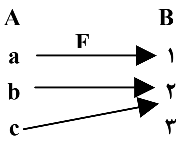


$D_f=\{a,b,c\}$

$R_f=\{۱,۲,۳\}$

هم دانه $=\{۱,۲,۳\}$

F تابع است چرا که از هر عضو مجموعه A فقط این فلش خارج شده است .



F تابع است

$D_f=\{a,b,c\}$

هم دامنه $=\{۱,۲,۳\}$

برد $=\{۱,۲\}$

برد زیرمجموعه هم دامنه است .

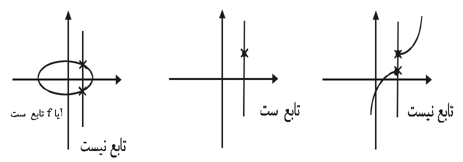
نکته : اگر برد و هم‌دامنه برابرباشند تابع پوشاست .

۲-روش زوج مرتب : $F=\{(x_۱,y_۱),(x_۲,y_۲)...(x_n,y_n)\}$ باشد آیا F تابع است ؟

شرط تابع بودن $\Rightarrow x_۱\neq x_۲\neq\ldots\neq x_n$

$D_f=\{x_۱,x_۲,\ldots,x_n\}$

$R_f=\{y_۱,y_۲,\ldots,y_n\}$

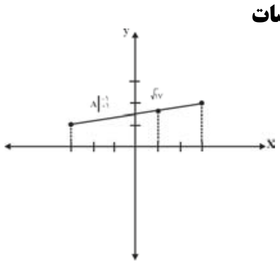


نکته: هر نقطه خود یک تابع اسـ.

روش ضابطه

دراین روش کافیست x را بر حسب y محاسبه کنیم اگر به ازاء یک x یک y داشتیم تابع می‌باشد. در غیر این صورت تابع نیست.

محاسبه طول پاره‌خط در دستگاه مختصات

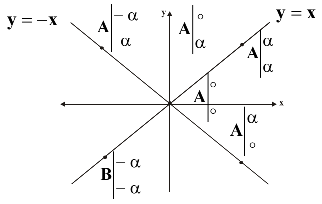


$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$
$$=\sqrt{(۳-(-۱))^۲+(۲-(۱))^۲}$$
$$=\sqrt{۱۶+۱}=\sqrt{۱۷}$$

مختصات وسط پاره خط:

$$M\left|\begin{array}{l} x_M=\frac{x_A+x_B}{۲} \\ y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}\end{array}\right.$$

وضعیت نقطه در حالات مختلف:

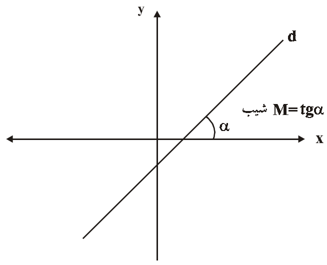


۱) اگر نقطه روی محور طول‌ها باشد عرضش صفر است.
۲) اگر نقطه روی محور عرض‌ها باشد طولش صفر است.
۳) اگر نقطه در مبدأ مختصات باشد طول و عرضش صفر است.
۴) اگر نقطه روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد طول و عرضش برابرند.
۵) اگر نقطه روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم باشد طول و عرضش قرینه یکدیگرند.

معادلات خط:

شیب خط:

تعریف: شیب خط tg زاویه‌ای است که خط با محور x ها می‌سازد.



برای محاسبه شیب خط در حالات مختلف داریم:

۱- اگر $y = ax + b$ باشد شیب خط برابر است $m = a$

۲- اگر خط به صورت $ax + by + c = 0$ باشد. (گستردهٔ خط)

برای محاسبه شیب خط داریم:

$$ax+by+c=0 \Rightarrow m=-\frac{a}{b}=-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}$$

۳- اگر ۲ نقطه $A\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x_2\\y_2\end{matrix}\right.$ را داشتیم و می‌خواستیم شیب خط گذرنده از این نقطه را محاسبه کنیم.

$$\text{شیب خط AB } M_{AB}=\frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

۴- اگر $m > 0$ شیب مثبت است و اگر $m < 0$ شیب منفی است

۵) اگر $x = a \Rightarrow m = \infty$ است.

۶) اگر $y = b \rightarrow m = 0$ است.

یعنی اگر خط موازی محور y ها بود شیبش ∞ است.

و اگر خط موازی محور x ها بود شیبش ۰ است.

۷- خط نیم ساز ناحیه اول و سوم

$y = x \Rightarrow m = 1$

خط نیمساز ناحیه دوم و چهارم

$y = -x \Rightarrow m = -1$

نحوهٔ نوشتن معادله خط

برای نوشتن معادله خط به روش‌های زیر می‌توانیم عمل کنیم:

۱- اگر یک نقطه $A\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ و شیب خط M را داشته باشیم برای محاسبه معادله خط به شرح زیر عمل می‌کنیم:

$$y-y_1=M(x-x_1)$$

۲- اگر ۲ نقطه $A\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x_2\\y_2\end{matrix}\right.$ را داشته باشیم برای نوشتن معادله خط به شرح زیر عمل می‌کنیم:

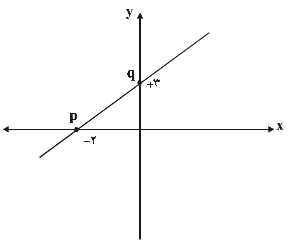
$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

مثال: معادله خط زیر را بنویسید؟

$$\frac{\alpha}{p}+\frac{y}{q}=1$$

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1 \rightarrow \frac{-3x+2y}{6}=\frac{1}{1}$$

$$-3x+2y=6$$



نکته۱: اگر گفته شود خط موازی محور x هاست.

در این صورت معادله آن به صورت $y = b$ است.

نکته۲: اگر گفته شده بود خط موازی محور y ها باشد در این صورت معادله آنها به صورت $x = a$ می‌باشد.

نکته۳- $x = 0$ همان محور y هاست.

نکته۴- $y = 0$ همان محور x هاست.

نکته۵- $y = x$ نیمساز ناحیه اول و سوم

نکته۶- $y = -x$ نیمساز ناحیه دوم و چهارم

نکته مهم: اگر در خط $D: ax+by+c=0$ و $D': a'x+b'y+c'=0$ داشته باشیم:

این دو خط وضعیت زیر را نسبت به هم دارند.

۱) دو خط بر هم عمودند $aa'+bb'=0$

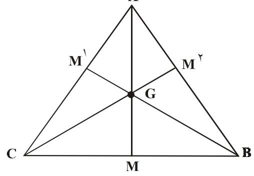
۲) دو خط با هم منطبق $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

۳) دو خط متقاطع‌اند $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$

۴) دو خط موازی $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

نکته: اگر بخواهیم مختصات محل برخورد میانه را در مثلث پیدا کنیم از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$G\left|\begin{matrix}\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\[2ex]\dfrac{y_A+y_B+y_C}{2}\end{matrix}\right.$$

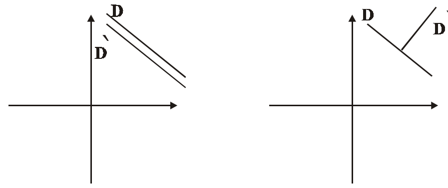


نکته: اگر دو خط، D و D' موازی باشند شیبهایشان برابر است.

نکته: اگر دو خط D و D' بر هم عمود باشند رابطه زیر بین شیبهایشان برقرار است.

$MD \times MD' = -۱$

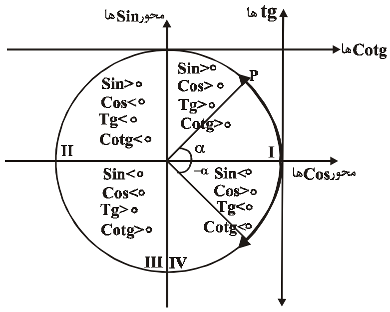
$MD = MD'$



شرط آنکه نقطه روی خط باشد:
کافی است مختصات نقطه را داخل خط قرار دهیم اگر تساوی را نگه داشت نقطه روی خط است در غیر این صورت نقطه خارج است.
شرط آنکه سه نقطه در یک طرف خط راست باشد:
کافی است که نقاط را داخل خط قرار دهیم اگر حاصل هر سه مثبت شد نقاط بالای خط قرار دارند (در یک طرف) و یا اگر هر سه منفی شد پائین خط (در یک طرف) و اگر هر سه صفر شد روی خط قرار دارد.

مثلثات

قبل از بیان هر مطلب دربارهٔ مشاب دایرهٔ مثلثاتی را تعریف می‌کنیم .



$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$tg(-\alpha) = -Tg\alpha$

$\cot g(-\alpha) = ۵tg\alpha$

α	۰ ۰	۳۰ $\frac{\pi}{۶}$	۴۵ $\frac{\pi}{۴}$	۶۰ $\frac{\pi}{۳}$	۹۰ $\frac{\pi}{۲}$	۱۸۰ π	۲۷۰ $\frac{۳\pi}{۲}$	۳۶ ۲π
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
tg	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞	۰	∞	۰
cot g	∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	∞	۰	∞

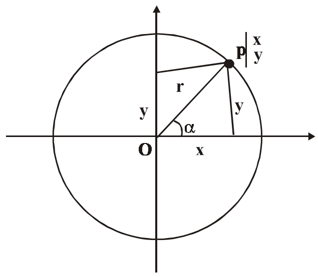
نکته: $k\pi$ حذف می‌گردد $\Leftarrow$ k زوج باشد
فقط k را حذف می‌کنیم $\Leftarrow$ k فرد باشد
$\begin{cases} Sin(k\pi \pm \alpha) \\ Cos(k\pi \pm \alpha) \end{cases}$

$\begin{cases} \sin(k\pi \pm \alpha) \\ \cos(k\pi I\alpha) \end{cases}$ — k زوج می‌باشد kn را حذف می‌کنیم / k فرد می باشد k را حذف می‌کنیم

$\begin{cases} tg(k\pi \pm \alpha) \\ \cot g(k\pi \pm \alpha) \end{cases} \Rightarrow$ در هر حالت $k\pi$ را حذف می‌کنیم

رابطهٔ بین نسبتهای مثلثاتی و اضلاع مثلث قائم‌الزاویه

محور cos ها



$r^۲ = y^۲ + x^۲$

$r = \sqrt{y^۲ + x^۲}$

$x = \sqrt{r^۲ - y^۲}$

$y = \sqrt{r^۲ - x^۲}$

$\sin\alpha = \frac{\text{ضلع روبرو}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r}$

$\cos\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r}$

$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع روبرو}} = \frac{y}{x}$

$\cot g\alpha = \frac{\text{ضلع روبرو}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{x}{y}$

نتیجه : tg و cot g عکس یکدیگرند .

اتحادهای مثلثاتی

تعریف : هرگاه رابطهٔ‌تساوی بازاء جمیع مقادیر زوایای α برقرار باشد آن رابطه را اتحاد مثلثاتی می‌گوئیم .

$\begin{cases} \sin^۲\alpha = ۱ - \cos^۲\alpha \\ \cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha \end{cases}$

۱) $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$

۲) $\sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$

۳) $\sin^۶\alpha + \cos^۶\alpha = ۱ - ۳\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$

۴) $tg\alpha \times \cot g\alpha = ۱$ $\quad \begin{cases} tg\alpha = \frac{۱}{\cot g\alpha} \\ \cot g\alpha = \frac{۱}{tg\alpha} \end{cases}$

۵) $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

۶) $\cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

۷) $۱ + \tan\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$

۸) $۱ + \cot g^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha}$

۹) $tgx + cotgx = \frac{۲}{\sin ۲x}$

۱۰) $\cot gx - tgx = ۲\cot g۲x$

۱۱) $\sin ۲x = ۲\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin ۲\alpha}{۲}$

۱۲) $\cos۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha - \sin^۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha$

۱۳) $tg۲\alpha = \frac{۲tg\alpha}{۱ - y^{-۲}\alpha}$

۱۴) فرمول‌های طلایی $\left.\begin{array}{l} \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \end{array}\right\}$

۱۵) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

۱۶) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

۱۷) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

۱۸) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

۱۹) $tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta}$

فرمولهای تبدیل حاصل جمع به حاصل ضرب:

۱) $\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

۲) $\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$

۳) $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

۴) $\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$

معادلات مثلثاتی

برای حل معادلات مثلثاتی به طور کلی داریم :

$$\sin x = \sin\alpha \quad \begin{cases} x = 2x\pi + \pi - \alpha \\ x = 2x\pi + \alpha \end{cases}$$

$\cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$

$tgx = tg\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

$\cot gx = \cot g\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

مثال : معادلهٔ زیر را حل کنید .

$\sin^2 - \sin x = 0$ $\qquad$ $\sin x = 0 \Rightarrow x = 12\pi$

$\sin x(\sin x - 1) = 0$ $\qquad$ $\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$