

به نام خداوند بخشنده و مهربان

ریاضی عمومی ۱ / پیش دانشگاهی تجربی / دبیرستان امام خمینی (ره) / سال تحصیلی ۹۲-۹۳



فصل اول

احتمال

(*probability*)

@irandaneshnovin1

آزمایش: در علم احتمال، به هر عملی که برای جمع آوری داده ها صورت می پذیرد، آزمایش می گوییم.

آزمایش تصادفی:

آزمایشی که نتایج آن از قبل قابل پیش بینی نباشد ولی مجموعه ی نتایج حاصل از آزمایش قابل پیش بینی باشد را آزمایش تصادفی می گوییم.

مثال: وقتی یک سکه را پرتاب می کنیم از قبل نمی توانیم نتیجه بگیریم که روی سکه یا پشت سکه خواهد آمد، ولی مجموعه نتایج حاصل از پرتاب سکه قابل پیش بینی است. این مجموعه عبارت است از { پشت سکه , روی سکه }

فضای نمونه ای:

مجموعه ی تمام نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی را **فضای نمونه ای** آن آزمایش می گوییم و آن را با S نشان می دهیم.

مثال: آزمایش تصادفی پرتاب یک تاس را در نظر بگیرید. مطلوبست فضای نمونه ای.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مثال: خانواده ای دارای ۲ فرزند است. فضای نمونه ای جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید.

حل: اگر پسر بودن را با b و دختر بودن g را با نشان دهیم، در این صورت داریم:

$$S = \{bb, bg, gb, gg\}$$

مثال: یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم. فضای نمونه ای این آزمایش را بنویسید.

حل: اگر روی سکه را با R و پشت را با P نشان دهیم داریم:

$$S = \{(R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4), (R, 5), (R, 6), (P, 1), (P, 2), (P, 3), (P, 4), (P, 5), (P, 6), \}$$

پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را یک پیشامد می گوییم.

پیشامدها را معمولاً با حروف A و B و C و... نشان می دهیم.

مثال: خانواده ای دارای سه فرزند است.

الف) فضای نمونه ای را بنویسید.

ب) پیشامدی را بنویسید که در آن حداقل ۲ فرزند این خانواده پسر باشد.

ج) پیشامدی را بنویسید که در آن هر سه فرزند دارای یک جنسیت باشند.

حل:

$$S = \{(b, b, b), (b, b, g), (b, g, b), (b, g, g), (g, b, b), (g, b, g), (g, g, b), (g, g, g)\}$$

الف)

$$A = \{(b, b, b), (b, b, g), (b, g, b), (g, b, b)\}$$

ب)

$$B = \{(b, b, b), (g, g, g)\}$$

ج)

مثال: در کیسه ای ۳ مهره ی سفید، ۴ مهره ی سیاه و ۵ مهره ی قرمز قرار دارد. از این کیسه ۲ مهره به تصادف و همزمان خارج می کنیم. (مطلوبست: الف) فضای نمونه ای. ب) پیشامد آن که هر دو مهره سیاه باشد. ج) یکی از مهره ها سفید و مهره ی دیگر قرمز باشد. د) هر دو مهره هم رنگ باشند.

یادآوری: تعریف ترکیب:

ترکیب های k تایی از n شی متمایز، به انتخاب های k تایی از آن n شی اطلاق می شود که در آن ها ترتیب فاقد اهمیت است.

ترکیب های k تایی از n شی متمایز را با $\binom{n}{k}$ یا $C(n, k)$ (بخوانید انتخاب k از n) نمایش می دهیم.

تعداد ترکیب های k تایی از n شی را از رابطه ی زیر به دست می آوریم:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

حل: الف)

نکته: در بسیاری از موارد نوشتن پیشامدهای مطلوب و فضای نمونه ای به صورت فهرست وار، کاری وقت گیر و دشوار است و باید از راه دیگری تعداد عناصر مورد نیاز را شمارش کنیم. در این مثال فضای نمونه ای عبارت است از همه ی ترکیبات دوتایی از مهره ها که می توان آنها را از یک سبد حاوی ۱۲ مهره خارج کرد. با استفاده از آنالیز ترکیبی که در ریاضی ۲ خوانده ایم، می دانیم که تعداد این ترکیبیات از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$n(S) = \binom{12}{2} = \frac{12!}{(12-2)!2!} = \frac{12!}{10!2!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{10! \times 2 \times 1} = 66$$

(ب)

$$A = \{b_1 b_2, b_1 b_3, b_2 b_3, \dots\} \Rightarrow n(A) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!2!} = 6$$

(ج)

نکته: اگر در مساله ای بین دو حالت (یا چند حالت) کلمه ی «و» بیاید، تعداد هر کدام از حالت ها را جداگانه به دست می آوریم و در هم ضرب می کنیم تا جواب نهایی به دست آید.

$$B = \{w_1 r_2, w_1 r_3, w_2 r_3, \dots\} \Rightarrow n(B) = \binom{3}{1} \times \binom{5}{1} = 3 \times 5 = 15$$

(د) هم رنگ بودن دو مهره به معنای آن است که یا هر دو مهره سفید یا هر دو سیاه و یا هر دو قرمز باشند.

نکته: اگر در مساله ای بین دو حالت (یا چند حالت) کلمه ی «یا» بیاید، تعداد هر کدام از حالت ها را جداگانه به دست می آوریم و با هم جمع می کنیم تا جواب نهایی به دست آید.

تذکر: چنین نیست که همواره در صورت سوال کلمه ی «یا» ذکر شده باشد. بلکه گاهی باید با دقت در مفهوم سوال این نکته را متوجه شویم.

$$\left. \begin{array}{l} \text{هر دو مهره سفید: } \binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3 \\ \text{هر دو مهره سیاه: } \binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4!}{2!2!} = 6 \\ \text{هر دو مهره قرمز: } \binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5!}{3!2!} = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow n(C) = \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = 3 + 6 + 10 = 19$$

تعریف احتمال: اگر S فضای نمونه ای یک آزمایش و A یک پیشامد از فضای نمونه ای باشد، آن گاه احتمال وقوع پیشامد A را با $P(A)$ نشان داده و از رابطه ی زیر آن را به دست می آوریم:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

برای حل مسائل احتمال، ابتدای فضای نمونه ای آزمایش مطرح شده و اندازه ی آن را به دست می آوریم. سپس پیشامدی که احتمال وقوع آن در صورت سوال از ما خواسته شده را (پیشامد مطلوب) در صورت امکان نوشته و اندازه ی آن را به دست می

آوریم و در آخر از رابطه ی $p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ احتمال قوع پیشامد را به دست می آوریم.

مثال: سه سکه را با هم پرتاب می کنیم. مطلوبست احتمال آن که:

(الف) هر سه سکه پشت بیاید. (ب) فقط یکی از سکه ها رو بیاید. (ج) حداکثر یکی از سکه ها رو بیاید.

حل: همان طور که گفته شد ابتدا فضای نمونه ای آزمایش و اندازه ی آن را مشخص می کنیم.

$$S = \{(R, R, R), (R, R, P), (R, P, R), (R, P, P), (P, R, R), (P, R, P), (P, P, R), (P, P, P)\} \Rightarrow n(S) = 8$$

$$A = \{(P, P, P)\} \Rightarrow n(A) = 1 \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{8} \text{ (الف) حال پیشامد مطلوب گزینه ی الف را استخراج می کنیم.}$$

(ب) پیشامد مطلوب قسمت ب:

$$B = \{(R, P, P), (P, R, P), (P, P, R)\} \Rightarrow n(B) = 3 \Rightarrow p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

(ج) پیشامد مطلوب قسمت ج:

$$C = \{(R, P, P), (P, R, P), (P, P, R), (P, P, P)\} \Rightarrow n(C) = 4 \Rightarrow p(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

مثال: مادری دارای ۳ فرزند است. مطلوبست احتمال آن که: الف) حداکثر یکی از فرزندان پسر باشد. ب) دو فرزند آخر پسر باشد.

حل: همان طور که گفته شد ابتدا فضای نمونه ای آزمایش و اندازه ی آن را مشخص می کنیم.

$$S = \{(b, b, b), (b, b, g), (b, g, b), (b, g, g), (g, b, b), (g, b, g), (g, g, b), (g, g, g)\} \Rightarrow n(S) = 8$$

الف) حال پیشامد مطلوب گزینه ی الف و اندازه ی آن را استخراج می کنیم.

$$A = \{(b, g, g), (g, b, g), (g, g, b), (g, g, g)\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(ب) پیشامد مطلوب قسمت ب:

$$B = \{(b, b, b), (g, b, b)\} \Rightarrow n(B) = 2 \Rightarrow p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

مثال: از جعبه ای که شامل پنج مهره ی سفید و سه مهره ی سیاه است، دو مهره با هم به تصادف خارج می کنیم. احتمال اینکه هر دو مهره سفید باشد چه قدر است؟

حل: با استفاده از آنالیز ترکیبی اندازه ی فضای نمونه ای را محاسبه می کنیم. در این مثال فضای نمونه ای عبارت است از همه ی ترکیبات دوتایی شامل مهره های سیاه و سفید که می توان آن ها را از یک جعبه ی حاوی ۸ مهره خارج کرد. در نتیجه:

$$n(S) = \binom{8}{2} = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!2!} = 28$$

حال اندازه ی پیشامد مطلوب یعنی آن که هر دو مهره سفید باشند را حساب می کنیم.

$$n(A) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!2!} = 10 \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{28}$$

تست: در آزمایشگاهی ۵ موش سالم و ۳ موش دیابتی نگهداری می شوند. اگر دو موش از محفظه گریخته باشند، با کدام احتمال فقط یکی از موش های فراری دیابتی است؟

کنکور سراسری تجربی سال ۸۱

$$\frac{15}{28} \text{ (د)}$$

$$\frac{3}{8} \text{ (ج)}$$

$$\frac{5}{14} \text{ (ب)}$$

$$\frac{15}{56} \text{ (الف)}$$

حل: با استفاده از آنالیز ترکیبی اندازه ی فضای نمونه ای را محاسبه می کنیم. در این مثال فضای نمونه ای عبارت است از همه ی ترکیبات دوتایی شامل موش های سالم و دیابتی که می توانند از یک آزمایشگاه که شامل ۸ موش است، فرار کنند. در نتیجه:

$$n(S) = \binom{8}{2} = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!2!} = 28$$

حال اندازه ی پیشامد مطلوب یعنی آن که فقط یکی از موش های فراری دیابتی باشد، یعنی یکی دیابتی و دیگر موش فراری سالم

است را حساب می کنیم.

$$n(A) = \binom{3}{1} \times \binom{5}{1} = \frac{3!}{2!1!} \times \frac{5!}{4!1!} = 3 \times 5 = 15 \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{28}$$

ترکیب پیشامدها

می دانیم هر پیشامد زیرمجموعه ای از فضای نمونه ای است. پس هر پیشامد را می توان به عنوان یک مجموعه در نظر گرفت. بنابراین اعمالی مانند متمم یک مجموعه، اجتماع یا اشتراک بین مجموعه ها نیز روی پیشامد قابل تعریف است.

الف) متمم یک پیشامد:

اگر A پیشامدی از فضای نمونه ای $(A \subseteq S)$ باشد، آن گاه متمم آن پیشامدی است که در آن A رخ ندهد. متمم A را با نمادهای A' یا A^c یا \bar{A} نمایش می دهیم و داریم:

$$\begin{cases} p(A') = 1 - p(A) \\ p(A) = 1 - p(A') \end{cases} \Rightarrow p(A) + p(A') = 1$$

تست: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. احتمال این که عدد رو شده یکسان نباشد کدام است؟

الف) $\frac{2}{3}$ ب) $\frac{5}{6}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{6}$

حل: A را پیشامدی در نظر می گیریم که اعداد رو شده یکسان باشند. طبق تعریف A' پیشامدی است که اعداد رو شده یکسان نیست. چون محاسبه ی $p(A)$ ساده تر است، ابتدا آن را محاسبه کرده و سپس با استفاده از متمم پیشامد $p(A')$ را به دست می آوریم.

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow p(A') = 1 - p(A) \Rightarrow p(A') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

پاسخ صحیح گزینه ی **ب** می باشد.

تست: در یک کیسه ۵ مهره ی سفید و ۷ مهره ی سیاه موجود است. ۲ مهره از کیسه خارج می کنیم. احتمال اینکه این دو مهره هم رنگ نباشند کدام است؟

کنکور سراسری ریاضی سال ۸۴

$$\frac{37}{66} \text{ (د)}$$

$$\frac{35}{66} \text{ (ج)}$$

$$\frac{19}{33} \text{ (ب)}$$

$$\frac{6}{11} \text{ (الف)}$$

حل: از پیشامد متمم استفاده می کنیم. متمم دو مهره هم رنگ نباشد عبارت است از «دو مهره هم رنگ باشند». دو مهره هم رنگ باشند یعنی هر دو مهره سفید یا هر دو سیاه باشند.

$$n(S) = \binom{12}{2} = 66$$

$$\Rightarrow p(A) = \frac{31}{66} \Rightarrow p(A') = 1 - p(A) = 1 - \frac{31}{66} = \frac{35}{66}$$

$$A \Rightarrow n(A) = \binom{5}{2} + \binom{7}{2} = 10 + 21 = 31$$

پاسخ صحیح گزینه ی «ج» می باشد.

(ب) اجتماع دو پیشامد:

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، اجتماع آن ها را به صورت $A \cup B$ نشان می دهیم.

پیشامد $A \cup B$ وقتی اتفاق می افتد که حداقل یکی از آن ها یعنی A یا B اتفاق بیفتد. مانند آن چه که در مورد مجموعه ها داشتیم، اعضای پیشامد $A \cup B$ یا در A وجود دارند یا در B و یا در هر دو آن ها. طبق تعریف احتمال داریم:

$$p(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)}$$

تذکر: هرگاه بین دو پیشامد از لفظ «یا» استفاده شود، به معنای اجتماع دو پیشامد است.

تذکر: اگر حداقل یکی از دو پیشامد A یا B اتفاق افتاده باشد، بدان معنی است که $A \cup B$ اتفاق افتاده است.

ج) اشتراک دو پیشامد:

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، اشتراک آن ها را به صورت $A \cap B$ نشان می دهیم. پیشامد $A \cap B$ وقتی اتفاق می افتد که A و B هر دو اتفاق بیفتند. اعضای پیشامد $A \cap B$ هم در A وجود دارند و هم در B . طبق تعریف احتمال داریم:

$$p(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

تذکر: هرگاه بین دو پیشامد از لفظ «و» استفاده شود، به معنای اشتراک دو پیشامد است.

نکته: قانون جمع احتمالات: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند در این صورت:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

د) پیشامد غیر ممکن:

اگر در آزمایشی، پیشامدی را تعریف کنیم که امکان وقوع آن نباشد، آن پیشامد را غیرممکن می گوئیم و آن را با نماد \emptyset نشان می دهیم. و چون مجموعه ی تهی عضوی ندارد پس:

$$p(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} \xrightarrow{n(\emptyset)=0} p(\emptyset) = \frac{0}{n(S)} = 0$$

ه) پیشامد حتمی:

می دانیم هر مجموعه، زیر مجموعه ی خودش است. پس اگر S پیشامدی از فضای نمونه ای S باشد در این صورت:

$$p(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

مثال: کیسه ای حاوی ۵ مهره ی سفید است. مهره ای را به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال اینکه این مهره سفید باشد چقدر است؟

$$p(A = S) = \frac{n(A = S)}{n(S)} = \frac{5}{5} = 1$$

مثال: از بین اعداد $S = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ عددی به تصادف انتخاب می کنیم. مطلوبست محاسبه ی احتمال اینکه:
 الف) عدد انتخابی زوج یا مضرب ۵ باشد. ب) عدد انتخابی اول و فرد باشد.

حل الف: اگر A پیشامد زوج بودن عدد و B پیشامد مضرب ۵ بودن عدد انتخابی باشد، داریم:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

$$B = \{5, 10, 15, 20\}$$

برای محاسبه ی احتمال خواسته شده، می توانیم از دو روش استفاده کنیم.

روش اول: مستقیماً و با استفاده از تعریف، احتمال خواسته شده را حساب می کنیم.

$$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 5, 15\} \Rightarrow n(A \cup B) = 12 \Rightarrow p(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

روش دوم: از فرمول روبرو استفاده کنیم.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{20}$$

$$B = \{5, 10, 15, 20\} \Rightarrow p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{20}$$

$$A \cap B = \{10, 20\} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{20}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow p(A \cup B) = \frac{10}{20} + \frac{4}{20} - \frac{2}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

حل ب: اگر A پیشامد اول بودن عدد و B پیشامد فرد بودن عدد انتخابی باشد، داریم:

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$$

$$\xrightarrow{\text{اول و فرد}} A \cap B = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{7}{20}$$

مثال: در یک مدرسه ۲۰٪ دانش آموزان در کلاس فیزیک و ۳۰٪ در کلاس ریاضی و ۱۵٪ در هر دو کلاس ثبت نام کرده اند. مشخص کنید چند درصد این دانش آموزان در کلاس فیزیک یا کلاس ریاضی ثبت نام کرده اند؟

حل: اگر A را پیشامد ثبت نام در کلاس فیزیک و B را پیشامد ثبت نام در کلاس ریاضی در نظر بگیریم داریم:

$$p(A) = 20\% = 0.2$$

$$p(B) = 30\% = 0.3$$

$$p(A \cap B) = 15\% = 0.15$$

ثبت نام در کلاس فیزیک یا ریاضی

$$\Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow p(A \cup B) = 0.2 + 0.3 - 0.15 = 0.35$$

مثال: اگر $p(A) = 0.3$ و $p(B') = 0.4$ و $p(A \cup B) = 0.8$ آن گاه $p(A \cap B)$ را بیابید.

حل:

$$p(B) = 1 - p(B') \Rightarrow p(B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$$

$$\Rightarrow p(A \cap B) = 0.3 + 0.6 - 0.8 = 0.9 - 0.8 = 0.1$$

مثال: فرض کنید در جامعه ای درصد گروه های خونی به شرح زیر باشد:

فردی به تصادف از این جامعه انتخاب می شود. احتمال این را بیابید که:

الف) این فرد دارای گروه خونی A یا O باشد.

ب) این فرد دارای گروه خونی B نباشد.

| گروه خونی | A | B | AB | O |
|-----------|-----|-----|-----|-----|
| درصد | ٪۳۸ | ٪۱۲ | ٪۲۷ | ٪۲۳ |

حل: الف) اگر پیشامد X را نوع گروه خونی A و پیشامد Y را نوع گروه خونی O در نظر بگیریم در این صورت باید $p(X \cup Y)$ را محاسبه کنیم. داریم:

$$p(X \cup Y) = p(X) + p(Y) - p(X \cap Y)$$

اما در مورد $X \cap Y$ باید گفت که امکان ندارد که گروه خونی فردی هم A و هم O باشد. پس: $p(X \cap Y) = 0$ و داریم:

$$p(X \cup Y) = p(X) + p(Y) = 0.38 + 0.27 = 0.65$$

ب) اگر پیشامد Z را نوع گروه خونی B در نظر بگیریم، باید $p(Z')$ را محاسبه کنیم:

$$p(Z') = 1 - p(Z) = 1 - 0.12 = 0.88$$

و) پیشامدهای ناسازگار:

مقدمه: در آزمایش پرتاب یک تاس، پیشامد A را فرد بودن عدد رو شده و پیشامد B را زوج بودن عدد رو شده در نظر بگیرید. سوال این است که آیا این دو پیشامد می توانند با هم رخ دهند؟ یعنی آیا امکان دارد عدد رو شده هم فرد باشد و هم زوج؟ چنین چیزی امکان ندارد. یعنی می توانیم بگوییم پیشامد $A \cap B$ هیچ وقت اتفاق نمی افتد.

تعریف: اگر دو پیشامد A و B نتوانند با هم رخ دهند، آن دو پیشامد را **ناسازگار** می گوییم. پس A و B دو پیشامد ناسازگارند، اگر داشته باشیم: $A \cap B = \emptyset$

بنابراین اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، $p(A \cap B) = 0$ و طبق قانون جمع احتمالات داریم:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

این تعریف را می توانیم برای تعداد بیشتری از پیشامدها نیز به صورت زیر بیان کنیم:

اگر A_1, A_2, \dots, A_n پیشامدهایی باشند که دو به دو نتوانند با هم رخ دهند، می‌گوییم این پیشامدها دو به دو ناسازگارند. (یعنی هر دو تا از این مجموعه‌ها را در نظر بگیرید، اشتراک آن‌ها تهی است.) در این صورت داریم:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)$$

مثلا فرض کنید درون جعبه‌ای ۵ مهره‌ی آبی، ۳ مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی سبز و ۸ مهره‌ی سیاه باشد. از این جعبه یک مهره به تصادف بر می‌داریم.

پیشامد A را آبی بودن، B را سفید بودن، C را سبز بودن مهره‌ی انتخابی در نظر می‌گیریم.

در این صورت **احتمال** اینکه مهره‌ی انتخاب شده، آبی یا سفید یا سبز باشد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) = \frac{5}{20} + \frac{3}{20} + \frac{4}{20} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 0.6$$

(زیرا پیشامدهای A ، B و C دو به دو ناسازگارند. یعنی مثلا امکان ندارد که یک مهره هم زمان آبی و سبز باشد و ...)

ز) پیشامدهای مستقل:

مقدمه: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. آیا ۶ آمدن تاس اول تاثیری بر روی ۶ آمدن تاس دوم دارد؟

تعریف: اگر دو پیشامد به گونه‌ای باشند که وقوع یا عدم وقوع یکی در وقوع یا عدم وقوع دیگری تاثیری نداشته باشد، می‌گوییم دو پیشامد مستقل از هم هستند.

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند در این صورت داریم:

در مثال پرتاب دو تاس، نتیجه‌ی پرتاب تاس اول تاثیری بر نتیجه‌ی پرتاب تاس دوم ندارد. پس اگر A پیشامد ۶ آمدن تاس اول و B پیشامد ۶ آمدن تاس دوم باشد، احتمال اینکه هر دو تاس ۶ بیاید (یعنی احتمال وقوع پیشامد $A \cap B$ ، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\left. \begin{array}{l} p(A) = \frac{1}{6} \\ p(B) = \frac{1}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

تذکر: یک روش دیگر برای حل این مساله آن است که به کمک نمودار درختی فضای نمونه ای را نوشته سپس پیشامد مطلوب را استخراج کرده و از فرمول کلاسیک احتمال، احتمال مورد نظر را محاسبه کنیم.

مثال: مادری صاحب سه فرزند است. احتمال آن که دو فرزند اول پسر باشند چقدر است؟

حل: پیشامد A را پسر بودن فرزند اول و پیشامد B را پسر بودن فرزند دوم در نظر می گیریم. این دو پیشامد مستقل از یکدیگرند.

$$\left. \begin{array}{l} p(A) = \frac{1}{2} \\ p(B) = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

تذکر: یک روش دیگر برای حل این مساله آن است که به کمک نمودار درختی فضای نمونه ای را نوشته سپس پیشامد مطلوب را استخراج کرده و از فرمول کلاسیک احتمال، احتمال مورد نظر را محاسبه کنیم.

مثال: در مثال بالا مطلوب است احتمال آن که فقط دو فرزند اول پسر باشند.

حل: فقط پسر بودن دو فرزند اول یعنی: فرزند اول و فرزند دوم پسر و فرزند سوم دختر باشد که این سه پیشامد مستقل از یکدیگرند.

پیشامد A را پسر بودن فرزند اول و پیشامد B را پسر بودن فرزند دوم و پیشامد C را دختر بودن فرزند سوم در نظر می گیریم. بنا به استقلال پیشامدها داریم:

$$\left. \begin{array}{l} p(A) = \frac{1}{2} \\ p(B) = \frac{1}{2} \\ p(C) = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) \Rightarrow p(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

تذکر: یک روش دیگر برای حل این مساله آن است که به کمک نمودار درختی فضای نمونه ای را نوشته سپس پیشامد مطلوب را استخراج کرده و از فرمول کلاسیک احتمال، احتمال مورد نظر را محاسبه کنیم.

نکته: برای آن که فردی دارای RH منفی باشد، لازم است که هر دو ژن منفی داشته باشد. یعنی:

$$p(\text{یک ژن منفی}) \cdot p(\text{یک ژن منفی}) = p(\text{هر دو ژن منفی}) = p(\text{RH منفی})$$

مثال: مطالعات ژنتیکی نشان داده است که ۴۰٪ ژن های تعیین کننده ی عامل RH خونی منفی اند. مطلوبست احتمال آن که الف) فردی دارای RH منفی باشد. ب) در خانواده ای با سه فرزند، اولین فرزند با RH منفی فرزند سوم خانواده باشد.

حل: الف) می دانیم برای آن که فردی دارای RH منفی باشد لازم است که دو ژن منفی داشته باشد. و چون این ژن ها را از هر یک از والدین خود به ارث می برد می توانیم منفی بودن هر یک از این ژن ها را مستقل فرض کنیم بنابراین:

$$p(\text{یک ژن منفی}) = p(\text{هر دو ژن منفی}) = p(\text{یک ژن منفی}) \cdot p(\text{یک ژن منفی}) = 0.4 \times 0.4 = 0.16$$

ب) یعنی RH فرزند اول و فرزند دوم مثبت و RH فرزند سوم منفی باشد.

$$p(\text{RH سومی منفی}) \cdot p(\text{RH دومی مثبت}) \cdot p(\text{RH اولی مثبت}) = p(\text{RH فرزند سوم منفی})$$

$$= (1 - 0.4)(1 - 0.4)(0.4) = 0.6 \times 0.6 \times 0.4 = 0.144$$

مثال: احتمال این که احمد در یک امتحان قبول شود $\frac{1}{3}$ و احتمال این که حسن در همان امتحان قبول شود $\frac{1}{5}$ است. مطلوب است

احتمال آن که احمد یا حسن در این امتحان قبول شوند؟

حل: پیشامد قبول شدن احمد در امتحان را با A و پیشامد قبول شدن حسن در امتحان را با B نمایش می دهیم. این دو پیشامد مستقل از یکدیگرند.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{5 + 3 - 1}{15}$$

$$= \frac{1}{15}$$

مثال: اگر A و B دو پیشامد ناتهی باشند، آیا امکان دارد که این دو پیشامد مستقل و ناسازگار باشند؟ چرا؟

حل: خیر. چنین چیزی امکان ندارد. یعنی امکان ندارد دو پیشامد ناتهی همزمان مستقل و ناسازگار باشند.

فرض کنیم دو پیشامد ناتهی A و B مستقل باشند. در این صورت طبق تعریف دو پیشامد مستقل داریم:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

اما چون دو پیشامد A و B ناتهی هستند پس $p(A) \neq 0$ ، $p(B) \neq 0$ و در نتیجه: $p(A) \cdot p(B) \neq 0$ و داریم:

$$p(A \cap B) \neq 0$$

از $p(A \cap B) \neq 0$ نتیجه می گیریم که $A \cap B \neq \emptyset$. در نتیجه A و B نمی توانند ناسازگار باشند.

برعکس: فرض کنیم دو پیشامد ناتهی A و B ناسازگار باشند. بنابراین طبق خاصیت دو پیشامد ناسازگار داریم: $p(A \cap B) = 0$

اما چون A و B ناتهی اند، $p(A)$ و $p(B)$ و در نتیجه حاصل ضرب آن ها نیز مخالف صفر است. یعنی: $p(A) \cdot p(B) \neq 0$

بنابراین $p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B)$ و در نتیجه A و B نمی توانند مستقل باشند.

تا به حال برای پیشامدی مانند A ، $p(A)$ را با استفاده از دستور $p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ محاسبه می کردیم. منظور از این احتمال آن

بود که ما هیچ اطلاعی از قبل که در وقوع پیشامد A موثر باشد نداریم. اما در بعضی مواقع ممکن است که به ما اطلاعاتی داده

باشند که این اطلاعات در احتمال وقوع A موثر باشد.

مثال: فرض کنید از ظرفی که شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است، مهره ای به تصادف خارج کرده ایم، احتمال آن که این مهره سفید باشد چقدر است؟

حل: در این مثال فضای نمونه ای ۹ عضو دارد که ۵ عضو آن برای پیشامد مورد نظر مساعد است. پس احتمال آمدن سفید برابر $\frac{۵}{۹}$ است.

این احتمال به طور مطلق حساب شد و از هیچ اطلاع اضافی استفاده نشد. حال مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال: از جعبه ی مثال بالا مهره ای خارج می کنیم ملاحظه می شود که رنگ آن سیاه است. این مهره را کنار گذاشته و مهره ی دوم را به تصادف خارج می کنیم. مطلوب است احتمال آن که این مهره سفید باشد.

حل: در این مثال پس از کشیدن مهره ی اول و با توجه به اطلاعات داده شده (سیاه بودن مهره ی خارج شده) شرایط به هنگام استخراج مهره ی دوم عبارت است از وجود ۵ مهره ی سفید و ۳ مهره ی سیاه در جعبه، پس احتمال آمدن یک مهره ی سفید از این جعبه $\frac{۵}{۸}$ است.

هما نظوری که ملاحظه می شود اگر چه در دو مثال بالا احتمال آمدن مهره ی سفید از یک جعبه را حساب کردیم ولی جواب ها یکسان نیستند. زیرا در مثال دوم اطلاعاتی داریم که احتمال آمدن مهره ی سفید را تغییر می دهد.

احتمال شرطی: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای باشند و $p(B) > 0$ در این صورت احتمال وقوع پیشامد A به شرط اینکه بدانیم پیشامد B قبلا رخ داده باشد را به صورت $p(A|B)$ نوشته و چنین تعریف می کنیم:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

نتیجه: احتمال وقوع پیشامد B به شرط اینکه بدانیم پیشامد A قبلا رخ داده باشد را به صورت $p(B|A)$ نوشته و چنین تعریف می کنیم:

$$p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$$

مثال: اگر $p(A \cap B) = 0.2$ و $p(B) = 0.6$ آن گاه $p(A|B)$ را حساب کنید.

حل:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Rightarrow p(A|B) = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$$

مثال: در آزمایشگاهی ۳ موش سیاه و ۲ موش سفید داریم، قبلاً یک موش سفید را برای آزمایشی انتخاب کرده ایم. حال می خواهیم همان آزمایش را روی موش دیگری انجام دهیم. برای این منظور موشی را از بین موش هایی که روی آن ها آزمایش انجام نشده است انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال آن که این موش نیز سفید باشد.

حل: با توجه به شرایط مسأله، در واقع موشی از بین ۳ موش سیاه و یک موش سفید انتخاب می شود. پس احتمال سفید بودن

این موش عبارت است از $\frac{1}{4}$.

احتمال شرطی و استقلال پیشامدها:

قبلاً گفتیم که اگر دو پیشامد A و B مستقل از هم باشند، وقوع یکی بر وقوع دیگری تاثیری نمی گذارد. این مطلب را می توانیم با توجه به تعریف احتمال شرطی، به صورت زیر ثابت کنیم.

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \xrightarrow[A \text{ و } B \text{ مستقل هستند}]{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)} p(A|B) = \frac{p(A) \cdot p(B)}{p(B)} \Rightarrow p(A|B) = p(A)$$

پس احتمال این که پیشامد A اتفاق بیفتد به شرط رخ دادن پیشامد B ، با احتمال A برابر است. یعنی وقوع پیشامد B تاثیری روی وقوع پیشامد A نداشته است. پس می توانیم نتیجه بگیریم که اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند داریم:

$$p(A|B) = p(A)$$

$$p(B|A) = p(B)$$

قاعده ی ضرب احتمال: (محاسبه ی احتمال اشتراک دو پیشامد با استفاده از احتمال شرطی)

از قاعده ی احتمال شرطی می توانیم $p(A \cap B)$ را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} p(A \cap B) = p(A|B) \times p(B)$$

$$p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} p(B \cap A) = p(B|A) \times p(A)$$

از این دستورها نیز می توانیم احتمال اشتراک دو پیشامد را حساب کنیم.

مثال: دو مهره، متوالیا و بدون جایگذاری از جعبه ای که شامل ۴ مهره ی سفید و ۶ مهره ی سیاه است خارج می کنیم. مطلوب است احتمال آن که مهره ی اول سفید و مهره ی دوم سیاه باشد.

حل: اگر پیشامد سفید بودن مهره ی اول را با A و پیشامد سیاه بودن مهره ی دوم را با B نشان دهیم، می خواهیم $p(A \cap B)$ را حساب کنیم. با استفاده از احتمال شرطی داریم: اما $p(B \cap A) = p(B|A) \times p(A)$:

$$p(A) = p(\text{سفید بودن مهره ی اول}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

برای محاسبه ی $p(B|A)$ باید فرض کنیم A قبلا رخ داده است. یعنی مهره ای سفید از جعبه خارج شده است.

بنابراین، شرایط به هنگام استخراج مهره ی دوم عبارت است از وجود ۶ مهره ی سیاه و ۳ مهره ی سفید در جعبه، بنابراین:

$$p(B|A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow p(B \cap A) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$$

مثال: دو مهره، متوالیا و بدون جایگذاری از جعبه ای که شامل ۶ مهره ی سفید و ۸ مهره ی سیاه است خارج می کنیم. مطلوب است احتمال آن که مهره ی اول سفید و مهره ی دوم سیاه باشد.

حل: اگر پیشامد سفید بودن مهره ی اول را با A و پیشامد سیاه بودن مهره ی دوم را با B نشان دهیم، می خواهیم $p(A \cap B)$ را حساب کنیم. با استفاده از احتمال شرطی داریم: اما $p(B \cap A) = p(B|A) \times p(A)$

$$p(A) = p(\text{سفید بودن مهره ی اول}) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

برای محاسبه ی $p(B|A)$ باید فرض کنیم A قبلا رخ داده است. یعنی مهره ای سفید از جعبه خارج شده است.

بنابراین، شرایط به هنگام استخراج مهره ی دوم عبارت است از وجود ۸ مهره ی سیاه و ۵ مهره ی سفید در جعبه، بنابراین:

$$p(B|A) = \frac{8}{13} \Rightarrow p(B \cap A) = \frac{3}{7} \times \frac{8}{13} = \frac{24}{91}$$

مثال: دو مهره، متوالیا و بدون جایگذاری از جعبه ای که شامل ۵ مهره ی سفید و ۶ مهره ی سیاه است خارج می کنیم. مطلوب است احتمال آن که مهره ی اول و مهره ی دوم سفید باشد.

حل: اگر پیشامد سفید بودن مهره ی اول را با A و پیشامد سفید بودن مهره ی دوم را با B نشان دهیم، می خواهیم $p(A \cap B)$ را حساب کنیم. با استفاده از احتمال شرطی داریم: اما $p(B \cap A) = p(B|A) \times p(A)$

$$p(A) = p(\text{سفید بودن مهره ی اول}) = \frac{5}{11}$$

برای محاسبه ی $p(B|A)$ باید فرض کنیم A قبلا رخ داده است. یعنی مهره ای سفید از جعبه خارج شده است.

بنابراین، شرایط به هنگام استخراج مهره ی دوم عبارت است از وجود ۶ مهره ی سیاه و ۴ مهره ی سفید در جعبه، بنابراین:

$$p(B|A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \Rightarrow p(B \cap A) = \frac{5}{11} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{11}$$

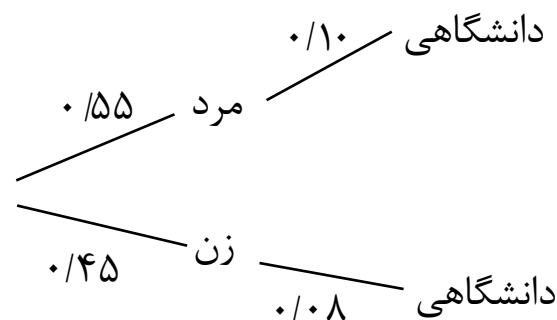
قانون احتمال کل:

اگر فضای نمونه ای (S) را به n قسمت $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ افراز کنیم (یعنی اولاً به ازای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم: $A_i \neq \emptyset$ ثانیاً به ازای هر i و j که $i \neq j$ و ثالثاً $A_i \cap A_j = \emptyset$ و $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$ در این صورت:

$$p(A) = p(A_1)p(A|A_1) + p(A_2)p(A|A_2) + \dots + p(A_n)p(A|A_n) \Rightarrow p(A) = \sum_{i=1}^n p(A_i)p(A|A_i)$$

مثال: ۴۵٪ جمعیت کشوری را زنان و ۵۵٪ بقیه را مردان تشکیل می دهند. اگر ۸ درصد زنان و ۱۰ درصد مردان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد جمعیت این کشور تحصیلات دانشگاهی دارند؟

حل:



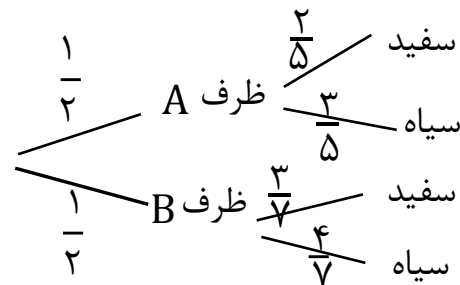
$$p(\text{مرد بودن} | \text{دارا بودن تحصیلات}) = p(\text{مرد بودن})p(\text{دارا بودن تحصیلات} | \text{مرد بودن}) + p(\text{زن بودن} | \text{دارا بودن تحصیلات})p(\text{زن بودن} | \text{دارا بودن تحصیلات})$$

$$= \frac{55}{100} \times \frac{10}{100} + \frac{45}{100} \times \frac{8}{100} = \frac{550 + 360}{10000} = \frac{910}{10000} = \frac{91}{1000}$$

مثال: ظرف A شامل ۲ مهره ی سفید و ۳ مهره ی سیاه و ظرف B شامل ۳ مهره ی سفید و ۴ مهره ی سیاه است.

از یکی از ظرف ها یک مهره به تصادف بیرون می آوریم. احتمال این که این مهره سیاه باشد چه قدر است؟

حل:



$$p(\text{سیاه بودن}) = p(\text{ظرف A}) \cdot p(\text{سیاه} | \text{ظرف A}) + p(\text{ظرف B}) \cdot p(\text{سیاه} | \text{ظرف B})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{3}{10} + \frac{2}{7} = \frac{41}{70}$$

مثال: سه ظرف هم شکل و یکسان داریم. در ظرف اول ۲ مهره ی سفید و ۳ مهره ی سیاه، در ظرف دوم ۳ مهره ی سفید و ۴ مهره ی سیاه و در ظرف سوم ۴ مهره ی سفید و ۲ مهره ی سیاه وجود دارد. یکی از ظرف ها را به تصادف انتخاب کرده و مهره ای از آن خارج می کنیم. احتمال اینکه مهره سفید باشد چقدر است؟

حل:

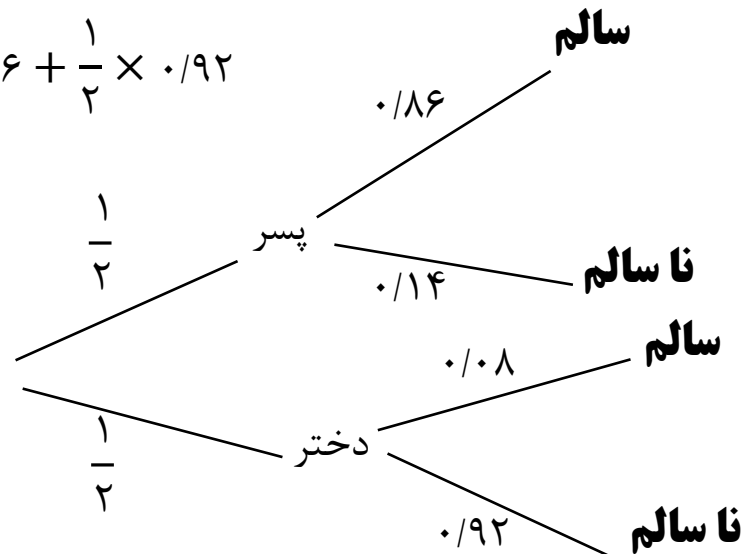
$$p(\text{ظرف سوم|سفید}) \cdot p(\text{ظرف سوم}) + p(\text{ظرف دوم|سفید}) \cdot p(\text{ظرف دوم}) + p(\text{ظرف اول|سفید}) \cdot p(\text{ظرف اول}) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{21 + 15 + 12}{315} = \frac{48}{315} = \frac{16}{105}$$

مثال: فرض کنید انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۰/۱۴ و به فرزند دختر ۰/۰۸ باشد. والدینی که حامل این نوع بیماری هستند انتظار فرزندى را دارند. مطلوب است احتمال اینکه فرزند سالم باشد.

حل:

$$p(\text{دختر | سالم بودن}) = p(\text{دختر})p(\text{سالم بودن | دختر}) + p(\text{پسر})p(\text{سالم بودن | پسر})$$

$$= \frac{1}{2} \times (1 - 0.14) + \frac{1}{2} \times (1 - 0.08) = \frac{1}{2} \times 0.86 + \frac{1}{2} \times 0.92 = \frac{0.86 + 0.92}{2} = \frac{1.78}{2}$$



تابع توزیع احتمال (یا تابع احتمال):

تابع توزیع احتمال یک متغیر تصادفی مانند X ، تابعی است که به هر یک از مقادیری که برد X (x_i ها) می تواند اختیار کند، احتمال $p(X = x_i) = p_i$ یا $p(x_i)$ را نسبت می دهد. (در واقع تابع توزیع احتمال، تابعی است از برد متغیر تصادفی به $[0, 1]$)

تابع توزیع احتمال گاهی با ضابطه و گاهی با جدول مشخص می شود. اگر تابع توزیع احتمال را با جدول مشخص کنیم، آن را جدول توزیع احتمال می گوئیم که شکل کلی آن به صورت زیر است:

| | | | | |
|----------|----------|----------|---------|----------|
| x_i | x_1 | x_2 | \dots | x_n |
| $p(x_i)$ | $p(x_1)$ | $p(x_2)$ | \dots | $p(x_n)$ |

در هر جدول توزیع احتمال باید دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) برای هر i ، $0 \leq p(x_i) \leq 1$ ب) $p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_n) = 1$

تست: اگر X یک متغیر تصادفی با جدول توزیع احتمال زیر باشد، a کدام است؟

الف) $\frac{3}{4}$ ب) $\frac{2}{4}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $\frac{1}{6}$

حل: با توجه به شرط ب داریم:

$$p(1) + p(2) + p(3) = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + a + 2a = 1 \Rightarrow 3a = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

بنابراین جواب صحیح گزینه ی ج می باشد.

مثال: سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم. اگر متغیر تصادفی X تعداد دفعاتی که سکه رو آمده باشد: الف) متغیر تصادفی X چه اعدادی را می تواند اختیار کند؟ ب) جدول توزیع احتمال را به دست آورید.

$$S = \{(R, R, R), (R, R, P), (R, P, R), (R, P, P), (P, R, R), (P, R, P), (P, P, R), (P, P, P)\} \Rightarrow n(S) = 8$$

با توجه به فضای نمونه ای تعداد دفعاتی که روی سکه می تواند بیاید عبارت است از: $X = 0, 1, 2, 3$

ب) حال احتمال آن که سکه صفر بار رو بیاید را با $p(X = 0)$ ، احتمال آن که یک بار رو بیاید را با $p(X = 1)$ و احتمال آن که ۳ بار رو باید را با $p(X = 3)$ نشان داده و با توجه به فرمول هایی که تاکنون خوانده ایم، آن ها را محاسبه می کنیم.

$$p(X = 0) = \frac{n(\{X = 0\})}{n(S)} = \frac{1}{8}$$

$$p(X = 1) = \frac{n(\{X = 1\})}{n(S)} = \frac{3}{8} \quad p(X = 2) = \frac{n(\{X = 2\})}{n(S)} = \frac{3}{8} \quad p(X = 3) = \frac{n(\{X = 3\})}{n(S)} = \frac{1}{8}$$

بنابراین جدول توزیع احتمال مربوط به این متغیر تصادفی به صورت زیر می باشد:

| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 |
|----------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $p(x_i)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

مثال: از یک کیسه که شامل ۴ مهره ی سفید و ۵ مهره ی سیاه است، ۳ مهره با هم و به تصادف خارج می کنیم.

اگر متغیر تصادفی X تعداد مهره های سفید خارج شده باشد، جدول توزیع احتمال X را بنویسید.

حل: متغیر تصادفی X می تواند مقادیر ۰ و ۱ و ۲ و ۳ را اختیار کند.

حال احتمال آن که صفر مهره ی سفید خارج شود را با $p(X = 0)$ ، احتمال آن که یک مهره ی سفید خارج شود را با $p(X = 1)$ و احتمال آن که ۳ بار رو باید را با $p(X = 3)$ نشان داده و با توجه به فرمول هایی که تاکنون خوانده ایم، آن ها را محاسبه می کنیم.

$$p(X = 0) = \frac{n(\{X = 0\})}{n(S)} = \frac{\binom{4}{0} \binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{10}{84}$$

$$p(X = 1) = \frac{n(\{X = 1\})}{n(S)} = \frac{\binom{4}{1} \binom{5}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{40}{84}$$

$$p(X = 2) = \frac{n(\{X = 2\})}{n(S)} = \frac{\binom{4}{2} \binom{5}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{30}{84}$$

$$p(X = 3) = \frac{n(\{X = 3\})}{n(S)} = \frac{\binom{4}{3} \binom{5}{0}}{\binom{9}{3}} = \frac{4}{84}$$

بنابراین جدول توزیع احتمال مربوط به این متغیر تصادفی به صورت زیر می باشد:

| | | | | |
|----------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|
| x_i | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ |
| $p(x_i)$ | $\frac{۱۰}{۸۴}$ | $\frac{۴۰}{۸۴}$ | $\frac{۳۰}{۸۴}$ | $\frac{۴}{۸۴}$ |

است.
$$\begin{cases} p(x = i) = \frac{i}{i^2 + 3} ; i = ۱, ۲, ۳ \\ p(x = j) = \frac{۱}{۱۴} ; j = ۴, ۵, ۶ \end{cases}$$

مثال: توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت

(الف) جدول تابع احتمال X را بنویسید.

(ب) مقدار $p(x \geq ۳)$ را حساب کنید.

حل: (الف)

$$p(X = ۱) = \frac{۱}{۱^2 + ۳} = \frac{۱}{۴}$$

$$p(X = ۲) = \frac{۲}{۲^2 + ۳} = \frac{۲}{۷}$$

$$p(X = ۳) = \frac{۳}{۳^2 + ۳} = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$p(X = ۴) = \frac{۱}{۱۴}$$

$$p(X = ۵) = \frac{۱}{۱۴}$$

$$p(X = ۶) = \frac{۱}{۱۴}$$

بنابراین جدول توزیع احتمال مربوط به این متغیر تصادفی به صورت زیر می باشد:

| | | | | | | |
|----------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|
| x_i | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ |
| $p(x_i)$ | $\frac{۱}{۴}$ | $\frac{۲}{۷}$ | $\frac{۱}{۴}$ | $\frac{۱}{۱۴}$ | $\frac{۱}{۱۴}$ | $\frac{۱}{۱۴}$ |

(ب)

$$p(x \geq ۳) = p(X = ۳) + p(X = ۴) + p(X = ۵) + p(X = ۶) = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۱۴} = \frac{۱۳}{۲۸}$$

توزیع دو جمله ای:

آزمایشی را در نظر بگیرید که فقط دو نتیجه دارد. یکی از نتایج را پیروزی (با احتمال وقوع p) و دیگری را شکست (با احتمال وقوع q) می نامیم.

این آزمایش را n بار تکرار می کنیم و متغیر تصادفی X را تعداد پیروزی ها در n بار آزمایش در نظر می گیریم. در این صورت احتمال k بار پیروزی از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad ; \quad q = 1 - p$$

مثال: سکه ای را ۱۰ بار پرتاب می کنیم. مطلوبست احتمال آن که: الف) ۴ بار رو بیاید ب) حداقل ۹ بار رو بیاید.

حل: در یک مرتبه آزمایش پرتاب سکه فقط دو نتیجه دارد. (رو یا پشت). بنابراین برای حل مساله می توانیم از توزیع دو جمله ای استفاده کنیم. فرض کنید آمدن رو را پیروزی و آمدن پشت را شکست بنامیم.

$$\left. \begin{array}{l} p = \text{احتمال رو آمدن یک بار پرتاب} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ n = \text{تعداد دفعات تکرار آزمایش} = 10 \\ k = \text{تعداد دفعات تکرار پیروزی} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \Rightarrow p(X = 4) = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-4} \\ = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

ب) حداقل ۹ بار رو بیاید، یعنی یا ۹ بار یا ۱۰ بار رو بیاید.

$$p(X \geq 9) = p(X = 9) + p(X = 10)$$

$$p(X = 9) = \binom{10}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-9} = \binom{10}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$p(X = 10) = \binom{10}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10-10} = \binom{10}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$\Rightarrow p(X = 9) + p(X = 10) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 11 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

مثال: یک تاس را ۵ بار پرتاب می کنیم. احتمال آن که ۳ بار عدد ۴ بیاید را به دست آورید.

حل: می دانیم در یک مرتبه پرتاب تاس، ۶ حالت وجود دارد. بنابراین با این نمی توانیم از توزیع دو جمله ای استفاده کنیم. زیرا در توزیع دو جمله ای آزمایش ما فقط دو حالت داشت. برای اینکه بتوانیم از توزیع دو جمله ای استفاده کنیم، با توجه به صورت سوال، نتایج حاصل از پرتاب تاس را به صورت زیر تغییر می دهیم.

در پرتاب یک تاس یا عدد ۴ ظاهر می شود (موفقیت) و یا عدد ۴ ظاهر نمی شود (شکست). بنابراین در این جا نتیجه آزمایش فقط دو حالت دارد.

$$\left. \begin{array}{l} p = \text{احتمال ظاهر شدن ۴ بار پرتاب تاس} = \frac{1}{6} \\ \Rightarrow q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \\ n = \text{تعداد دفعات تکرار آزمایش} = 5 \\ k = \text{تعداد دفعات تکرار پیروزی} = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ \Rightarrow p(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-3} = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \end{array}$$

مثال: احتمال این که دانش آموزی در یک امتحان موفق شود $0/6$ است. اگر ۳ نفر با شرایط یکسان در این آزمون شرکت کنند، احتمال این که حداقل دو نفر از آن ها موفق شوند چه قدر است؟

حل: در این جا آزمایش ما امتحان دادن است که فقط دو نتیجه دارد (موفق شدن یا موفق نشدن). با توجه به صورت سوال احتمال موفق شدن $p = 0/6$ می باشد.

$$\left. \begin{array}{l} p = 0/6 \Rightarrow q = 1 - 0/6 = 0/4 \\ n = \text{تعداد دفعات تکرار آزمایش} = 3 \\ k = \text{تعداد دفعات تکرار پیروزی} = 2 \text{ یا } 3 \end{array} \right\} p(X \geq 2) = p(X = 2) + p(X = 3)$$

$$p(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{6}{10}\right)^2 \left(\frac{4}{10}\right)^{3-2} = \binom{3}{2} \left(\frac{6}{10}\right)^2 \left(\frac{4}{10}\right)^1 = 3 \times \frac{36}{100} \times \frac{4}{10} = \frac{432}{1000}$$

$$p(X = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{6}{10}\right)^3 \left(\frac{4}{10}\right)^{3-3} = \binom{3}{3} \left(\frac{6}{10}\right)^3 \left(\frac{4}{10}\right)^0 = 1 \times \frac{216}{1000} \times 1 = \frac{216}{1000}$$

$$\Rightarrow p(X \geq 2) = p(X = 2) + p(X = 3) = \frac{432}{1000} + \frac{216}{1000} = \frac{648}{1000}$$

مثال: احتمال درمان یک بیماری با دارویی خاص برابر $0/7$ است. اگر ۵ بیمار همانند دارو را مصرف کنند، احتمال آن که: (الف) ۳ نفر درمان شوند چه قدر است؟ (ب) ۲ یا ۳ نفر درمان شوند چه قدر است؟

حل: الف)

$$\left. \begin{array}{l} p = 0/7 \Rightarrow q = 1 - 0/7 = 0/3 \\ n = 5 \\ k = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \Rightarrow p(X = 3) \\ = \binom{5}{3} \left(\frac{7}{10}\right)^3 \left(\frac{3}{10}\right)^{5-3} = \binom{5}{3} \left(\frac{7}{10}\right)^3 \left(\frac{3}{10}\right)^2$$

$$p(X = 2) + p(X = 3) = \binom{5}{2} \left(\frac{7}{10}\right)^2 \left(\frac{3}{10}\right)^3 + \binom{5}{3} \left(\frac{7}{10}\right)^3 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \quad (\text{ب})$$

تست: رنگ چشم ۸۰ درصد اهالی منطقه ای میشی است. اگر ۵ نفر به تصادف از این جمعیت انتخاب شوند، با کدام احتمال فقط رنگ چشم ۲ نفر از آن ها میشی است؟
(کنکور سراسری تجربی سال ۷۸)

(د) ۰/۰۱۰۲۴

(ج) ۰/۰۵۱۲

(ب) ۰/۰۰۵۱۲

(الف) ۰/۱۰۲۴

حل:

$$p = 80\% = \frac{80}{100} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, q = 1 - p = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}, n = 5, k = 2$$

$$\Rightarrow p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \Rightarrow p(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^{5-2} = \binom{5}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

$$= 10 \times \frac{16}{25} \times \frac{1}{125} = \frac{160}{3125} = 0.0512$$

بنابراین پاسخ صحیح گزینه ج می باشد.

تست: اگر احتمال موفقیت در یک عمل جراحی $\frac{1}{4}$ باشد، در بین چهار بیمار احتمال این که حداقل دو بیمار موفق شوند، چه قدر

است؟
(الف) $\frac{11}{16}$

(ب) $\frac{5}{16}$

(ج) $\frac{5}{8}$

(د) $\frac{1}{8}$

حل:

$$p = \frac{1}{4}, q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, n = 4, k \geq 2$$

$$p(X \geq 2) = p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{4}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$$= 6 \times \frac{1}{16} + 4 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{1}{16} = \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$$

بنابراین پاسخ صحیح گزینه الف می باشد.

مثال: اگر احتمال انتقال ژن های منفی هر یک از والدین به فرزندان ۴۰٪ باشد، مطلوبست احتمال آن که در یک خانواده ی ۶ فرزندی ۴ فرزند با RH منفی به دنیا بیایند.

$$p(\text{منفی RH}) = p(\text{منفی پدر RH}) \times p(\text{منفی مادر RH}) = 0.4 \times 0.4 = 0.16$$

$$p = 0.16 \Rightarrow q = 1 - 0.16 = 0.84, n = 6, k = 4$$

$$p(X = 4) = \binom{6}{4} (0.16)^4 (0.84)^2$$

نکته: در یک آزمایش تصادفی که فقط دو حالت وجود دارد (مانند دختر یا پسر بودن، رو یا پشت در پرتاب سکه و ...) و n بار تکرار شده است، و در آن ها شکست و پیروزی دارای احتمال یکسان هستند یعنی $p = q = \frac{1}{2}$. در این صورت احتمال k بار پیروزی برابر است با:

$$p(k \text{ بار پیروزی}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

مثال: سکه ای را ۱۰ بار پرتاب می کنیم. احتمال این که ۶ بار روی سکه بیاید را حساب کنید.

حل:

روش اول: با استفاده از توزیع دو جمله ای:

$$p = q = \frac{1}{2}, n = 10, k = 6 \Rightarrow p(X = 6) = \binom{10}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 210 \times \frac{1}{64} \times \frac{1}{16} = \frac{210}{1024}$$

روش دوم: با استفاده از نکته ی بالا:

$$p(k \text{ بار پیروزی}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \Rightarrow p(6 \text{ بار رو}) = \frac{\binom{10}{6}}{2^{10}} = \frac{210}{1024}$$

به نام خداوند بخشنده و مهربان

ریاضی عمومی ۱ / پیش دانشگاهی تجربی / فصل دوم (بخش اول):

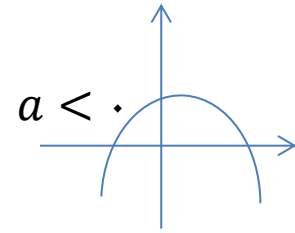
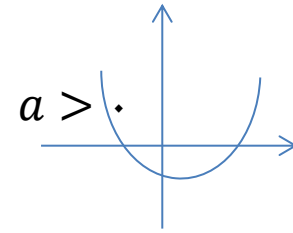
توابع و معادلات

Functions And Equations

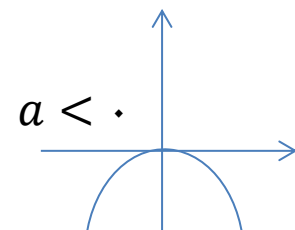
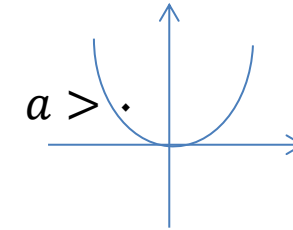
معادله ی درجه دوم:

معادله ی $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $a \neq 0$ را **معادله ی درجه دوم** می گوئیم. برای به دست آوردن ریشه های این معادله درجه دو، کافی است $\Delta = b^2 - 4ac$ را به دست آوریم.

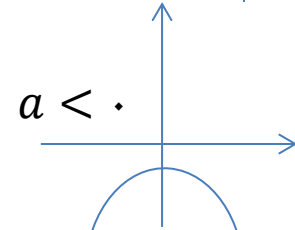
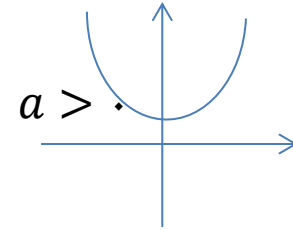
۱) $\Delta > 0 \Rightarrow$ معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد. $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$



۲) $\Delta = 0 \Rightarrow$ معادله یک ریشه مضاعف دارد. $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$



۳) $\Delta < 0 \Rightarrow$ معادله ریشه حقیقی ندارد.



مثال: مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله ی $mx^2 + (2m - 3)x + m - 1 = 0$ دارای ریشه ی مضاعف باشد.

حل:

$$\begin{aligned} \Delta = 0 &\Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (2m - 3)^2 - 4(m)(m - 1) = 0 \Rightarrow 4m^2 - 12m + 9 - 4(m^2 - m) = 0 \\ &\Rightarrow 4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 + 4m = 0 \Rightarrow -8m = -9 \Rightarrow m = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

جدول تعیین علامت $p = ax^2 + bx + c$ بر حسب علامت Δ به یکی از حالات زیر می باشد:

الف) $\Delta > 0$.

| | | | | |
|-----|-----------------|-------------------|-------------------|-----------------|
| x | $-\infty$ | x_1 | x_2 | $+\infty$ |
| p | موافق علامت a | ● مخالف علامت a | ● مخالف علامت a | موافق علامت a |

ب) $\Delta = 0$.

| | | | |
|-----|-----------------|-------------------|-----------------|
| x | $-\infty$ | x_1 | $+\infty$ |
| p | موافق علامت a | ● موافق علامت a | موافق علامت a |

ج) $\Delta < 0$.

| | | |
|-----|------------------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| p | همواره موافق علامت a | |

مثال: حدود m را طوری تعیین کنید که معادله ی $x^2 - mx + 3 - m = 0$ دارای دو جواب حقیقی متمایز باشد.

حل: برای آن که معادله ی بالا دو جواب حقیقی متمایز داشته باشد باید دلتای این معادله بزرگ تر از صفر باشد. بنابراین با اعمال این شرط به نامعادله ی زیر می رسیم که با حل آن حدود m به دست می آید:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-m)^2 - 4(1)(3 - m) = m^2 - 12 + 4m = m^2 + 4m - 12 \stackrel{\Delta > 0}{\implies} m^2 + 4m - 12 > 0$$

برای حل نامعادله ی بالا ابتدا جواب های معادله ی $m^2 + 4m - 12 = 0$ را به دست آورده و سپس جدول تعیین علامت آن را رسم کرده و با استفاده از آن جواب را به دست می آوریم.

$$m^2 + 4m - 12 = 0 \implies (m - 2)(m + 6) = 0 \implies m = 2, m = -6$$

| | | | | | |
|-----|-----------|------|-----|-----------|---|
| x | $-\infty$ | -6 | 2 | $+\infty$ | |
| p | + | ○ | - | ○ | + |

← جواب: $(-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$

نکته: در معادله ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر:

(الف) $a + b + c = 0$ (جمع ضرایب صفر شود) آن گاه یکی از ریشه ها عدد ۱ و دیگری عدد $\frac{c}{a}$ است.

(ب) $a - b + c = 0$ آن گاه یکی از ریشه ها عدد -1 و دیگری عدد $-\frac{c}{a}$ است.

تست: جواب های معادله ی $(a + b)x^2 + (c - a)x - b - c = 0$ کدام است؟

$$(1) \quad 1, -\frac{b+c}{a+b} \quad (2) \quad 1, -b-c \quad (3) \quad 1, \frac{b+c}{a+b} \quad (4) \quad -1, -\frac{b+c}{a+b}$$

حل: در معادله ی داده شده اگر ضرایب را با هم جمع کنیم، حاصل برابر صفر می شود.

$$(a + b) + (c - a) + (-b - c) = a + b + c - a - b - c = 0$$

بنابراین یکی از ریشه ها ۱ و دیگری $\frac{-b-c}{a+b} = -\frac{b+c}{a+b}$ است. پاسخ صحیح گزینه ی ۱ می باشد.

روش های تشکیل معادله ی درجه دوم

الف: اگر α و β ریشه های یک معادله ی درجه دوم باشند، از $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ می توانیم معادله ی درجه دوم را به دست آوریم.

مثال: معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه های آن دو عدد ۴ و -5 باشد.

حل:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -5 \end{cases} &\Rightarrow (x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - (-5)) = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 5) = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \end{aligned}$$

مثال: معادله ای درجه ی دوم با ضرایب صحیح بنویسید که جواب های آن $\frac{1}{2}$ و -3 باشد.

حل:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -3 \end{cases} \Rightarrow (x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)(x - (-3)) = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در 2}} 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

ب: اما اگر به جای خود جواب های α و β ، حاصل جمع آن ها (یعنی S) و حاصل ضرب آن ها (یعنی P) داده شده باشد، معادله را به صورت زیر تشکیل می دهیم.

$$x^2 - Sx + P = 0$$

مثال: معادله ی درجه دومی را بنویسید که مجموع ریشه های آن $\frac{13}{6}$ و حاصل ضرب آن ها 1 باشند.

حل:

$$x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow{S=\frac{13}{6}, P=1} x^2 - \frac{13}{6}x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در 6}} 6x^2 - 13x + 6 = 0$$

روابط بین ضرایب و جواب های معادله ی درجه دوم:

معادله ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را در نظر بگیرید. اگر α و β ریشه های معادله ی داده شده باشند در این صورت مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

مجموع ریشه ها : $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$
حاصل ضرب ریشه ها : $P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$

مثال: اگر α و β ریشه های معادله ی $x^2 - 3x + 4 = 0$ باشند، حاصل $\alpha + \frac{1}{\alpha} + \beta + \frac{1}{\beta}$ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} \text{مجموع ریشه ها : } \mathbf{S} = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3 \\ \text{حاصل ضرب ریشه ها : } \mathbf{P} = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4 \end{cases}$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} + \beta + \frac{1}{\beta} = (\alpha + \beta) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = (\alpha + \beta) + \left(\frac{\beta + \alpha}{\alpha \cdot \beta}\right) = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

مثال: اگر مجموع ریشه های معادله ی $x^2 - (a + 3)x + 2a = 0$ برابر 6 باشد، حاصل ضرب ریشه ها را به دست آورید.

حل:

$$\alpha + \beta = -\frac{c}{a} \Rightarrow 6 = -\frac{-(a + 3)}{1} \Rightarrow a + 3 = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6$$

مثال: در معادله ی درجه دوم $2x^2 + (2k - 1)x - k = 0$ به ازای کدام مقدار k مجموع معکوس دو ریشه برابر $\frac{7}{3}$ است؟

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{2k - 1}{2} \\ \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{-k}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha \cdot \beta} \Rightarrow \frac{\beta + \alpha}{\alpha \cdot \beta} = \frac{\gamma}{\alpha \cdot \beta} \Rightarrow \frac{-\frac{2k-1}{2}}{\frac{-k}{2}} = \frac{\gamma}{\alpha \cdot \beta} \Rightarrow \frac{2k-1}{k} = \frac{\gamma}{\alpha \cdot \beta} \Rightarrow 3(2k-1) = \gamma k \Rightarrow 6k - 3 = \gamma k$$

$$\Rightarrow 6k - \gamma k = 3 \Rightarrow -k = 3 \Rightarrow k = -3$$

نکته: اگر در معادله ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، یک ریشه عکس ریشه ی دیگر باشد $\left(\alpha = \frac{1}{\beta}\right)$ ، در این صورت داریم:
 $a = c$

تست: مقدار m کدام باشد تا دو ریشه ی معادله ی $mx^2 + 4x + 3m - 4 = 0$ عکس یکدیگر باشند؟

$$\begin{matrix} -2 & (1) \\ 2 & (2) \\ 3 & (3) \\ -3 & (4) \end{matrix}$$

حل: طبق نکته ی بالا داریم:

$$\begin{cases} a = m \\ c = 3m - 4 \end{cases}; a = c \Rightarrow m = 3m - 4 \Rightarrow m - 3m = -4 \Rightarrow -2m = -4 \Rightarrow m = \frac{-4}{-2} = 2$$

بنابراین پاسخ صحیح گزینه ی ۲ می باشد.

نکته: اگر در معادله ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، یک ریشه عکس و قرینه ی ریشه ی دیگر باشد $\left(\alpha = -\frac{1}{\beta}\right)$ در این صورت داریم: $a = -c$

تست: به ازای چه مقدار m دو ریشه ی معادله ی $3x^2 + 11x - 2m - 7 = 0$ عکس و قرینه ی یکدیگرند؟

$$\begin{matrix} 2 & (1) \\ -2 & (2) \\ -5 & (3) \\ 5 & (4) \end{matrix}$$

حل: طبق نکته ی بالا داریم:

$$\begin{cases} a = 3 \\ c = -2m - 7 \end{cases}; a = -c \Rightarrow 3 = -(-2m - 7) \Rightarrow 3 = 2m + 7 \Rightarrow 2m = -4 \Rightarrow m = \frac{-4}{2} = -2$$

بنابراین پاسخ صحیح گزینه ی ۲ می باشد.

نکته: می دانیم اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، در این صورت داریم:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2) = a(x^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1 \cdot x_2) \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

مثال: معادله ی سهمی را بنویسید که محور طول ها را در $x = 1$ و $x = 3$ و محور عرض ها را در $y = 6$ قطع کند.

حل: اگر تابع درجه دوم را به صورت $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ نمایش دهیم، x_1 و x_2 محل های برخورد نمودار تابع با محور طول ها می باشند. بنابراین داریم:

$$y = a(x - 1)(x - 3)$$

از طرفی، نمودار سهمی محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۶ قطع می کند. پس نقطه ای به مختصات $(0, 6)$ در معادله ی تابع صدق می کند. در نتیجه:

$$y = a(x - 1)(x - 3) \Rightarrow 6 = a(0 - 1)(0 - 3) \Rightarrow 6 = 3a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y = 2(x - 1)(x - 3)$$

تشکیل معادله ی درجه دوم جدید از روی معادله ی مفروض:

الف) در معادله ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر b را قرینه کنیم، معادله ی جدیدی به دست می آید که ریشه هایش **قرینه ی** ریشه های معادله ی مفروض است.

تست: معادله ی درجه دومی که ریشه هایش قرینه ی ریشه های معادله ی $3x^2 - 7x - 1 = 0$ باشد کدام است؟

$$(1) \quad 3x^2 + 7x - 1 = 0 \quad (2) \quad -3x^2 - 7x - 1 = 0 \quad (3) \quad 3x^2 + 7x + 1 = 0 \quad (4) \quad -3x^2 + 7x + 1 = 0$$

حل: کافی است b را قرینه کنیم. پس معادله به صورت $3x^2 + 7x - 1 = 0$ می باشد. گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

ب) در معادله ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جای a و c را عوض کنیم، معادله ی جدیدی به دست می آید که ریشه هایش **عکس** ریشه های معادله ی مفروض است.

تست: معادله ی درجه دومی که ریشه هایش عکس ریشه های معادله ی $5x^2 - 13x - 1 = 0$ باشد کدام است؟

$$(1) \quad -5x^2 + 13x + 1 = 0 \quad (2) \quad 5x^2 + 13x - 1 = 0 \quad (3) \quad x^2 + 13x - 5 = 0 \quad (4) \quad x^2 - 13x + 5 = 0$$

حل: کافی است جای a و c را عوض کنیم. بنابراین معادله ی جدید به صورت $-x^2 - 13x + 5 = 0$ می باشد.

با توجه به گزینه ها اما به ظاهر جوابی وجود ندارد. اما چون طرفین یک تساوی را می توان در یک مقدار دلخواه ضرب کرد، اگر

معادله ی $-x^2 - 13x + 5 = 0$ را در (-1) ضرب کنیم، معادله به صورت $x^2 + 13x - 5 = 0$ در می آید.

پس گزینه ی ۳ پاسخ صحیح می باشد.

ج) در معادله ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جای a و c را عوض کرده و b را قرینه کنیم، معادله ی جدیدی به دست می آید که ریشه هایش **عکس و قرینه ی** ریشه های معادله ی مفروض است.

د) در معادله ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر b را در k و c را در k^2 ضرب کنیم، معادله ی جدیدی به دست می آید که ریشه هایش **k برابر** ریشه های معادله ی مفروض است.

تست: معادله ی درجه دومی که ریشه هایش ۹ برابر ریشه های معادله ی $x^2 + x - 3 = 0$ باشد کدام است؟

$$(1) \quad -5x^2 + 13x + 1 = 0 \quad (2) \quad 5x^2 + 13x - 1 = 0 \quad (3) \quad x^2 + 13x - 5 = 0 \quad (4) \quad x^2 - 13x + 5 = 0$$

حل: کافی است b را در 9 و $k = 9$ و c را در $k^2 = 81$ ضرب کنیم. در این صورت معادله ی جدید به صورت $x^2 + 9x - 243 = 0$ خواهد شد. بنابراین پاسخ صحیح گزینه ی ۱ می باشد.

نکته: روش دیگر برای حل این گونه سوالات آن است که بگوییم اگر x ریشه ی معادله ی اولیه باشد، X ریشه ی معادله ی جدید است. سپس با جایگذاری در معادله ی قدیم، معادله ی جدید را به دست آوریم.

مثلا اگر بخواهیم معادله ی جدید ریشه هایش k واحد بیش تر از ریشه های معادله ی اولیه باشد، در این صورت: $X = x + k$ و در نتیجه $x = X - k$. یعنی در معادله ی اولیه کافی است به جای x قرار دهیم $X - k$ و سپس معادله را ساده کنیم.

مثال: معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه های آن ۲ واحد بزرگ تر از ریشه های معادله ی درجه دوم $2x^2 - 5x + 3 = 0$ باشد.

حل:

$$\begin{aligned} X = x + 2 \Rightarrow x = X - 2 \Rightarrow 2(X - 2)^2 - 5(X - 2) + 3 = 0 &\Rightarrow 2(X^2 - 4X + 4) - 5X + 10 + 3 = 0 \\ \Rightarrow 2X^2 - 8X + 8 - 5X + 13 = 0 \Rightarrow 2X^2 - 13X + 21 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 13x + 21 = 0. \end{aligned}$$

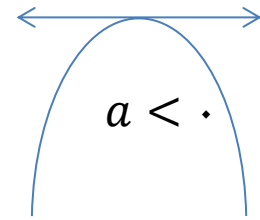
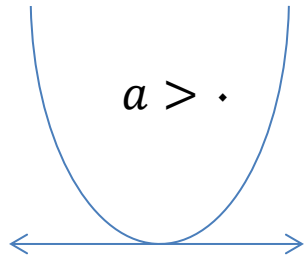
مثال: معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه های آن مربع ریشه های معادله ی درجه دوم $2x^2 - 5x - 7 = 0$ باشد.

حل:

$$\begin{aligned} X = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{X} \Rightarrow 2(\sqrt{X})^2 - 5(\sqrt{X}) - 7 = 0 \Rightarrow 2X - 5\sqrt{X} - 7 = 0 \Rightarrow 2X - 7 = 5\sqrt{X} \\ \xrightarrow{\text{طرفین تساوی به توان ۲}} (2X - 7)^2 = (5\sqrt{X})^2 \Rightarrow 2X^2 - 28X + 49 = 25X \Rightarrow 2X^2 - 53X + 49 = 0 \\ \Rightarrow 2x^2 - 53x + 49 = 0. \end{aligned}$$

تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$

نمودار این تابع سهمی قائم نام دارد. اگر ضریب x^2 یعنی a عددی مثبت باشد آن گاه سهمی رو به بالا و دارای مینیمم است. و اگر ضریب x^2 یعنی a عددی منفی باشد آن گاه سهمی رو به پایین و دارای ماکزیمم است.



$$\min = \text{راس سهمی} = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{\Delta}{4a} \right)$$

$$\max = \text{راس سهمی} = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{\Delta}{4a} \right)$$

مثال: کمترین مقدار تابع $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ را به دست آورید.

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{-3}{2(2)} = \frac{3}{4} \Rightarrow \min = \left(\frac{3}{4}, \frac{23}{8} \right)$$

$$y = \frac{\Delta}{4a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{(-3)^2 - 4(2)(4)}{4(2)} = \frac{9 - 32}{8} = \frac{23}{8}$$

نکته: اگر منحنی یک تابع به صورت $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ باشد، در این صورت مختصات راس سهمی که همان ماکزیمم یا مینیمم است به صورت $S(x_0, y_0)$ می باشد. اگر $a > 0$ این نقطه مینیمم و اگر $a < 0$ این نقطه ماکزیمم است.

مثال: مختصات راس منحنی $y = -2(x + 5)^2 - 3$ را به دست آورده و مشخص کنید این منحنی ماکزیمم دارد یا مینیمم؟

حل: چون $a = -2 < 0$ بنابراین این منحنی دارای ماکزیمم است و مختصات راس منحنی که همان نقطه ی ماکزیمم می باشد

عبارت است: $S(x., y.) = (-5, -3)$

تبدیل تابع از فرم $y = ax^2 + bx + c$ به فرم $y = a(x - x.)^2 + y.$

برای این کار از روش مربع کامل استفاده کرده به این صورت که بعد از تبدیل ضریب x^2 به یک (به کمک فاکتورگیری) نصف ضریب x به توان دو را به ضابطه ی تابع اضافه و از آن کم می کنیم. سپس با استفاده از تجزیه به کمک اتحاد مربع دو جمله ای تابع را به فرم مورد نظر تبدیل می کنیم.

مثال:

$$y = x^2 + 2x - 2 \xrightarrow{\left(\frac{\text{ضریب } x}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1} y = x^2 + 2x - 2 + 1 - 1 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 2$$

$$\Rightarrow y = (x + 1)^2 - 3 \Rightarrow S(x., y.) = (-1, -3)$$

مثال:

$$y = 2x^2 - 4x + 5 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از } 2} y = 2\left(x^2 - 2x + \frac{5}{2}\right) \xrightarrow{\left(\frac{\text{ضریب } x}{2}\right)^2 = \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1} y = 2\left(x^2 - 2x + \frac{5}{2} + 1 - 1\right)$$

$$\Rightarrow y = 2\left(x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{5}{2}\right) \Rightarrow y = 2\left((x - 1)^2 + \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = 2(x - 1)^2 + 3$$

$$\Rightarrow S(x., y.) = (1, -3)$$

تست: اگر نقطه ای به طول ۱- ماکزیمم تابع $y = (1 - m)x^2 + (m^2 - 6)x + 1$ باشد m برابر است با:

(۱) -۳ (۲) -۴ (۳) -۱ (۴) ۲

حل:

$$\begin{cases} a < 0 \Rightarrow 1 - m < 0 \Rightarrow m > 1 \\ x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -1 = -\frac{m^2 - 6}{2(1 - m)} \Rightarrow m^2 - 6 = 2 - 2m \Rightarrow m^2 + 2m - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -4 \end{cases} \end{cases}$$

چون $m > 1$ پس $m = 2$ قابل قبول است. بنابراین گزینه ی ۴ پاسخ صحیح می باشد.

نکته: معادله ی تقارن در سهمی قائم $x = -\frac{b}{2a}$ می باشد.

تست: معادله ی محور تقارن منحنی $x + y = x^2$ کدام است؟

(۱) $2x + 1 = 0$ (۲) $2y - 1 = 0$ (۳) $2x - 1 = 0$ (۴) $2y + 1 = 0$

حل:

$$x + y = x^2 \Rightarrow y = x^2 - x$$

$$x = -\frac{b}{2a} \xrightarrow{a=1, b=-1} x = -\frac{-1}{2(1)} \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow 2x - 1 = 0$$

تست: به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = (1 - m)x^2 + x + m - 2$ از چهار ناحیه ی محورهای مختصات گذشته و دارای ماکزیمم است؟

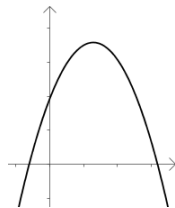
$$-1 < m < 2 \quad (4)$$

$$1 < m < 2 \quad (3)$$

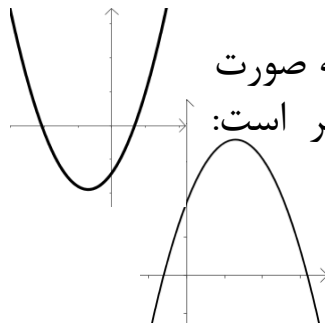
$$m > 2 \quad (2)$$

$$m < 1 \quad (1)$$

می باشد.



یا



حل: چون سهمی از هر چهار ناحیه می گذرد، پس نمودار آن به صورت اما چون دارای ماکزیمم است پس $a < 0$ و نمودار به صورت زیر است:

با توجه به این نمودار محل برخورد با محور x ها در واقع ریشه های معادله ی مربوط به این سهمی یکی مثبت و دیگری منفی است. در نتیجه حاصل ضرب ریشه ها منفی است.

$$\begin{cases} a < 0 \Rightarrow 1 - m < 0 \Rightarrow m > 1 \quad (I) \\ \text{حاصل ضرب ریشه ها} < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m - 2}{1 - m} < 0 \end{cases}$$

با توجه به جدول تعیین علامت جواب عبارت است از:

$$m < 1 \text{ و } m > 2 \quad (II) \quad \xrightarrow{(I) \cap (II)} m > 2$$

| m | 1 | 2 |
|---------|---|---|
| $1 - m$ | + | - |
| $m - 2$ | - | + |
| | - | + |

بنابراین پاسخ صحیح گزینه ی ۲ می باشد.

مثال: حاصل جمع دو عدد برابر ۱۱۰ است. این دو عدد را چنان بیابید که حاصل ضرب آن ها ماکزیمم شود.

حل: دو عدد را x و y می نامیم. داریم: $x + y = 110$ می خواهیم حاصل ضرب آن ها یعنی $P = x \cdot y$ ماکزیمم شود.

$$x + y = 110 \Rightarrow y = 110 - x \Rightarrow P = x \cdot y = x(110 - x) = 110x - x^2 = -x^2 + 110x$$

حاصل، یک تابع درجه دوم است و چون $a = -1 < 0$ بنابراین دارای ماکزیمم می باشد. اما مختصات نقطه ی ماکزیمم:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{110}{2(-1)} = 55 \xrightarrow{y=110-x} y = 110 - 55 = 55 \Rightarrow \begin{cases} x = 55 \\ y = 55 \end{cases}$$

مثال: محیط یک مستطیل برابر ۱۰۰ است. طول و عرض مستطیل را چنان بیابید که مساحت این مستطیل ماکزیمم شود.

حل: طول مستطیل را x و عرض آن را y می نامیم. داریم: $2(x + y) = 100 =$ محیط می خواهیم مساحت آن ماکزیمم شود.

$$2(x + y) = 100 \Rightarrow x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x \Rightarrow S = x \cdot y = x(50 - x) = 50x - x^2 = -x^2 + 50x$$

حاصل، یک تابع درجه دوم است و چون $a = -1 < 0$ بنابراین دارای ماکزیمم می باشد. اما مختصات نقطه ی ماکزیمم:

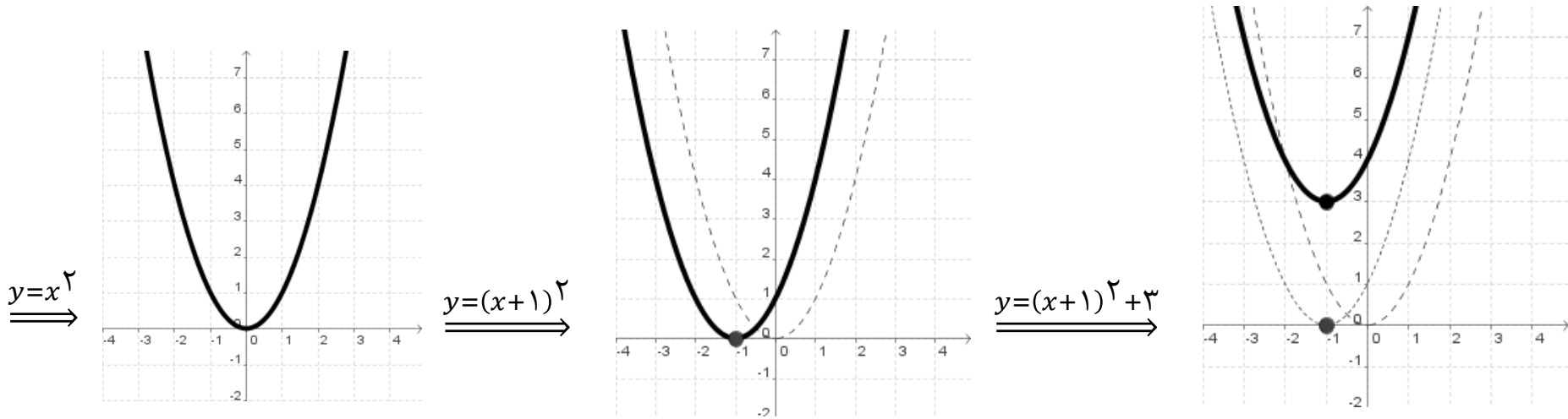
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{50}{2(-1)} = 25 \xrightarrow{y=50-x} y = 50 - 25 = 25 \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 25 \end{cases}$$

رسم منحنی درجه دوم:

الف) به کمک انتقال:

در این روش ابتدا نمودار $y = x^2$ را رسم می کنیم. سپس با توجه به مقداری که به x اضافه و یا از آن کم می شود، هم چنین مقداری که به خود تابع اضافه و یا از آن کم می شود، نمودار را در راستای افقی و یا عمودی انتقال می دهیم.

مثال: نمودار تابع $y = (x + 1)^2 + 3$ را به کمک انتقال رسم کنید.



ب) به کمک مختصات راس سهمی و نقطه یابی:

اگر منحنی درجه دوم به صورت $y = ax^2 + bx + c$ باشد برای رسم آن کافی است $x = -\frac{b}{2a}$ را به دست آورده، یک عدد قبل و یک عدد بعد از آن را در جدول نوشته و مقادیر y را برای آن ها به دست آوریم.

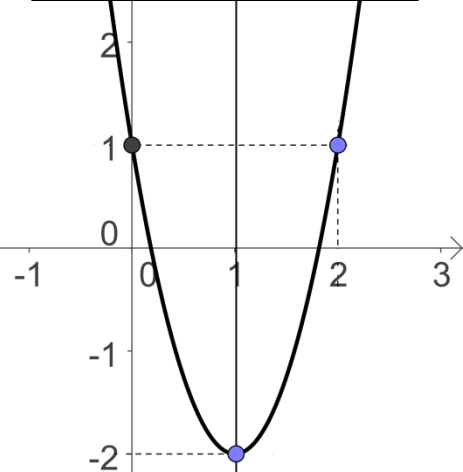
اما در صورتی که منحنی درجه دوم به صورت $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ باشد، نقطه ی $S(x_0, y_0)$ را در نظر گرفته، سپس یک عدد قبل و یک عدد بعد از x_0 را در جدول نوشته و مقادیر y را برای آن ها به دست می آوریم.

مثال: نمودار مربوط به هر تابع را رسم کنید.

$$۱) y = ۳x^۲ - ۶x + ۱$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-۶}{۲(۳)} = \frac{۶}{۶} = ۱$$

| | | | |
|-----|---------|----|---|
| x | \cdot | ۱ | ۲ |
| y | ۱ | -۲ | ۱ |

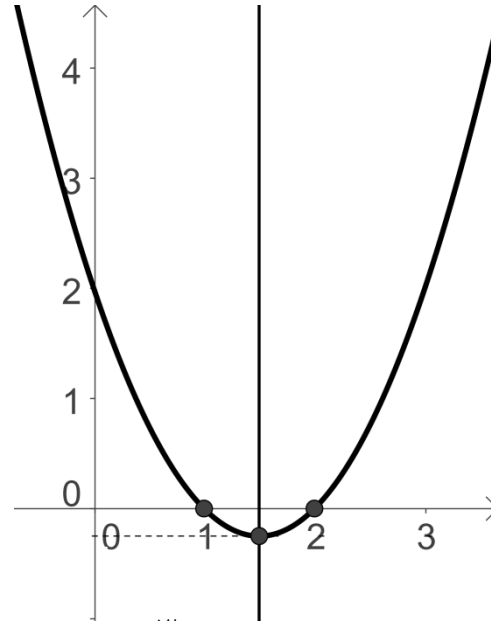


محور تقارن سهمی: $x = ۱$

$$۲) y = (x - ۱)(x - ۲) \Rightarrow y = x^۲ - ۳x + ۲$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-۳}{۲(۱)} = \frac{۳}{۲}$$

| | | | |
|-----|---------|----------------|---------|
| x | ۱ | $\frac{۳}{۲}$ | ۲ |
| y | \cdot | $-\frac{۱}{۴}$ | \cdot |



محور تقارن سهمی: $x = -\frac{۳}{۲}$

$$۳) y = ۲(x - ۱)^۲ - ۳$$

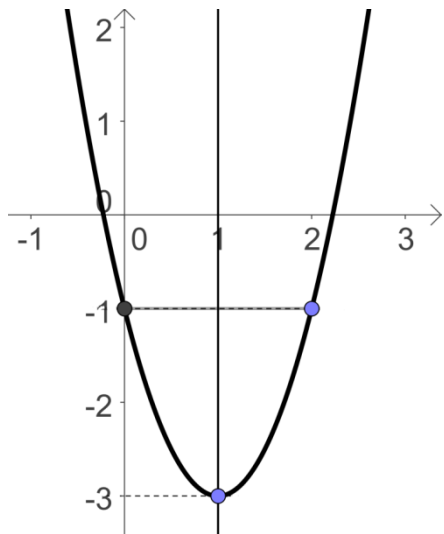
$$S(x., y.) = (۱, -۳)$$

| | | | |
|-----|---------|----|----|
| x | \cdot | ۱ | ۲ |
| y | -۱ | -۳ | -۱ |

$$۳) y = -۳(x + ۲)^۲ + ۴$$

$$S(x., y.) = (-۲, ۴)$$

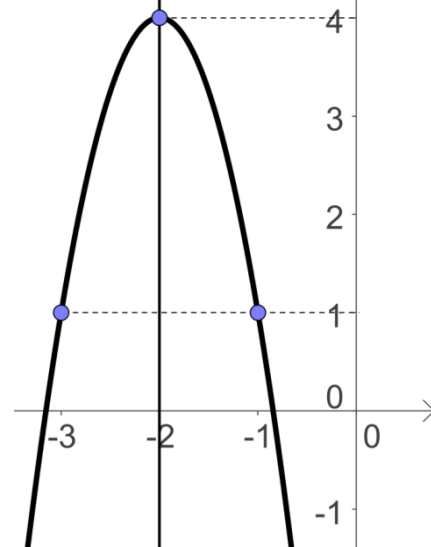
| | | | |
|-----|----|----|----|
| x | -۳ | -۲ | -۱ |
| y | ۱ | ۴ | ۱ |



$$P_{min} = \text{راس سهمی} = (1, -3)$$

محور تقارن سهمی $x = 1$

$$P_{max} = \text{راس سهمی} = (-2, 4)$$



محور تقارن سهمی $x = -2$

نکته: برای رسم دقیق تر، مختصات نقاط تلاقی نمودار با محورهای مختصات را نیز می توانیم به دست می آوریم.

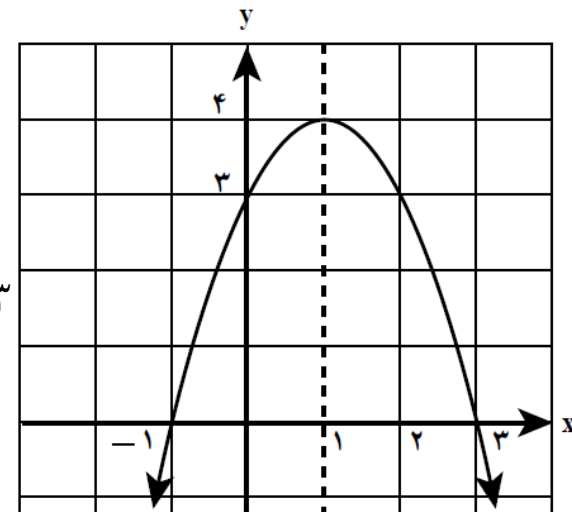
مثال: نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 3$ را رسم کنید.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} = -\frac{2}{-2} = 1$$

| | | | |
|-----|---|---|---|
| x | ۰ | ۱ | ۲ |
| y | ۳ | ۴ | ۳ |

محل برخورد نمودار با محور x ها : $y = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1, 3$

محل برخورد نمودار با محور y ها : $x = 0 \Rightarrow y = 3$



نکته: اگر دو نقطه ی M و N روی نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ دارای عرض های یکسان باشند، آن گاه طول راس سهمی برابر است با نصف مجموع طول های آن دو نقطه و با جایگذاری طول راس سهمی در معادله ی سهمی می توانیم عرض راس سهمی و در نتیجه مختصات راس سهمی را به دست آوریم.

$$x_{\text{راس سهمی}} = \frac{x_N + x_M}{2}$$

مثال: سهمی به معادله ی $y = \frac{1}{4}(x - 1)(x + 3)$ را رسم کنید.

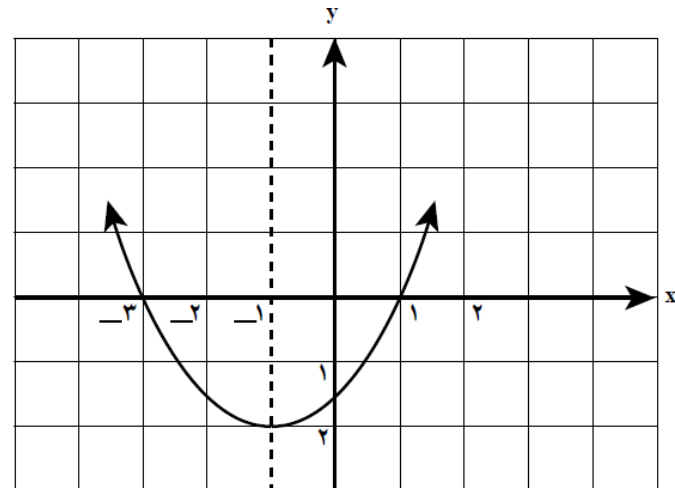
محل برخورد نمودار با محور x ها : $y = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}(x - 1)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = -3, 1 \Rightarrow (-3, 0), (1, 0)$

دو نقطه ی بالا دارای عرض یکسان هستند. بنابراین از نکته ی گفته شده استفاده می کنیم تا طول راس سهمی را به دست آوریم.

$$x_{\text{راس سهمی}} = \frac{-3 + 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow y_{\text{راس سهمی}} = \frac{1}{4}(-1 - 1)(-1 + 3) = \frac{1}{4}(-2)(+2) = -1$$

محل برخورد نمودار با محور y ها :

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}(0 - 1)(0 + 3) = \frac{1}{4}(-1)(3) = \frac{-3}{4}$$



قدر مطلق:

اگر x یک عدد حقیقی باشد، قدر مطلق آن را به صورت $|x|$ نمایش می دهیم و داریم:

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

این تعریف بیان می کند که اگر عبارت داخل قدرمطلق مقداری مثبت باشد، خود عبارت را می نویسیم یعنی: $|x| = x$
در صورتی که عبارت داخل قدرمطلق مقداری منفی باشد، قرینه ی عبارت داخل قدرمطلق را می نویسیم. یعنی: $|x| = -x$

مثال: اگر $0 < x < 1$ ، آن گاه حاصل عبارت $A = |x + 1| - |2x - 3| + |x|$ را به دست آورید.

حل: باید علامت عبارت های داخل قدرمطلق را در فاصله ی $0 < x < 1$ تعیین کنیم. اگر علامت عبارات داخل قدرمطلق به ازای مثبت شود، خود عبارت را می نویسیم و اگر علامت عبارت داخل قدرمطلق منفی شد، قرینه ی عبارت را می نویسیم. برای این کار می توانیم عددی دلخواه مثلاً $x = -\frac{1}{2}$ را در ذهن خود در نظر گرفته و علامت داخل قدرمطلق را مشخص کنیم.

$$A = |x + 1| - |2x - 3| + |x| = (x + 1) - (-(2x - 3)) + (-x) = x + 1 + 2x - 3 - x = 2x - 2$$

منفی است منفی است مثبت است

خواص قدر مطلق:

$$1) |x| \geq 0$$

$$5) |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$9) \sqrt[n]{x^{2n}} = |x|$$

$$2) |-x| = |x|$$

$$6) |x| \leq a \xrightarrow{a \geq 0} -a \leq x \leq +a$$

$$10) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$3) |x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$$

$$7) |x| \geq a \xrightarrow{a \geq 0} x \geq a \text{ یا } x \leq -a$$

$$4) |x| = a \xrightarrow{a \geq 0} x = \pm a$$

$$8) |x + y| \leq |x| + |y|$$

مثال: معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) |۲x - ۷| < ۴$$

خاصیت ۶
 $\implies -۴ < ۲x - ۷ < ۴ \Rightarrow -۴ + ۷ < ۲x - ۷ + ۷ < ۴ + ۷ \Rightarrow ۳ < ۲x < ۱۱ \Rightarrow \frac{۳}{۲} < x < \frac{۱۱}{۲}$

$$۲) |۳x + ۵| \geq ۷$$

خاصیت ۷
 $\implies \begin{cases} ۳x + ۵ \geq ۷ \Rightarrow ۳x \geq ۷ - ۵ \Rightarrow ۳x \geq ۲ \Rightarrow x \geq \frac{۲}{۳} \\ \text{یا} \\ ۳x + ۵ \leq -۷ \Rightarrow ۳x \leq -۷ - ۵ \Rightarrow ۳x \leq -۱۲ \Rightarrow x \leq -۴ \end{cases}$

$$۳) |۳x - ۹| = |x + ۵|$$

خاصیت ۳
 $\implies ۳x - ۹ = \pm(x + ۵) \Rightarrow \begin{cases} ۳x - ۹ = x + ۵ \Rightarrow ۳x - x = ۵ + ۹ \Rightarrow ۲x = ۱۴ \Rightarrow x = ۷ \\ ۳x - ۹ = -x - ۵ \Rightarrow ۳x + x = -۵ + ۹ \Rightarrow ۴x = ۴ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$

$$۴) |۵x - ۳| = ۹$$

خاصیت ۴
 $\implies ۵x - ۳ = \pm ۹ \Rightarrow \begin{cases} ۵x - ۳ = ۹ \Rightarrow ۵x = ۹ + ۳ \Rightarrow ۵x = ۱۲ \Rightarrow x = \frac{۱۲}{۵} \\ ۵x - ۳ = -۹ \Rightarrow ۵x = -۹ + ۳ \Rightarrow ۵x = -۶ \Rightarrow x = \frac{-۶}{۵} \end{cases}$

$$۵) |x + ۱| \leq |x + ۳|$$

طرفین به توان ۲
 $\implies (x + ۱)^2 \leq (x + ۳)^2 \Rightarrow x^2 + ۲x + ۱ \leq x^2 + ۶x + ۹ \Rightarrow ۲x - ۶x \leq ۹ - ۱ \Rightarrow -۴x \leq ۸$
 $\implies ۴x \geq -۸ \Rightarrow x \geq -۲$

مثال: معادلات قدرمطلقى زیر را حل کنید.

الف) $||x| - 2| = 4$

خاصیت ۴ $\implies |x| - 2 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} |x| - 2 = 4 \Rightarrow |x| = 4 + 2 \Rightarrow |x| = 6 \xrightarrow{\text{خاصیت ۴}} x = \pm 6 \\ |x| - 2 = -4 \Rightarrow |x| = -4 + 2 \Rightarrow |x| = -6 \text{ (غ.ق.ق.)} \end{cases}$

ب) $\frac{4}{|2x + 6|} = 2 \Rightarrow \frac{4}{|2(x + 3)|} = 2 \Rightarrow \frac{4}{|2||x + 3|} = 2 \Rightarrow \frac{4}{2|x + 3|} = 2 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4|x + 3| = 4$

$\implies |x + 3| = 1 \xrightarrow{\text{خاصیت ۴}} x + 3 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 1 \Rightarrow x = -2 \\ x + 3 = -1 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$

مثال: نامعادلات قدرمطلقى زیر را حل کنید.

الف) $|3 - 5x| < 8$

خاصیت ۶ $\implies -8 < 3 - 5x < 8 \Rightarrow -11 < -5x < 5 \xrightarrow{\text{طرفین نامساوى تقسیم بر -5}} \frac{-11}{-5} > \frac{-5x}{-5} > \frac{5}{-5}$
 $\implies \frac{11}{5} > x > -1 \Rightarrow -1 < x < \frac{11}{5}$

ب) $\left| \frac{2}{3x + 1} \right| > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{|2|}{|3x + 1|} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{|3x + 1|} > \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{طرفین نامساوى را معکوس می کنیم. چون طرفین نامساوى مثبت است، جهت نامساوى عوض می شود.}} \frac{|3x + 1|}{2} < 2$

$\implies |3x + 1| < 4 \xrightarrow{\text{خاصیت ۶}} -4 < 3x + 1 < 4 \Rightarrow -5 < 3x < 3 \Rightarrow \frac{-5}{3} < x < \frac{3}{3} \Rightarrow \frac{-5}{3} < x < 1$

نکته: تابع $y = |x - a| + |x - b|$ را در نظر بگیرید. برای رسم این تابع کافی است ریشه های داخل قدرمطلق را به دست آورده، سپس یک عدد قبل و یک عدد بعد از این اعداد را در نظر گرفته و در یک جدول می نویسیم.

نمودار این تابع به شکل زیر می باشد: (که به آن نمودار گلدانی نیز گفته می شود).

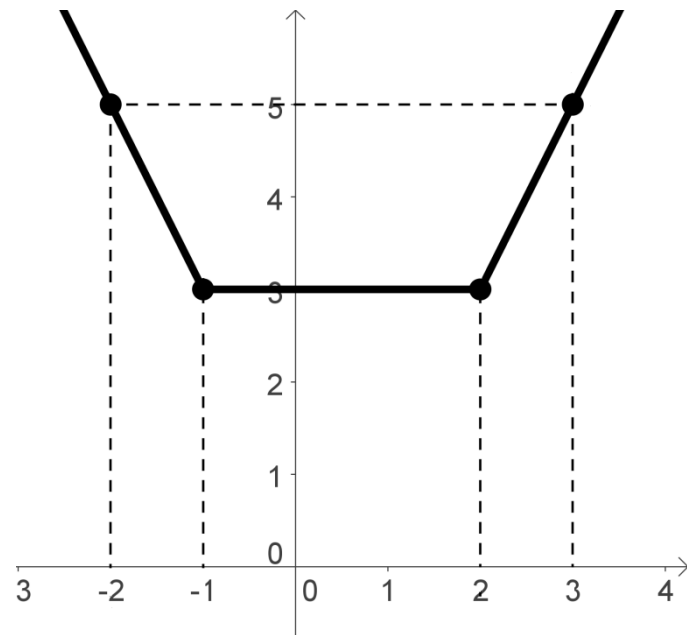
در این تابع خط $x = \frac{a+b}{2}$ محور تقارن است. دامنه ی این تابع \mathbb{R} و برد آن $(|a-b|, +\infty)$ می باشد.

مثال: نمودار تابع $y = |x - 2| + |x + 1|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا ریشه های عبارت های داخل قدرمطلق را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 = a \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 = b \end{cases}$$

| | | | | | | |
|-----|----|----|---|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 5 | 3 | 3 | 3 | 3 | 5 |



$$|a - b| = |2 - (-1)| = 3$$

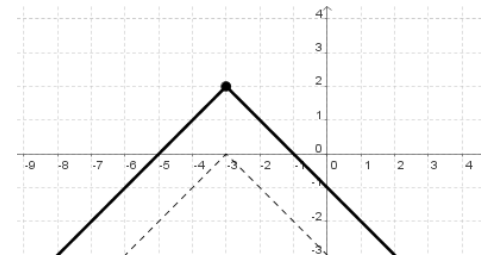
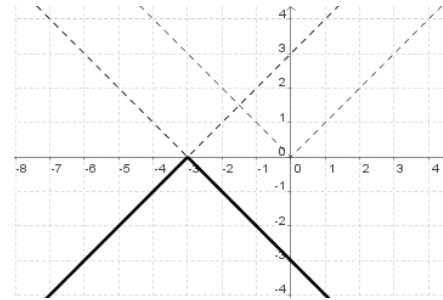
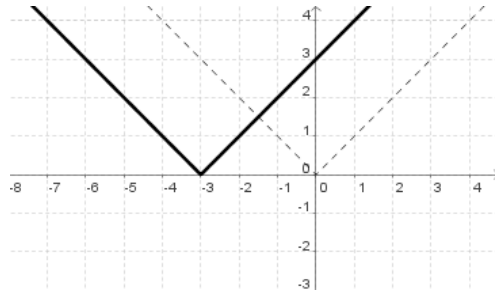
دامنه ی این تابع \mathbb{R} و برد آن $(3, +\infty)$ می باشد.

رسم نمودار توابع شامل قدر مطلق به کمک تابع $y = |x|$ و به روش انتقال:

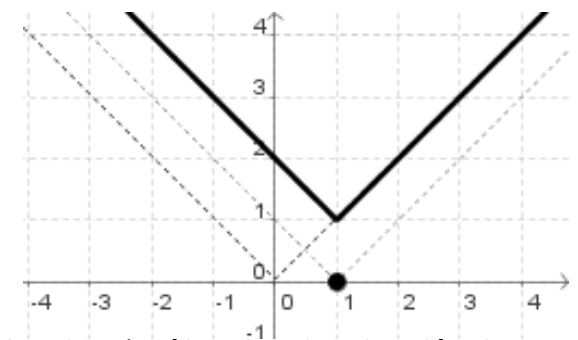
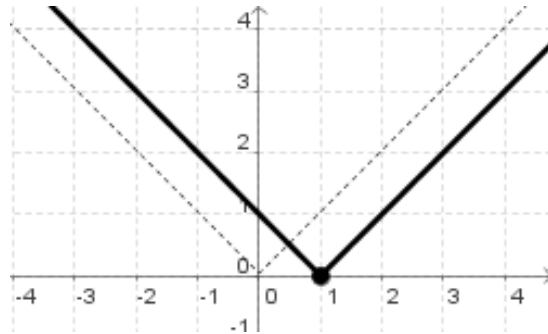
در این روش ابتدا نمودار $y = |x|$ را رسم می کنیم. سپس با توجه به مقداری که به x اضافه و یا از آن کم می شود، هم چنین مقداری که به خود تابع اضافه و یا از آن کم می شود، نمودار را در راستای افقی و یا عمودی انتقال می دهیم.

مثال: ابتدا نمودار تابع $y = |x|$ را رسم کرده و سپس با استفاده از آن نمودار توابع زیر را رسم کنید.

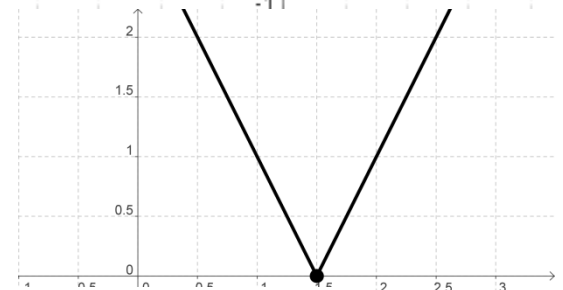
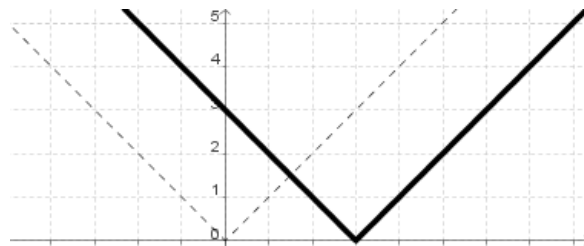
۱) $y = 2 - |x + 3|$



۲) $y = |x - 1| + 1$



۳) $y = |2x - 3|$



ابتدا نمودار $y = |x - 3|$ را رسم کرده سپس طول نقاط را در $\frac{1}{2}$ ضرب می کنیم.

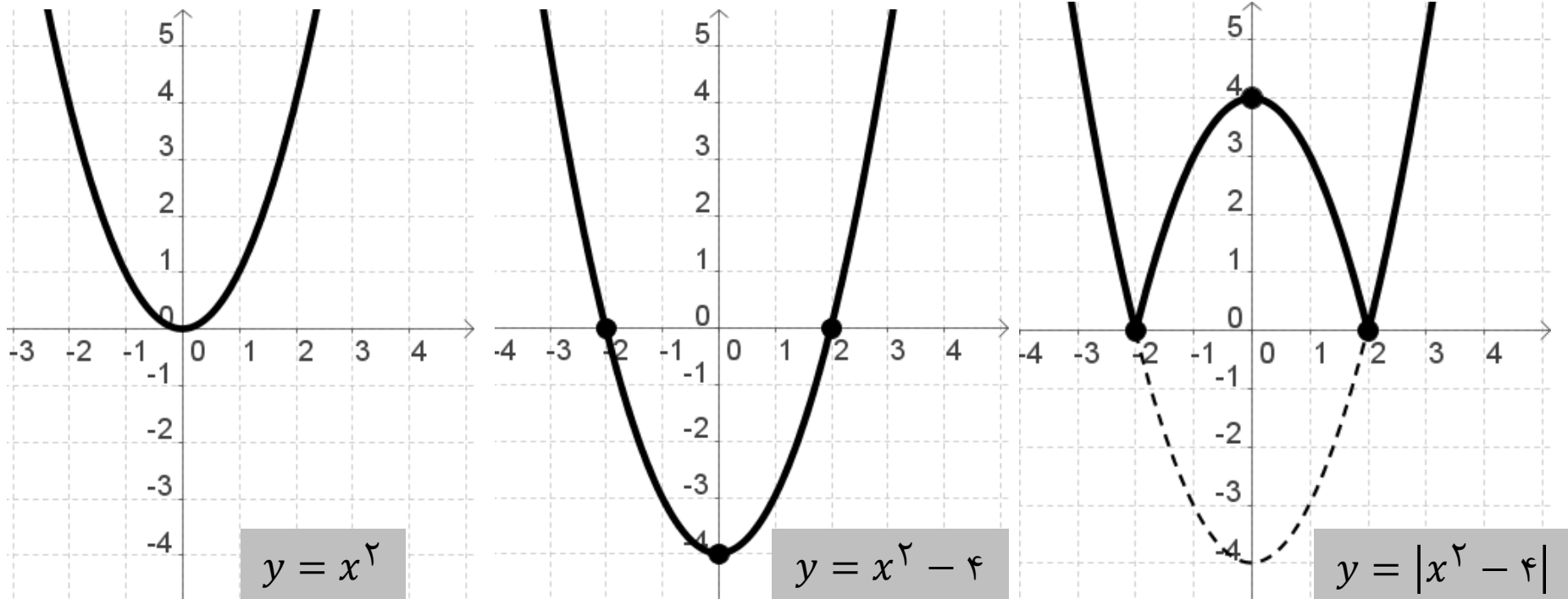
رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$

ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم کرده، سپس قسمت هایی از نمودار را که زیر محور x قرار دارد را حذف و نسبت به محور x ها قرینه می کنیم. به این ترتیب نمودار $y = |f(x)|$ به دست می آید.

مثال: نمودار تابع $y = |x^2 - 4|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار $y = x^2 - 4$ را با استفاده از انتقال رسم می کنیم.

سپس قسمتی از نمودار را که زیر محور x قرار دارد، نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.

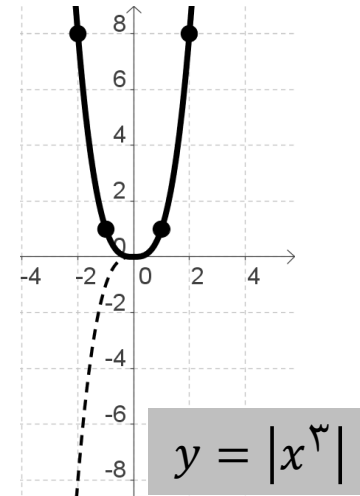
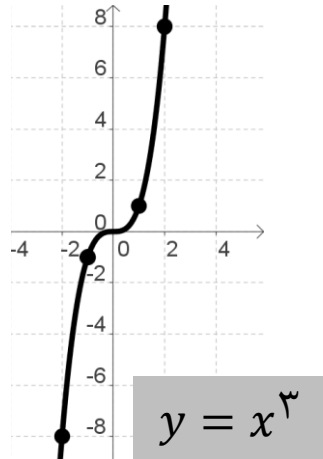


مثال: نمودار $y = |x^3|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار $y = x^3$ را با استفاده از نقطه یابی رسم می کنیم.

سپس قسمتی از نمودار را که زیر محور x ها قرار دارد، نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.

| | | | | | |
|-----|----|----|---|---|---|
| x | -۲ | -۱ | ۰ | ۱ | ۲ |
| y | -۸ | -۱ | ۰ | ۱ | ۸ |

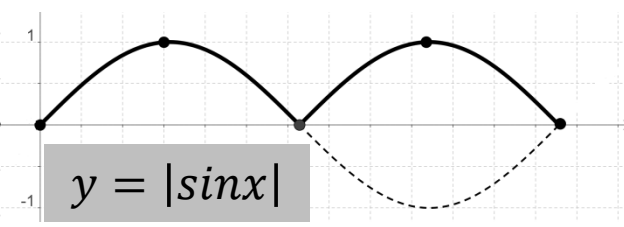
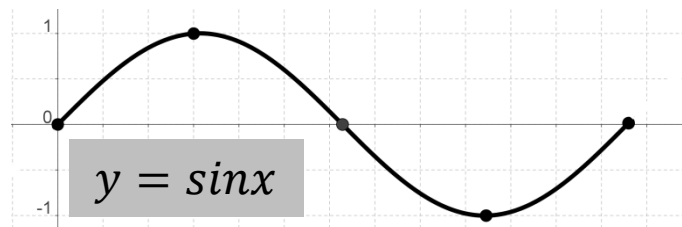


مثال: نمودار $y = |\sin x|$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار $y = \sin x$ را با استفاده از نقطه یابی رسم می کنیم.

سپس قسمتی از نمودار را که زیر محور x ها قرار دارد، نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.

| | | | | | |
|-----|---|-----------------|-------|------------------|--------|
| x | ۰ | $\frac{\pi}{۲}$ | π | $\frac{۳\pi}{۲}$ | ۲π |
| y | ۰ | ۱ | ۰ | -۱ | ۰ |



روش تبدیل تابع قدرمطلق به یک تابع چند ضابطه ای و رسم آن:

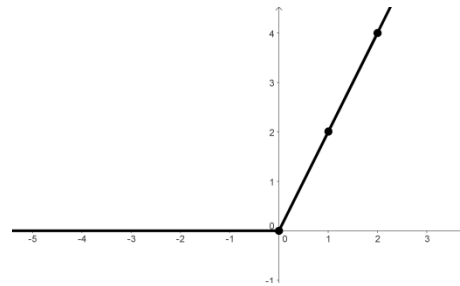
در این روش ابتدا عبارات درون قدر مطلق را برابر صفر قرار می دهیم تا ریشه های آن ها را به دست آوریم. سپس دامنه ی تابع قدر مطلق را به ازای ریشه های به دست آمده به قسمت های مختلفی تقسیم می کنیم.

با توجه به محدوده ی x ، در هر قسمت، علامت عبارات درون قدرمطلق ها را مشخص کرده و آن گاه قدر مطلق را بر می داریم. در نهایت نمودار ضابطه های به دست آمده در هر قسمت را با توجه به محدوده ی x آن ها رسم می کنیم.

به عنوان مثال برای رسم تابع $y = x + |x|$ ابتدا ریشه ی عبارت درون قدر مطلق را به دست می آوریم. ($x = 0$)

سپس دامنه ی تابع $y = x + |x|$ که R می باشد را با توجه ریشه ی به دست آمده به دو قسمت $x \geq 0$ و $x < 0$ تقسیم می کنیم که در نهایت به تابع زیر می رسمیم:

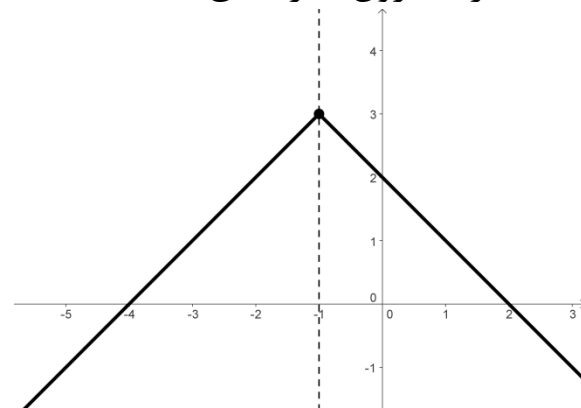
$$y = x + |x| = \begin{cases} x + x ; x \geq 0 \\ x - x ; x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x ; x \geq 0 \\ 0 ; x < 0 \end{cases}$$



مثال: تابع $y = 3 - |x + 1|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه ای (بدون نماد قدرمطلق) بنویسید. سپس نمودار آن را رسم کنید.

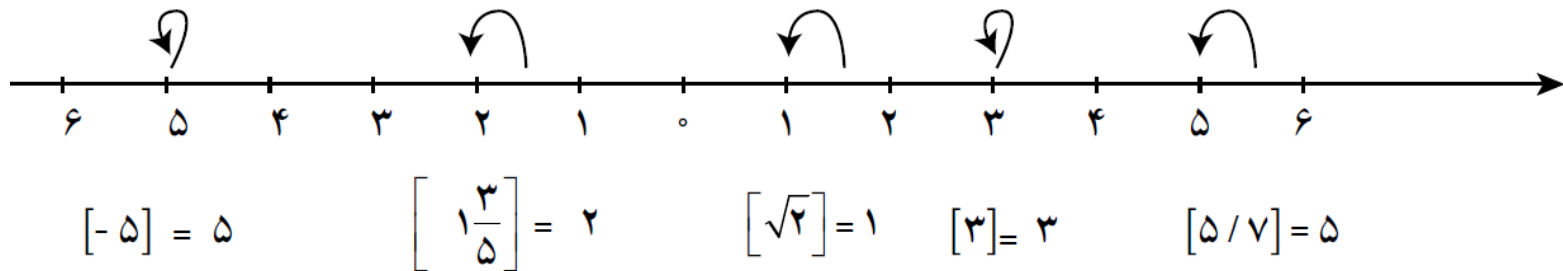
حل: ریشه ی عبارت درون قدرمطلق $x = -1$ است. دامنه ی تابع را به $x \geq -1$ و $x < -1$ تقسیم می کنیم.

$$y = 3 - |x + 1| = \begin{cases} 3 - (x + 1) ; x \geq -1 \\ 3 - [-(x + 1)] ; x < -1 \end{cases} = \begin{cases} 2 - x ; x \geq -1 \\ 4 + x ; x < -1 \end{cases}$$



جزء صحیح (براکت):

جزء صحیح x ، اولین عدد صحیح کوچک تر یا مساوی x است.



برای محاسبه ی جزء صحیح یک عدد روش زیر را به کار می بندیم:

(الف) اگر x عددی صحیح باشد ($x \in \mathbb{Z}$)، جزء صحیح آن با خودش برابر است. به عنوان مثال: $[-4] = -4$ ، $[3] = 3$

(ب) اگر x عددی غیر صحیح باشد ($x \notin \mathbb{Z}$)، ابتدا دقت می کنیم که عدد x ، بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد. پس از یافتن آن دو عدد، جزء صحیح x برابر عدد صحیح کوچک تر است.

مثال: $3 < 3/6 < 4 \Rightarrow [3/6] = 3$ $-9 < -8/2 < -8 \Rightarrow [-8/2] = -9$

نکته: می توان هر عدد حقیقی x را به دو قسمت جزء صحیح ($[x]$) و جزء کسری یا اعشاری (α) به صورت زیر تقسیم نمود:

$$x = [x] + \alpha ; 0 \leq \alpha < 1$$

به عنوان مثال:

$$5/23 = 5 + 0/23$$

\downarrow \downarrow
 جزء اعشاری جزء صحیح

$$-3/7 = -4 + 0/3$$

\downarrow \downarrow
 جزء اعشاری جزء صحیح

تابع جزء صحیح:

تابعی که به هر عدد حقیقی x ، جزء صحیح آن را نسبت می دهد، تابع جزء صحیح نام دارد.
تابع جزء صحیح x را به صورت $y = f(x) = [x]$ نشان می دهیم. دامنه ی این تابع \mathbb{R} و برد آن \mathbb{Z} است.

ویژگی های تابع جزء صحیح:

$$۱) [x] = n \iff n \in \mathbb{Z} \wedge n \leq x < n + 1$$

$$۲) [x] \leq x < [x] + 1 \iff [x] - [x] \leq x - [x] < [x] - [x] + 1 \iff 0 \leq x - [x] < 1$$

$$۳) \text{if } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x \pm k] = [x] \pm k ;$$

اثبات: برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$[x] = n ; n \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{ویژگی ۱}} n \leq x < n + 1 \xrightarrow{\text{طرفین به علاوه } k (k \in \mathbb{Z})} n + k \leq x + k < n + k + 1$$

$$\xrightarrow{n+k \in \mathbb{Z}} [n + k] = n + k \xrightarrow{n=[x]} [x + k] = [x] + k$$

$$۴) [x + k[x]] = [x] + k[x] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} [x + [x]] = [x] + [x] = ۲[x] \\ [x - [x]] = [x] - [x] = 0 \end{cases}$$

اثبات:

حالت اول: اگر $x \in \mathbb{Z}$:

در این حالت چون x عددی صحیح می باشد، $-x$ نیز عدد صحیح بوده و بنابراین جزء صحیح آن ها با خودشان برابر است.

$$\begin{cases} [x] = x \\ [-x] = -x \end{cases} \Rightarrow [x] + [-x] = x + (-x) = x - x = 0$$

حالت دوم: اگر $x \notin \mathbb{Z}$:

در این حالت چون x عددی صحیح نمی باشد، پس عدد صحیحی مانند n وجود دارد به طوری که: $n < x < n + 1$.

$$n < x < n + 1 \Rightarrow [x] = n \text{ (I)}$$

از طرفی:

$$n < x < n + 1 \xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض می شود.}]{\text{طرفین ضرب در } -1} -n > -x > -n - 1 \xrightarrow{\text{یا}} -n - 1 < -x < -n$$

$$\Rightarrow (-n - 1) < -x < (-n - 1) + 1 \Rightarrow [-x] = -n - 1 \text{ (II)}$$

$$\xrightarrow{\text{(I) و (II)}} [x] + [-x] = n + (-n - 1) = -1$$

$$\epsilon) [-x] = \begin{cases} -[x] & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 - [x] & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: اگر $f(x) = [-x + 4] + [x + 2]$ و $x \notin \mathbb{Z}$ باشد، نشان دهید $f(x) = 5$.

حل:

$$f(x) = [-x + 4] + [x + 2] \xrightarrow{\text{ویژگی } 2, 4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4} f(x) = [-x] + 4 + [x] + 2 \Rightarrow f(x) = [x] + [-x] + 6$$

$$\xrightarrow{x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = -1} f(x) = -1 + 6 \Rightarrow f(x) = 5$$

تمرین: اگر $f(x) = [x + 2] + [-x]$ و $x \notin \mathbb{Z}$ باشد، نشان دهید $f(x) = 1$.

مثال: اگر $n \in \mathbb{N}$ آن گاه با استفاده از نامساوی های $4n^2 < 4n^2 + 2n + 1 < 4n^2 + 4n + 1$ نشان دهید:

$$\left[\sqrt{4n^2 + 2n + 1} \right] = 2n$$

حل: با توجه به نامساوی داده شده داریم:

$$4n^2 < 4n^2 + 2n + 1 < 4n^2 + 4n + 1 \Rightarrow (2n)^2 < 4n^2 + 2n + 1 < \underbrace{(2n)^2 + 2(2n)(1) + 1^2}_{\text{اتحاد مربع مجموع دو جمله}}$$

$$\Rightarrow (2n)^2 < 4n^2 + 2n + 1 < (2n + 1)^2 \xrightarrow{\text{جذر از طرفین نامساوی}} \sqrt{(2n)^2} < \sqrt{4n^2 + 2n + 1} < \sqrt{(2n + 1)^2}$$

$$\Rightarrow 2n < \sqrt{4n^2 + 2n + 1} < 2n + 1 \xrightarrow{2n \in \mathbb{Z}} \left[\sqrt{4n^2 + 2n + 1} \right] = 2n$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $[x - 1] = 6$

$$[x - 1] = 6 \xrightarrow{\text{ویژگی ۱ جزء صحیح}} [x] - 1 = 6 \Rightarrow [x] = 7 \xrightarrow{\text{ویژگی ۱ جزء صحیح}} 7 \leq x < 8$$

ب) $[3x - 1] = 1$

$$[3x - 1] = 1 \xrightarrow{\text{ویژگی ۱ جزء صحیح}} 1 \leq 3x - 1 < 2 \xrightarrow{\text{طرفین نامساوی بعلاوه ی ۱}} 1 + 1 \leq 3x - 1 + 1 < 2 + 1$$

$$\Rightarrow 2 \leq 3x < 3 \xrightarrow{\text{طرفین نامساوی تقسیم بر ۳}} \frac{2}{3} \leq x < 1$$

ج) $[x + 3[x]] = 8$

$$[x + 3[x]] = 8 \xrightarrow{\text{نتیجه ویژگی ۴}} [x] + 3[x] = 8 \Rightarrow 4[x] = 8 \Rightarrow [x] = 2 \xrightarrow{\text{ویژگی ۱ جزء صحیح}} 2 \leq x < 3$$

د) $[1 - 2x] = -5$

$$[1 - 2x] = -5 \xrightarrow{\text{ویژگی ۱ جزء صحیح}} -5 \leq 1 - 2x < -4 \xrightarrow{\text{طرفین نامساوی بعلاوه ی ۱}} -5 - 1 \leq 1 - 2x - 1 < -4 - 1$$

$$\Rightarrow -6 \leq -2x < -5 \xrightarrow{\text{طرفین نامساوی تقسیم بر -۲}} \frac{-6}{-2} \geq \frac{-2x}{-2} < \frac{-5}{-2} \Rightarrow 3 \geq x > 2.5$$

جهت نامساوی عوض می شود.

مثال: نمودار تابع $y = [x]$ را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

حل: بازه ی داده شده را به تعدادی زیر بازه به صورت زیر تقسیم می کنیم به طوری که ابتدا و انتهای هر زیربازه دو عدد صحیح متوالی باشند.

$$[-2, -1) \Rightarrow [x] = -2 \xrightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه ی تابع}} y = -2 \Rightarrow -2 \leq x < -1$$

$$\Rightarrow y = -2$$

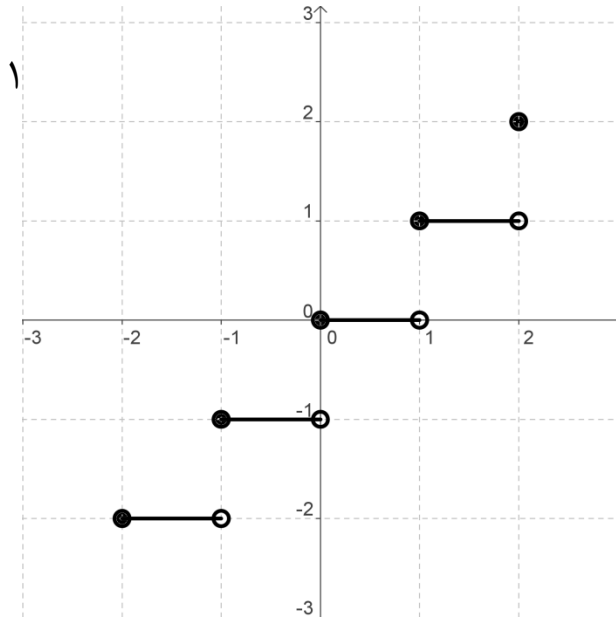
$$[-1, 0) \Rightarrow [x] = -1 \xrightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه ی تابع}} y = -1 \Rightarrow -1 \leq x < 0$$

$$\Rightarrow y = -1$$

$$[0, 1) \Rightarrow [x] = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه ی تابع}} y = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 0$$

$$[1, 2) \Rightarrow [x] = 1 \xrightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه ی تابع}} y = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \Rightarrow y = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2$$



مثال: نمودار تابع $y = x - [x]$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار این تابع، مجموعه ی اعداد حقیقی را به زیربازه هایی تقسیم می کنیم که ابتدا و انتهای بازه ها اعداد صحیح متوالی باشند. به عنوان مثال در بازه ی فرضی $[n, n + 1)$ داریم $[x] = n$ و در نتیجه ضابطه ی تابع به شکل $y = x + n$ در می آید و کافی است نمودار این تابع (که یک خط می باشد) را با استفاده از نقطه یابی در بازه ی $[n, n + 1)$ رسم کنیم.

$$\vdots$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \xrightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه ی تابع}} y = x - (-2) \Rightarrow y = x + 2$$

| | | |
|-----|------|------|
| x | -2 | -1 |
| y | 0 | 1 |

| | | |
|-----|---------|---------|
| x | -1 | \cdot |
| y | \cdot | 1 |

| | | |
|-----|---------|-----|
| x | \cdot | 1 |
| y | \cdot | 1 |

| | | |
|-----|---------|-----|
| x | 1 | 2 |
| y | \cdot | 1 |

⋮

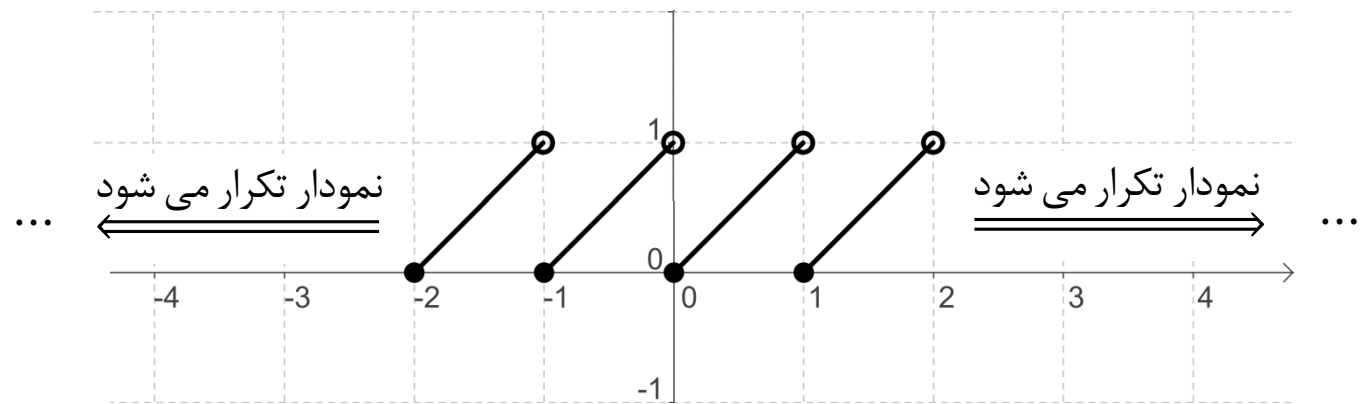
$-1 \leq x < \cdot \Rightarrow [x] = -1 \xrightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه ی تابع}} y = x - (-1) \Rightarrow y = x + 1$

$\cdot \leq x < 1 \Rightarrow [x] = \cdot \xrightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه ی تابع}} y = x - (\cdot) \Rightarrow y = x$

$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \xrightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه ی تابع}} y = x - (+1) \Rightarrow y = x - 1$

⋮

حال خطوط به دست آمده را در زیربازه های مربوط به خودشان، رسم می کنیم. دقت کنید که شیب تمام خطوط برابر با یک می باشد. پس تمامی خطوط با هم موازی هستند.



نکته: چون در هر زیر بازه ی متعلق به آن زیربازه نمی باشد، لذا هنگام رسم، $x = n + 1$ ، انتهای زیربازه یعنی $(n, n + 1)$ نقاط انتهایی در هر زیربازه را توخالی رسم کرده ایم.

مثال: نمودار تابع $f(x) = \left[\frac{x}{3} \right]$ را در بازه ی $[-6, 6]$ رسم کنید.

حل: در این گونه موارد با توجه به بازه ی داده شده، عبارت درون جزء صحیح را تشکیل می دهیم.

$$-6 \leq x \leq 6 \xrightarrow{\text{طرفین نامساوی تقسیم بر 3}} -2 \leq \frac{x}{3} \leq 2$$

حال باید بازه ی به دست آمده را به چند زیربازه تقسیم می کنیم به طوری که تابع $f(x) = \left[\frac{x}{3} \right]$ بین دو عدد صحیح متوالی قرار گیرد.

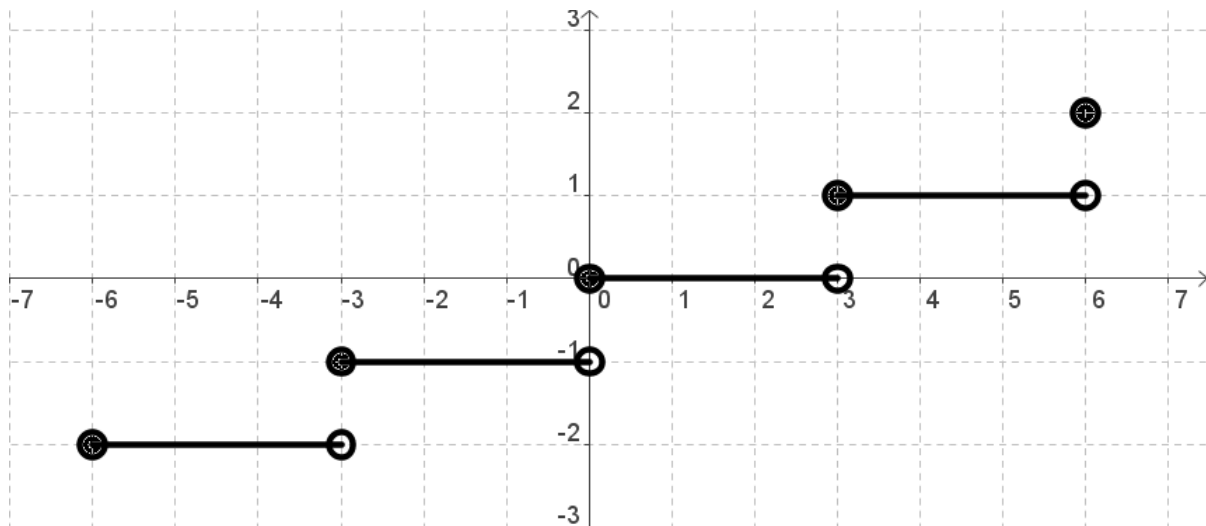
$$-2 \leq \frac{x}{3} < -1 \Rightarrow \left[\frac{x}{3} \right] = -2; (-6 \leq x < -3 \Rightarrow y = -2)$$

$$-1 \leq \frac{x}{3} < 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{3} \right] = -1; (-3 \leq x < 0 \Rightarrow y = -1)$$

$$0 \leq \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x}{3} \right] = 0; (0 \leq x < 3 \Rightarrow y = 0)$$

$$1 \leq \frac{x}{3} < 2 \Rightarrow \left[\frac{x}{3} \right] = 1; (3 \leq x < 6 \Rightarrow y = 1)$$

$$\frac{x}{3} = 2 \Rightarrow \left[\frac{x}{3} \right] = 2; (x = 6 \Rightarrow y = 2)$$



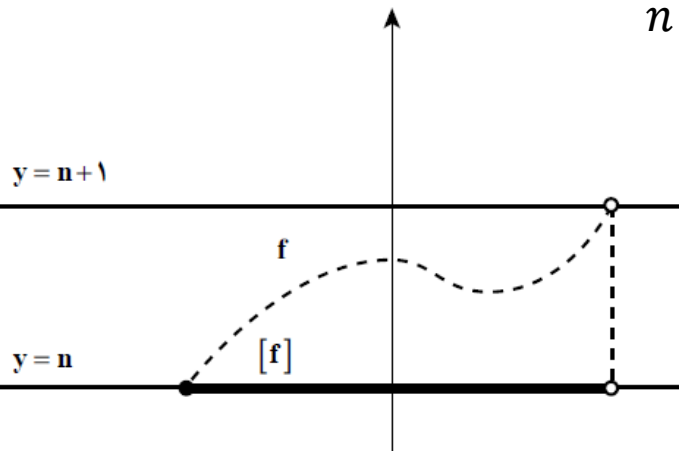
رسم نمودار $y = [f(x)]$:

مرحله ی اول: تابع درون جزء صحیح $(f(x))$ را رسم می کنیم.

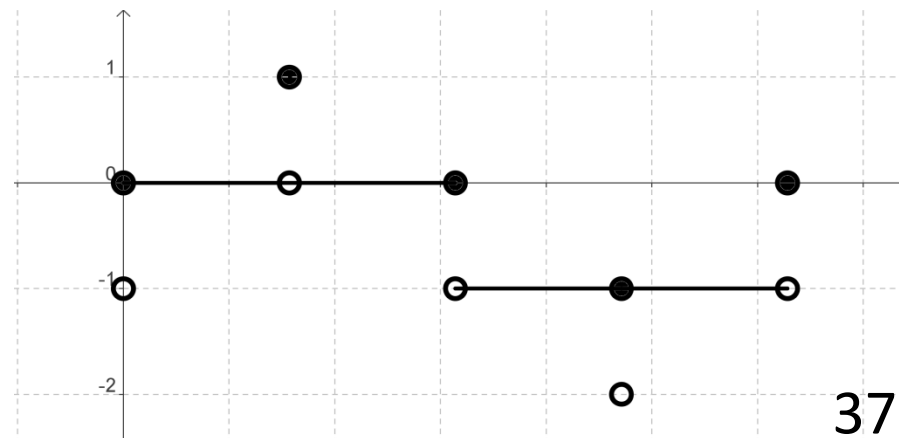
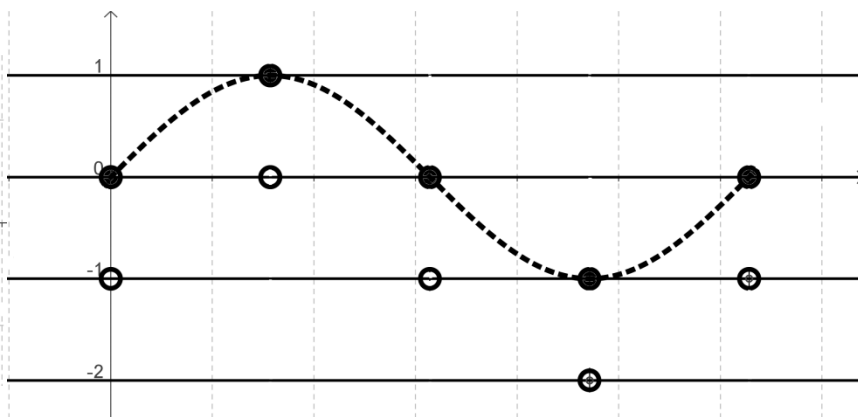
مرحله ی دوم: خطوط افقی $y = 2, y = 1, y = 0, y = -1, y = -2, \dots$ را رسم کرده، جاهایی که این خطوط با نمودار تابع $f(x)$ برخورد دارند را نقاط توپر در نظر می گیریم. هم چنین تصویر این نقاط توپر را روی خط پایینی به صورت نقاط توخالی در نظر می گیریم.

مرحله ی سوم: با توجه به اینکه اگر $f(x)$ بین دو عدد صحیح متوالی n و $n + 1$ قرار گیرد آن گاه داریم: $[f(x)] = n$

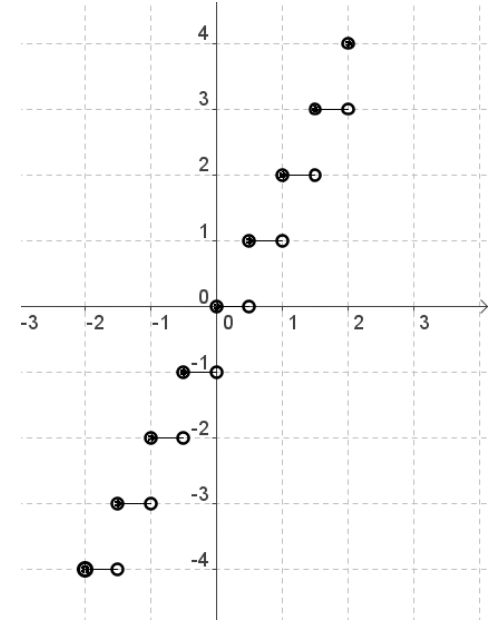
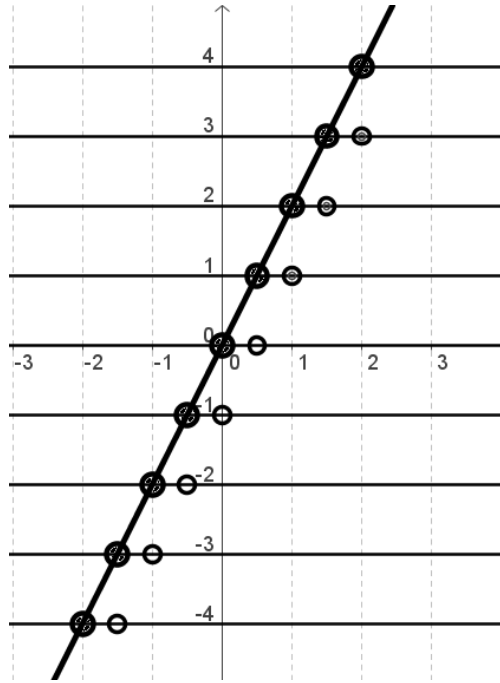
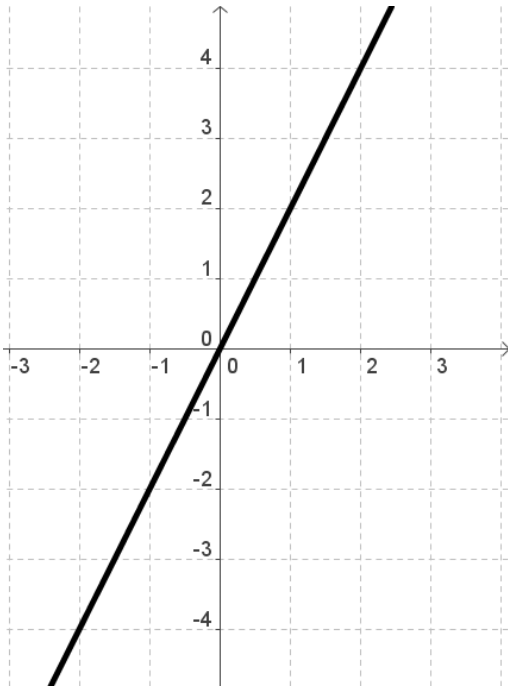
هنگام رسم $[f(x)]$ مطابق شکل، قسمت هایی از نمودار $f(x)$ که بین دو خط $y = n$ و $y = n + 1$ قرار می گیرند را حذف کرده و به جای آن تصویر نمودار $f(x)$ را روی خط پایینی $(y = n)$ رسم می کنیم.



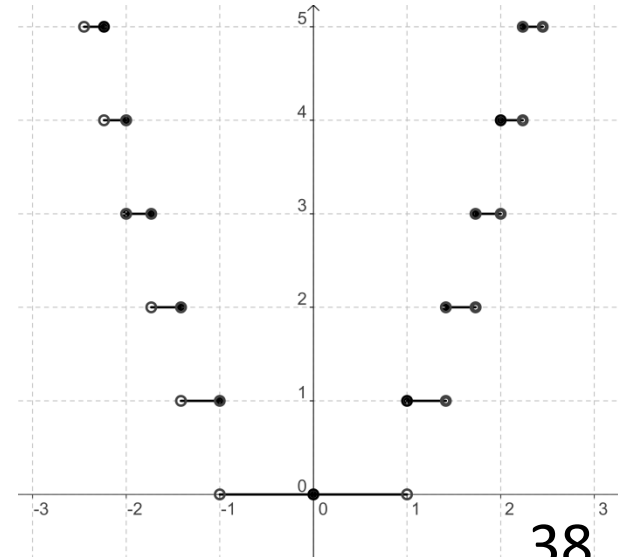
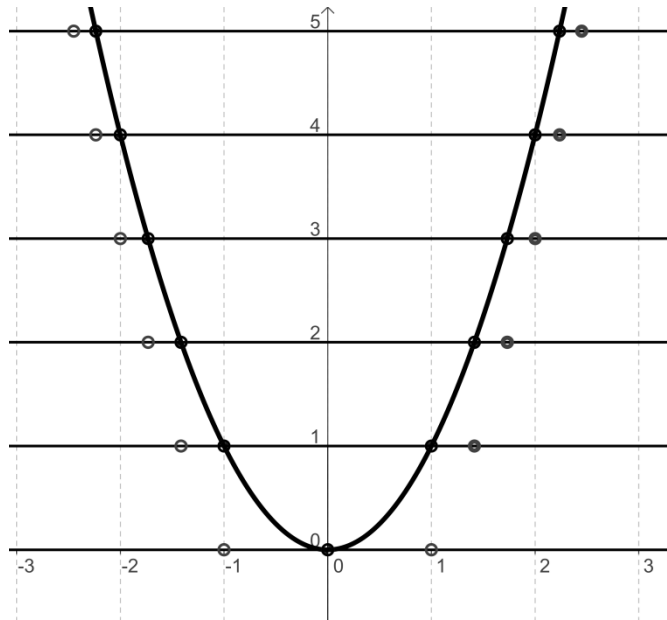
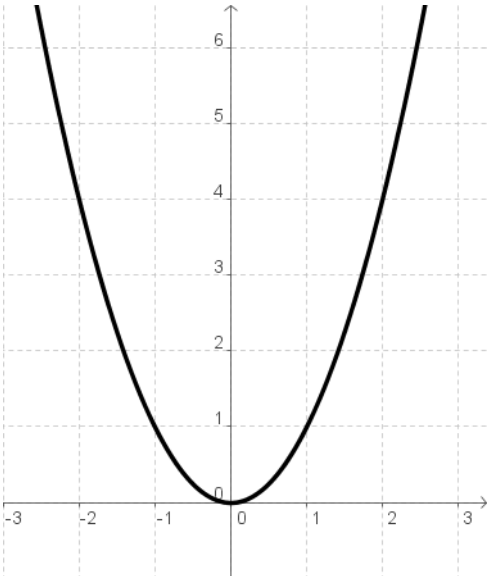
مثال: نمودار تابع $y = [\sin x]$ را رسم کنید.



مثال: نمودار تابع $y = [2x]$ را رسم کنید.



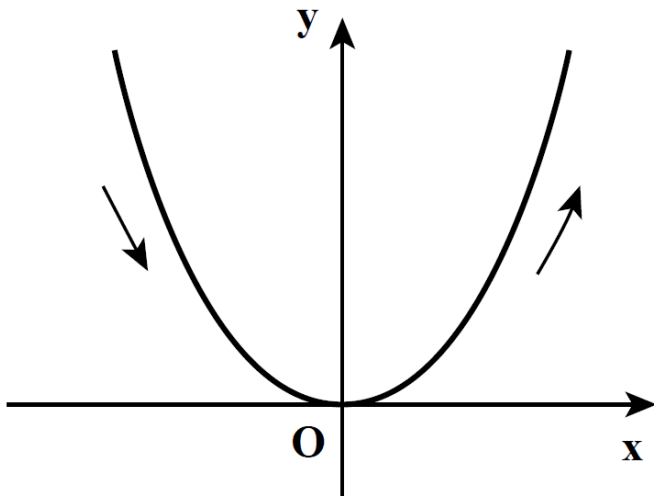
مثال: نمودار تابع $y = [x^2]$ را رسم کنید.



توابع صعودی و نزولی

اگر به نمودار تابع $f(x) = x^2$ توجه کنید، دیده می شود که روی بازه $[0, +\infty)$ با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ نیز افزایش می یابند. در این حالت گوییم تابع در حال **صعود** است.

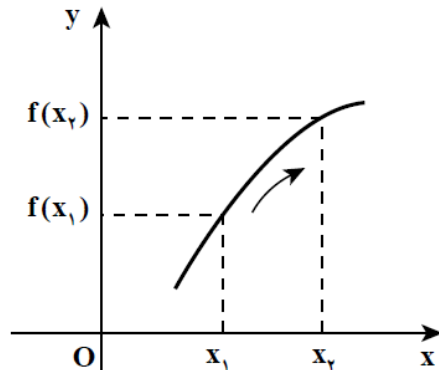
اما اگر این تابع را روی بازه $(-\infty, 0]$ نگاه کنیم، می بینیم که با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ کاهش می یابد. در این حالت گوییم تابع در حال **نزول** است.



تعریف

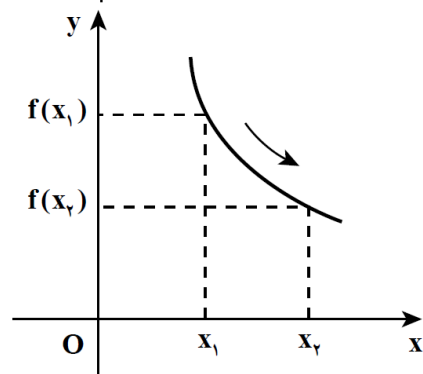
به طور کلی، اگر D بازه ای در دامنه ی تابع f باشد، گوییم f در بازه ی D **صعودی** است هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in D$ داشته باشیم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



و گوییم f در بازه ی D **نزولی** است هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in D$ داشته باشیم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$



نکته: توابع ثابت هم صعودی محسوب می شوند هم نزولی.

توابع اکیدا صعودی:

توابع یک به یک و صعودی را توابع اکیدا صعودی می نامند.

یک تابع f روی بازه D اکیدا صعودی است اگر و فقط اگر برای هر $x_1, x_2 \in D$ داشته باشیم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

توابع اکیدا نزولی:

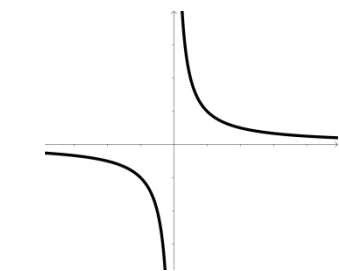
هم چنین توابع یک به یک و نزولی را توابع اکیدا نزولی می نامند.

یک تابع f روی بازه D اکیدا نزولی است اگر و فقط اگر برای هر $x_1, x_2 \in D$ داشته باشیم:

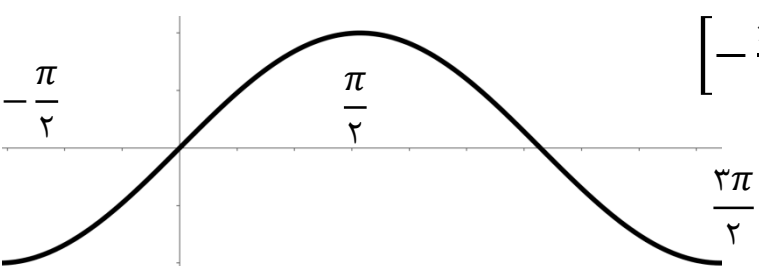
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

مثال: با رسم نمودار تابع $f(x) = x^2$ دیده می شود که این تابع روی بازه $(-\infty, 0]$ اکیدا نزولی و روی $[0, +\infty)$ اکیدا صعودی است.

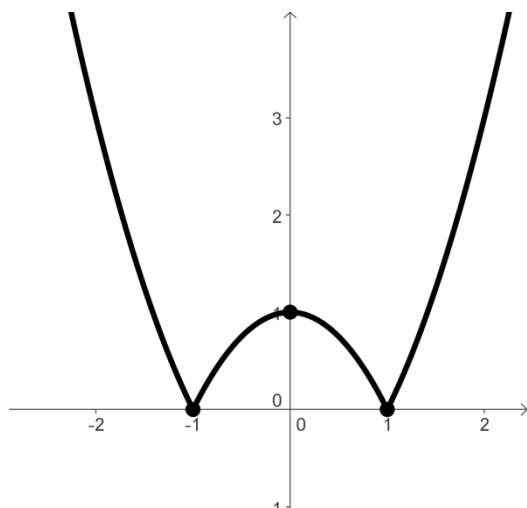
مثال: نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ نشان می دهد که این تابع روی بازه های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیدا نزولی است. اما روی $\mathbb{R} - \{0\}$ نه صعودی و نه نزولی است.



مثال: نمودار تابع $y = \sin x$ نشان می دهد که این تابع روی بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ اکیدا صعودی و روی بازه $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ اکیدا نزولی است.



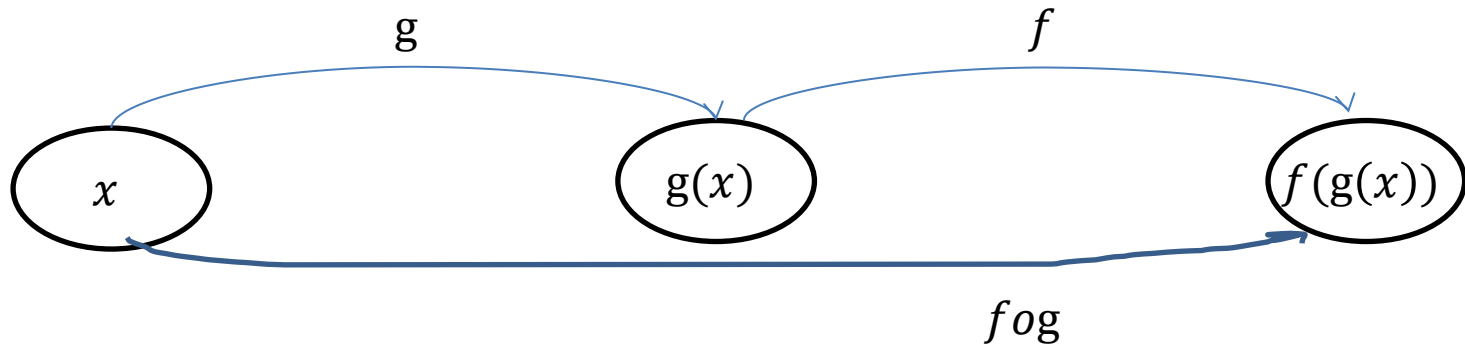
مثال: نمودار تابع $y = |x^2 - 1|$ را رسم کرده و مشخص کنید در چه بازه ای تابع صعودی و در چه بازه ای تابع نزولی است؟
حل:



با توجه به نمودار، تابع در بازه های $(-\infty, -1]$ و $[0, 1]$ اکیدا نزولی و در بازه های $[-1, 0]$ و $[1, +\infty)$ اکیدا صعودی است.
البته این تابع به طور کلی نه صعودی است و نه نزولی.

ترکیب توابع:

اگر x تحت اثر تابع g به $g(x)$ تبدیل شود و $g(x)$ تحت اثر تابع f به $f(g(x))$ تبدیل شود، آن گاه تابعی وجود دارد که مستقیماً x را به $f(g(x))$ تبدیل می کند. این تابع را $f \circ g$ می نامیم.



به طور کلی اگر دو تابع g و f به گونه ای باشند که برای هر x در دامنه ی g مقدار $g(x)$ در دامنه ی f قرار گیرد، آن گاه می توانیم مقدار $f(g(x))$ را محاسبه کنیم و تابع جدیدی بسازیم و آن را با $f \circ g$ نشان دهیم.

در این صورت دامنه ی $f \circ g$ زیرمجموعه ی دامنه ی g خواهد بود و برای هر $x \in D_g$ داریم: $f \circ g(x) = f(g(x))$

مثال: اگر $f = \{(2,1), (6,3), (5, -2), (11,7)\}$ و $g = \{(0,1), (-1,2), (11,5), (9,6)\}$ ، آنگاه $f \circ g$ را بیابید.

$$\begin{cases} R_g = \{1, 2, 5, 6\} \\ D_f = \{2, 6, 5, 11\} \end{cases}$$

حل: می دانیم: $D_{f \circ g} \subseteq D_g$.

$$x = 0 \Rightarrow f \circ g(0) = f(g(0)) = f(1) = \text{تعریف نشده}$$

$$x = -1 \Rightarrow f \circ g(-1) = f(g(-1)) = f(2) = 1 \Rightarrow (-1, 1) \in f \circ g$$

$$x = 11 \Rightarrow f \circ g(11) = f(g(11)) = f(5) = -2 \Rightarrow (11, -2) \in f \circ g$$

$$x = 9 \Rightarrow f \circ g(9) = f(g(9)) = f(6) = 3 \Rightarrow (9, 3) \in f \circ g$$

$$\Rightarrow f \circ g = \{(-1, 1), (11, -2), (9, 3)\}$$

مثال: اگر $f(x) = 2x - 3$ و $g(x) = x^2 + 5$ آن گاه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

حل:

$$D_f = \mathbb{R}, R_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f \cap R_g \neq \emptyset \Rightarrow f \circ g \text{ وجود دارد}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 5) = 2(x^2 + 5) - 3 = 2x^2 + 10 - 3 \Rightarrow f \circ g(x) = 2x^2 + 7$$

$$D_g = \mathbb{R}, R_f = \mathbb{R} \Rightarrow D_g \cap R_f \neq \emptyset \Rightarrow g \circ f \text{ وجود دارد}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x - 3) = (2x - 3)^2 + 5 = 4x^2 - 12x + 9 + 5 \\ \Rightarrow g \circ f(x) = 4x^2 - 12x + 14$$

مثال: اگر $f(x) = 2x - 1$ و $f \circ g(x) = x^3$ آن گاه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} f \circ g(x) = x^3 \Rightarrow f(g(x)) = x^3 \\ f(x) = 2x - 1 \Rightarrow f(g(x)) = 2g(x) - 1 \end{cases} \Rightarrow 2g(x) - 1 = x^3 \Rightarrow 2g(x) = x^3 + 1 \Rightarrow g(x) = \frac{x^3 + 1}{2}$$

مثال: برای توابع $f(x) = 3x^2 + 2$ ، $g(x) = \frac{2}{x-1}$ و $k(x) = 3^x + 1$ ترکیب توابع زیر را حساب کنید.

الف) $f \circ g(x)$ ب) $f \circ g \circ k(x)$

حل:

$$\text{الف) } f \circ g(x) = f(g(x)) \stackrel{g(x) = \frac{2}{x-1}}{=} f\left(\frac{2}{x-1}\right) \stackrel{\text{جایگذاری } \frac{2}{x-1} \text{ به جای } x \text{ در } f(x)}{=} 3\left(\frac{2}{x-1}\right)^2 + 2 \\ \Rightarrow f \circ g(x) = \frac{12}{(x-1)^2} + 2$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } f \circ g \circ k(x) &= f(g(k(x))) \xrightarrow{k(x)=3^x+1} f(g(3^x+1)) \xrightarrow{g(x) \text{ در } x \text{ جای } 3^x+1 \text{ به جایگذاری}} f\left(\frac{2}{(3^x+1)-1}\right) \\ &= f\left(\frac{2}{3^x}\right) \xrightarrow{f(x) \text{ در } x \text{ جای } \frac{2}{3^x} \text{ به جایگذاری}} 3\left(\frac{2}{3^x}\right)^2 + 2 = 3 \times \frac{2^2}{(3^x)^2} + 2 = \frac{12}{3^{2x}} + 2 = 12 \times 3^{-2x} + 2 \end{aligned}$$

دامنه ی توابع مرکب:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \quad D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$$

مثال: برای دو تابع $f(x) = x - 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ دامنه ی توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را محاسبه کنید.

حل: می دانیم $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = [0, +\infty)$. در این صورت طبق تعریف داریم:

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [0, +\infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = \{(x \in [0, +\infty)) \cap (x \in [0, +\infty))\} \\ &= [0, +\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \in [0, +\infty)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} \\ &= \{x \geq 1\} = [1, +\infty) \end{aligned}$$

تمرین: اگر $f(x) = 3x + 1$ و $g(x) = \sqrt{1-x}$ آن گاه دامنه ی تابع $g \circ f$ را به دست آورده و آن را محاسبه کنید.

تمرین: اگر $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ آن گاه دامنه ی تابع $f \circ f$ را به دست آورده و آن را محاسبه کنید.

تابع یک به یک (One - To - One):

تابع $y = f(x)$ را یک به یک می‌گوییم هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in D_f$ از $f(x_1) = f(x_2)$ بتوان نتیجه گرفت: $x_1 = x_2$
به بیان دیگر: $\forall x_1, x_2 \in D_f; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

مثال: یک به یک بودن تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ بررسی کنید.

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1} \qquad f(x_2) = \frac{1}{x_2}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

از تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه گرفتیم: $x_1 = x_2$ بنابراین تابع بالا در دامنه اش $(\mathbb{R} - \{0\})$ یک به یک می‌باشد.

مثال: یک به یک بودن تابع $f(x) = x^3 + 4$ را بررسی کنید.

$$f(x_1) = x_1^3 + 4 \qquad f(x_2) = x_2^3 + 4$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 + 4 = x_2^3 + 4 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1^3} = \sqrt[3]{x_2^3} \Rightarrow x_1 = x_2$$

از تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه گرفتیم: $x_1 = x_2$ بنابراین تابع بالا در دامنه اش (\mathbb{R}) یک به یک می‌باشد.

مثال: یک به یک بودن تابع $y = f(x) = 2x^2 - 5$ را بررسی کنید.

حل:

$$f(x_1) = 2x_1^2 - 5 \quad f(x_2) = 2x_2^2 - 5$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1^2 - 5 = 2x_2^2 - 5 \Rightarrow 2x_1^2 = 2x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow$$

$$|x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

از تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه گرفتیم: $x_1 = \pm x_2$ بنابراین تابع بالا در دامنه اش (R) یک به یک نیست.

تابع وارون (تابع معکوس):

تابع f دارای تابع وارون است اگر برای هر y در برد تابع f ، x ی منحصر بفرد در دامنه ی تابع f وجود داشته باشد به طوری که: $f(x) = y$ به عبارت دیگر تابع f دارای تابع وارون است اگر یک به یک باشد.

روش به دست آوردن تابع وارون (تابع معکوس):

برای این کار ابتدا یک به یک بودن تابع را ثابت می کنیم. پس از آن با استفاده از عملیات ریاضی مانند: طرفین وسطین، ضرب پرانتزها، ساده کردن عبارت های جبری، ریشه گیری، توان رسانی، فاکتورگیری و ... x را برحسب y به دست می آوریم. و در آخر جای x و y را با هم عوض می کنیم.

مثال: تابع وارون تابع $y = f(x) = 2x - 4$ را به دست آورید.

حل: بررسی یک به یک بودن: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 4 = 2x_2 - 4 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

از تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه گرفتیم: $x_1 = x_2$ بنابراین تابع بالا در دامنه اش (R) یک به یک می باشد.

به دست آوردن تابع معکوس:

$$y = 2x - 4 \Rightarrow 2x = y + 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y + 4) \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = \frac{1}{2}(x + 4) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 4)$$

مثال: تابع وارون تابع $y = f(x) = \frac{1}{x^3}$ را به دست آورید.

حل: بررسی یک به یک بودن: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{x_1^3} = \frac{1}{x_2^3} \Rightarrow x_1 = x_2$

از تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه گرفتیم: $x_1 = x_2$ بنابراین تابع بالا در دامنه اش $(\mathbb{R} - \{0\})$ یک به یک می باشد.

به دست آوردن تابع معکوس:

$$y = \frac{1}{x^3} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{y} \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{\frac{1}{y}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

مثال: تابع وارون تابع $y = f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ را به دست آورید.

حل: بررسی یک به یک بودن:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \Rightarrow (2x_1+1)(x_2-1) = (2x_2+1)(x_1-1)$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 1 = 2x_1x_2 - 2x_2 + x_1 - 1 \Rightarrow -2x_1 - x_1 = -2x_2 - x_2 \Rightarrow -3x_1 = -3x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

از تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه گرفتیم: $x_1 = x_2$ بنابراین تابع بالا در دامنه اش $(\mathbb{R} - \{1\})$ یک به یک می باشد.

به دست آوردن تابع معکوس:

$$y = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow y(x-1) = 2x+1 \Rightarrow yx - y = 2x+1 \Rightarrow yx - 2x = 1+y$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x(y-2) = 1+y \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-2} \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

مثال: وارون پذیری تابع چندضابطه ای زیر را بررسی کرده و تابع وارون آن را به دست آورید.

$$y = f(x) = \begin{cases} 2 + x^2; & x \geq 0 \\ -x^2 + 1; & x < 0 \end{cases}$$

حل: بررسی یک به یک بودن:

$$x_1, x_2 \geq 0; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2 + x_1^2 = 2 + x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \xrightarrow{\text{ریشه گیری}} \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \xrightarrow{x_1, x_2 \geq 0} x_1 = x_2$$

$$x_1, x_2 < 0; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -x_1^2 + 1 = -x_2^2 + 1 \Rightarrow -x_1^2 = -x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \xrightarrow{\text{ریشه گیری}} \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \xrightarrow{x_1, x_2 < 0} -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

از تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه گرفتیم: $x_1 = x_2$ بنابراین تابع چندضابطه ای بالا در دامنه هایش یک به یک می باشد.

به دست آوردن تابع معکوس:

$$y = 2 + x^2 \xrightarrow{x \geq 0} y - 2 = x^2 \xrightarrow{\text{ریشه گیری}} \sqrt{x^2} = \sqrt{y - 2} \Rightarrow |x| = \sqrt{y - 2} \xrightarrow{x \geq 0 \Rightarrow |x| = x} x = \sqrt{y - 2}$$

تعویض جای x و y

$$\xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = \sqrt{x - 2}$$

$$y = -x^2 + 1 \xrightarrow{x < 0} y - 1 = -x^2 \xrightarrow{\text{ریشه گیری}} \sqrt{x^2} = \sqrt{y - 1} \Rightarrow |x| = \sqrt{y - 1} \xrightarrow{x < 0 \Rightarrow |x| = -x} -x = \sqrt{y - 1}$$

تعویض جای x و y

$$\Rightarrow x = -\sqrt{y - 1} \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = -\sqrt{x - 1}$$

تا اینجا توانستیم ضابطه های تابع وارون را به دست آوریم. حال برای نوشتن تابع وارون تابع f ، نیازمند دامنه ی هر یک از ضابطه های حساب شده نیز هستیم.

می دانیم دامنه ی تابع وارون برابر برد تابع f است. پس برد هر یک از ضابطه های را به دست آورده و آن ها را به عنوان دامنه ی تابع وارون در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} x \geq 0 &\Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow 2 + x^2 \geq 2 \Rightarrow y \geq 2 \\ x < 0 &\Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow -x^2 < 0 \Rightarrow 1 - x^2 < 1 \Rightarrow y < 1 \end{aligned} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}; x \geq 2 \\ -\sqrt{x-1}; x < 1 \end{cases}$$

مثال: معکوس پذیری تابع $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ را بررسی کرده و سپس تابع معکوس آن را به دست آورید.

حل: بررسی یک به یک بودن:

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 1 \Rightarrow y = f(x) = (x-1)^3 - 1$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 - 1)^3 - 1 = (x_2 - 1)^3 - 1 \Rightarrow (x_1 - 1)^3 = (x_2 - 1)^3 \xrightarrow{\text{ریشه گیری}}$$

$$\sqrt[3]{(x_1 - 1)^3} = \sqrt[3]{(x_2 - 1)^3} \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

از تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه گرفتیم: $x_1 = x_2$ بنابراین تابع چندضابطه ای بالا در دامنه هایش یک به یک می باشد.

به دست آوردن تابع معکوس:

$$\begin{aligned} y = (x-1)^3 - 1 &\Rightarrow y+1 = (x-1)^3 \xrightarrow{\text{ریشه گیری}} \sqrt[3]{y+1} = \sqrt[3]{(x-1)^3} \Rightarrow \sqrt[3]{y+1} = x-1 & 49 \\ \Rightarrow \sqrt[3]{y+1} + 1 = x &\Rightarrow x = \sqrt[3]{y+1} + 1 \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = \sqrt[3]{x+1} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} + 1 \end{aligned}$$

مثال: ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{1 - 3^x}{1 + 3^x}$ وارون پذیر است و وارون آن را به دست آورید.

حل: همانطور که می دانیم، تابعی وارون پذیر است که یک به یک باشد. اثبات یک به یک بودن:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1 - 3^{x_1}}{1 + 3^{x_1}} = \frac{1 - 3^{x_2}}{1 + 3^{x_2}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (1 - 3^{x_1})(1 + 3^{x_2}) = (1 + 3^{x_1})(1 - 3^{x_2})$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب پرانتزها}} 1 \times 1 + 1 \times 3^{x_2} + (-3^{x_1}) \times 1 + (-3^{x_1})(3^{x_2}) = 1 \times 1 + 1 \times (-3^{x_2}) + (3^{x_1}) \times 1 + (3^{x_1})(-3^{x_2})$$

$$\Rightarrow 1 + 3^{x_2} - 3^{x_1} - 3^{x_1+x_2} = 1 - 3^{x_2} + 3^{x_1} - 3^{x_1+x_2} \Rightarrow -2 \times 3^{x_1} = -2 \times 3^{x_2} \Rightarrow 3^{x_1} = 3^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

از تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه گرفتیم: $x_1 = x_2$ بنابراین تابع بالا در دامنه اش (R) یک به یک می باشد.

به دست آوردن تابع معکوس:

$$y = \frac{1 - 3^x}{1 + 3^x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} y(1 + 3^x) = 1 - 3^x \Rightarrow y + y3^x = 1 - 3^x \Rightarrow y + 1 = -3^x - y3^x$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} y + 1 = 3^x(-1 - y) \Rightarrow 3^x = \frac{y + 1}{-1 - y} \xrightarrow{\text{از طرفین لگاریتم می گیریم}} \log_3 3^x = \log_3 \frac{y + 1}{-1 - y}$$

$$\Rightarrow x \log_3 3 = \log_3 \frac{y + 1}{-1 - y} \Rightarrow x = \frac{\log_3 \frac{y + 1}{-1 - y}}{\log_3 3} \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = \frac{\log_3 \frac{x + 1}{-1 - x}}{\log_3 3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\log_3 \frac{x + 1}{-1 - x}}{\log_3 3}$$

تست: اگر $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x - 1$ ، ضابطه ی $f \circ g^{-1}$ کدام است؟

$2x + 4$ (۴)

$2x + 3$ (۳)

$2x + 2$ (۲)

$2x + 1$ (۱)

حل: ابتدا $g^{-1}(x)$ را به دست می آوریم.

$g(x) = x - 1 \Rightarrow y = x - 1 \Rightarrow y + 1 = x \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} x + 1 = y \Rightarrow g^{-1}(x) = x + 1$

$f \circ g^{-1}(x) = f(g^{-1}(x)) = f(x + 1) = 2(x + 1) + 1 = 2x + 2 + 1 = 2x + 3$

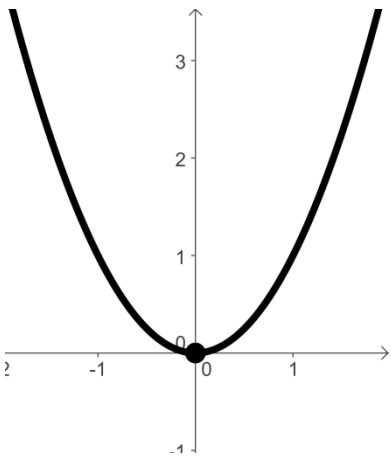
پاسخ صحیح گزینه ی ۳ می باشد.

مثال: تابع معکوس تابع $y = x^2$ را به دست آورید.

حل: با رسم نمودار این تابع متوجه می شویم که این تابع در دامنه اش (R) یک به یک نیست.

در نتیجه وارون پذیر نیست. اما برای وارون پذیر شدن باید دامنه ی تابع را محدود کرد.

بزرگ ترین بازه ای که تابع روی آن یک به یک می باشد، بازه ی $(-\infty, 0]$ یا $[0, +\infty)$ می باشد.



$x \in [0, +\infty) \Rightarrow y = x^2 \xrightarrow{\text{ریشه گیری}} \sqrt{y} = \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{y} = |x| \xrightarrow{x \geq 0 \Rightarrow |x|=x} \sqrt{y} = x \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} \sqrt{x} = y \text{ یا } y = \sqrt{x}$

$x \in (-\infty, 0] \Rightarrow y = x^2 \xrightarrow{\text{ریشه گیری}} \sqrt{y} = \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{y} = |x| \xrightarrow{x \leq 0 \Rightarrow |x|=-x} \sqrt{y} = -x \Rightarrow -\sqrt{y} = x \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} -\sqrt{x} = y \text{ یا } y = -\sqrt{x}$

تمرین: دامنه ی تابع $y = x^2 + 2x$ را به گونه ای محدود کنید که وارون پذیر باشد و وارون آن را به دست آورید.

مثال: در تابع $y = \frac{ax + 1}{x - c}$ آیا می توان a و c را طوری تعیین کرد که این تابع وارون خودش باشد؟

حل: ابتدا تابع وارون تابع بالا را به دست می آوریم:

$$y = \frac{ax + 1}{x - c} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} y(x - c) = ax + 1 \Rightarrow yx - yc = ax + 1 \Rightarrow yx - ax = 1 + yc$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری از } x} x(y - a) = 1 + yc \Rightarrow x = \frac{1 + yc}{y - a} \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = \frac{1 + xc}{x - a} = \frac{xc + 1}{x - a}$$

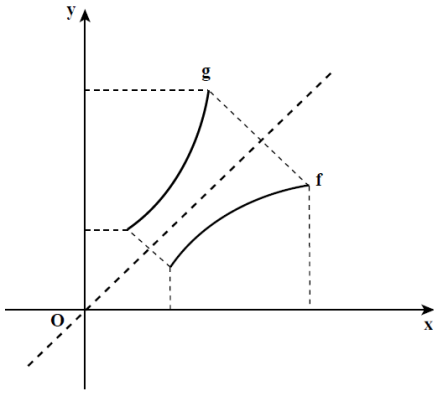
حال تابع را با وارونش مساوی هم قرار می دهیم:

$$\frac{ax + 1}{x - c} = \frac{xc + 1}{x - a} \Rightarrow a = c$$

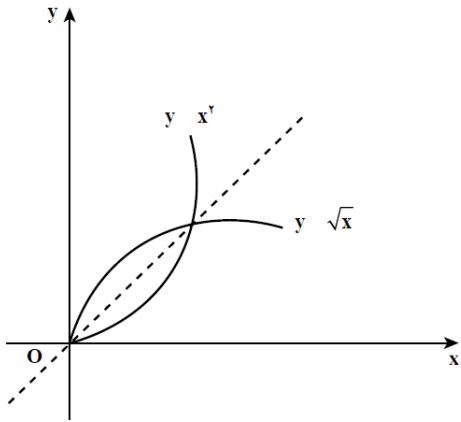
نکته: اگر f^{-1} تابع وارون f باشد، f نیز تابع وارون f^{-1} است. $\left((f^{-1})^{-1} = f \right)$

نکته: اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند، دامنه ی f برابر برد g و دامنه ی g برابر برد f است.

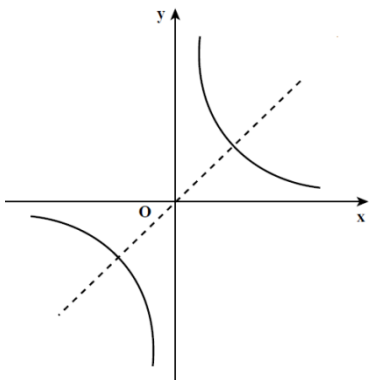
نکته: نمودارهای f و f^{-1} قرینه ی یکدیگر نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (خط $y = x$) است.



مثال: دو تابع $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$ با دامنه ی $[0, +\infty)$ وارون یکدیگرند.



مثال: تابع $y = \frac{1}{x}$ وارون خودش است و نمودارش نسبت به نیمساز ربع اول و سوم متقارن است.



نکته: اگر دو تابع f با دامنه D_f و g با دامنه D_g وارون یکدیگر باشند در این صورت داریم:

$$\begin{cases} f \circ g(x) = x ; x \in D_g \\ g \circ f(x) = x ; x \in D_f \end{cases}$$

یعنی ترکیب دو تابع وارون تابعی همانی است و بر عکس. یعنی اگر ترکیب دو تابع تابع همانی شود، آن دو تابع وارون یکدیگرند.

مثال: تابع $f(x) = \frac{1}{x+1}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{-1\}$ ، وارون تابع $g(x) = \frac{1-x}{x}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{0\}$ است. زیرا:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1-x}{x} + 1} = \frac{1}{\frac{1-x+x}{x}} = \frac{1}{1} = x$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{x+1-1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{x}{1} = \frac{x(x+1)}{x+1} = x$$

مثال: برای هر عدد مثبت a که $a \neq 1$ تابع $f(x) = a^x$ با دامنه \mathbb{R} وارون تابع $g(x) = \log_a x$ با دامنه $(0, +\infty)$ است. زیرا:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x ; x \in (0, +\infty)$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(a^x) = \log_a a^x = x \log_a a = x \times 1 = x ; x \in \mathbb{R}$$

به نام خداوند بخشنده و مهربان

ریاضی عمومی ۱ / پیش دانشگاهی تجربی / فصل دوم (بخش دوم):

توابع و معادلات

Functions And Equations

دنباله ها:

در ریاضی ۲ با مفهوم کلی دنباله های عددی و به طور خاص با دنباله های حسابی و هندسی آشنا شدیم. در آنجا گفته شد «هر تعدادی از اعداد که آن ها را پشت سرهم نوشته باشیم یک دنباله از اعداد را تشکیل می دهند.»

در واقع هر موقع مجموعه ای از اعداد را شماره گذاری می کنیم دنباله ای در دست داریم و هر عدد از دنباله را جمله ی دنباله می نامیم. دنباله ها خود نیز به دو دسته ی متناهی (باپایان) و نامتناهی (بی پایان) تقسیم می شوند.

در دنباله ای با نام u ، جمله ی اول را با u_1 ، جمله ی دوم را با u_2 ، جمله ی سوم را با u_3 ، ...، جمله ی n ام را با u_n و... نمایش می دهیم.

u_n را جمله ی عمومی دنباله می گوییم که با توجه به آن می توانیم سایر جملات دنباله را به دست آوریم.

مثال: جمله ی عمومی دنباله ای $u_n = n^2 + 4n$ می باشد. چهار جمله ی اول دنباله را به دست آورید.

حل:

$$u_n = n^2 + 4n \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \Rightarrow u_1 = 1^2 + 4(1) \Rightarrow u_1 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow u_1 = 5 \\ n = 2 \Rightarrow u_2 = 2^2 + 4(2) \Rightarrow u_2 = 4 + 8 = 12 \Rightarrow u_2 = 12 \\ n = 3 \Rightarrow u_3 = 3^2 + 4(3) \Rightarrow u_3 = 9 + 12 = 21 \Rightarrow u_3 = 21 \\ n = 4 \Rightarrow u_4 = 4^2 + 4(4) \Rightarrow u_4 = 16 + 16 = 32 \Rightarrow u_4 = 32 \end{cases}$$

تعریف دیگری از دنباله:

دنباله، تابعی است که دامنه ی آن مجموعه ی اعداد طبیعی (\mathbf{N}) و برد آن (که همان جملات دنباله می باشد) مجموعه ی اعداد حقیقی (\mathbf{R}) و ضابطه ی آن جمله ی عمومی دنباله (u_n) است. به بیان دیگر:

$$f: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$f(n) = u_n$$

به عنوان مثال، دنباله ی ... ۵, ۱۲, ۲۱, ۳۲ را می توان به صورت زیر نمایش داد:

| | | | | | | |
|--------------|---|----|----|----|-----|------------|
| n | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ... | n |
| $f(n) = u_n$ | ۵ | ۱۲ | ۲۱ | ۳۲ | ... | $n^2 + 4n$ |

در نمایش بالا، سطر اول دامنه ی تابع (مجموعه ی اعداد طبیعی (N)) و سطر دوم برد تابع (مجموعه ی اعداد حقیقی (R)) می باشد.

تذکر: در دنباله های متناهی، دامنه ی تابع زیر مجموعه ای از اعداد طبیعی می باشد. به عنوان مثال در دنباله ی $u_n = 1, 4, 9, 16$ دامنه مجموعه ی $\{1, 2, 3, 4\} \subset \mathbf{N}$ و برد آن مجموعه ی $\{1, 4, 9, 16\}$ می باشد.

مثال: سه جمله ی ابتدایی هر یک از دنباله های زیر را بنویسید.

$$\text{الف) } a_n = 5 \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \quad \text{ب) } b_n = \frac{n(n+2)}{2} \quad \text{ج) } c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$a_n = 5 \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \Rightarrow a_1 = 5 \left(\frac{3}{5}\right)^{1-1} \Rightarrow a_1 = 5 \left(\frac{3}{5}\right)^0 \Rightarrow a_1 = 5 \times 1 \Rightarrow a_1 = 5 \\ n = 2 \Rightarrow a_2 = 5 \left(\frac{3}{5}\right)^{2-1} \Rightarrow a_2 = 5 \left(\frac{3}{5}\right)^1 \Rightarrow a_2 = 5 \times \frac{3}{5} \Rightarrow a_2 = 3 \\ n = 3 \Rightarrow a_3 = 5 \left(\frac{3}{5}\right)^{3-1} \Rightarrow a_3 = 5 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow a_3 = 5 \times \frac{9}{25} \Rightarrow a_3 = \frac{9}{5} \end{cases}$$

$$\text{ب) } b_n = \frac{n(n+2)}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1(1+2)}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2} \\ n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{2(2+2)}{2} \Rightarrow a_2 = 4 \\ n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{3(3+2)}{2} \Rightarrow a_3 = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$ج) c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \begin{cases} n=1 \Rightarrow a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \Rightarrow a_1 = (2)^1 \Rightarrow a_1 = 2 \\ n=2 \Rightarrow a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow a_2 = \frac{9}{4} \\ n=3 \Rightarrow a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \Rightarrow a_3 = \frac{64}{27} \end{cases}$$

مثال: دنباله ی $a_n = \frac{3n+1}{2n-1}$ را در نظر بگیرید.

الف) اگر دامنه ی آن مجموعه ی $\{1, 2, 3, 4\}$ باشد، برد (جمله های دنباله) آن را به دست آورید.
 ب) با فرض نامتناهی بودن a_n ، جمله ی چندم این دنباله برابر $\frac{5}{3}$ است؟

حل: الف) چون دامنه مجموعه ای متناهی است پس دنباله نیز متناهی است و داریم:

$$a_1 = \frac{3(1)+1}{2(1)-1} = \frac{4}{1} = 4$$

$$a_2 = \frac{3(2)+1}{2(2)-1} = \frac{7}{3}$$

$$a_3 = \frac{3(3)+1}{2(3)-1} = \frac{10}{5} = 2$$

ب) برای یافتن شماره ی جمله ی $\frac{5}{3}$ ، کافی است در جمله ی عمومی داده شده، عدد $\frac{5}{3}$ را به جای a_n قرار دهیم:

$$\frac{5}{3} = \frac{3n+1}{2n-1} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 5(2n-1) = 3(3n+1) \Rightarrow 10n-5 = 9n+3 \Rightarrow 10n-9n = 3+5 \Rightarrow n = 8$$

تمرین: در دنباله ی $a_n = 2n^2 - 5n$ چندمین جمله ی دنباله برابر ۸۸ است؟

دنباله ی حسابی:

دنباله ای است که برای به دست آوردن هر جمله ی آن (به جز جمله ی اول) کافی است مقدار ثابتی به نام قدر نسبت را به جمله ی قبلی اضافه کنیم. در دنباله ی حسابی قدرنسبت را با حرف d نشان می دهیم.

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی:

اگر a_1 جمله ی اول و d قدر نسبت یک دنباله ی حسابی باشد، آن گاه جمله ی عمومی دنباله که همان جمله ی n ام می باشد، از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$a_n = a_1 + [(n - 1) \times d]$$

مثال: در تصاعد حسابی $2, 7, 12, 17, \dots$ جمله ی بیستم را به دست آورید.

حل:

$$a_1 = 2, d = 7 - 2 = 5 \Rightarrow a_{20} = ?$$

$$a_n = a_1 + [(n - 1) \times d] \xrightarrow{n=20} a_{20} = a_1 + [(20 - 1) \times d] \Rightarrow a_{20} = a_1 + 19d = 2 + 19 \times 5 = 97$$

مجموع n جمله ی اول یک دنباله ی حسابی (S_n):

روش اول: اگر جمله ی اول، جمله ی آخر دنباله و تعداد جملات دنباله ای حسابی را داشته باشیم، مجموع n جمله ی اول یک دنباله ی حسابی (S_n) از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$S_n = \frac{n}{2} \times (a_1 + a_n)$$

جمله ی آخر

تعداد جملات جمله ی اول

مثال: در یک دنباله ی حسابی که ۱۰ جمله دارد، جمله ی اول ۲ و جمله ی آخر ۲۰ است. مجموع این جملات را بیابید.

$$S_n = \frac{n}{2} \times (a_1 + a_n) \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2} \times (2 + 20) = 5 \times (22) = 110$$

حل:

مثال: نشان دهید: $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$

حل: اگر فرض کنیم دنباله ای حسابی داریم که جملات آن به صورت $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$ است آن گاه منظور از سمت چپ تساوی بالا، حاصل جمع جملات این دنباله ی حسابی است. تعداد این جملات n تاست. حال با استفاده از فرمول S_n مجموع این جملات را حساب می کنیم.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2n - 1 \\ \text{تعداد جملات} = n \end{cases} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2} \times (a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2} (1 + 2n - 1) = \frac{n}{2} (2n) = n \times n \Rightarrow S_n = n^2$$

تمرین: نشان دهید: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (ب) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n$ (الف)

روش دوم: اگر جمله ی اول و قدر نسبت دنباله معلوم باشد، آن گاه مجموع n جمله ی اول یک دنباله ی حسابی (S_n) از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$S_n = \frac{n}{2} \times (2a_1 + [(n - 1) \times d])$$

مثال: در یک دنباله ی حسابی، جمله ی اول ۵ و قدر نسبت دنباله ۳ می باشد. مجموع ۱۰ جمله ی اول این دنباله را به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ d = 3 \\ n = 10 \end{cases} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2} \times (2a_1 + [(n - 1) \times d]) \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2} \times (2 \times 5 + [(10 - 1) \times 3])$$
$$\Rightarrow S_{10} = 5 \times (10 + 9 \times 3) \Rightarrow S_{10} = 5 \times (37) = 185$$

مثال: محصول تولید لوله های فولادی کارخانه ای، در آغاز سال ۱۳۹۰ برابر ۱۵ میلیون تن می باشد. قرار است تولید این لوله ها هر سال نسبت به سال قبل ۴ میلیون تن افزایش یابد. مجموع تولید لوله ها در دهه ی ۹۰ را پیش بینی کنید.

حل:

$$\begin{cases} a_1 = 15 \\ d = 4 \\ n = 10 \end{cases} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2} \times (2a_1 + [(n-1) \times d]) \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2} \times (2 \times 15 + [(10-1) \times 4])$$

$$\Rightarrow S_{10} = 5 \times (30 + 9 \times 4) \Rightarrow S_{10} = 5 \times (74) = 370$$

مثال: مجموع اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰ که مضرب ۳ هستند را به دست آورید.

حل: اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰ که بر ۳ بخش پذیر هستند، به صورت روبرو می باشند: ۳, ۶, ۹, ...

دنباله ی بالا، دنباله ای حسابی با جمله ی اول ۳ و قدر نسبت ۳ می باشد. حال باید تعداد جملات این دنباله را به دست آوریم.

تعداد مضارب طبیعی ۳ که از ۱۰۰ کوچک تر هستند از رابطه ی $\left[\frac{100}{3} \right] = 33$ به دست می آید.

حال از فرمول $S_n = \frac{n}{2} \times (2a_1 + [(n-1) \times d])$ استفاده می کنیم تا مجموع اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰ که مضرب ۳ هستند به دست آید.

$$n = 33 \Rightarrow S_n = \frac{n}{2} \times (2a_1 + [(n-1) \times d]) \Rightarrow S_{33} = \frac{33}{2} \times (2 \times 3 + [(33-1) \times 3])$$

$$\Rightarrow S_{33} = \frac{33}{2} \times (6 + 32 \times 3) = \frac{33}{2} \times (6 + 96) = \frac{33}{2} \times 102 = 33 \times 51 = 1683$$

مثال: مجموع اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰۰ که مضرب ۷ هستند را به دست آورید.

حل: اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰۰ که بر ۷ بخش پذیر هستند، به صورت روبرو می باشند: ۷, ۱۴, ۲۱, ...

دنباله ی بالا، دنباله ای حسابی با جمله ی اول ۷ و قدر نسبت ۷ می باشد. حال باید تعداد جملات این دنباله را به دست آوریم.
تعداد مضارب طبیعی ۷ که از ۱۰۰۰ کوچک تر هستند از رابطه ی $142 = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor$ به دست می آید.

حال از فرمول $S_n = \frac{n}{2} \times (a_1 + a_n)$ استفاده می کنیم تا مجموع اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰۰ که مضرب ۷ هستند به دست آید.

$$S_n = \frac{n}{2} \times (2a_1 + [(n-1) \times d]) \quad \xrightarrow{n=142} S_{142} = \frac{142}{2} \times (2 \times 7 + [(142-1) \times 7])$$

$$\Rightarrow S_{142} = \frac{142}{2} \times (14 + [(141) \times 7]) = \frac{142}{2} \times (14 + 987) = \frac{142}{2} \times 1001 = 71 \times 1001 = 71071$$

تمرین: مجموع اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰۰ که مضرب ۶ هستند را به دست آورید.

مثال: در یک دنباله ی حسابی، جمله ی دهم ۱۸- و جمله ی بیستم ۴۲ می باشد. در این صورت:

(الف) جمله ی اول و قدر نسبت این دنباله را به دست آورید. (ب) مجموع سی جمله ی ابتدای این دنباله را حساب کنید.

(ج) مجموع ده جمله ی دوم این دنباله را حساب کنید.

حل: الف) با توجه به فرض سوال داریم:

$$\begin{cases} a_{10} = -18 & a_{10} = a_1 + 9d \\ a_{20} = 42 & a_{20} = a_1 + 19d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 9d = -18 \\ a_1 + 19d = 42 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} -a_1 - 9d = +18 \\ a_1 + 19d = 42 \end{cases} \Rightarrow d = 6, a_1 = -72$$

(ب) با توجه به قسمت الف داریم:

$$S_n = \frac{n}{2} \times (2a_1 + [(n-1) \times d]) \quad \xrightarrow{n=30} S_{30} = \frac{30}{2} \times (2 \times (-72) + [(30-1) \times 6])$$

$$\Rightarrow S_{30} = \frac{30}{2} \times (-144 + [(29) \times 6]) = \frac{30}{2} \times (-144 + 174) = \frac{30}{2} \times 30 = 15 \times 30 = 450$$

ج) با توجه به عبارت زیر، مجموع ده جمله ی دوم را محاسبه می کنیم:

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{10}}_{\text{مجموع ۱۰ جمله ی اول}} + \underbrace{a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20}}_{\text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم}}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{مجموع ۲۰ جمله ی اول}}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم} + \text{مجموع ۱۰ جمله ی اول} = S_{20} \Rightarrow S_{20} = S_{10} + \text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم} = S_{20} - S_{10}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم} = \frac{20}{2} \times (2 \times -72 + [(20 - 1) \times 6]) - \frac{10}{2} \times (2 \times -72 + [(10 - 1) \times 6])$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم} = \frac{20}{2} \times (-144 + [19 \times 6]) - \frac{10}{2} \times (-144 + [9 \times 6]) +$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم} = \frac{20}{2} \times (-144 + 114) - \frac{10}{2} \times (-144 + 54) +$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم} = \frac{20}{2} \times (-30) - \frac{10}{2} \times (-90) \Rightarrow \text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم} = -300 - (-450)$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ۱۰ جمله ی دوم} = -300 + 450 = 150$$

تمرین: در یک دنباله ی حسابی، جمله ی پنجم ۱۹- و جمله ی دهم ۳۱ می باشد. در این صورت:

الف) مجموع بیست جمله ی ابتدای این دنباله را حساب کنید. ب) مجموع ده جمله ی دوم این دنباله را حساب کنید.

مثال: اگر در یک دنباله ی حسابی جمله ی اول -7 بوده و مجموع 9 جمله ی اول آن نصف مجموع شش جمله ی دوم آن باشد، قدر نسبت را به دست آورید.

حل:

$$S_9 = \frac{9}{2} \times (2 \times (-7) + [(9 - 1) \times d]) \Rightarrow S_9 = \frac{9}{2} \times (-14 + 8d)$$

$$S_{12} - S_6 = \frac{12}{2} \times (2 \times (-7) + [(12 - 1) \times d]) - \frac{6}{2} \times (2 \times (-7) + [(6 - 1) \times d])$$

$$\Rightarrow \text{مجموع 6 جمله ی دوم} = \frac{12}{2} \times (-14 + 11d) - \frac{6}{2} \times (-14 + 5d) = 6 \times (-14 + 11d) - 3(-14 + 5d)$$

$$= -84 + 66d + 42 - 15d = -42 + 51d$$

اما طبق صورت سوال داریم:

$$S_9 = \frac{1}{2}(S_{12} - S_6) \Rightarrow 2S_9 = S_{12} - S_6 \Rightarrow 2 \left(\frac{9}{2} \times (-14 + 8d) \right) = -42 + 51d$$

$$\Rightarrow 9(-14 + 8d) = -42 + 51d \Rightarrow -126 + 72d = -42 + 51d$$

$$\Rightarrow 72d - 51d = -42 + 126 \Rightarrow 21d = 84 \Rightarrow d = 4$$

تمرین: دنباله ای حسابی را مشخص کنید که جمله ی اول -2 بوده و مجموع پنج جمله ی اول آن یک سوم مجموع پنج جمله ی بعدی آن باشد.

دنباله ی هندسی:

تعریف دنباله ی هندسی: اگر در دنباله ای برای پیدا کردن هر جمله (به جز جمله ی اول) جمله ی قبل را در یک مقدار ثابت ضرب کنیم، آن دنباله را دنباله ی هندسی می گوئیم. به این مقدار ثابت، قدر نسبت دنباله می گوئیم و آن را با حرف q یا r نمایش می دهیم.

جمله ی عمومی دنباله ی (تصاد) هندسی:

اگر جمله اول دنباله را با a_1 و قدر نسبت آن را با q نمایش دهیم، جمله ی عمومی دنباله که همان جمله ی n ام می باشد برابر است با:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

مثال: در دنباله ی هندسی مقابل جمله ی دوازدهم را به دست آورید. $3, 9, 27, \dots$

حل:

$$a_1 = 3, q = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow a_{12} = a_1 q^{12-1} \Rightarrow a_{12} = 3 \times 3^{11} \Rightarrow a_{12} = 3^{12}$$

مجموع n جمله ی اول یک دنباله ی هندسی:

اگر a_1 جمله ی اول و q قدر نسبت یک دنباله ی هندسی باشد، آن گاه مجموع n جمله ی اول این دنباله را که با S_n نمایش می دهیم، از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} ; q \neq 1$$

مثال: مجموع 50 جمله ی اول یک دنباله ی هندسی با جمله ی اول 4 و قدر نسبت 3 را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} a = 4 \\ q = 3 \\ n = 50 \end{cases} \quad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow S_{50} = \frac{4(1 - 3^{50})}{1 - 3} = \frac{4(1 - 3^{50})}{-2} = -2(1 - 3^{50})$$

مثال: جمله ی عمومی دنباله ای هندسی به صورت $a_n = \frac{3}{2}(-2)^n$ می باشد. مجموع ده جمله ی اول آن را حساب کنید.

حل: با توجه به جمله ی عمومی، جمله ی اول و قدر نسبت دنباله را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} a_1 = \frac{3}{2}(-2)^1 = \frac{3}{2} \times (-2) = -3 \\ a_2 = \frac{3}{2}(-2)^2 = \frac{3}{2} \times (4) = +6 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{+6}{-3} = -2$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ q = -2 \\ n = 10 \end{cases} S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow S_{10} = \frac{-3(1 - (-2)^{10})}{1 - (-2)} = \frac{-3(1 - 1024)}{1 + 2} = \frac{-3(-1023)}{3} = 1023$$

تمرین: جمله ی عمومی دنباله ای هندسی به صورت $a_n = 5(-2)^{n-1}$ می باشد. مجموع ده جمله ی اول آن را حساب کنید.

مثال: مجموع هشت جمله ی اول یک دنباله ی هندسی ۱۷ برابر مجموع چهار جمله ی اول آن است.

(الف) قدرنسبت این دنباله را به دست آورید. (ب) جمله ی دوازدهم این دنباله چند برابر جمله ی هشتم آن می باشد.

حل: (الف) با توجه به فرضیات مسئله داریم:

$$S_8 = 17S_4 \Rightarrow \frac{a_1(1 - q^8)}{1 - q} = 17 \times \frac{a_1(1 - q^4)}{1 - q} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} a_1(1 - q^8)(1 - q) = 17a_1(1 - q^4)(1 - q)$$

$$\Rightarrow 1 - q^8 = 17(1 - q^4) \Rightarrow 1^2 - (q^4)^2 = 17(1 - q^4) \xrightarrow{\text{تجزیه}} (1 + q^4)(1 - q^4) = 17(1 - q^4)$$

$$\Rightarrow 1 + q^4 = 17 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow \sqrt[4]{q^4} = \sqrt[4]{16} \Rightarrow |q| = 2 \Rightarrow q = \pm 2$$

$$\begin{cases} a_{12} = a_1 q^{11} \\ a_8 = a_1 q^7 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_{12}}{a_8} = \frac{a_1 q^{11}}{a_1 q^7} \Rightarrow \frac{a_{12}}{a_8} = q^4 \xrightarrow{q^4 = 16} \frac{a_{12}}{a_8} = 16 \Rightarrow a_{12} = 16a_8 \quad (\text{ب})$$

تمرین: مجموع شش جمله ی اول یک دنباله ی هندسی ۹ برابر مجموع سه جمله ی اول آن است.
الف) قدرنسبت این دنباله را به دست آورید. **ب)** جمله ی هفتم این دنباله چند برابر جمله ی چهارم آن می باشد.

مثال: با استفاده از دستور محاسبه ی مجموع جملات دنباله ی هندسی، درستی اتحادهای زیر را نشان دهید.

الف) $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$

ب) $x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1)$

ج) به کمک قسمت الف، درستی اتحاد زیر را نشان دهید:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

حل: الف) دنباله ای هندسی با جمله ی اول ۱ و قدرنسبت x را در نظر بگیرید. جمله ی عمومی این دنباله $a_n = 1 \times x^{n-1}$ و جملات اول، دوم،... و جمله ی n ام به صورت روبرو می باشد:

$$1, x, \dots, x^{n-2}, x^{n-1}$$

مجموع n جمله ی اول دنباله برابر است با:

$$\begin{cases} a = 1 \\ q = x \\ n = n \end{cases} \begin{cases} S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{1 \times (1 - x^n)}{1 - x} = \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{-(1 - x^n)}{-(1 - x)} = \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad (\text{I}) \\ S_n = 1 + x + \dots + x^{n-2} + x^{n-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 \quad (\text{II}) \end{cases}$$

سمت چپ تساوی های (I) و (II) با هم برابر است. بنابراین سمت راست آنها نیز با هم برابر است.

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

ب) دنباله ای هندسی با جمله ی اول ۱ و قدر نسبت $-x$ را در نظر بگیرید. جمله ی عمومی این دنباله $a_n = 1 \times (-x)^{n-1}$ و جملات اول، دوم، ... و جمله ی n ام به صورت روبرو می باشد:

$$1, -x, \dots, -x^{n-2}, x^{n-1}$$

مجموع n جمله ی اول دنباله برابر است با:

$$\begin{cases} a = 1 \\ q = -x \\ n = n \end{cases} \begin{cases} S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{1 \times (1 - (-x)^n)}{1 - (-x)} = \frac{1 + x^n}{1 + x} = \frac{x^n + 1}{x + 1} \text{ (I)} \\ S_n = 1 - x + \dots - x^{n-2} + x^{n-1} = x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1 \text{ (II)} \end{cases}$$

سمت چپ تساوی های (I) و (II) با هم برابر است. بنابراین سمت راست آنها نیز با هم برابر است.

$$\frac{x^n + 1}{x + 1} = (x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1) \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1)$$

ج) در اتحادی که در قسمت الف ثابت کردیم به جای x قرار می دهیم $\frac{a}{b}$. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} x^n - 1 &= (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) \xrightarrow{x = \frac{a}{b}} \left(\frac{a}{b}\right)^n - 1 = \left(\frac{a}{b} - 1\right) \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \dots + \frac{a}{b} + 1\right) \\ \Rightarrow \frac{a^n}{b^n} - 1 &= \left(\frac{a}{b} - 1\right) \left(\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} + \dots + \frac{a}{b} + 1\right) \Rightarrow \frac{a^n - b^n}{b^n} = \left(\frac{a - b}{b}\right) \left(\frac{a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}}{b^{n-1}}\right) \\ \Rightarrow \frac{a^n - b^n}{b^n} &= \frac{(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})}{b \cdot b^{n-1}} \Rightarrow \frac{a^n - b^n}{b^n} = \frac{(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})}{b^n} \end{aligned}$$

با ساده کردن b^n از طرفین تساوی، به اتحاد مورد نظر می‌رسیم.

$$\Rightarrow a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

حد مجموع جملات دنباله ی هندسی

گفتیم برای محاسبه ی مجموع n جمله ی ابتدای دنباله ی هندسی از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

حال اگر در دنباله ای هندسی داشته باشیم: $-1 < q < 1 \Rightarrow |q| < 1$ در این صورت با افزایش n ، مقدار $|q|^n$ کوچکتر می‌شود. به عبارت دیگر وقتی n بی نهایت بزرگ می‌شود، مقدار $|q|^n$ بی نهایت کوچک شده و به صفر نزدیک و نزدیک تر می‌شود. در نتیجه مجموع تمام جملات دنباله یا حد مجموع جملات دنباله برابر می‌شود با:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \xrightarrow{|q| < 1, n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

مثال: مجموع تمام جملات دنباله ی زیر (حد مجموع جملات دنباله) را حساب کنید.

$$3, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$$

حل:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ q = \frac{-1}{3} \end{cases} \Rightarrow S_n = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow S_n = \frac{3}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{4}$$

دنباله های صعودی و نزولی - کران داری دنباله ها

یادآوری حد چند جمله ای ها وقتی $x \rightarrow \pm\infty$:

اگر $f(x)$ تابعی چند جمله ای به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + l$ باشد، آن گاه حد $f(x)$ هنگامی که $x \rightarrow \pm\infty$ ، برابر حد جمله ای از آن است که دارای بزرگترین درجه است. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + l) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n$$

به عنوان مثال حد تابع $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ هنگامی که $x \rightarrow \pm\infty$ برابر است با حد $4x^2$. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (4x^2 - 5x + 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 4x^2 = +\infty$$

نکته: حد تابع گویای $f(x) = \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots + l}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + l'}$ وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ ، با توجه به مقادیر اعداد صحیح و مثبت m و n برابر خواهد بود با:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots + l}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + l'} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^m}{a'x^n} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{a'} x^{m-n} = \begin{cases} \pm\infty & ; \text{if } m > n \\ \frac{a}{a'} & ; \text{if } m = n \\ \cdot & ; \text{if } m < n \end{cases}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 + 4}{2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{2} x = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 + 4}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{2x} = \cdot$$

حد دنباله ها:

حد دنباله ها و حد تابع در $+\infty$ مفهومی مشابه دارند. یعنی برای محاسبه ی حد هر دنباله، باید حد جمله ی عمومی آن را وقتی $n \rightarrow +\infty$ به دست آوریم.

به عنوان مثال برای محاسبه ی حد دنباله ی $u_n = \frac{1}{2n+6}$ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+6} = 0$$

پس حد دنباله ی u_n وقتی $n \rightarrow +\infty$ برابر صفر است. زیرا با بزرگ شدن عدد طبیعی n ، $2n+6$ بزرگ و بزرگ تر شده و در نتیجه

کسر $\frac{1}{2n+6}$ کوچک و کوچک تر شده و به صفر نزدیک می شود. به عبارت دیگر اگر n را به اندازه ی کافی بزرگ کنیم، می توانیم کسر $\frac{1}{2n+6}$ را به هر اندازه که بخواهیم به صفر نزدیک کنیم.

تعریف: اگر دنباله ی u_n دارای حد بوده و مقدار حد آن عدد حقیقی L باشد، در این صورت دنباله را همگرا گوییم.

در این صورت گوییم دنباله ی u_n به عدد حقیقی L همگرا می باشد.

به عنوان مثال، حد دنباله ی $\frac{1}{2n+6}$ صفر است. پس این دنباله همگرا به صفر است.

تذکر: دنباله ای که همگرا نباشد را واگرا می گوییم.

تذکر: در حالت های زیر دنباله همگرا نمی باشد:

(الف) اگر حد دنباله $+\infty$ یا $-\infty$ شود. به عنوان مثال دنباله ی $u_n = \frac{n^2(n+2)}{4}$ همگرا نمی باشد. زیرا حد آن $+\infty$ است:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2(n+2)}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + 2n^2}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{4} = +\infty$$

(ب) اگر دنباله به عددی یکتا میل نکند، می گوییم دنباله همگرا نیست. به عنوان مثال دنباله ی $u_n = (-1)^n$ همگرا نیست. زیرا: زیرا این دنباله به ازای n های زوج برابر یک و به ازای n های فرد برابر منفی یک است و با بزرگ شدن n ، جملات این دنباله به عدد خاصی نزدیک نمی شود.

$$u_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & ; \text{زوج } n \\ -1 & ; \text{فرد } n \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \text{وجود ندارد}$$

مثال: همگرایی دنباله های زیر را بررسی کنید.

الف) $u_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n} = 1 \Rightarrow$ دنباله همگرا به 1 است

ب) $u_n = (-1)^{n+1} = \begin{cases} -1 & ; \text{زوج } n \\ 1 & ; \text{فرد } n \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$ وجود ندارد \Rightarrow دنباله واگرا است.

ج) $u_n = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 3} \right) \xrightarrow{(-1)^{n+1} = 1 \text{ یا } -1} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{\text{عدد}}{+\infty} \right) = 2 + 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \Rightarrow$ دنباله همگرا به 2 است

د) $u_n = \cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & ; \text{زوج } n \\ -1 & ; \text{فرد } n \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$ وجود ندارد \Rightarrow دنباله واگرا است.

تمرین: همگرایی یا واگرایی دنباله ی $u_n = \frac{n^2 - 1}{n - 3} - \frac{n^2 + 1}{n + 7}$ را بررسی کنید.

دنباله های صعودی و نزولی:

دنباله های زیر را در نظر بگیرید:

$$a_n = \frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

$$b_n = n : 1, 2, 3, \dots$$

$$c_n = (-1)^n : -1, 1, -1, 1, \dots$$

می بینیم که در دنباله ی a_n هر چه شماره ی جمله افزایش یابد، مقدار جمله کاهش پیدا می کند. به عبارت دیگر در این دنباله هر جمله از جمله ی قبلی اش کوچک تر است. دنباله ی a_n نمونه ای از یک **دنباله ی نزولی** است.

اما در دنباله ی b_n رفتار جمله ها برعکس است. در این جا هر چه شماره ی جمله افزایش یابد، مقدار جمله نیز افزایش پیدا می کند. به عبارت دیگر در این دنباله هر جمله از جمله ی قبلی اش بزرگ تر است. دنباله ی b_n نمونه ای از یک **دنباله ی صعودی** است.

اما در دنباله ی C_n با افزایش شماره ی جمله، مقدار جمله ها در حال نوسان بین دو عدد ۱ و ۱- است و یک روند افزایشی و یا کاهشی بین تمامی جمله های دنباله وجود ندارد. چنین دنباله ای نه صعودی است و نه نزولی.

تعریف: اگر u_n دنباله ای باشد که با افزایش n (شماره ی جمله) داشته باشیم: $u_{n+1} \geq u_n$ یا $u_{n+1} - u_n \geq 0$ آن گاه u_n را دنباله ای صعودی می گوییم.

حال اگر رابطه ی بین جملات دنباله به صورت $u_{n+1} > u_n$ یا $u_{n+1} - u_n > 0$ باشد، در این صورت دنباله را اکیدا صعودی گوییم.

تعریف: اگر u_n دنباله ای باشد که با افزایش n (شماره ی جمله) داشته باشیم: $u_{n+1} \leq u_n$ یا $u_{n+1} - u_n \leq 0$ آن گاه u_n را دنباله ای نزولی می گوییم.

نیز اگر رابطه ی بین جملات دنباله به صورت $u_{n+1} < u_n$ یا $u_{n+1} - u_n < 0$ باشد، در این صورت دنباله را اکیدا نزولی گوییم.

تذکر: دنباله ی ثابت، دنباله ای است که تمام جملات آن، برابر مقدار ثابتی است. این دنباله هم صعودی و هم نزولی است.

به عنوان مثال دنباله ی $u_n = 3$ که جملات آن همگی ۳ می باشند، هم صعودی است و هم نزولی.

تذکر: به دنباله ای که صعودی یا نزولی باشد، دنباله ی یکنوا می گوییم.

بررسی صعودی یا نزولی بودن دنباله:

برای تشخیص آن که دنباله ای صعودی و یا نزولی می باشد، از دو روش زیر می توان استفاده کرد.

(۱) به کمک جمله ی عمومی، چند جمله ی ابتدایی دنباله را نوشته، سپس با توجه به آن ها، صعودی یا نزولی بودن دنباله را بررسی می کنیم.

مثال: صعودی یا نزولی بودن دنباله های زیر را بررسی کنید.

$$\text{الف) } a_n = \frac{1}{n^2} \rightarrow a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{9}, a_4 = \frac{1}{16}, \dots$$

ملاحظه می شود با افزایش شماره جمله ها، جملات دنباله کاهش می یابد. بنابراین C_n یک دنباله ی نزولی (و اکیدا نزولی) است.

$$\text{ب) } b_n = n^2 \rightarrow b_1 = 1, b_2 = 4, b_3 = 9, b_4 = 16, \dots$$

ملاحظه می شود با افزایش شماره جمله ها، جملات دنباله نیز افزایش می یابد. بنابراین b_n یک دنباله ی صعودی (و اکیدا صعودی) است.

$$\text{ج) } c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \rightarrow a_1 = 1, a_2 = \frac{-1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{-1}{4}, \dots$$

ملاحظه می شود با افزایش شماره جمله ها، جملات دنباله روند خاصی را دنبال نمی کنند. بنابراین c_n نه صعودی و نه نزولی است.

$$\text{د) } u_n = (-1)^{n+1} \rightarrow u_1 = 1, u_2 = -1, u_3 = 1, u_4 = -1, \dots$$

این دنباله نه صعودی است و نه نزولی. به چنین دنباله هایی، دنباله های نوسانی می گوییم.

$$\text{ه) } u_n = \frac{3^n}{n^3} \rightarrow u_1 = 3, u_2 = \frac{9}{8}, u_3 = \frac{27}{27} = 1, u_4 = \frac{81}{64}, u_5 = \frac{243}{125}, \dots$$

این دنباله در ۳ جمله ی اول در حال کاهش است. اما از جمله ی چهارم به بعد دنباله در حال افزایش است. بنابراین این دنباله نه صعودی و نه نزولی است.

$$\text{و) } u_n = \frac{n^2}{2^n} \rightarrow u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{4}{4} = 1, u_3 = \frac{9}{8}, u_4 = \frac{16}{16} = 1, u_5 = \frac{25}{32}, \dots$$

این دنباله در ۳ جمله ی اول قانون کاهش یا افزایش رعایت نشده است. بنابراین این دنباله نه صعودی و نه نزولی است.

۲) اگر علامت همه ی جمله های دنباله ی u_n یکسان باشد (یعنی همه ی جمله ها مثبت یا همه منفی باشد) پس از محاسبه ی u_{n+1} به کمک u_n ، نسبت $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ را تشکیل داده و داریم:

۲) اگر علامت همه ی جمله های دنباله ی u_n یکسان باشد (یعنی همه ی جمله ها مثبت یا همه منفی باشد) پس از محاسبه ی u_{n+1} به کمک u_n ، نسبت $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ را تشکیل داده و داریم:

حالت اول:

$$u_n > 0 \text{ (همه ی جمله ها مثبت)} \Rightarrow \begin{cases} \text{دنباله اکیدا صعودی است} \Rightarrow \text{if: } \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \\ \text{دنباله صعودی است} \Rightarrow \text{if: } \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \\ \text{دنباله نزولی است} \Rightarrow \text{if: } \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \\ \text{دنباله نزولی است} \Rightarrow \text{if: } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \end{cases}$$

حالت دوم:

$$u_n < 0 \text{ (همه ی جمله ها منفی)} \Rightarrow \begin{cases} \text{دنباله اکیدا نزولی است} \Rightarrow \text{if: } \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \\ \text{دنباله نزولی است} \Rightarrow \text{if: } \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \\ \text{دنباله صعودی است} \Rightarrow \text{if: } \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \\ \text{دنباله صعودی است} \Rightarrow \text{if: } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \end{cases}$$

مثال: صعودی یا نزولی بودن دنباله های زیر را بررسی کنید.

الف) $u_n = 3^n \rightarrow u_{n+1} = 3^{n+1}$

$$\xrightarrow{\text{همه ی جمله ها مثبت}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3^{n+1-n} = 3 > 1 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow \text{دنباله } u_n \text{ صعودی (اکیدا صعودی) است}$$

$$\text{ب) } u_n = \frac{1}{n^2 + 1} \rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 + 1}$$

$$\xrightarrow{\text{همه ی جمله ها مثبت}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2 + 1}}{\frac{1}{n^2 + 1}} = \frac{n^2 + 1}{(n+1)^2 + 1} = \frac{n^2 + 1}{n^2 + 2n + 2}$$

در کسر $\frac{n^2 + 1}{n^2 + 2n + 2}$ مخرج بیش تر از صورت است. پس کسر کوچک تر از یک است. در نتیجه:

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow u_n \text{ دنباله ای نزولی (اکیدا نزولی) است}$$

$$\text{ج) } u_n = \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{همه ی جمله ها مثبت}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n} > 1 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

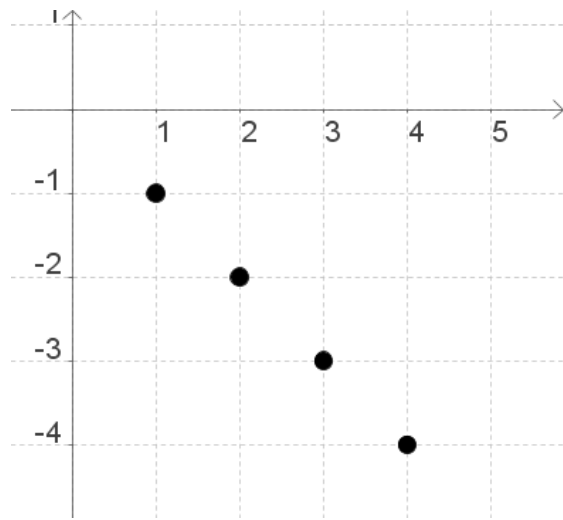
$\Rightarrow u_n$ دنباله ای صعودی (اکیدا صعودی) است

دنباله های کراندار:

کران بالای دنباله: اگر تمام جملات دنباله u_n از عددی حقیقی و ثابت مانند α کوچک تر یا مساوی باشد (یعنی $u_n \leq \alpha$)، در این حالت α را یک کران بالای دنباله u_n گوئیم و دنباله u_n را از بالا کراندار می نامیم.

توجه کنید که با توجه به تعریف بالا، اگر α کران بالا برای دنباله u_n باشد، هر عدد بزرگ تر از α نیز می تواند به عنوان کران بالای دنباله u_n محسوب شود، بنابراین این دنباله دارای بی شمار کران بالا است.

به عنوان مثال دنباله ی $u_n = -n$ را در نظر بگیرید. جملات این دنباله به صورت $\dots, -4, -3, -2, -1$ می باشد.



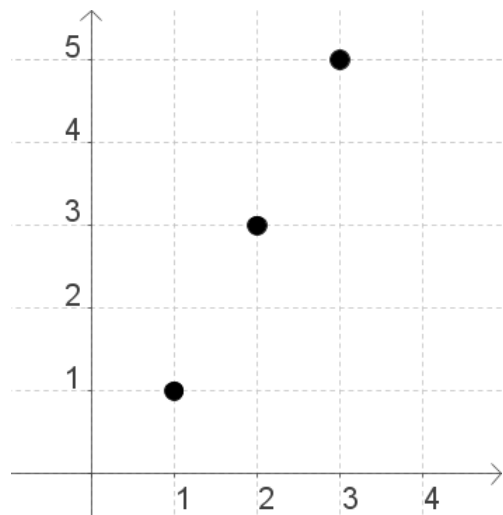
واضح است که تمام جملات دنباله کوچک تر یا مساوی -1 است. بنابراین عدد -1 یک کران بالا برای این دنباله محسوب می شود.

توجه کنید که تمام اعداد بزرگ تر از -1 نیز یک کران بالا برای دنباله ی u_n محسوب می شود.

کران پایین دنباله: اگر تمام جملات دنباله ی u_n از عددی حقیقی و ثابت مانند β بزرگ تر یا مساوی باشد (یعنی $u_n \geq \beta$)، در این حالت β را یک کران پایین دنباله ی u_n گوئیم و دنباله ی u_n را از پایین کراندار می نامیم.

نیز توجه کنید که با توجه به تعریف بالا، اگر β کران پایین برای دنباله ی u_n باشد، هر عدد کوچک تر از β نیز می تواند به عنوان کران پایین دنباله ی u_n محسوب شود، بنابراین این دنباله دارای بی شمار کران پایین است.

به عنوان مثال دنباله ی $u_n = 2n - 1$ را در نظر بگیرید. جملات این دنباله به صورت $\dots, 1, 3, 5, 7, \dots$ می باشد.



واضح است که تمام جملات دنباله بزرگ تر یا مساوی 1 است. بنابراین عدد 1 یک کران پایین برای این دنباله محسوب می شود.

توجه کنید که تمام اعداد کوچک تر از 1 نیز یک کران پایین برای دنباله ی u_n محسوب می شود.

دنباله ای را که هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد، **دنباله ی کراندار** می گوییم.

به عنوان مثال دنباله ی $u_n = \frac{1}{n}$ را در نظر بگیرید. جملات این دنباله به صورت $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ می باشد.

یافتن کران بالا و پایین این دنباله

$$n \geq 1 \xrightarrow{\text{طرفین مثبت}} \frac{1}{n} \leq 1 \xrightarrow{\frac{1}{n} > 0} 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow 0 < u_n \leq 1$$

تمام جملات این دنباله در بازه ی $(0, 1]$ قرار دارند. به عبارت دیگر تمام جملات از یک کوچکتر یا مساوی بوده و از صفر بزرگ تر هستند. پس طبق تعریف کران ها، عدد 1 کران بالا و عدد 0 کران پایین دنباله بوده و در نتیجه u_n دنباله ای کران دار است.

تذکره: اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ، آن گاه دنباله ی u_n از پایین کران دار است ولی از بالا کران دار نمی باشد و در نتیجه دنباله ای کران دار نخواهد بود.

به عنوان مثال دنباله ی $u_n = \frac{n^3}{n+1}$ را در نظر بگیرید:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n+1} = +\infty$$

تذکره: اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ ، آن گاه دنباله ی u_n از بالا کران دار است ولی از پایین کران دار نمی باشد و در نتیجه دنباله ای کران دار نخواهد بود.

به عنوان مثال دنباله ی $u_n = -n^2$ را در نظر بگیرید:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty$$

چون حد آن $-\infty$ شده است بنابراین از پایین کران دار نبوده و در نتیجه دنباله ی u_n کران دار نیست.

مثال: کراندار بودن دنباله های زیر را بررسی کنید.

الف) $u_n = 2n + 3$

چون $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ بنابراین دنباله از بالا کران دار نیست و در نتیجه دنباله کران دار نیست. دقت داشته باشید که کران پایین این دنباله عدد ۵ می باشد.

ب) $u_n = (-1)^n n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{if زوج } n \\ -\infty & \text{if فرد } n \end{cases} \quad u_n = \begin{cases} n & \text{if زوج } n \\ -n & \text{if فرد } n \end{cases}$$

دنباله به صورت زیر می باشد:

بنابراین دنباله، نه از بالا و نه از پایین کراندار نیست. و در نتیجه u_n کراندار نیست.

مثال: کراندار بودن دنباله $u_n = (-1)^n$ را بررسی کنید.

حل: جملات دنباله به صورت $1, -1, 1, -1, \dots$ می باشند. پس عدد ۱ کران بالا و عدد -۱ کران پایین برای دنباله می باشد. در نتیجه u_n کران دار است.

مثال: کراندار بودن دنباله $u_n = \frac{2}{n^2 + 3}$ را بررسی کنید.

حل:

$$n \geq 1 \Rightarrow n^2 \geq 1 \Rightarrow n^2 + 3 \geq 4 \xrightarrow{\text{طرفین مثبت}} \frac{1}{n^2 + 3} \leq \frac{1}{4} \xrightarrow{0 < \frac{1}{n^2 + 3}} 0 < \frac{1}{n^2 + 3} \leq \frac{1 \times 2}{4} \Rightarrow 0 < \frac{2}{n^2 + 3} \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

این دنباله هم از بالا و هم از پایین کراندار است. عدد ۰ کران پایین و عدد $\frac{1}{4}$ کران بالا برای دنباله می باشد.

نکته: یکی از راه های به دست آوردن کران بالا و کران پایین دنباله، حد دنباله و جمله ی اول آن است.

الف) اگر دنباله ای صعودی باشد در این صورت: کران بالا = حد دنباله و کران پایین = جمله ی اول

ب) اگر دنباله ای نزولی باشد در این صورت: کران پایین = حد دنباله و کران بالا = جمله ی اول

مثال: کران‌داری دنباله $u_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}$ را بررسی کنید.

حل:

$$u_1 = \frac{5}{2}, u_2 = \frac{11}{5}, u_3 = \frac{21}{10}, \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

با توجه به جملات دنباله و حد آن مشخص می‌شود که دنباله هم از بالا $(u_n \leq \frac{5}{2})$ و هم از پایین $(u_n > 2)$ کراندار است. بنابراین دنباله‌ی بالا کران دار است.

تمرین: کران‌داری دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 1} \quad b_n = \frac{1}{n + 1} \quad c_n = (-1)^{n+1}$$

$$d_n = \frac{2n + 1}{n + 2} \quad u_n = \frac{n^2 + 7}{n^2 + 5}$$

مثال: برای هر یک از قسمت‌های زیر دو دنباله مثال بزنید.

(الف) از بالا کران دار بوده ولی از پایین کران دار نباشد.

(الف) از بالا کران دار بوده ولی از پایین کران نباشد.

(ب) نه از پایین کران دار باشد و نه از بالا

(ج) هم از پایین و هم از بالا کران دار باشد.

حل:

(الف) دنباله‌های $a_n = -n$ و $b_n = -3^n$ را در نظر بگیرید.

عدد -1 برای a_n ($a_n \leq 1$) و عدد -3 برای b_n ($b_n \leq -3$) کران بالا می‌باشند. این دو دنباله دارای کران پایین نمی‌باشند. زیرا:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$$

(ب) دنباله‌های $a_n = n$ و $b_n = 3^n$ را در نظر بگیرید.

عدد برای a_n ($a_n \geq 1$) و عدد 3 برای b_n ($b_n \geq 3$) کران پایین می‌باشند. این دو دنباله دارای کران بالا نیستند. زیرا:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$$

ج) دنباله های $a_n = \sin n$ و $b_n = \cos n$ را در نظر بگیرید.

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow -1 \leq a_n \leq 1$$

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow -1 \leq b_n \leq 1$$

برای هر دو دنباله ی بالا اعداد ۱ و -۱ به ترتیب کران بالا و کران پایین می باشند. بنابراین این دنباله ها کران دارند.

د) دنباله های $a_n = (-1)^n n$ و $b_n = (-3)^n$ را در نظر بگیرید.

$$a_n = (-1)^n n = \begin{cases} n ; \text{if } n \text{ زوج} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \\ -n ; \text{if } n \text{ فرد} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \end{cases}$$

اگر n زوج باشد، حد دنباله $+\infty$ شده و در نتیجه این دنباله از پایین کران دار بوده (۱) ولی از بالا کران دار نمی باشد و اگر n فرد باشد ، حد دنباله شده و این دنباله از بالا کران دار بوده (-۱) اما از پایین کران دار نمی باشد. در نتیجه کل دنباله نه از بالا و نه از پایین کران دار است.

$$b_n = (-3)^n = \begin{cases} 3^n ; \text{if } n \text{ زوج} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty \\ -3^n ; \text{if } n \text{ فرد} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty \end{cases}$$

اگر n زوج باشد، حد دنباله $+\infty$ شده و در نتیجه این دنباله از پایین کران دار بوده (۳) ولی از بالا کران دار نمی باشد و اگر n فرد باشد ، حد دنباله شده و این دنباله از بالا کران دار بوده (-۳) اما از پایین کران دار نمی باشد. در نتیجه کل دنباله نه از بالا و نه از پایین کران دار است.

نکته: اگر دنباله ای یکنوا (صعودی یا نزولی) و کراندار باشد آن گاه همگرا است.

معرفی عدد e (عدد نپر)

دنباله ی $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ را در نظر بگیرید. در جدول زیر ۱۰ جمله ی اول این دنباله را به صورت تقریبی محاسبه شده است.

| n | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ |
|----------------------------------|---|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | ۲ | ۲/۲۵ | ۲/۳۷۰۳ | ۲/۴۴۱۴ | ۲/۴۸۸۳ | ۲/۵۲۱۶ | ۲/۵۴۶۵ | ۲/۵۶۵۷ | ۲/۵۸۱۱ | ۲/۵۹۳۷ |

همان طور که دیده می شود، دنباله ی e_n دنباله ای صعودی بوده و می توان ثابت نمود که این جملات همواره از عدد ۳ کوچک تر باقی می مانند. در نتیجه عدد ۳ یک کران بالا برای دنباله ی e_n محسوب می شود و دنباله ی e_n از بالا کران دار خواهد بود.

بنابراین بنا به نکته ی قبلی، دنباله e_n به عددی همگرا خواهد بود که به آن عدد e می گوئیم.

تعریف: حد دنباله ی $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ را که عددی حقیقی و گنگ است، عدد نپر نامیده و آن را با e نمایش می دهیم. بنابراین داریم:

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

تابع نمایی

تابع $y = f(x) = a^x$ با شرط $a > 0$ و $a \neq 1$ را تابع نمایی می‌گوییم (x متغیر است). دامنه‌ی تابع نمایی \mathbb{R} و برد آن $(0, +\infty)$ می‌باشد.

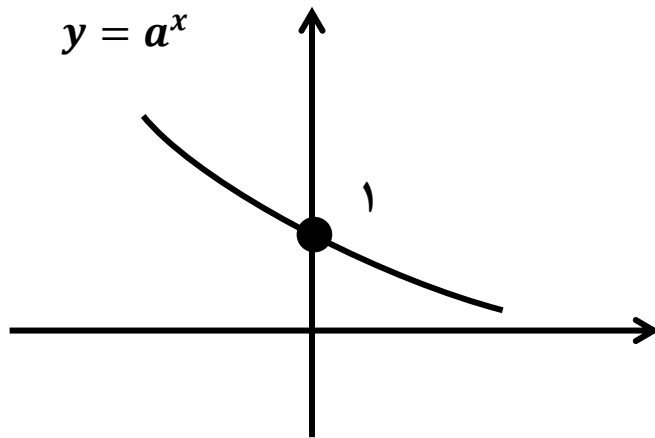
رسم تابع نمایی

برای رسم تابع نمایی کافی است ریشه‌ی عبارت توان را در جدول نوشته، سپس یک عدد قبل و یک عدد بعد از آن را در جدول آورده، مقدر y را برای هر یک به دست آوریم.

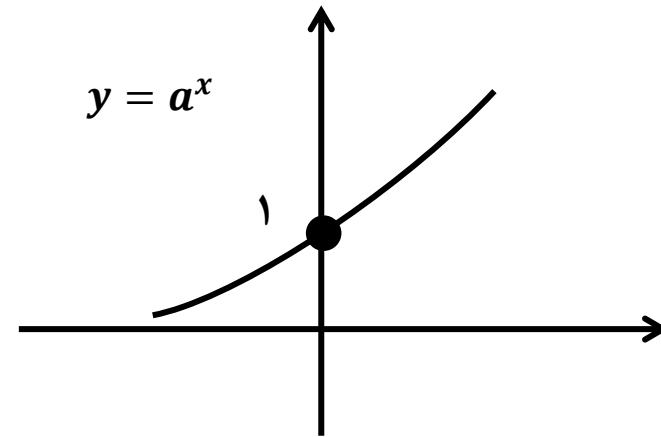
نمودار تابع نمایی با توجه به پایه‌ی آن (a)، به یکی از صورت‌های زیر است:

الف) اگر $a > 1$:

ب) اگر $0 < a < 1$:



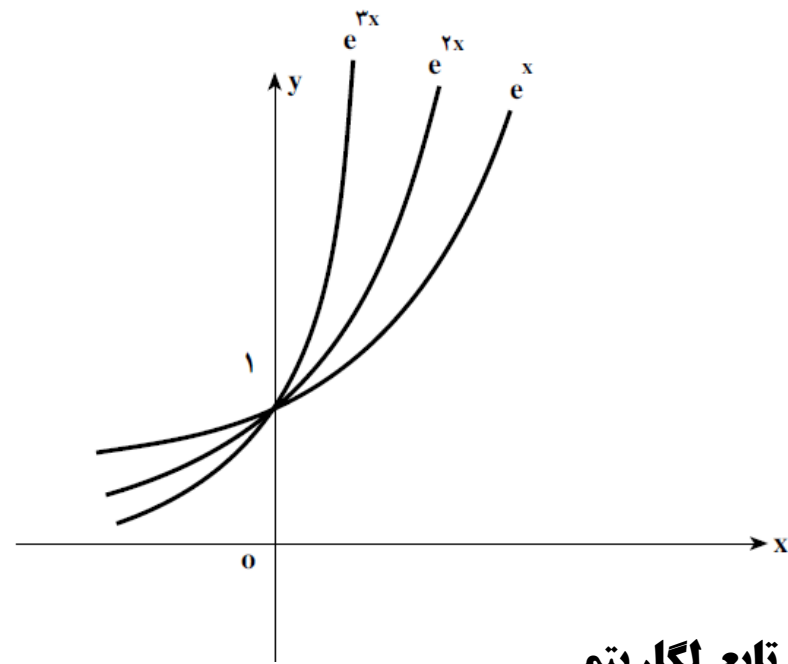
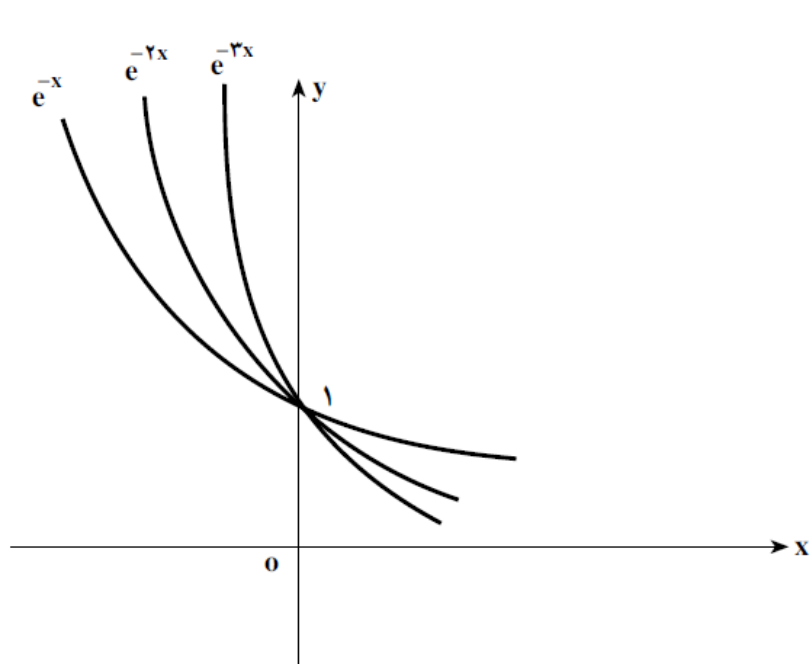
تابع فوق نزولی و تقعرش رو به بالاست.



تابع فوق صعودی و تقعرش رو به بالاست.

تابع نمایی طبیعی

در تابع $y = a^x$ ، اگر به جای a از عدد $e \cong 2.7$ (عدد نپر) استفاده کنیم، به تابع حاصل ($y = e^x$) تابع نمایی طبیعی می‌گوییم.



تابع لگاریتمی

تابع نمایی، تابعی یک به یک است. بنابراین این تابع وارون پذیر است. وارون تابع نمایی را تابع لگاریتمی می نامیم و با نماد $y = \log_a^x$ آن را نمایش می دهیم.

در این تابع عدد a را مبنا یا پایه ی لگاریتم می گوئیم و \log_a^x را لگاریتم x در مبنا ی a (پایه ی) می خوانیم.

تذکر: هرگاه پایه ی لگاریتم 10 باشد، آن را نمی نویسند. لگاریتمی که پایه اش ده باشد را لگاریتم اعشاری می گویند.

تابع لگاریتم طبیعی

در تابع لگاریتمی، اگر پایه ی لگاریتم عدد نپر (e) باشد، آن را تابع لگاریتم طبیعی می گوئیم. $y = \log_a^x \xrightarrow{a=e} y = \log_e^x$

قرارداد: تابع لگاریتم طبیعی را برای سادگی با نماد $\ln x$ نمایش می دهیم و به آن لگاریتم طبیعی x یا لگاریتم نپری x می گوئیم.

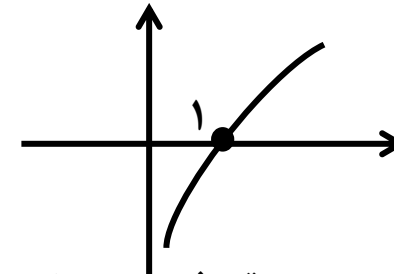
توجه کنید که تابع لگاریتم طبیعی، معکوس تابع نمایی طبیعی است. $f(x) = e^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \ln x$

l حرف اول لگاریتم و n حرف اول نپر می باشد.

روش رسم تابع لگاریتمی

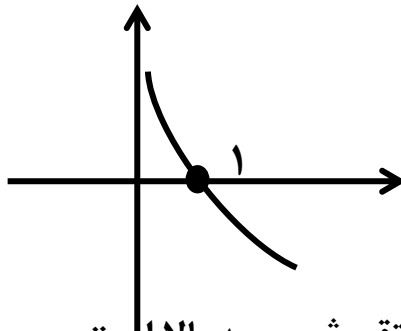
برای رسم این گونه توابع، ابتدا آن‌ها را به صورت تابع نمایی نوشته و ریشه‌ی توان این تابع نمایی که برحسب y باشد را به دست می‌آوریم و سپس مانند تابع نمایی عمل می‌کنیم.

الف) اگر $a > 1$:



این تابع صعودی و تقعرش رو به پایین است.

ب) اگر $0 < a < 1$:



این تابع نزولی و تقعرش رو به بالا است.

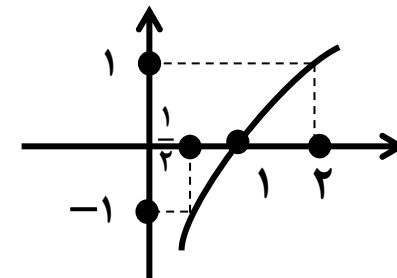
مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$1) y = \log_2 x \Rightarrow x = 2^y$$

ریشه‌ی توان
 $\Rightarrow y = \dots$

| | | | |
|-----|------------------------|-----------|-----------|
| x | $2^{-1} = \frac{1}{2}$ | $2^0 = 1$ | $2^1 = 2$ |
| y | -1 | 0 | 1 |

$(\frac{1}{2}, -1)$ $(1, 0)$ $(2, 1)$



$$۲) y = \log_{\frac{1}{2}} x \Rightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$$

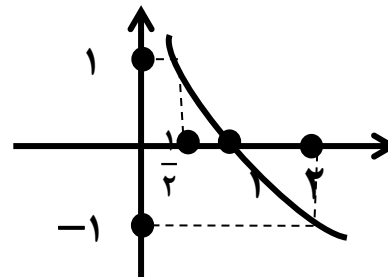
ریشه ی توان
 $\Rightarrow y = \cdot$

| | | | |
|-----|-------------------------------------|----------------------------------|--|
| x | $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = ۲$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = ۱$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$ |
| y | -۱ | ۰ | ۱ |

$$(۲, -۱)$$

$$(۱, ۰)$$

$$\left(\frac{1}{2}, ۱\right)$$



خواص تابع لگاریتم

$$۱) \log_a 1 = ۰ \text{ (لگاریتم ۱ در هر مبنایی ۰ است)}$$

$$۲) \log_a a = ۱ \text{ (لگاریتم هر عدد در مبنای خودش ۱ است)}$$

$$۳) \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$۴) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$۵) \log_a x^n = n \log_a x$$

$$۶) \log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x$$

$$۷) \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$۸) \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$۹) \log_a a^x = x$$

$$۱۰) \log_b a \times \log_a b = ۱$$

$$۱۱) \log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$$

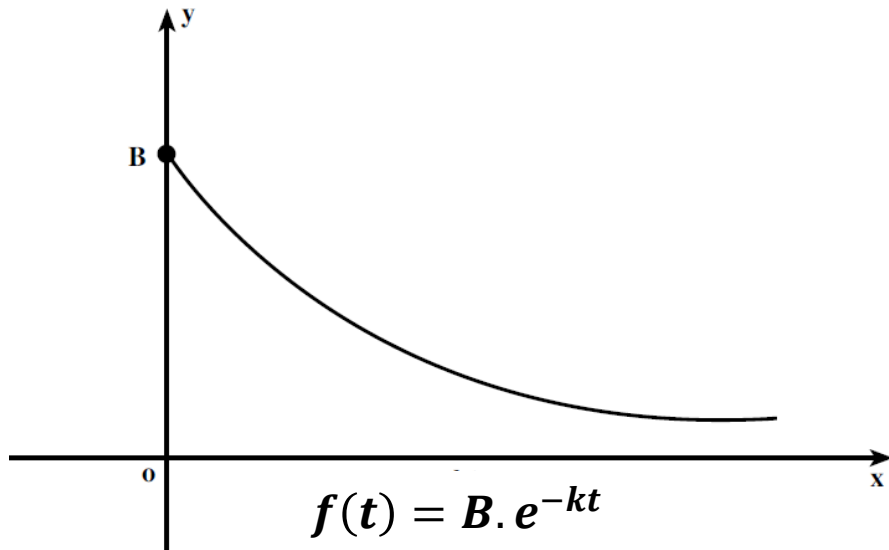
$$۱۲) a^{\log_a x} = x$$

کاربرد تابع نمایی طبیعی: آهنگ رشد و آهنگ زوال

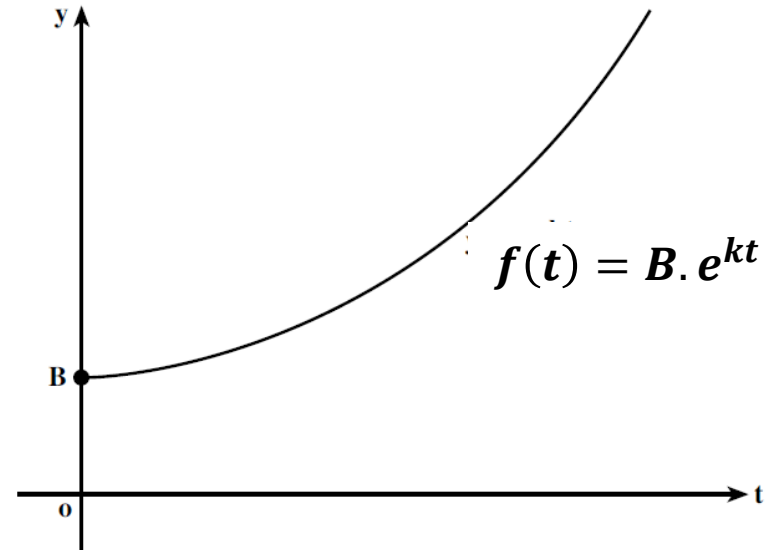
در بسیاری از شاخه های علمی با مدل های ریاضی که شامل توان های e است سر و کار داریم. بعضی از این مدل ها، همان هایی هستند که رشد یا زوال نمایی نامیده می شوند.

الف) معادله ی $f(t) = B \cdot e^{kt}$ که در آن B مقدار اولیه، k درصد رشد و t زمان است را معادله ی رشد می گوئیم.

ب) معادله ی $f(t) = B \cdot e^{-kt}$ که در آن B مقدار اولیه، k درصد رشد و t زمان است را معادله ی زوال می گوئیم.
حالت کلی نمودارهای تابع رشد و تابع زوال به صورت زیر است:



تابع زوال



تابع رشد

مثال: در کشت نمونه ای از باکتری ها، تعداد باکتری ها در زمان t از مدل $v(t) = B \cdot e^{2t}$ پیروی می کند که در آن B مقدار ثابت و مثبتی است. هرگاه در لحظه $t = 0$ (شروع آزمایش) 1000 باکتری موجود باشد، پس از 2 ثانیه از شروع چند باکتری وجود دارد؟
حل: ابتدا B را به دست می آوریم:

$$v(0) = 1000 \xrightarrow{v(t)=B \cdot e^{2t}} 1000 = B \cdot e^{2 \times 0} \Rightarrow 1000 = B \cdot e^0 \xrightarrow{e^0=1} B = 1000$$

پس فرمول تعداد باکتری ها به صورت $v(t) = 1000 \times e^{2t}$ است. اکنون برای محاسبه ی تعداد باکتری ها پس از 2 ثانیه، در فرمول $v(t)$ به جای t ، عدد 2 را قرار می دهیم:

$$v(t) = 1000 \times e^{2t} \Rightarrow v(2) = 1000 \times e^{2 \times 2} \xrightarrow{e \cong 2.7} v(t) = 1000 \times (2.7)^4 \xrightarrow{(2.7)^4 \cong 54} v(t) = 1000 \times 54 = 54000$$

مثال: قیمت یک محصول صنعتی با استفاده از آن و گذشت زمان کاهش می یابد. فرض کنیم $v(t)$ قیمت یک محصول (ابزار یا خودرو) بعد از گذشت t سال از خرید آن باشد. هرگاه بدانیم که $v(t) = B \cdot e^{-0.04t}$ در آن B مقدار ثابتی است، چنانچه این محصول به قیمت 1000000 تومان (زمانی که نو باشد) خریداری شده باشد، قیمت آن بعد از 2 سال چه قدر است؟

حل: ابتدا B را به دست می آوریم:

$$v(0) = 1000000 \xrightarrow{v(t)=B \cdot e^{-0.04t}} 1000000 = B \cdot e^{-0.04 \times 0} \Rightarrow 1000000 = B \cdot e^0 \xrightarrow{e^0=1} B = 1000000$$

پس فرمول قیمت محصول به صورت $v(t) = 1000000 \times e^{-0.04t}$ است. اکنون برای محاسبه ی قیمت محصول بعد از 2 سال، در فرمول $v(t)$ به جای t ، عدد 2 را قرار می دهیم:

$$v(t) = 1000000 \times e^{-0.04t} \Rightarrow v(2) = 1000000 \times e^{-0.04 \times 2} \xrightarrow{e \cong 2.7} v(t) = 1000000 \times (2.7)^{-0.08}$$

$$\xrightarrow{(2.7)^{-0.08} \cong 0.67032} v(t) = 1000000 \times 0.67032 = 670320$$

مثال: فرض کنیم تعداد باکتری ها در یک نوع کشت در دقیقه t از معادله $f(t) = 1500 \times e^{0.04t}$ به دست آید. تعیین کنید بعد از چند دقیقه تعداد باکتری ها برابر 30000 می شود.

حل: فرض کنیم t دقیقه ای باشد که پس از آن تعداد باکتری ها به 30000 می رسد. بنابراین داریم:

$$f(t) = 1500 \times e^{0.04t} \xrightarrow{f(t)=30000} 30000 = 1500 \times e^{0.04t} \Rightarrow e^{0.04t} = \frac{30000}{1500} \Rightarrow e^{0.04t} = 20.$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^{0.04t} = \ln 20 \xrightarrow{\ln 20 = 2.9975} 0.04t \ln e = 2.9975 \xrightarrow{\ln e = 1} t = \frac{2.9975}{0.04} = 74.9 \text{ min}$$

پس یک ساعت و 14 دقیقه و 54 ثانیه باید بگذرد تا تعداد باکتری ها به 30000 برسد.

تذکره: اگر مقدار P ریال را در یک موسسه ی اعتباری نظیر بانک یا شرکت تولیدی با نرخ i درصد مرکب پیوسته سرمایه گذاری کنیم، آن گاه با فرض آن که سرمایه بعد از t سال را با $A(t)$ نمایش دهیم، داریم:

$$A(t) = P \cdot e^{it}$$

به عنوان مثال؛ اگر مبلغ 200 هزار تومان در حساب پس انداز با نرخ 15 درصد پیوسته ی مرکب سرمایه گذاری کنیم، سرمایه بعد از گذشت 1 سال، 2 سال و ... به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\text{موجودی پس از یک سال} : 200000 + \left(200000 \times \frac{15}{100} \right) = 200000 + 30000 = 230000$$

$$\text{موجودی پس از دو سال} : 230000 + \left(230000 \times \frac{15}{100} \right) = 230000 + 34500 = 264500$$

مرکب پیوسته بودن سود بدان معنی است که مثلاً بعد از گذشت 1 سال که موجودی از 200000 تومان به 230000 تومان افزایش یافته، این نرخ سود برای سال دوم به مقدار 230000 تومان تعلق می گیرد.

مثال: شخصی مبلغ ۲۵۰۰۰۰۰۰ ریال را در یک حساب پس انداز با نرخ سود مشارکت ۱۰ درصد مرکب پیوسته سرمایه گذاری کرده است. پس از چه مدت پول اولیه این شخص دو برابر می شود؟

حل: در این مثال $A(t) = 2 \times 25000000 = 50000000$ و می خواهیم t را به دست آوریم.

اما چون نرخ سود مشارکت ۱۰ درصد مرکب پیوسته است، داریم: $100i = 10 \Rightarrow i = \frac{10}{100} = 0.1$

پس معادله ی سرمایه به صورت $A(t) = 25000000 \times e^{0.1t}$ است.

$$\begin{aligned} \xrightarrow{A(t)=50000000} 50000000 = 25000000 \times e^{0.1t} &\Rightarrow e^{0.1t} = \frac{50000000}{25000000} \Rightarrow e^{0.1t} = 2 \xrightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^{0.1t} = \ln 2 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\ln 2 \cong 0.7} 0.1t \ln e \cong 0.7 \xrightarrow{\ln e=1} 0.1t \cong 0.7 \Rightarrow t \cong \frac{0.7}{0.1} = 7$$

یعنی تقریباً پس از ۷ سال سرمایه ی شخص دو برابر می شود.

مثال: جمعیت شهری ۱۰۰۰۰ نفر است و با آهنگی متناسب با تعداد جمعیت افزایش می یابد. اگر این آهنگ ۶ درصد و جمعیت بعد از t سال $P(t)$ باشد، آن گاه $P(t) = 10000 \times e^{0.06t}$. تا کی انتظار می رود جمعیت به ۴۵۰۰۰ نفر برسد؟

حل: در این مثال $P(t) = 45000$ و می خواهیم t را به دست آوریم.

$$P(t) = 10000 \times e^{0.06t} \xrightarrow{P(t)=45000} 45000 = 10000 \times e^{0.06t} \Rightarrow e^{0.06t} = \frac{45000}{10000} \Rightarrow e^{0.06t} = 4.5$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^{0.06t} = \ln 4.5 \xrightarrow{\ln 4.5 \cong 1.5} 0.06t \ln e \cong 1.5 \xrightarrow{\ln e=1} 0.06t \cong 1.5 \Rightarrow t \cong \frac{1.5}{0.06} = 25$$

یعنی تقریباً پس از ۲۵ سال جمعیت شهر به ۴۵۰۰۰ نفر می رسد.

مثال: در یک نوع کشت ۲۰۰۰ باکتری موجود است، و بعد از t دقیقه $f(t)$ باکتری ظاهر می شود که $f(t) = ۲۰۰۰e^{۰/۰۳۵t}$ چه وقت ۱۰۰۰۰ باکتری در کشت وجود خواهد داشت؟

حل: در این مثال $f(t) = ۱۰۰۰۰$ و می خواهیم t را به دست آوریم.

$$f(t) = ۲۰۰۰e^{۰/۰۳۵t} \xrightarrow{f(t)=10000} 10000 = ۲۰۰۰e^{۰/۰۳۵t} \Rightarrow e^{۰/۰۳۵t} = \frac{10000}{2000} \Rightarrow e^{۰/۰۳۵t} = ۵$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^{۰/۰۳۵t} = \ln ۵ \xrightarrow{\ln 5 \cong 1/6} ۰/۰۳۵t \ln e \cong 1/6 \xrightarrow{\ln e=1} ۰/۰۳۵t \cong 1/6 \Rightarrow t \cong \frac{1/6}{۰/۰۳۵} = ۴۵/۷ \text{ min}$$

یعنی ۱۰۰۰۰ باکتری تقریباً بعد از ۴۶ دقیقه وجود خواهد داشت.

مثال: کارایی کارگر عادی در کارخانه ای با تابع $f(t) = ۱۰۰ - ۶۰e^{-۰/۲t}$ داده می شود که کارگر بعد از t ماه اشتغال می تواند روزانه $f(t)$ واحد کار را کامل کند. بعد از چند ماه تجربه ی کاری، انتظار می رود که کارگر روزانه ۷۰ واحد را کامل کند؟

حل: در این مثال نیز $f(t) = ۷۰$ و نیز می خواهیم t را به دست آوریم.

$$f(t) = ۱۰۰ - ۶۰e^{-۰/۲t} \xrightarrow{f(t)=70} 70 = ۱۰۰ - ۶۰e^{-۰/۲t} \Rightarrow 70 - 100 = -60e^{-۰/۲t} \Rightarrow -30 = -60e^{-۰/۲t} \Rightarrow e^{-۰/۲t} = \frac{-30}{-60}$$

$$\Rightarrow e^{-۰/۲t} = ۰/۵ \xrightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^{-۰/۲t} = \ln ۰/۵ \xrightarrow{\ln 0.5 \cong -0.7} -۰/۲t \ln e \cong -0.7 \xrightarrow{\ln e=1} -۰/۲t \cong -0.7 \Rightarrow t \cong \frac{0.7}{0.2} = 3.5$$

مثال: قیمت فروش ابزاری، t سال پس از خرید، $f(t) = ۱۲۰۰ + ۸۰۰۰e^{-۰/۲۵t}$ دلار است، که $f(t)$ چند سال پس از خرید، قیمت فروش این ابزار ۲۰۰۰ دلار می شود؟

حل:

$$f(t) = ۱۲۰۰ + ۸۰۰۰e^{-۰/۲۵t} \xrightarrow{f(t)=2000} 2000 = ۱۲۰۰ + ۸۰۰۰e^{-۰/۲۵t} \Rightarrow 2000 - 1200 = 800e^{-۰/۲۵t} \Rightarrow 800 = 800e^{-۰/۲۵t}$$

$$\Rightarrow e^{-0.25t} = \frac{800}{8000} \Rightarrow e^{-0.25t} = 0.1 \xrightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^{-0.25t} = \ln 0.1 \xrightarrow{\ln 0.1 \cong -2/3} -0.25t \ln e \cong -2/3$$

$$\xrightarrow{\ln e=1} -0.25t \cong -2/3 \Rightarrow t \cong \frac{-2/3}{-0.25} = 9/2$$

مثال: چقدر طول می کشد تا ۵۰۰۰۰۰ ریال پس انداز با نرخ ۹ درصد مرکب پیوسته ۹۰۰۰۰۰ ریال شود؟

حل:

$$i = 0.09, P = 500000, A = 900000 \Rightarrow t = ?$$

$$A = P \cdot e^{it} \Rightarrow 900000 = 500000 \cdot e^{0.09t} \Rightarrow e^{0.09t} = \frac{900000}{500000} \Rightarrow e^{0.09t} = 1.8 \xrightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^{0.09t} = \ln 1.8$$

$$\xrightarrow{\ln 1.8 \cong 0.59} 0.09t \ln e \cong 0.59 \xrightarrow{\ln e=1} 0.09t \cong 0.59 \Rightarrow t \cong \frac{0.59}{0.09} = 6.5$$

مثال: چقدر طول می کشد تا یک سرمایه گذاری دو برابر شود هرگاه نرخ سود مشارکت در سرمایه گذاری ۸ درصد مرکب پیوسته باشد؟

حل:

$$i = 0.08, A = 2P \Rightarrow t = ?$$

$$A = P \cdot e^{it} \Rightarrow 2P = P e^{0.08t} \Rightarrow e^{0.08t} = \frac{2P}{P} \Rightarrow e^{0.08t} = 2 \xrightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^{0.08t} = \ln 2$$

$$\xrightarrow{\ln 2 \cong 0.7} 0.08t \ln e \cong 0.7 \xrightarrow{\ln e=1} 0.08t \cong 0.7 \Rightarrow t \cong \frac{0.7}{0.08} = 8.75$$

یعنی پس از ۸ سال و $0.75 \times 365 \cong 274$ روز سرمایه دو برابر می شود.

معادلات نمایی:

اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ ، آن گاه معادله ی $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ معادل با معادله ی $f(x) = g(x)$ است.
مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$2^{x+1} + 2^{x+2} = 24 \quad \text{الف)}$$

حل:

$$2^{x+1} + 2^{x+2} = 24 \Rightarrow 2^x \times 2^1 + 2^x \times 2^2 = 24 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از } 2^x} 2^x(2^1 + 2^2) = 24 \Rightarrow 2^x(6) = 24 \Rightarrow 2^x = \frac{24}{6}$$

$$\Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{ب) } (13^x)^{x+3} - \frac{1}{169} = 0$$

حل:

$$(13^x)^{x+3} - \frac{1}{169} = 0 \Rightarrow 13^{x \times (x+3)} - \frac{1}{13^2} = 0 \Rightarrow 13^{x^2+3x} = \frac{1}{13^2} \xrightarrow{\frac{1}{13^2} = 13^{-2}} 13^{x^2+3x} = 13^{-2} \Rightarrow x^2 + 3x = -2$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

معادلات لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی، پس از ساده سازی به کمک خواص لگاریتم، به یکی از دو حالت زیر می رسیم:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad \text{الف)}$$

در این حالت کمان های لگاریتم را مساوی هم قرار داده $(f(x) = g(x))$ و معادله ی حاصل را حل می کنیم تا جواب به دست آید.

توجه داشته باشید که جواب هایی از x قابل قبول است که در دامنه ی توابع لگاریتمی باشند.

برای این کار جواب های به دست آمده را در معادله قرار می دهیم. اگر به لگاریتم عدد منفی برسیم و در نهایت به یک تساوی درست برسیم، جواب قابل قبول است.

مثال: معادله ی $\log^{(x+1)} + \log^{(x-1)} = \log^3$ را حل کنید.

حل:

$$\Rightarrow \log^{(x^2-1)} = \log^3 \Rightarrow x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

از بین جواب های به دست آمده $x = -2$ قابل قبول نمی باشد. زیرا کمان های $\log^{(x+1)}$ و $\log^{(x-1)}$ به ازای آن منفی شوند.

$$\log_a^{f(x)} = b \quad (\text{ب})$$

در این حالت از تعریف لگاریتم استفاده کرده و به تساوی $f(x) = a^b$ رسیده و معادله را حل کرده و در نهایت جواب های به دست آمده را چک می کنیم.

مثال: معادله ی $\log_{\frac{1}{3}}^x = -4$ را حل کنید.

حل:

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \Rightarrow x = \left(\frac{3}{1}\right)^4 \Rightarrow x = 81 \quad \text{ق.ق}$$

مثال: معادله های زیر را حل کنید.

الف) $\log_2^{(x-1)} = 3 \Rightarrow x - 1 = 2^3 \Rightarrow x - 1 = 8 \Rightarrow x = 9$

ب) $\log_{\frac{1}{9}}^x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \sqrt[2]{\left(\frac{1}{9}\right)^5} \Rightarrow x = \sqrt[2]{\left(\frac{1}{9}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)} \Rightarrow x = \left(\frac{1}{9}\right)^2 \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{81} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{243}$

$$\text{ج) } \log^{(3x+1)} = 2 \Rightarrow 3x+1 = 10^2 \Rightarrow 3x+1 = 100 \Rightarrow 3x = 99 \Rightarrow x = 33 \text{ ق.ق}$$

$$\text{د) } \log^{(2x-1)} + \log^{(x-7)} = \log^7 \Rightarrow \log^{(2x-1)(x-7)} = \log^7 \Rightarrow (2x-1)(x-7) = 7$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 15x + 7 = 7 \Rightarrow 2x^2 - 15x = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} x(2x-15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ق.ق} \\ 2x-15 = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\text{ه) } 2 \log^x - \log^{(x+1)} = 1 \Rightarrow \log^{x^2} - \log^{(x+1)} = 1 \Rightarrow \log^{\frac{x^2}{x+1}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x+1} = 10^1 = 10$$

$$\Rightarrow x^2 = 10(x+1) \Rightarrow x^2 = 10x + 10 \Rightarrow x^2 - 10x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{10 + \sqrt{160}}{2} \\ x_2 = \frac{10 - \sqrt{160}}{2} \text{ ق.ق} \end{cases}$$

$$\text{و) } (2^x - 1)(2^x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2^x - 1 = 0 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0 \\ 2^x - 3 = 0 \Rightarrow 2^x = 3 \end{cases}$$

برای حل معادله ی $2^x = 3$ ، چون این معادله نمایی نیست از روش دیگری استفاده می کنیم. به این صورت که از طرفین تساوی لگاریتم می گیریم.

$$\log^{2^x} = \log^3 \Rightarrow x \log^2 = \log^3 \Rightarrow x = \frac{\log^3}{\log^2} \xrightarrow{\text{خواص لگاریتم}} x = \log_2^3$$

$$\text{ز) } 10^{\log^{(x+1)}} = 3 \xrightarrow{a^{\log_a x} = x} x+1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

مثال: معادله های زیر را حل کنید.

الف) $\ln(x - 3) = 2 \Rightarrow \ln(x - 3) = \log_e(x - 3) = 2 \Rightarrow e^2 = x - 3 \Rightarrow x = e^2 + 3$

ب) $(e^x - 5)(2e^x - 7) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x - 5 = 0 \Rightarrow e^x = 5 \xrightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^x = \ln 5 \Rightarrow x \ln e = \ln 5 \xrightarrow{\ln e=1} x = \ln 5 \\ 2e^x - 7 = 0 \Rightarrow 2e^x = 7 \Rightarrow e^x = \frac{7}{2} \xrightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^x = \ln \frac{7}{2} \Rightarrow x \ln e = \ln \frac{7}{2} \xrightarrow{\ln e=1} x = \ln \frac{7}{2} \end{cases}$$

ج) $(e^x + 3)^2 - 25 = 0$

$$\Rightarrow (e^x + 3)^2 = 25 \xrightarrow{\text{از طرفین جذر می گیریم}} \sqrt{(e^x + 3)^2} = \sqrt{25} \Rightarrow |e^x + 3| = 5 \xrightarrow{\text{خواص قدرمطلق}} e^x + 3 = \pm 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x + 3 = 5 \Rightarrow e^x = 2 \xrightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^x = \ln 2 \Rightarrow x \ln e = \ln 2 \xrightarrow{\ln e=1} x = \ln 2 \\ e^x + 3 = -5 \Rightarrow e^x = -8 \end{cases} \quad (e^x > 0) \text{ نمی شود.}$$

این حالت امکان ندارد. زیرا e^x عددی مثبت است و هیچ گاه برابر عددی منفی نمی شود.

د) $\ln(4x - 5) = \ln(2 - x)$

$$\xrightarrow{\text{به دو طرف پایه ی } e \text{ می دهیم}} e^{\ln(4x-5)} = e^{\ln(2-x)} \xrightarrow{a^{\log_a x} = x} 4x - 5 = 2 - x \Rightarrow 4x + x = 2 + 5 \Rightarrow 5x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$$

در معادلات شامل \ln جوابی قابل قبول است که کمان \ln را منفی نکند. (مانند معادلات لگاریتمی) در معادله ی بالا کمان هر دو طرف تساوی ($\ln(4x - 5) = \ln(2 - x)$) به ازای $x = 1\frac{2}{5}$ بزرگتر از صفر است.

$$ه) |e^x - 1| = |3 - 2e^x| \xrightarrow{|x|=|y| \Rightarrow x=\pm y} e^x - 1 = \pm(3 - 2e^x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x - 1 = 3 - 2e^x \Rightarrow e^x + 2e^x = 3 + 1 \Rightarrow 3e^x = 4 \Rightarrow e^x = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^x = \ln \frac{4}{3} \\ \Rightarrow x \ln e = \ln \frac{4 \ln e = 1}{3} \xrightarrow{\ln e = 1} x = \ln \frac{4}{3} \\ e^x - 1 = -3 + 2e^x \Rightarrow e^x - 2e^x = -3 + 1 \Rightarrow -e^x = -2 \Rightarrow e^x = 2 \xrightarrow{\text{از طرفین ln می گیریم}} \ln e^x = \ln 2 \\ \xrightarrow{\ln e = 1} x = \ln \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$و) \ln(2x - 1) + \ln(x - 7) = \ln 7 \xrightarrow{\text{خواص لگاریتم}} \ln(2x - 1)(x - 7) = \ln 7 \Rightarrow (2x - 1)(x - 7) = 7$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 15x + 7 = 7 \Rightarrow 2x^2 - 15x = 0 \Rightarrow x(2x - 15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ غ.ق.ق.} \\ x = \frac{15}{2} = 7.5 \end{cases}$$

مثال: اعداد حقیقی x و y را چنان تعیین کنید که:

$$\begin{cases} \ln x + \ln 2y = \ln(xy + 2) \text{ (I)} \\ \ln(1 - x) + \ln(y + 1) = \ln(y - x - 1) \text{ (II)} \end{cases}$$

حل:

$$(I) \Rightarrow \ln 2xy = \ln(xy + 2) \Rightarrow 2xy = xy + 2 \Rightarrow 2xy = xy = 2 \Rightarrow xy = 2 (*)$$

$$(II) \Rightarrow \ln(1 - x)(y + 1) = \ln(y - x - 1) \Rightarrow (1 - x)(y + 1) = (y - x - 1) \Rightarrow y + 1 - xy - x = y - x - 1$$

$$\Rightarrow xy = 2 (**)$$

از (*) و (**)

$$\xrightarrow{\text{دستگاه بی شمار جواب دارد}} 2 = 2 \Rightarrow$$

معادله ی مثلثاتی:

معادلاتی که بر حسب نسبت های مثلثاتی یک زاویه مجهول نوشته می شوند را معادله مثلثاتی می نامیم. به عنوان مثال $\cos^2 x + \sin x = 0$ و $\cos x = 1$ و ... معادله هایی مثلثاتی هستند.

حل معادله ی مثلثاتی:

برای حل هر معادله ی مثلثاتی از روابط مثلثاتی و دستورهایی جبری مانند تجزیه کردن استفاده می کنیم تا معادله به صورت ساده تری تبدیل شود. پس از ساده کردن عبارت های مثلثاتی، معادله به یکی از صورت های زیر حل می شود:

حالت اول: اگر داشته باشیم $\sin x = a$ که $-1 \leq a \leq 1$. ابتدا زاویه ی α را چنان می یابیم که $a = \sin \alpha$. در این صورت داریم:

$$1) \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \pi - \alpha \\ x = 2k\pi + \alpha \end{cases}$$

تذکر: اگر $a > 1$ یا $a < -1$ در این صورت معادله ی مثلثاتی جواب ندارد.

حالت دوم: اگر داشته باشیم $\cos x = a$ که $-1 \leq a \leq 1$. ابتدا زاویه ی α را چنان می یابیم که $a = \cos \alpha$. در این صورت داریم:

$$2) \cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

تذکر: اگر $a > 1$ یا $a < -1$ در این صورت معادله ی مثلثاتی جواب ندارد.

حالت سوم: اگر داشته باشیم $\tan x = a$ ابتدا زاویه ی α را چنان می یابیم که $a = \tan \alpha$. در این صورت داریم:

$$3) \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

حالت چهارم: اگر داشته باشیم $\cot x = a$ ابتدا زاویه ی α را چنان می یابیم که $a = \cot \alpha$. در این صورت داریم:

$$4) \cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

حالات خاص: هرچند که روابط گفته شده برای حل معادلات مثلثاتی همواره برقرار است اما در چند حالات خاص زیر می توان سریع تر جواب معادله را به دست آورد.

$$۱) \sin x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$۲) \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi$$

$$۳) \sin x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$$

$$۷) \tan x = ۰ \Rightarrow x = k\pi$$

$$۴) \cos x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi$$

$$۵) \cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$۶) \cos x = -۱ \Rightarrow x = (۲k + ۱)\pi$$

$$۸) \cot x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

زاویه ها و اندازه ی نسبت های مثلثاتی آن ها:

| زاویه | ۰ | $\frac{\pi}{۶}$ | $\frac{\pi}{۴}$ | $\frac{\pi}{۳}$ | $\frac{\pi}{۲}$ | π | $\frac{۳\pi}{۲}$ |
|---------------|------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|------------|------------------|
| | ۰ | ۳۰ | ۴۵ | ۶۰ | ۹۰ | ۱۸۰ | ۲۷۰ |
| $\sin \theta$ | ۰ | $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | ۱ | ۰ | -۱ |
| $\cos \theta$ | ۱ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ | $\frac{۱}{۲}$ | ۰ | -۱ | ۰ |
| $\tan \theta$ | ۰ | $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ | ۱ | $\sqrt{۳}$ | تعریف نشده | ۰ | تعریف نشده |
| $\cot \theta$ | تعریف نشده | $\sqrt{۳}$ | ۱ | $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ | ۰ | تعریف نشده | ۰ |

$$۱) \sin^2 x + \cos^2 x = ۱ \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = ۱ - \cos^2 x \\ \cos^2 x = ۱ - \sin^2 x \end{cases}$$

$$۲) \sin^2 x + \cos^2 x = ۱ \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{۱}{\cos^2 x} \Rightarrow ۱ + \tan^2 x = \frac{۱}{\cos^2 x}$$

$$۳) \sin^2 x + \cos^2 x = ۱ \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{۱}{\sin^2 x} \Rightarrow ۱ + \cot^2 x = \frac{۱}{\sin^2 x}$$

$$۴) \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$۵) \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 2 \cos^2 x - ۱ \\ \cos 2x = ۱ - 2 \sin^2 x \end{cases}$$

$$۶) \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$۷) \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \tan(-\alpha) = -\tan\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \\ \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \\ \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(2\pi - \alpha) = +\cos\alpha \\ \tan(2\pi - \alpha) = -\tan\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\pi + \alpha) = +\sin\alpha \\ \cos(2\pi + \alpha) = +\cos\alpha \\ \tan(2\pi + \alpha) = +\tan\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha \\ \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = +\sin\alpha \\ \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha \end{cases}$$

نکته: در حالتی که $\cos x$ و $\cot x$ برابر مقادیر منفی باشند، از $(\pi - \alpha)$ استفاده می کنیم. مثلاً اگر $\cos x = -\frac{1}{3}$ در این صورت $\cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$.

در حالتی که $\sin x$ و $\tan x$ برابر مقادیر منفی باشند، از $(-\alpha)$ استفاده می کنیم. مثلاً اگر $\sin x = -\frac{1}{3}$ در این صورت $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

انواع معادلات مثلثاتی:

الف) معادلات ساده ی مثلثاتی نوع اول:

معادلاتی که شامل یکی از مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه ی مجهول باشد را، معادله ی مثلثاتی نوع اول می گوییم.

مثال: معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید و جواب های کلی آن را بیابید.

$$1) \quad 2 \sin x - \sqrt{3} = 0$$

حل:

$$2 \sin x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2 \sin x = \sqrt{3} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$2) \quad 2 \cos x - \sqrt{2} = 0$$

$$2 \cos x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2 \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$۳) ۲ \sin x + \sqrt{۲} = ۰$$

$$۲ \sin x + \sqrt{۲} = ۰ \Rightarrow ۲ \sin x = -\sqrt{۲} \Rightarrow \sin x = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{۴} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{۴} \right) \\ x = ۲k\pi + \left(-\frac{\pi}{۴} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۴} \\ x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۴} \\ x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

$$۴) ۲ \cos x + ۱ = ۰$$

$$۲ \cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲ \cos x = -۱ \Rightarrow \cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{۳} \right) \Rightarrow \cos x = \cos \frac{۲\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$$

مثال: معادله ی $۴ \cos^2 x - ۹ \cos x + ۵ = ۰$ را حل کنید و جواب های کلی آن را به دست آورید.

حل: این معادله به یک معادله ی درجه دوم شبیه است با فرض $\cos x = t$ داریم: $۴t^2 - ۹t + ۵ = ۰$

چون جمع ضرایب صفر است بنابراین یکی از ریشه ها $t_1 = ۱$ و دیگری $t_2 = \frac{c}{a} = \frac{۵}{۴}$ است.

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = ۱ \Rightarrow \cos x = ۱ \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = ۲k\pi \\ t_2 = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \cos x = \frac{۵}{۴}; \text{ چون } -۱ \leq \cos x \leq ۱ \text{ پس جواب غیر قابل قبول است} \end{cases}$$

مثال: معادله ی $2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0$ را حل کنید و جواب های کلی آن را به دست آورید.

حل: این معادله نیز به یک معادله ی درجه دوم شبیه است با فرض $\tan x = t$ داریم: $2t^2 - 3t + 1 = 0$

چون جمع ضرایب صفر است بنابراین یکی از ریشه ها $t_1 = 1$ و دیگری $t_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ است.

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan x = \frac{1}{2}; \xrightarrow{\text{(چون جواب آن را نمی دانیم، فرض می کنیم که زاویه ای است که تانژانت آن برابر \frac{1}{2} است.)} \tan x = \tan \alpha \end{cases}$$

مثال: معادله ی $2\cos^3 x - \cos x = 0$ را حل کنید و جواب های کلی آن را به دست آورید.

حل: ابتدا از $\cos x$ فاکتورگیری می کنیم.

$$\cos x (2\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2\cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = +\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k \pm \frac{\pi}{4} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

مثال: معادله ی $\tan^2 x = 3$ را حل کرده و جواب های در بازه ی $[0, 2\pi]$ را به دست آورید.

$$\tan^2 x = 3 \Rightarrow \tan x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \\ \tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \tan \left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

برای یافتن جواب های مورد نظر در بازه ی k به اعداد صحیح 0 و ± 1 و ± 2 و ... را می دهیم تا جواب های مورد نظر به دست آید.

| | | | | |
|----------------------------|-------------------|------------------|------------------|------------------|
| k | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$ | $-\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{3}$ |
| $x = k\pi - \frac{\pi}{3}$ | $-\frac{4\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ |

(ب) معادلات ساده ی مثلثاتی نوع دوم:

معادله مثلثاتی شامل مقادیر چند نسبت مثلثاتی زاویه ی مجهول می باشد را معادله ی مثلثاتی نوع دوم می گوئیم.

مثال: معادلاتی مانند $\cos^2 x + \sin x = 1$ و $\tan x + 2\cot x = 3$ و $\sin x \cos x - \sin x = 0$ که چند نسبت مثلثاتی از زاویه ی x را در بر می گیرند، معادلات ساده ی مثلثاتی نوع دوم می باشند.

برای حل این گونه معادلات ممکن است با انتقال تمام جملات در یک طرف تساوی و تبدیل نسبت ها به یک نسبت، یا تجزیه به عامل ها بتوان معادله را به معادلات ساده تر تبدیل کرده و بعد جواب های معادله را به دست آوریم.

مثال: معادله ی مثلثاتی $2\sin^2 x = \cos x - 1$ را حل کنید.

حل: می توان همه نسبت ها را به کسینوس تبدیل کرد. داریم:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) = \cos x - 1 \Rightarrow 2 - 2\cos^2 x = \cos x - 1$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0 \xrightarrow{\cos x = t} 2t^2 + t - 3 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است}} t_1 = 1, t_2 = \frac{-3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi \\ t_2 = \frac{-3}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{-3}{2} < -1 \text{ (غ.ق.ق.)} \end{cases}$$

مثال: معادله ی مثلثاتی $\tan x - 2\cot x = 1$ را حل کنید.

حل: برای حل این معادله باید قرار دهیم: $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ در این صورت معادله به صورت زیر در می آید:

$$\tan x - 2 \times \frac{1}{\tan x} = 1 \Rightarrow \tan x - \frac{2}{\tan x} = 1$$

چون $\tan x \neq 0$ پس طرفین معادله را در $\tan x$ ضرب می کنیم.

$$\tan x \left(\tan x - \frac{2}{\tan x} \right) = \tan x(1) \Rightarrow \tan^2 x - 2 = \tan x \Rightarrow \tan^2 x - \tan x - 2 = 0 \xrightarrow{\tan x = t}$$

$$t^2 - t - 2 = 0 \xrightarrow{a-b+c=0} t_1 = -1, t_2 = \frac{-2}{1} = -2 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \Rightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \\ t_2 = -2 \Rightarrow \tan x = -2 \Rightarrow x = k\pi + \alpha \end{cases}$$

(چون جواب آن را نمی دانیم، فرض می کنیم که α زاویه ای است که تانژانت آن برابر -2 است.)

مثال: معادله ی مثلثاتی $\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.

حل: با فاکتورگیری از $\sin x$ در جملات حاوی $\sin x$ به معادله ی زیر می رسیم:

$$\sin x(1 + \cos x) + (\cos x + 1) = 0 \Rightarrow (\cos x + 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{حالت خاص} \\ \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \implies x = 2k\pi + \pi \\ \text{حالت خاص} \\ \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \implies x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

مثال: معادله ی $\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ را حل کنید.

حل: می دانیم $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ بنابراین معادله به صورت زیر در می آید:

$$\cos 2x = \cos x \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow 2x - x = 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow 2x + x = 2k\pi \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

روش دوم: از تساوی $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ استفاده کرده و در معادله $\cos 2x = \cos x$ جایگذاری می کنیم.

$$2\cos^2 x - 1 = \cos x \quad (\text{حل به عهده دانش آموز})$$

مثال: معادله ی مثلثاتی $\sin^4 x + \sin^3 x = 0$ را حل کرده و جواب های در بازه ی $[0, \pi]$ را بیابید.

حل:

$$\sin^4 x + \sin^3 x = 0 \Rightarrow \sin^4 x = -\sin^3 x \Rightarrow \sin^4 x = \sin(-3x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi - (-3x) \Rightarrow 4x - 3x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \\ 4x = 2k\pi + (-3x) \Rightarrow 4x + 3x = 2k\pi \Rightarrow 7x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2}{7}k\pi \end{cases}$$

| k | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|----------|------------------|------------------|------------------|
| x | $0, \pi$ | $\frac{2\pi}{7}$ | $\frac{4\pi}{7}$ | $\frac{6\pi}{7}$ |

مثال: معادله های مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \sin 2x$

حل: می دانیم: $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$ بنابراین داریم. **روش اول:**

$$-\sin x = \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = \sin(-x) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \pi - (-x) \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi + x \\ \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \\ 2x = 2k\pi + (-x) \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

روش دوم: از تساوی $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ استفاده کرده و در معادله ی $-\sin x = \sin 2x$ جایگذاری می کنیم.

(حل به عهده دانش آموز) $2\sin x \cos x = -\sin x \Rightarrow 2\sin x \cos x + \sin x = 0$

ب) $\frac{2}{\tan x + \cot x} = \frac{1}{2}$

حل:

$$\frac{2}{\tan x + \cot x} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \tan x + \cot x = 4 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \sin x} = 4$$

$$\xrightarrow{\sin^2 x + \cos^2 x = 1} \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = 4 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4\sin x \cdot \cos x = 1 \Rightarrow 2(2\sin x \cdot \cos x) = 1 \xrightarrow{2\sin x \cos x = \sin 2x}$$

$$2\sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \\ \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

تمرین: معادلات زیر را حل کرده و جواب های کلی آن ها را بیابید.

۱) $2\sin 2x - 1 = 0$

۲) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

۳) $\sin 2x + \sin x = 0$

۴) $\tan x = 3\cot gx$

۵) $2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0$

۶) $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

۷) $\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x = 1$

۸) $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$

۹) $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۰) $\cos x - \cos^3 x = 0$

به نام خداوند بخشنده و مهربان

ریاضی عمومی ۱ / پیش دانشگاهی تجربی / فصل سوم:

مشتق توابع

یادآوری و تکمیل

سال گذشته با مفهوم مشتق توابع آشنا شدیم.

برای یک تابع مانند f با تغییر مقدارهای متغیر x ، مقادیر $f(x)$ نیز تغییراتی می‌کند.

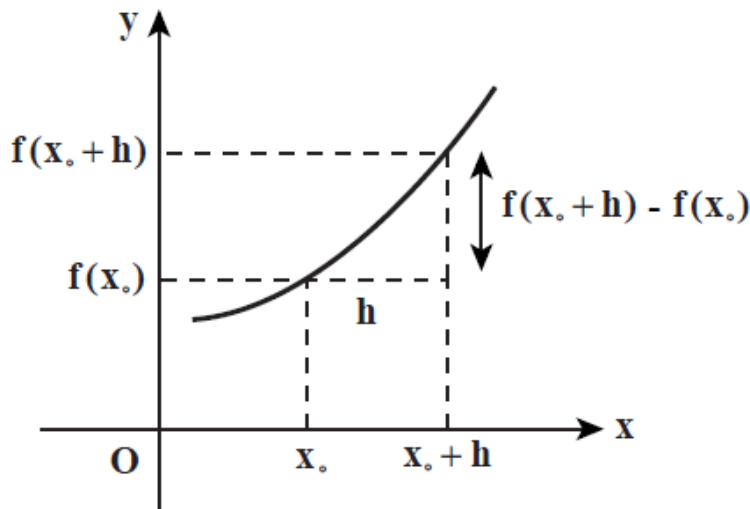
مشتق یک تابع، چگونگی تغییر مقدار تابع را نسبت به مقدار متغیر نشان می‌دهد.

در یک نقطه مانند x_0 از دامنه ی تابع f ، اگر به اندازه h واحد از x_0 دور شویم آن گاه مقدار تابع از $f(x_0)$ به $f(x_0 + h)$ تغییر می‌کند.

میزان تغییرات f به اندازه $f(x_0 + h) - f(x_0)$ و میزان تغییرات x به اندازه h است.

کسر $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ نسبت این تغییرات را حساب می‌کند و حد آن در $h \rightarrow 0$ (در صورت وجود) مشتق f در x_0 .

نامیده می‌شود و آن را با $f'(x_0)$ نشان می‌دهیم. بنابراین داریم:



$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

مثال: مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه x_0 دلخواه مانند $x_0 \in (0, +\infty)$ را با استفاده از تعریف مشتق حساب کنید.

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} f(x_0) = \sqrt{x_0} \\ f(x_0 + h) = \sqrt{x_0 + h} \end{cases}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \times \frac{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x_0 + h})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + 0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

مثال: اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{4h} = 5x$ باشد آن گاه حاصل $2f'(4)$ را به دست آورید.

حل:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{4h} = 5x \Rightarrow \frac{1}{4} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = 5x \xrightarrow{\text{تعریف مشتق ۱}} \frac{1}{4} f'(x) = 5x \Rightarrow f'(x) = 20x$$

$$\Rightarrow f'(4) = 20(4) = 80 \Rightarrow 2f'(4) = 2(80) = 160$$

مثال: اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{3h} = -\frac{1}{3}$ باشد آن گاه حاصل $3f'(2)$ را به دست آورید.

حل:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{3h} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \right) = -\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{تعریف مشتق ۱}} \frac{1}{3} f'(2) = -\frac{1}{3} \Rightarrow f'(2) = -1$$

$$\Rightarrow 3f'(2) = 3(-1) = -3$$

تعریفی دیگر برای مشتق: اگر a نقطه ای متعلق به دامنه ی تابع f باشد، در این صورت مشتق تابع f در نقطه ی a را که با $f'(a)$ نمایش می دهیم از رابطه ی زیر نیز می توانیم به دست آوریم:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

هم چنین اگر بخواهیم مشتق تابع f در نقطه ی $x_0 \in D_f$ را به دست آوریم، به صورت زیر است:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

مثال: مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نقطه $a \in D_f$ به دست آورید.

حل:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{a - x}{xa}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(x - a)}{xa(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-1}{xa} = \frac{-1}{aa} = \frac{-1}{a^2}$$

مثال: مشتق تابع $y = x^3$ را از طریق تعریف در نقطه a دلخواه $x = a$ به دست آورید.

حل: طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{f(x)=x^3, f(a)=a^3} f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{\cdot}{\cdot} \Rightarrow \text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام با استفاده تجزیه}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} x^2 + ax + a^2 = a^2 + a \times a + a^2 = 3a^2$$

مشتق پذیری:

فرض کنیم تابع f در یک بازه I باز حول یک نقطه x_0 تعریف شده باشد. اگر

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

یا $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ موجود و متناهی باشد، آن را مشتق تابع f در x_0 نامیده و با $f'(x_0)$ نشان می دهیم.

مشتق های یک طرفه: همان طور که گفته شد، برای محاسبه مشتق تابع f در نقطه x_0 باید یکی از حدود زیر را حساب کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

اگر در محاسبه این حدها، ابتدا و در صورت نیاز، حدهای چپ و راست را حساب کنیم، حدهای به دست آمده را مشتق چپ و راست f در x_0 می نامیم. بنابراین مشتق های چپ و راست f در x_0 به صورت زیر نشان داده می شوند:

مشتق راست تابع f در نقطه x_0 :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$$

یا

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$$

مشتق چپ تابع f در نقطه x_0 :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$$

یا

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$$

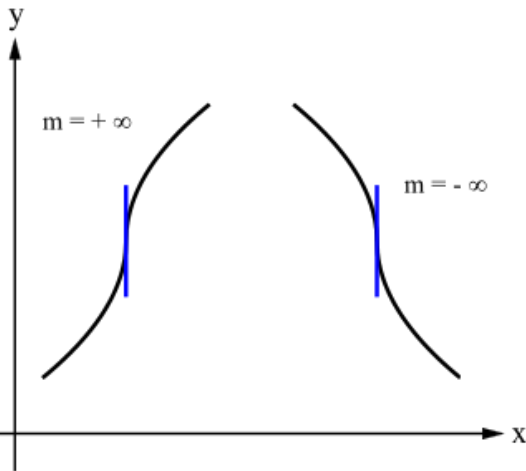
در محاسبه مشتق های چپ و راست ممکن است به حالاتی برخورد کنیم که مشتق های چپ و راست مساوی نباشند که در این حالت گوییم تابع مشتق پذیر نیست. در این حالت وضعیت نمودار تابع در سمت راست و چپ نقطه متفاوت است.

بررسی نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق پذیر نیست

الف) اگر تابع f در نقطه x پیوسته باشد ولی مشتق چپ و راست تابع در نقطه x «متناهی و نابرابر» یا «یکی عدد و دیگری ∞ » باشد، در این صورت می گوییم تابع f در نقطه x مشتق پذیر نیست و این نقطه را **نقطه ی زاویه دار منحنی** می گوییم.



ب) اگر تابع f در نقطه x پیوسته باشد ولی مشتق چپ و راست تابع در نقطه x یکی $+\infty$ و دیگری $-\infty$ شود، در این صورت می گوییم تابع f در نقطه x مشتق پذیر نیست و این نقطه را **نقطه ی بازگشتی** می گوییم.



ج) اگر تابع f در نقطه x پیوسته باشد ولی مشتق چپ و راست تابع در نقطه x هر دو $+\infty$ و یا هر دو $-\infty$ شود،

در این صورت می گوییم تابع f در نقطه x مشتق پذیر نیست و این نقطه را **نقطه ی عطف** می گوییم.

مثال: مشتق های چپ و راست تابع $f(x) = |x|$ را در نقطه $x_0 = 0$ بررسی کنید.

حل: ابتدا پیوستگی تابع $f(x) = |x|$ در نقطه $x_0 = 0$ را بررسی می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \Rightarrow f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1 \quad \text{مشتق راست:}$$

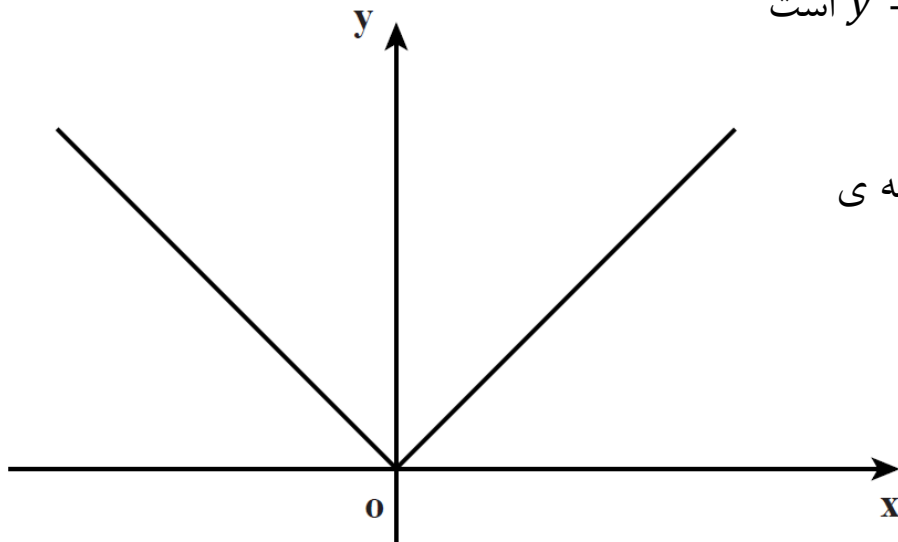
مشتق چپ:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \Rightarrow f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

نمودار این تابع نیز نشان می دهد که در نقطه $x_0 = 0$ و در سمت چپ، نمودار تابع به صورت خط $y = -x$ است و مماس بر آن دارای شیب -1 است.

اما در سمت راست نقطه $x_0 = 0$ ، نمودار تابع به صورت خط $y = x$ است و مماس بر آن دارای شیب $+1$ است.

بنابراین و با توجه به مطالب گفته شده، نقطه $x_0 = 0$ یک نقطه ی زاویه دار برای منحنی $f(x) = |x|$ است.



نکته: در توابعی به شکل $y = |f(x)|$ اگر x ریشه ی ساده ی داخل قدر مطلق باشد، تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست. اما اگر x ریشه ی تکراری داخل قدر مطلق باشد، آن گاه تابع در این نقطه مشتق پذیر است.

مثال: تابع $y = |x(x-2)^3(x-3)^2|$ در چند نقطه نامشتق پذیر است؟

حل: ریشه های داخل قدر مطلق عبارتند از: $x = 3$ و $x = 2$ و $x = 0$ که $x = 0$ ریشه ی ساده و $x = 3$ و $x = 2$ ریشه های تکراری داخل قدر مطلق می باشند. پس طبق نکته ی بالا، تابع فقط در یک نقطه ($x = 0$) نامشتق پذیر است.

نکته: اگر دو منحنی بر هم مماس باشند، در این صورت مشتق آن ها در نقطه ی تماس با هم برابر است.

مثال: اگر منحنی $y = x^4 + x$ و $y = mx^3 + n$ در $x = -1$ بر هم مماس باشند، مقدار m را حساب کنید.

حل: طبق نکته ی قبل، ابتدا مشتق دو تابع در نقطه ی تماس را به دست می آوریم. سپس این دو مقدار را مساوی هم قرار داده تا مقدار مجهول به دست آید.

$$\begin{cases} y = x^4 + x \Rightarrow y' = 4x^3 + 1 \xrightarrow{x=-1} y' = 4(-1)^3 + 1 = -3 \\ y = mx^3 + n \Rightarrow y' = 3mx^2 \xrightarrow{x=-1} y' = 3m(-1)^2 = 3m \end{cases} \Rightarrow -3 = -3m \Rightarrow m = 1$$

نکته: علامت مشتق در یک نقطه، نشان دهنده ی آن است که تابع در اطراف آن نقطه در حال افزایش است یا کاهش. به عبارت دیگر، علامت مشتق تابع، نشانگر وضعیت تابع از لحاظ صعودی بودن یا نزولی بودن است.

اگر $f'(x) \geq 0$ در این صورت تابع f در یک بازه حول x صعودی است و اگر $f'(x) \leq 0$ در این صورت تابع f در یک بازه حول x نزولی است.

اندازه یا مقدار مشتق نیز نشان می دهد شدت صعود یا نزول تابع چقدر است.

مثال: سیبی را در لحظه ی $t = 0$ از زمین رو به بالا پرتاب می کنیم. معادله ی حرکت آن به صورت $y(t) = -5t^2 + 30t$ است. که y بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. این حرکت چند ثانیه طول می کشد و سرعت سیب در لحظه ی آخر چقدر است؟

حل: در لحظه ای که سیب پرتاب می شود و سپس مجدداً به زمین برمی گردد داریم: $y(t) = 0$

$$y(t) = 0 \Rightarrow -5t^2 + 30t = 0 \Rightarrow -5t(t - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -5t = 0 \Rightarrow t = 0 \\ t - 6 = 0 \Rightarrow t = 6 \end{cases}$$

در لحظه ی $t = 0$ سیب پرتاب و در لحظه ی $t = 6$ مجدداً به زمین برگشته است. بنابراین این حرکت 6 ثانیه طول کشیده است.

برای به دست آوردن معادله ی سرعت، از معادله ی حرکت مشتق می گیریم:

$$v(t) = y'(t) = -10t + 30$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v(0) = -10(0) + 30 = 30 \\ v(6) = -10(6) + 30 = -30 \end{cases}$$

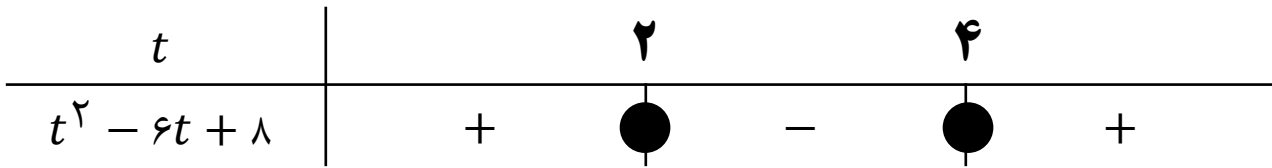
در لحظه ی $t = 0$ مقدار مشتق عددی مثبت است و این یعنی مقدار $y(t)$ در حال افزایش است.

اما در لحظه ی $t = 6$ مقدار مشتق عددی منفی است و این یعنی مقدار $y(t)$ در حال کاهش است.

مثال: متحرکی روی یک خط افقی حرکت می کند که معادله ی حرکت $s = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 10$ آن است، در چه بازه زمانی متحرک در جهت مثبت خط، حرکت می کند؟ در کدام بازه زمانی متحرک در جهت منفی خط حرکت می کند؟ در کدام لحظه ها متحرک تغییر جهت می دهد؟

حل: با مشتق گیری از معادله ی حرکت، معادله ی سرعت را به دست می آوریم. سپس معادله ی سرعت را تعیین علامت می کنیم.

$$v(t) = s'(t) = t^2 - 6t + 8; v(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow (t - 2)(t - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 4 \end{cases}$$



در بازه های زمانی $t < 2$ و $t > 4$ متحرک در جهت مثبت، در بازه ی زمانی $2 < t < 4$ در جهت منفی و در $t = 2$ و $t = 4$ متحرک تغییر جهت می دهد.

مثال: سرعت صعود توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ را با هم مقایسه کنید.

حل: با توجه به نمودار، این دو تابع روی بازه ی $(0, +\infty)$ صعودی هستند و مشتق آن ها مثبت است.

اما سرعت صعود $f(x) = \sqrt{x}$ مدام در حال کاهش است ولی سرعت صعود $g(x) = x^2$ مدام در حال افزایش است. این مطلب علاوه بر نمودار، در مشتق آن ها نیز دیده می شود.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x) = 2x$$

با افزایش x مقدار $f'(x)$ کاهش ولی مقدار $g'(x)$ افزایش می یابد.

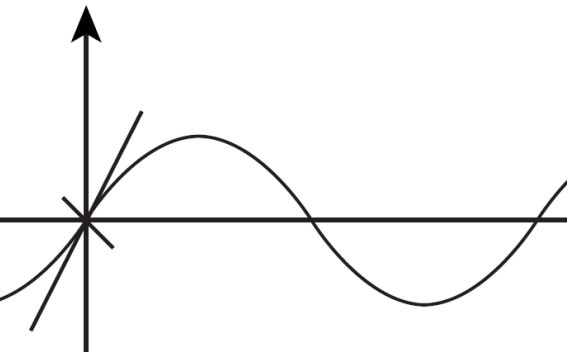
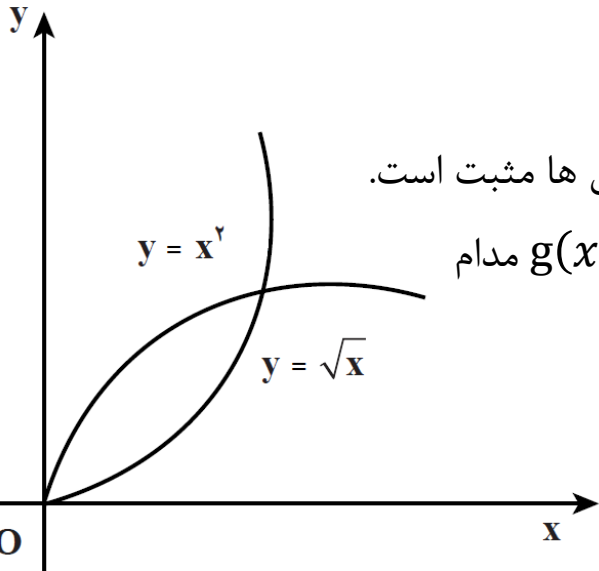
مثال: سرعت صعود تابع $y = \sin x$ در چه نقطه ای از همه بیش تر است؟

حل: باید ببینیم y' در چه نقطه ای بیشترین مقدار را دارد. داریم: $y' = \cos x$

می دانیم تابع y' در $x = 0$ و $x = 2\pi$ بیشترین مقدار خود را دارد.

لذا سرعت صعود در این نقاط، بیش تر از سایر نقاط است.

(به نمودار $y = \sin x$ و خطوط مماس در $x = 0$ و $x = 2\pi$ توجه کنید.)



فرمول های مشتق:

$$۱) y = a (a \in \mathbb{R}) \Rightarrow y' = 0$$

$$۲) y = a x^n \Rightarrow y' = n a x^{n-1}$$

$$۳) y = u^n \Rightarrow y' = n u' u^{n-1}$$

$$۴) y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$$

$$۵) y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$۶) y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$۷) y = \sqrt[m]{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{m \sqrt[m]{u^{m-1}}}$$

$$۸) y = \sqrt[m]{u^n} \Rightarrow y' = \frac{nu'}{m \sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

مشتق توابع مثلثاتی:

$$۱) y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$$

$$۲) y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$$

$$۳) y = \tan u \Rightarrow y' = u' (1 + \tan^2 u)$$

$$۴) y = \cot u \Rightarrow y' = -u' (1 + \cot^2 u)$$

$$۵) y = \sin^n u \Rightarrow y' = nu' \cos u \sin^{n-1} u$$

$$۶) y = \cos^n u \Rightarrow y' = -nu' \sin u \cos^{n-1} u$$

$$۷) y = \tan^n u \Rightarrow y' = nu' (1 + \tan^2 u) \tan^{n-1} u$$

$$۸) y = \cot^n u \Rightarrow y' = -nu' (1 + \cot^2 u) \cot^{n-1} u$$

$$۱) y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u) \qquad ۲) y = f \circ g(u) = f(g(u)) \Rightarrow y' = u'g'(u)f'(g(u))$$

مثال: مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$$\text{الف) } f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \xrightarrow{x^2 + 1 = u \Rightarrow y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}} f'(x) = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{ب) } f(x) = \sin^4 x \xrightarrow{y = \sin^4 u \Rightarrow y' = 4u^3 \cos u \sin^3 u} f'(x) = 4 \cos x \sin^3 x$$

$$\text{ج) } f(x) = \sin x^4 \xrightarrow{y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u} f'(x) = 4x^3 \cos x^4$$

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی:

$$۱) y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

$$۲) y = e^u \Rightarrow y' = u'e^u$$

$$۳) y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$۴) y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$۵) y = \ln|u| \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

مثال: مشتق توابع زیر را به دست آورید.

$$۱) y = e^{x^2} - e^{\cos x} \Rightarrow y' = 2xe^{x^2} - (-\sin x)e^{\cos x} = 2xe^{x^2} + \sin x e^{\cos x}$$

$$۲) y = e^{2x} + e^{-x} + 2 \Rightarrow y' = 2e^{2x} - e^{-x}$$

$$۳) y = xe^{x^2-1} \Rightarrow y' = 1(e^{x^2-1}) + x(2x)(e^{x^2-1}) = e^{x^2-1}(1 + 2x^2)$$

$$۴) y = \ln(1 + \cos^2 x) \Rightarrow y' = \frac{-2\sin x \cos x}{1 + \cos^2 x}$$

$$۵) y = \sin x \cdot e^{\cos x} \Rightarrow y' = \cos x(e^{\cos x}) + \sin x(-\sin x)(e^{\cos x}) = e^{\cos x}(\cos x - \sin^2 x)$$

مسائل صفحه ی ۷۳:

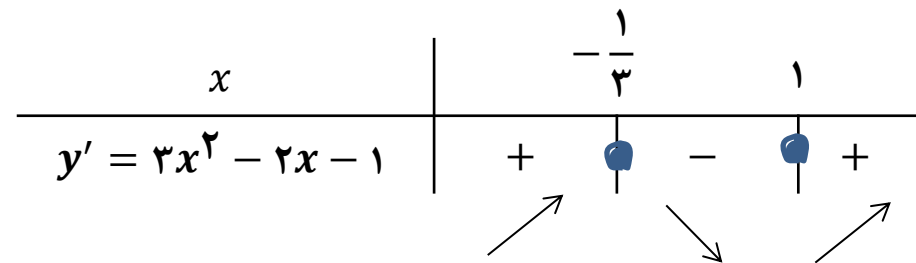
۷- تابع $y = x^3 - x^2 - x$ را در نظر بگیرید.

الف) این تابع در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی است؟

ب) این تابع در چند نقطه محور x ها را قطع می کند؟

حل: الف) ابتدا مشتق تابع را حساب کرده، سپس آن را تعیین علامت می کنیم.

$$y = x^3 - x^2 - x \Rightarrow y' = 3x^2 - 2x - 1 \stackrel{y'=0}{\implies} 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$



با توجه به جدول، تابع در بازه های $(-\infty, -\frac{1}{3}]$ و $[1, +\infty)$ صعودی و در بازه ی $[-\frac{1}{3}, 1]$ نزولی می باشد.

ب) منظور به دست آوردن ریشه های این تابع می باشد.

$$y = x^3 - x^2 - x \Rightarrow x^3 - x^2 - x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x(x^2 - x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

۱۲- فرض کنیم $f(x) = \begin{cases} 2x + 5; & x \leq 3 \\ 3x + 2; & x > 3 \end{cases}$ مطلوب است محاسبه ی $f'_-(3)$ و $f'_+(3)$. آیا این تابع در $x = 3$ مشتق پذیر است؟

حل: ابتدا پیوستگی تابع f در نقطه ی $x = 3$ را بررسی می کنیم.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x + 5) = 11 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x + 2) = 11 \\ f(3) = 11 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع } f \text{ در نقطه ی } x = 3 \text{ پیوسته است.}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 & ; x \leq 3 \\ 3 & ; x > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(3) = 2 \\ f'_+(3) = 3 \end{cases}$$

چون مشتق چپ و راست f در نقطه ی $x = 3$ برابر نیستند، بنابراین تابع f در نقطه ی $x = 3$ مشتق پذیر نیست.

$$y = f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & ; x \geq 2 \\ x^3 & ; x < 2 \end{cases} \quad \text{۱۳- تابع}$$

اعداد ثابت a و b را به دست آورید.

حل: چون تابع f در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر است، پس در این نقطه پیوسته نیز بوده است. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \quad (*)$$

$$\left. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^3 = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax^2 + bx + 1) = 4a + 2b + 1 \\ f(2) = 4a + 2b + 1 \end{cases} \right\} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} 4a + 2b + 1 = 8 \Rightarrow 4a + 2b = 7 \quad (I)$$

از طرفی چون تابع f در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر است، پس مشتق چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابر است.

$$\Rightarrow y' = f'(x) = \begin{cases} 2ax + b ; x \geq 2 \\ 3x^2 ; x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(2) = 4a + b \\ f'_-(2) = 12 \end{cases} \Rightarrow f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow 4a + b = 12 \quad (II)$$

$$\stackrel{(I) \text{ و } (II)}{\Longrightarrow} \begin{cases} 4a + 2b = 7 \\ 4a + b = 12 \end{cases} \Rightarrow b = -5, a = \frac{17}{4}$$

۱۴- فرض کنیم $f(x) = \begin{cases} -3x + 5; & x \leq 2 \\ x^2 - 2x - 1; & x > 2 \end{cases}$ مطلوب است محاسبه ی $f'_-(2)$ و $f'_+(2)$. آیا این تابع در

$x = 2$ مشتق پذیر است؟

حل: ابتدا پیوستگی تابع f در نقطه ی $x = 2$ را بررسی می کنیم.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-3x + 5) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 2x - 1) = -1 \\ f(2) = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع } f \text{ در نقطه ی } x = 2 \text{ پیوسته است.}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -3 & ; x \leq 2 \\ 2x - 2 & ; x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(2) = -3 \\ f'_+(2) = 2 \end{cases}$$

چون مشتق چپ و راست f در نقطه ی $x = 2$ برابر نیستند، بنابراین تابع f در نقطه ی $x = 2$ مشتق پذیر نیست.

مثال: ماشینی با سرعت ثابت در حال حرکت است و ناگهان ترمز می کند تا بایستد. معادله ی حرکت این ماشین روی محوری که بر خیابان منطبق است به صورت $x(t) = \frac{-t^2}{2} + 30t$ است. t زمان بر حسب ثانیه است که از نقطه ی شروع ترمز اندازه گیری شده است و $x(t)$ بر حسب متر است.

الف) ماشین پس از ترمز کردن چند ثانیه طول می کشد که بایستد؟ (ب) ماشین پس از طی چند متر می ایستد؟

ج) سرعت ماشین در لحظه ی ترمز کردن چه قدر بوده است؟ (د) پس از چند ثانیه سرعت ماشین به ۲ متر بر ثانیه می رسد؟

حل: لازم است معادله ی سرعت را به دست آوریم. معادله ی سرعت ماشین، پس از مشتق گیری از معادله ی مکان-زمان آن به دست می آید.

$$x(t) = \frac{-t^2}{2} + 30t \Rightarrow v(t) = x'(t) = \frac{-2t}{2} + 30 \Rightarrow v(t) = -t + 30$$

الف) زمانی که ماشین می ایستد، داریم: $v(t) = 0$

$$v(t) = 0 \Rightarrow 0 = -t + 30 \Rightarrow t = 30s \Rightarrow \text{ماشین } 30 \text{ ثانیه پس از ترمز می ایستد}$$

ب) در معادله ی مکان-زمان قرار می دهیم: $t = 30$

$$x(t) = \frac{-t^2}{2} + 30t \xrightarrow{t=30} x(30) = \frac{-(30)^2}{2} + 30(30) = \frac{-900}{2} + 900 = -450 + 900 = 450 \text{ m}$$

ج) در معادله ی سرعت-زمان قرار می دهیم: $t = 0$

$$t = 0 \Rightarrow v(t) = -0 + 30 \Rightarrow v(t) = 30 \text{ m/s}$$

د) در معادله ی سرعت-زمان قرار می دهیم: $v(t) = 2$

$$v(t) = -t + 30 \Rightarrow 2 = -t + 30 \Rightarrow t = 28$$

مسائل صفحه ی ۷۹:

۲- تابع $y = xe^x$ را در نظر بگیرید که روی \mathbb{R} تعریف شده است. این تابع در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی است؟

حل: الف) ابتدا مشتق تابع را حساب کرده، سپس آن را تعیین علامت می کنیم.

$$y = xe^x \Rightarrow y' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

e^x (علامت این تابع همواره مثبت است و هیچ گاه صفر نیز نمی شود).

| | | |
|------------|----|---|
| x | -1 | |
| e^x | + | + |
| $1+x$ | - | + |
| $(1+x)e^x$ | - | + |

با توجه به جدول تعیین علامت، تابع در بازه ی $(-\infty, -1]$ نزولی و در بازه ی $[-1, +\infty)$ صعودی است.

۳) توابع زیر در چه نقاطی تعریف شده اند و مشتق آن ها در این نقاط چیست؟

الف) $y = \ln(\sin x)$

می دانیم دامنه ی تابع $y = \ln(f(x))$ برابر است با $D_y = \{x | f(x) > 0\}$. بنابراین داریم:

$$\sin x > 0 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} 2k\pi < x < (2k+1)\pi$$

$$y = \ln(\sin x) \xrightarrow{y = \ln(u) \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}} y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

تذکر: اگر تابع به صورت داده $y = \ln(|\sin x|)$ می شد، آن گاه به خاطر وجود قدر مطلق، مشکل مثبت بودن جلوی \ln حل می شد و فقط عبارت $|\sin x|$ نباید صفر شود.

ب) $y = \ln(|\cos x|)$

$$|\cos x| > 0 \Rightarrow D_y = \mathbb{R} - \{x | \cos x = 0\} \xrightarrow{\text{حل معادله مثلثاتی}} D_y = \mathbb{R} - \left\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$y = \ln(|\cos x|) \xrightarrow{y=\ln(|u|) \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}} y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$$

ج) $y = \ln(x^2 - x)$

$$x^2 - x > 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

| | | | |
|------------|---|---|---|
| x | 0 | | 1 |
| x | - | + | + |
| $x - 1$ | - | - | + |
| $x(x - 1)$ | + | - | + |

$$\Rightarrow D_y = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$y = \ln(x^2 - x) \xrightarrow{y=\ln(u) \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}} y' = \frac{2x - 1}{x^2 - x}$$

د) $y = \ln(|\ln x|)$

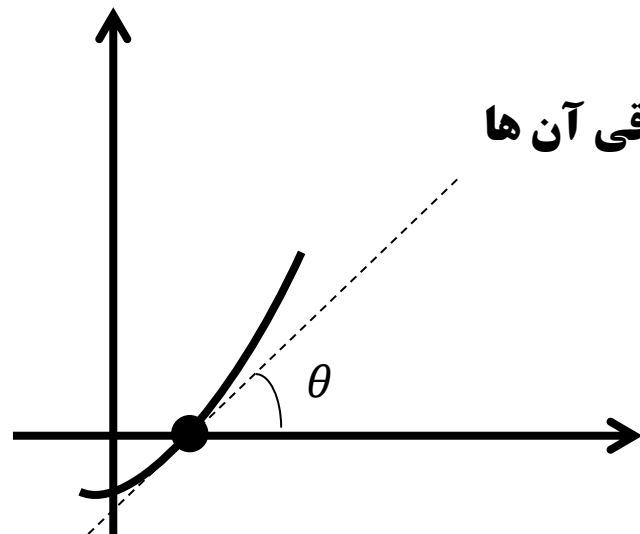
$$|\ln x| > 0 \Rightarrow D_y = \mathbb{R} - \{x | \ln x = 0\} \xrightarrow{\text{حل معادله}} D_y = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$y = \ln(|\ln x|) \xrightarrow{y=\ln(|u|) \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}} y' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$$

زاویه ی بین منحنی و محور x ها در محل تلاقی آن ها

هرگاه بخواهیم بدانیم که یک منحنی محور x ها را با چه زاویه ای قطع می کند، باید مطابق شکل، زاویه ی بین خط مماس بر منحنی در نقطه ی تقاطع با محور x ها و محور x ها را پیدا کنیم.

تذکر: منظور، زاویه ی تشکیل شده با جهت مثبت محور x ها می باشد.



می دانیم شیب یک خط، همان تانژانت زاویه ای است که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد ($m = \tan\theta$). پس با توجه به اینکه شیب خط مماس بر f در نقطه $(x_*, f(x_*))$ برابر $f'(x_*)$ است، گام های زیر را طی می کنیم:

گام اول: ابتدا محل تلاقی نمودار f با محور x ها به دست می آوریم. ($f(x) = 0$)

گام دوم: فرض کنیم در نقطه x_* نمودار محور x ها قطع کند، در این صورت نقطه x_* را در مشتق تابع قرار داده و زاویه θ که $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ را از رابطه y زیر به دست می آوریم:

$$f'(x_*) = \tan\theta \Rightarrow \theta = ?$$

مثال: منحنی نمودار تابع $y = \sin x$ با چه زاویه هایی محور x ها را قطع می کند؟

حل: گام اول: ابتدا محل برخورد نمودار تابع با محور x ها را به دست می آوریم:

$$y = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$y' = f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(k\pi) = \cos(k\pi) = \begin{cases} 1; \text{if } k \text{ زوج} \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} & \text{گام دوم:} \\ -1; \text{if } k \text{ فرد} \Rightarrow \tan\theta = -1 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

مثال: زاویه y برخورد نمودار تابع $y = xe^x$ با محور x ها چه قدر است؟

$$xe^x = 0 \xrightarrow{e^x > 0} x = 0$$

حل: گام اول: ابتدا محل برخورد نمودار تابع با محور x ها را به دست می آوریم:

$$y'(0) = (1 + 0)e^0 = 1 \Rightarrow \tan(\text{زاویه ی برخورد نمودار تابع با محور } x \text{ ها}) = 1 \Rightarrow \text{زاویه ی برخورد نمودار تابع با محور } x \text{ ها} = 45^\circ$$

تمرین: منحنی نمودار تابع $y = x^3 - x^2 - x$ با چه زاویه هایی محور x ها را قطع می کند؟

سوال: اگر تابع با ضابطه ی $y = \begin{cases} ax^2 - x + 1 & ; x \leq 1 \\ bx + \ln \sqrt{2x-1} & ; x > 1 \end{cases}$ در نقطه ی $x = 1$ مشتق پذیر باشد، a و b را به دست آورید.

حل: ابتدا پیوستگی تابع در نقطه ی $x = 1$ را بررسی می کنیم.

$$\left. \begin{aligned} f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 - x + 1 = a(1)^2 - (1) + 1 = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} bx + \ln \sqrt{2x-1} = b(1) + \ln 1 = b + 0 = b \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = b (*)$$

حال مشتق پذیری تابع را در نقطه ی $x = 1$ بررسی می کنیم.

$$y' = f'(x) = \begin{cases} 2ax - 1 & ; x \leq 1 \\ b + \frac{2}{\sqrt{2x-1}} & ; x > 1 \end{cases} \Rightarrow y' = f'(x) = \begin{cases} 2ax - 1 & ; x \leq 1 \\ b + \frac{1}{2x-1} & ; x > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_{-}(1) = 2a(1) - 1 = 2a - 1 \\ f'_{+}(1) = b + \frac{1}{2(1)-1} = b + 1 \end{cases} \Rightarrow 2a - 1 = b + 1 \Rightarrow 2a - b = 2 \xrightarrow{(*) a=b} 2a - a = 2$$

$$\Rightarrow a = 2, b = 2$$

تست: تابع f با ضابطه ی مقابل در چند نقطه ناپیوسته است و در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟ کنکور سراسری ریاضی - سال ۸۲

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x < 0 \\ x + 1 & ; 0 \leq x < 1 \\ 2x + 2 & ; 1 \leq x < 2 \\ x^2 + 2 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

(۱) یک نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق ناپذیر

(۲) دو نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق ناپذیر

(۳) یک نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر

(۴) دو نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر

حل: ابتدا پیوستگی تابع را بررسی می کنیم، آن هم در نقاط مرزی.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = f(0) = 1 \Rightarrow \text{تابع در } x = 0 \text{ پیوسته است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 2) = f(1) = 4 \Rightarrow \text{تابع در } x = 1 \text{ پیوسته نیست.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + 2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 2) = f(2) = 6 \Rightarrow \text{تابع در } x = 2 \text{ پیوسته است.}$$

بنابراین تابع در یک نقطه ناپیوسته است. حال مشتق تابع را به دست آورده و مشتق پذیری تابع را در نقاط مرزی بررسی می کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 & ; 0 \leq x < 1 \\ 2 & ; 1 \leq x < 2 \\ 2x & ; x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = f'_-(0) \neq f'_+(0) = 1 \Rightarrow \text{تابع در } x = 0 \text{ مشتق پذیر نیست.} \\ 1 = f'_-(1) \neq f'_+(1) = 2 \Rightarrow \text{تابع در } x = 1 \text{ مشتق پذیر نیست.} \\ 2 = f'_-(2) \neq f'_+(2) = 4 \Rightarrow \text{تابع در } x = 2 \text{ مشتق پذیر نیست.} \end{cases}$$

پس تابع در سه نقطه نیز مشتق ناپذیر است. بنابراین پاسخ صحیح گزینه ی ۳ می باشد.

نکته: ۱) اگر تابع $y = f(x)$ در $x = x_0$ پیوسته و مشتق چپ و راست در این نقطه موجود، متناهی و برابر باشند، آن گاه می‌گوییم تابع $y = f(x)$ در $x = x_0$ مشتق پذیر است.

۲) اگر تابع $y = f(x)$ در $x = x_0$ پیوسته نباشد یا اینکه جواب‌های مشتق چپ و راست نابرابر یا نامتناهی باشند، آن گاه تابع $y = f(x)$ در $x = x_0$ مشتق پذیر نیست.

۳) پیوستگی تابع شرط لازم برای مشتق پذیری تابع است نه شرط کافی. به عبارت دیگر اگر تابع $y = f(x)$ در $x = x_0$ پیوسته باشد، ممکن است در آن نقطه مشتق پذیر نباشد.

۴) مشتق پذیری یک تابع خاصیتی قوی‌تر از پیوستگی است. یعنی تابعی که در یک نقطه مشتق پذیر است، حتما در آن نقطه پیوسته است.

تست: تابع با ضابطه ی

$$y = f(x) = \begin{cases} \sin x & ; x > \frac{\pi}{4} \\ -\cos x & ; x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

در نقطه ی $x = \frac{\pi}{4}$ کدام وضع را دارد؟

- ۱) پیوسته است و مشتق پذیر نیست
 ۲) پیوسته نیست و مشتق پذیر نیست
 ۳) پیوسته است و مشتق پذیر است.
 ۴) مشتق پذیر است ولی پیوسته نیست.

حل: ابتدا پیوستگی را بررسی می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} -\cos x = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \sin x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

بنابراین تابع پیوسته نیست در نتیجه مشتق پذیر
 نمی‌باشد. پس گزینه ی ۲ پاسخ صحیح می‌باشد.

معادله ی خط مماس:

می دانیم $f'(x_0)$ نشان دهنده ی شیب (ضریب زاویه) خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه ی $(x_0, f(x_0))$ است. بنابراین معادله ی خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه ی $(x_0, f(x_0))$ عبارت است از:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

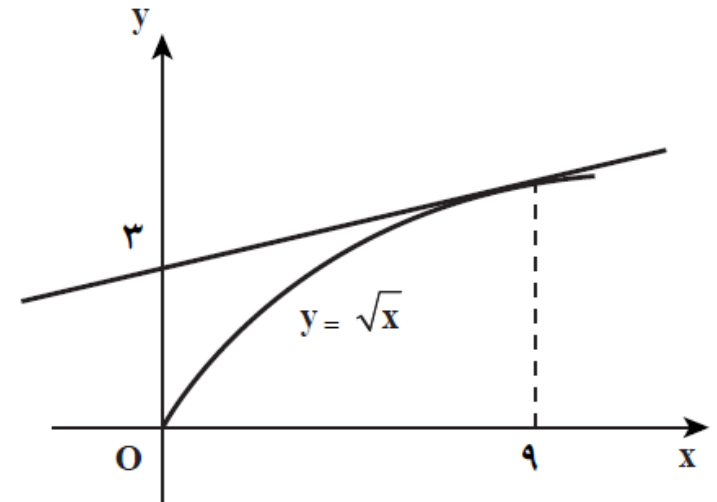
مثال: معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه ی $(9, 3)$ بنویسید.

حل: داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=9} f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6} \quad \text{شیب خط مماس}$$

پس معادله خط مماس عبارت است از:

$$y - (3) = \left(\frac{1}{6}\right)(x - 9) \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{6}x - \frac{9}{6}$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{6}x + \frac{9}{6} \quad \text{معادله ی خط مماس}$$



مثال: معادله ی خط مماس بر نمودار منحنی $y = f(x) = x^3 - 2x^2$ در نقطه ی $x_0 = 1$ را به دست آورید.

$$x_0 = 1 \Rightarrow f(x_0) = f(1) = 1^3 - 2(1^2) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow (1, -1)$$

حال شیب خط مماس در نقطه ی تماس را با قرار دادن مقدار $x = 1$ در تابع مشتق به دست می آوریم.

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 4x \Rightarrow f'(1) = 3(1^2) - 4(1) = 3 - 4 = -1$$

حال داریم:

$$y - (-1) = (-1)(x - 1) \Rightarrow y + 1 = -x + 1 \Rightarrow y = -x + 1 - 1 \Rightarrow y = -x$$

تست: معادله ی خط مماس بر منحنی $y = \ln(x + \sin x + 1)$ در $x = 0$ کدام است؟

$$y = 2x + 1 \quad (4)$$

$$y = 2x \quad (3)$$

$$y = x + 1 \quad (2)$$

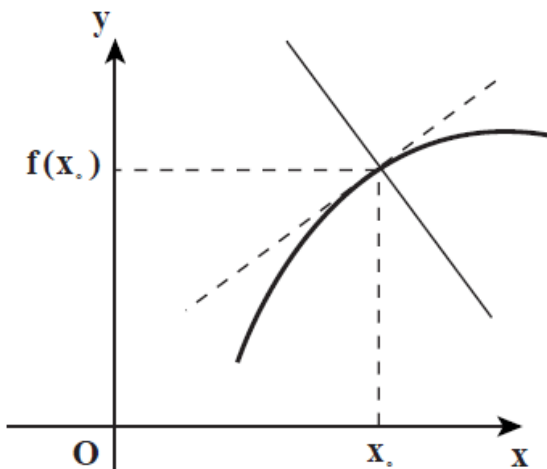
$$y = x \quad (1)$$

معادله ی خط قائم:

اگر $f'(x_0)$ ضریب زاویه ی خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه ی $(x_0, f(x_0))$ باشد، در این صورت ضریب زاویه ی خط عمود بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه ی $(x_0, f(x_0))$ برابر $-\frac{1}{f'(x_0)}$ است.

بنابراین معادله ی خط عمود بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه ی $(x_0, f(x_0))$ عبارت است از:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$



اگر خطی نمودار تابعی مانند f را به گونه ای قطع کند، که بر خط مماس بر نمودار f در آن نقطه عمود باشد، گوییم خط بر نمودار تابع در آن نقطه عمود است.

مثال: معادله ی خط عمود بر نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را در نقطه ی $(2, \frac{1}{2})$ بنویسید.

حل: در اینگونه مسائل ابتدا شیب خط مماس در نقطه خواسته شده را به دست می آوریم، سپس آن را قرینه و معکوس کرده تا شیب خط عمود به دست آید.

$$y = f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = f'(x) = -\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x=2} f'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} -\frac{1}{f'(2)} = 4$$

$$y - \frac{1}{2} = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 8 + \frac{1}{2} \Rightarrow y = 4x - \frac{15}{2}$$

معادله ی خط عمود

شیب خط عمود

مثال: معادله ی خط قائم (عمود) بر منحنی $y = \sqrt{2x + 5}$ را در نقطه ای به طول ۲ واقع بر این منحنی بنویسید.

حل:

$$x = 2 \Rightarrow y = f(x) = f(2) = \sqrt{2 \times 2 + 5} = \sqrt{9} = 3 \rightarrow A = (2, 3)$$

حال ابتدا شیب خط مماس و سپس شیب خط قائم را به دست می آوریم.

$$y' = f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} \Rightarrow f'(2) = \frac{2}{2\sqrt{2 \times 2 + 5}} = \frac{2}{2\sqrt{9}} = \frac{2}{2 \times 3} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} -\frac{1}{f'(2)} = -3$$

$$y - 3 = -3(x - 2) \Rightarrow y = -3x + 6 + 3 \Rightarrow y = -3x + 9 \quad \text{معادله ی خط عمود} \quad \text{شیب خط عمود}$$

تست: معادله ی خط قائم (عمود) بر نمودار تابع با ضابطه ی $y = 4x + e^{-2x}$ در نقطه ی $x = 0$ واقع بر آن کدام است؟

$$y - x = 1 \quad (4) \quad y + 2x = 1 \quad (3) \quad 2y + x = 2 \quad (2) \quad 2y - x = 2 \quad (1)$$

$$x = 0 \Rightarrow y = f(x) = f(0) = 4 \times 0 + e^{-2 \times 0} = 0 + e^0 = 0 + 1 = 1 \rightarrow A = (0, 1)$$

$$y' = f'(x) = 4 - 2e^{-2x} \Rightarrow f'(0) = 4 - 2e^{-2 \times 0} = 4 - 2e^0 = 4 - 2 \times 1 = 4 - 2 = 2$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} -\frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{2} \quad \text{شیب خط عمود}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در 2}} 2y = -x + 2 \Rightarrow 2y + x = 2$$

معادله ی خط عمود

بنابراین پاسخ صحیح گزینه ی شماره ی ۲ می باشد.

مثال: معادله ی خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x) = x + \frac{1}{x}$ را در نقطه ای به طول $x = 1$ بنویسید. معادله ی خط عمود بر نمودار این تابع را در نقطه ای به طول $x = -1$ بنویسید.

حل: ابتدا شیب خط مماس، یعنی مشتق تابع f در نقطه ی $x = 1$ را به دست می آوریم.

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \xrightarrow{\text{شیب خط مماس}} m = f'(1) = 1 - \frac{1}{(1)^2} = 1 - 1 = 0$$

معادله ی خط مماس بر تابع در نقطه ی $x = 1$:

$$y - (y_0) = m(x - (x_0)) \xrightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه ی تابع}}_{x=1 \rightarrow y=2} y - (2) = 0 \times (x - (1)) \Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$$

برای به دست آوردن معادله ی خط عمود بر نمودار در نقطه ی $x = -1$ نیز ابتدا شیب خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه را به دست آورده، سپس با قرینه و معکوس کردن آن شیب خط عمود بر نمودار را به دست می آوریم.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \xrightarrow{\text{شیب خط مماس}} m = f'(-1) = 1 - \frac{1}{(-1)^2} = 1 - 1 = 0 \xrightarrow{\text{شیب خط عمود}} m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{0} = \text{تعریف نشده}$$

معادله ی خط عمود: زمانی که شیب خطی تعریف نشده باشد، معادله ی آن به صورت $x = x_0$ می باشد. بنابراین داریم:

$$x = -1$$

مشتق ضمنی: Implicitly derived

تابع با ضابطه ی $y = x^3 + 4x^2$ را در نظر می گیریم. این معادله تابع f را به صورت صریح تعریف می کند اما در معادله ی $x^3 + 2x^2y - x^3 = 1$ نمی توانیم y را به صورت صریح بر حسب x بیابیم. در این صورت می گوییم تابع $y = f(x)$ به طور ضمنی بر حسب x تعریف شده که ممکن است یک تابع نباشد بلکه یک رابطه باشد.

برای به دست آوردن مشتق ضمنی، تمام عبارات و اعداد را به سمت چپ انتقال داده، سپس به صورت زیر مشتق می گیریم:

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow y' = f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\text{مشتق تابع را نسبت به } x \text{ می گیریم و } y \text{ را عددی ثابت می گیریم}}{\text{مشتق تابع را نسبت به } y \text{ می گیریم و } x \text{ را عددی ثابت می گیریم}}$$

مثال: مشتق (ضمنی) توابع زیر را به دست آورید.

الف) $x^2 + xy + y^2 = 3 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}$

روش دوم:

(مشتق y^2 طبق قانون مشتق تابع مرکب حساب می شود.)

$$x^2 + xy + y^2 = 3 \Rightarrow 2x + \underbrace{1 \times y + xy'}_{\text{فاکتورگیری از } y'} + 2yy' = 0 \Rightarrow 2x + y + y'(x + 2y) = 0$$

(مشتق xy طبق قانون حاصل ضرب دو تابع حساب می شود.)

جملات غیرشامل y' را به سمت دیگر تساوی می بریم $\Rightarrow y'(x + 2y) = -(2x + y) \Rightarrow y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}$

ب) $2x^2 + 3y^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 + 3y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{4x}{6y} = -\frac{2x}{3y}$

روش دوم:

$$2x^2 + 3y^2 = 1 \Rightarrow 4x + \underbrace{6yy'}_{\text{جملات غیرشامل } y' \text{ را به سمت دیگر تساوی می بریم}} = 0 \Rightarrow 6yy' = -4x \Rightarrow y' = \frac{-4x}{6y} = -\frac{2x}{3y}$$

(مشتق $3y^2$ طبق قانون مشتق تابع مرکب حساب می شود.)

(۱) در تمرین های زیر با استفاده از مشتق گیری ضمنی مشتق y نسبت به x را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } xsiny + ycosx = 1 \Rightarrow f(x, y) = xsiny + ycosx - 1 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{siny - ysinx}{xcosy + cosx}$$

روش دوم: از طرفین تساوی مشتق می گیریم:

$$xsiny + ycosx = 1 \Rightarrow 1 \times siny + x \times y'cosy + y'cosx - ysinx = 0$$

$$\Rightarrow y'(xcosy + cosx) = ysinx - siny \Rightarrow y' = \frac{ysinx - siny}{xcosy + cosx}$$

$$\text{ب) } y = \cos(x - y) \Rightarrow f(x, y) = y - \cos(x - y) = 0 \Rightarrow y' = -\frac{\sin(x - y)}{1 + \sin(x - y)}$$

روش دوم: از طرفین تساوی مشتق می گیریم:

$$y = \cos(x - y) \xrightarrow{(\cos f(x, y))' = -f'(x, y) \sin f(x, y)} \Rightarrow y' = (x - y)'(-\sin(x - y))$$

$$\xrightarrow{(x - y)' = 1 - y'} y' = (1 - y')(-\sin(x - y)) \Rightarrow y' = (y' - 1)\sin(x - y) \Rightarrow y' = y'\sin(x - y) - \sin(x - y)$$

$$\sin(x - y) = y'\sin(x - y) + y' \Rightarrow \sin(x - y) = y' \times [\sin(x - y) + 1] \Rightarrow y' = \frac{\sin(x - y)}{\sin(x - y) + 1}$$

$$\text{ج) } x^2 y^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow f(x, y) = x^2 y^2 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2xy^2 - 2x}{2yx^2 - 2y} = -\frac{2x(y^2 - 1)}{2y(x^2 - 1)} = -\frac{x(y^2 - 1)}{y(x^2 - 1)}$$

روش دوم: از طرفین تساوی مشتق می گیریم:

$$x^2 y^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 2xy^2 + 2y'yx^2 = 2x + 2y'y \Rightarrow 2xy^2 - 2x = 2y'y - 2y'yx^2 \\ \Rightarrow 2xy^2 - 2x = y'(2y - 2yx^2)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2xy^2 - 2x}{2y - 2yx^2} \Rightarrow y' = \frac{2x(y^2 - 1)}{2y(1 - x^2)} \Rightarrow y' = \frac{x(y^2 - 1)}{y(1 - x^2)}$$

(۲) معادله ی خط مماس بر منحنی به معادله ی $x^4 + y^4 + x^2 y^2 - 3 = 0$ در نقطه ی $A(1,1)$ را به دست آورید.

حل: باید شیب خط مماس بر منحنی در نقطه ی $A(1,1)$ را به دست آوریم. برای این کار نیاز به مشتق ضمنی منحنی داریم.

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + x^2 y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y' = f'(x, y) = -\frac{4x^3 + 2xy^2}{4y^3 + 2yx^2}$$

نقطه ی $A(1,1)$ روی نمودار منحنی قرار دارد. زیرا مختصات آن در معادله ی منحنی صدق می کند:

$$x^4 + y^4 + x^2 y^2 - 3 = 0 \xrightarrow{(x,y)=(1,1)} (1)^4 + (1)^4 + (1)^2(1)^2 - 3 = 1 + 1 + 1 - 3 = 3 - 3 = 0$$

بنابراین شیب خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه، برابر است با مقدار مشتق تابع به ازای نقطه ی $A(1,1)$. برای این منظور در فرمول مشتق قرار می دهیم: $x = 1$ و $y = 1$

$$f'(x, y) = -\frac{4x^3 + 2xy^2}{4y^3 + 2yx^2} \Rightarrow f'(1,1) = -\frac{4(1)^3 + 2(1)(1)^2}{4(1)^3 + 2(1)(1)^2} = -\frac{4 + 2}{4 + 2} = -\frac{6}{6} = -1$$

بنابراین معادله ی خط مماس به صورت زیر خواهد بود:

$$y - (y_0) = m(x - (x_0)) \Rightarrow y - 1 = (-1)(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

۳) معادله ی خط مماس بر منحنی به معادله ی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ در نقطه ی $A(4,4)$ را به دست آورید.

حل: باید شیب خط مماس بر منحنی در نقطه ی $A(4,4)$ را به دست آوریم. برای این کار نیاز به مشتق ضمنی منحنی داریم.

$$f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 4 = 0 \Rightarrow y' = f'(x, y) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{y}}} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

نقطه ی $A(4,4)$ روی نمودار منحنی قرار دارد. زیرا مختصات آن در معادله ی منحنی صدق می کند:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \xrightarrow{(x,y)=(4,4)} \sqrt{4} + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4$$

بنابراین شیب خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه، برابر است با مقدار مشتق تابع به ازای نقطه ی $A(4,4)$. برای این منظور در فرمول مشتق قرار می دهیم: $x = 4$ و $y = 4$

$$f'(x, y) = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4,4) = -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = -\frac{2}{2} = -1$$

بنابراین معادله ی خط مماس به صورت زیر خواهد بود:

$$y - (y_0) = m(x - (x_0)) \Rightarrow y - 4 = (-1)(x - 4) \Rightarrow y = -x + 8$$

۴) در چه نقطه ای از منحنی به معادله ی $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ خط مماس بر منحنی موازی محور x ها است؟

حل: می دانیم اگر در نقطه ای خط مماس بر نمودار تابع افقی باشد، مشتق تابع در آن نقطه برابر صفر است. پس ابتدا مشتق را به صورت ضمنی محاسبه کرده و سپس مقدار آن را برابر صفر قرار می دهیم.

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y' = f'(x, y) = -\frac{2x + y}{x + 2y} \xrightarrow{y'=0} -\frac{2x + y}{x + 2y} = 0 \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$$

بنابراین در تمام نقاطی از نمودار تابع که مختصات آن ها به صورت $(x, -2x)$ باشد، خط مماس بر منحنی به صورت افقی یعنی موازی محور x ها است.

(۵) اگر $۸y^۲ - ۲xy^۳ = -۱۶$ آهنگ تغییر لحظه ای y نسبت به x در نقطه ی $A(۳,۲)$ را به دست آورید.

حل: آهنگ تغییر لحظه ای y نسبت به x در نقطه ی $A(۳,۲)$ ، در واقع همان مقدار مشتق تابع در نقطه ی $A(۳,۲)$ است. حال چون این تابع به صورت ضمنی داده شده است، مشتق ضمنی آن را محاسبه می کنیم.

$$f(x, y) = ۸y^۲ - ۲xy^۳ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow y' = f'(x, y) = -\frac{-۲y^۳}{۱۶y - ۶xy^۲} \xrightarrow{(x,y)=(۳,۲)} f'(۲,۳) = -\frac{-۲(۲)^۳}{۱۶(۲) - ۶(۳)(۲)^۲}$$

$$= -\frac{-۲ \times ۸}{۳۲ - ۱۸ \times ۴} = \frac{۱۶}{۳۲ - ۷۲} = \frac{۱۶}{-۴۰} = -\frac{۲}{۵}$$

سوال: معادله ی خط مماس بر منحنی تابع $x^۲ + xy - y^۲ + ۱ = ۰$ در نقطه ی $(۱, -۱)$ را به دست آورید.

حل:

$$y' = f'(x, y) = -\frac{۲x + y}{x - ۲y} \Rightarrow f'(۱, -۱) = -\frac{۲(۱) - ۱}{۱ - ۲(-۱)} = -\frac{۱}{۳} \quad \text{شیب خط مماس}$$

حال داریم:

$$y - (-۱) = \left(-\frac{۱}{۳}\right)(x - ۱) \Rightarrow y + ۱ = -\frac{۱}{۳}x + \frac{۱}{۳} \Rightarrow y = -\frac{۱}{۳}x + \frac{۱}{۳} - ۱ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۳}x - \frac{۲}{۳}$$

طرفین تساوی را در ۳ ضرب می کنیم

$$\xrightarrow{\text{طرفین تساوی را در ۳ ضرب می کنیم}} ۳y = -x - ۲ \Rightarrow ۳y + x + ۲ = ۰$$

معادله ی خط مماس

نکته: در حالتی که $f'(x_0) = 0$ در این صورت خط مماس بر نمودار در نقطه x_0 افقی (موازی محور x ها) است و معادله $y = f(x_0)$ است. در این حالت معادله $y = f(x_0)$ خط عمود نیز $x = x_0$ می باشد.

مثال: در چه نقاطی روی نمودار $x^2 - xy + y^2 = 1$ مماس بر منحنی افقی است؟ در چه نقاطی مماس قائم است؟

حل: در نقاطی مماس بر منحنی افقی است که شیب صفر باشد.

$$y' = f'(x, y) = -\frac{2x - y}{2y - x}$$

مقدار یک کسر وقتی برابر صفر است که صورت آن صفر باشد

$$f'(x, y) = 0 \xrightarrow{\text{مقدار یک کسر وقتی برابر صفر است که صورت آن صفر باشد}} 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x$$

حال برای پیدا کردن نقاط، در معادله $y = 2x$ منحنی به جای y قرار می دهیم $2x$.

$$x^2 - xy + y^2 = 1 \xrightarrow{y=2x} x^2 - x(2x) + (2x)^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 1 \Rightarrow 3x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{y=2x} y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \mathbf{A} = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

وقتی مماس قائم است شیب آن تعریف نشده است. زمانی شیب تعریف نشده است که مخرج کسر صفر شود.

$$y' = f'(x, y) = -\frac{2x - y}{2y - x} \xrightarrow{\text{مخرج}=0} 2y - x = 0 \Rightarrow 2y = x$$

حال برای پیدا کردن نقاط، در معادله $y = \frac{x}{2}$ منحنی به جای x قرار می دهیم $2y$.

$$x^2 - xy + y^2 = 1 \xrightarrow{x=2y} (2y)^2 - (2y)y + y^2 = 1 \Rightarrow 4y^2 - 2y^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 3y^2 = 1$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{x=2y} x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \mathbf{B} = \left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

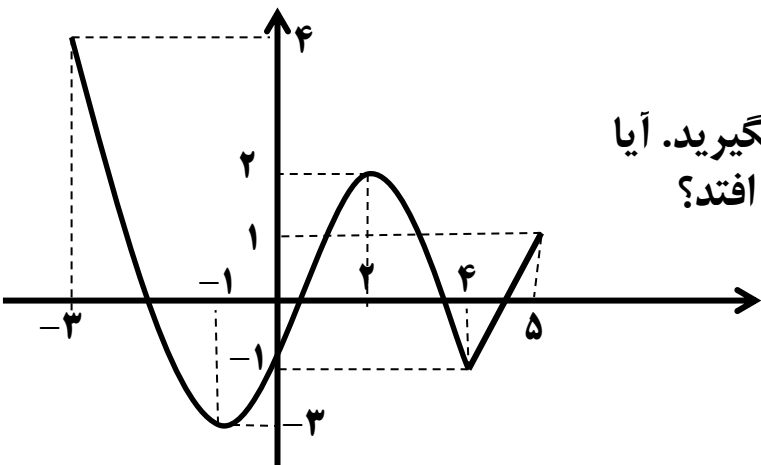
به نام خداوند بخشنده و مهربان

ریاضی عمومی پیش دانشگاهی تجربی / فصل چهارم:

کاربرد مشتق

The use of derivative

مفهوم اکسترمم های مطلق و نسبی تابع:



نمودار تابع f در بازه $[-3, 5]$ را که به صورت زیر می باشد، در نظر بگیرید. آیا می توانید بگویید، بیشترین و کمترین مقدار تابع در چه نقاطی اتفاق می افتد؟

همان طور که از نمودار پیداست، بیشترین مقدار تابع در $x = -3$ اتفاق افتاده که برابر 4 است. هم چنین کم ترین مقدار تابع در $x = -1$ اتفاق افتاده که برابر (-3) است.

به بیشترین مقدار تابع در دامنه اش، **ماکزیمم مطلق** و به کم ترین مقدار تابع در دامنه اش، **می نیمم مطلق** تابع می گوییم. در این جا نقطه $(-3, 4)$ نقطه ی ماکزیمم مطلق تابع بوده و مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر 4 است.

نیز نقطه $(-1, -3)$ نقطه ی می نیمم مطلق تابع بوده و مقدار می نیمم مطلق تابع برابر -3 است.

تعریف: نقطه ی $a \in D_f$ را نقطه ی ماکزیمم مطلق تابع f می نامیم هرگاه برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم:

$$f(x) \leq f(a) \text{ یا } f(a) \geq f(x)$$

در این صورت $f(a)$ را ماکزیمم مطلق f می نامیم.

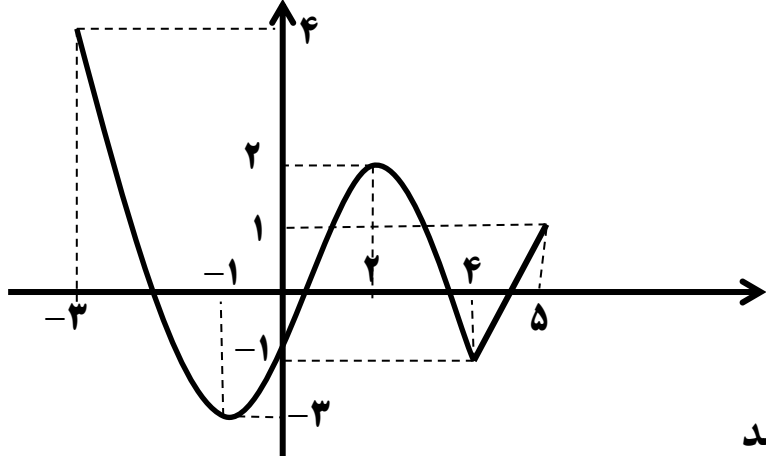
به طور مشابه، نقطه ی $a \in D_f$ را نقطه ی می نیمم مطلق تابع f می نامیم هرگاه برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم:

$$f(x) \geq f(a) \text{ یا } f(a) \leq f(x)$$

در این صورت $f(a)$ را می نیمم مطلق f می نامیم.

در حالت کلی نقطه ی $x = a$ را یک نقطه ی اکسترمم مطلق f می نامیم هرگاه نقطه ی ماکزیمم مطلق یا نقطه ی می نیمم مطلق f باشد.

مجدداً به نمودار f برمی گردیم. همان طور که در شکل می بینید، نمودار تابع در اطراف $x = 2$ ، به شکل قله است و اگر یک بازه حول $x = 2$ در نظر بگیریم، در این بازه بیشترین مقدار تابع در $x = 2$ اتفاق می افتد.



به چنین نقطه ای **ماکزیمم نسبی** تابع می گوئیم. یعنی ماکزیمم فقط در اطراف آن نقطه اتفاق می افتد و نه لزوماً در کل دامنه ی تابع.

هم چنین نمودار تابع در اطراف $x = -1$ و $x = 4$ به شکل دره می باشد و اگر یک بازه حول این نقاط را در نظر بگیریم، کمترین مقدار تابع در آن بازه ها، در نقاط $x = -1$ و $x = 4$ اتفاق می افتد. به چنین نقاطی **مینیم نسبی** تابع می گوئیم، که در آن ها کافی است می نیمم در یک بازه اطراف نقطه رخ دهد، نه لزوماً در کل دامنه ی تابع.

تعریف: فرض کنید بازه ی (a, b) زیر مجموعه ای از دامنه ی تابع f باشد. در این صورت:

الف) $c \in (a, b)$ را نقطه ی ماکزیمم نسبی تابع f گوئیم هرگاه برای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم: $f(x) \leq f(c)$. در این صورت $f(c)$ را ماکزیمم نسبی تابع f می نامند.

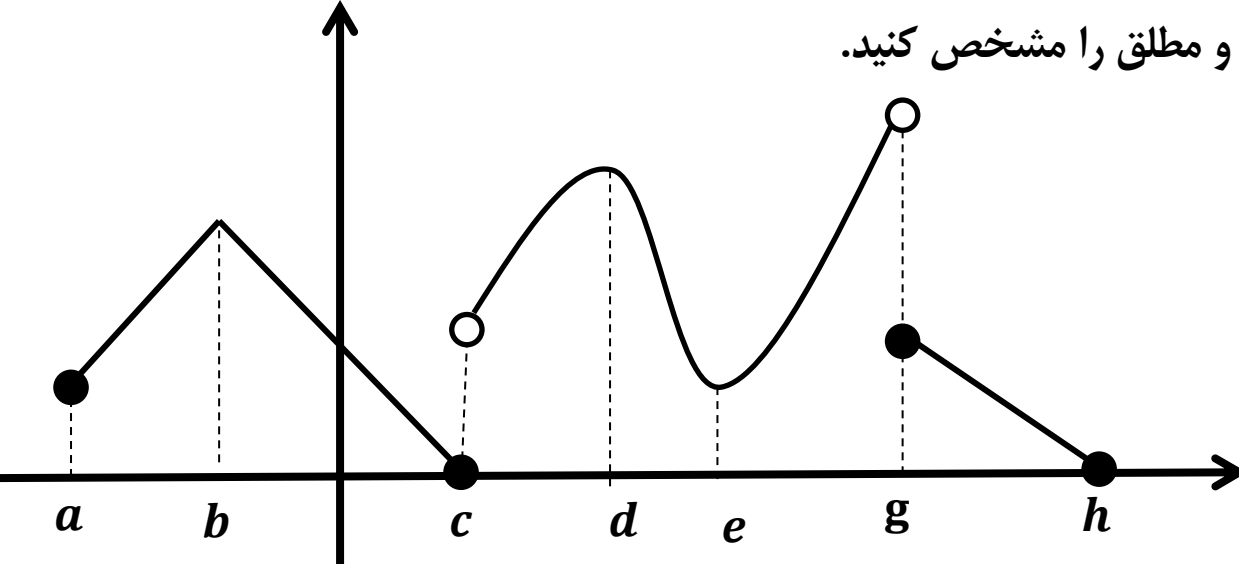
ب) $c \in (a, b)$ را نقطه ی مینیمم نسبی تابع f گوئیم هرگاه برای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم: $f(x) \geq f(c)$. در این صورت $f(c)$ را مینیمم نسبی تابع f می نامند.

در این جا می توانیم دو نتیجه ی ظریف بگیریم:

۱) اگر دامنه ی تابع f بازه ی $[a, b]$ باشد، در این صورت نقاط ابتدایی و انتهایی بازه یعنی a و b ، نمی توانند ماکزیمم یا مینیمم نسبی باشند. زیرا در اطراف آن ها نمی توانیم یک بازه داشته باشیم که f در آن تعریف شده باشد. اما با توجه به تعریف، نقاط ابتدا و انتهای بازه می توانند ماکزیمم یا مینیمم مطلق باشند.

۲) نقاط ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق در صورتی که نقاط ابتدایی یا انتهایی بازه نباشند، نقاط ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی نیز می باشند

مثال: در نمودار زیر اکسترمم های نسبی و مطلق را مشخص کنید.



حل: می دانیم نقاط ماکزیمم نسبی نقاطی هستند که در نمودار تابع، حول یک بازه در اطراف خود، بالاترین نقطه باشند. پس نقاط به طول b و d ماکزیمم نسبی هستند. هم نقاط c و e می نیمم نسبی هستند.

با توجه به نمودار، اگرچه تابع در c ناپیوسته است اما نقطه ی c هم از سمت چپ و هم از سمت راست خود پایین ترین نقطه می باشد.

در نقطه ی g نیز اگرچه تابع ناپیوسته است اما نمودار تابع در سمت چپ نقطه ی g بالاتر و در سمت راست g ، پایین تر از نقطه به طول g می باشد. پس این نقطه نه ماکزیمم و نه می نیمم نسبی است.

توجه کنید که نقاط a و h یعنی نقاط ابتدا و انتهای نمودار، اکسترمم نسبی نمی باشند. زیرا در این نقاط نمی توانیم هیچ بازه ای بیابیم که تابع در آن بازه تعریف شده باشد. (در سمت چپ a و سمت راست h نمودار وجود ندارد و تابع تعریف نشده است.)

می نیمم مطلق این تابع، نقاط به طول c و h می باشند. زیرا این نقاط پایین ترین نقاط نمودار هستند. اما این نمودار ماکزیمم مطلق ندارد.

یافتن ماکزیمم و می نیمم مطلق یک تابع با استفاده از مشتق:

حال می خواهیم بدانیم ویژگی اکسترمم های نسبی و مطلق تابع از نظر مشتق، چیست؟ مجدداً به نمودار تابع f که در ابتدای فصل آورده شد برمی گردیم.

گفتیم تابع در نقاط $x = -1$ و $x = 2$ و $x = 4$ دارای اکسترمم نسبی است. اگر کمی دقت کنید خط مماس بر نمودار تابع در نقاط $x = -1$ و $x = 2$ به صورت افقی است. یعنی شیب آن صفر است.

از طرفی قبلاً گفتیم که شیب خط مماس در یک نقطه از منحنی تابع، برابر است با مقدار مشتق به ازای طول نقطه ی مماس. بنابراین نتیجه می گیریم $f'(-1) = f'(2) = 0$. اما در $x = 4$ تابع مشتق پذیر نمی باشد، زیرا در این نقطه نمی توانیم یک خط مماس بر منحنی رسم کنیم و مشتق چپ و راست در این نقطه با هم برابر نیستند.

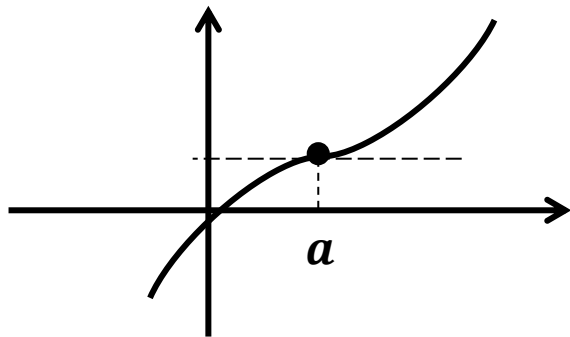
قضیه ی ۱: تابع f با دامنه ی $[a, b]$ را در نظر بگیرید. فرض کنیم f در $c \in (a, b)$ مشتق پذیر و دارای اکسترمم نسبی باشد. در این صورت $f'(c) = 0$.

نتیجه: نقاط اکسترمم نسبی یا مطلق یک تابع نقطاتی از دامنه ی تابع هستند که در آن نقاط، مشتق صفر است یا مشتق وجود ندارد.

تعریف: تابع f با دامنه ی $[a, b]$ را در نظر بگیرید. نقطاتی از بازه ی (a, b) که در آن نقاط، مشتق تابع صفر است یا مشتق وجود ندارد را، **نقاط بحرانی** تابع f می نامیم.

تذکر: طبق تعریف کتاب درسی نقاط ابتدایی و انتهایی بازه، جزء نقاط بحرانی تابع محسوب نمی شوند.

نکته: هر نقطه ی اکسترمم نسبی، یک نقطه ی بحرانی است. اما هر نقطه ی بحرانی، ممکن است نقطه ی اکسترمم نسبی نباشد.



به عنوان مثال به شکل زیر دقت کنید. در این نمودار در نقطه ی a به دلیل این که خط مماس افقی است، مقدار مشتق تابع صفر است. یعنی a نقطه ای بحرانی است. اما a نقطه ی ماکزیمم نسبی یا می نیمم نسبی نمی باشد.

نکته: ریشه ی مخرج مشتق، نقطه ی بحرانی است به شرط آن که این نقطه در دامنه ی تابع قرار داشته باشد.

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ را به دست آورید.

حل: دامنه ی تابع بازه ی $(0, +\infty)$ می باشد. ابتدا مشتق تابع را به دست می آوریم.

$$f'(x) = 1 - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

برای به دست آوردن نقاطی که مشتق در آن ها صفر است، مشتق را برابر صفر قرار می دهیم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = 0 \xrightarrow{\text{یک کسر زمانی صفر است که صورتش صفر باشد.}} \sqrt{x} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 1^2 \Rightarrow x = 1$$

برای به دست آوردن نقاطی که مشتق موجود نیست، مخرج مشتق را برابر صفر قرار می دهیم:

$$\sqrt{x} = 0 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 0^2 \Rightarrow x = 0 \in D_f$$

قضیه ی ۲: اگر تابع f بر بازه ی بسته ی $[a, b]$ پیوسته باشد، آن گاه در این بازه دارای ماکزیمم مطلق و می نیمم مطلق است.

روش تعیین اکسترمم های مطلق یک تابع:

برای تعیین اکسترمم های مطلق یک تابع در بازه ای مانند $[a, b]$ ، ابتدا نقاط بحرانی و ریشه های مشتق را به دست آورده، سپس $f(a)$ و $f(b)$ و (نقاط بحرانی) f را حساب کرده، با هم مقایسه می کنیم. کوچکترین جواب می نیمم مطلق و بزرگترین جواب ماکزیمم مطلق است.

مثال: نقاط بحرانی و ماکزیمم و می نیمم مطلق تابع $y = 2x^3 - 6x - 1$ را در بازه ی $[-2, 3]$ به دست آورید.

حل: چون تابع داده شده، تابع چند جمله ای می باشد، بنابراین در بازه ی $[-2, 3]$ پیوسته است. بنابراین در این بازه دارای ماکزیمم و می نیمم مطلق است. برای یافتن ماکزیمم مطلق و می نیمم مطلق، ابتدا نقاط بحرانی را می یابیم:

$$y = 2x^3 - 6x - 1 \Rightarrow y' = 6x^2 - 6 \stackrel{y'=0}{=} 6x^2 - 6 = 0 \Rightarrow 6x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 1 \stackrel{\text{طول نقاط بحرانی}}{\Longrightarrow} x = \pm 1$$

حال مقادیر تابع به ازای ابتدا و انتهای بازه و نیز به ازای طول نقاط بحرانی را می یابیم. کم ترین این مقادیر می نیمم مطلق و بیش ترین آن ها ماکزیمم مطلق تابع است.

$$f(-2) = 2(-2)^3 - 6(-2) - 1 = -16 + 12 - 1 = -5 \quad \leftarrow \text{می نیمم مطلق}$$

$$f(3) = 2(3)^3 - 6(3) - 1 = 54 - 18 - 1 = 35 \quad \leftarrow \text{ماکزیمم مطلق}$$

$$f(1) = 2(1)^3 - 6(1) - 1 = 2 - 6 - 1 = -5 \quad \leftarrow \text{می نیمم مطلق}$$

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) - 1 = -2 + 6 - 1 = 3$$

مثال: تابع $f(x) = x^{\frac{8}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$ با دامنه ی $[-۸, ۲۷]$ را در نظر بگیرید. ماکزیمم مطلق و می نیمم مطلق آن را به دست آورید.

حل: ابتدا از تابع مشتق می گیریم و سپس نقاط بحرانی تابع را به دست می آوریم:

$$f(x) = x^{\frac{8}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{8}{3}\sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{8x\sqrt[3]{x^2}}{3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(\sqrt[3]{x})(8x\sqrt[3]{x^2}) - 2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{8x^2 - 2}{3\sqrt[3]{x}}$$

ریشه ی صورت و مخرج نقاط بحرانی می باشند.

ریشه ی صورت: $8x^2 - 2 = 0 \Rightarrow 8x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^8} - \sqrt[3]{x^2}$$

ریشه ی مخرج: $3\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow (\sqrt[3]{x})^3 = 0^3 \Rightarrow x = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(-۸) = \sqrt[3]{(-۸)^8} - \sqrt[3]{(-۸)^2} = \sqrt[3]{((-۲)^3)^8} - \sqrt[3]{((-۲)^3)^2} = (-۲)^8 - (-۲)^2 = ۲۵۶ - ۴ = ۲۵۲ \\ f(۲۷) = \sqrt[3]{(۲۷)^8} - \sqrt[3]{(۲۷)^2} = \sqrt[3]{(۳^3)^8} - \sqrt[3]{(۳^3)^2} = (۳)^8 - (۳)^2 = ۵۶۵۱ - ۹ = ۶۵۵۲ \quad \leftarrow \text{ماکزیمم مطلق} \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^8} - \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \quad \leftarrow \text{می نیمم مطلق} \\ f(0) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^8} - \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \quad \leftarrow \text{می نیمم مطلق} \end{array} \right.$$

روش تعیین اکسترم های نسبی یک تابع:

آزمون مشتق اول برای تعیین اکسترم نسبی:

برای یافتن اکسترم های نسبی یک تابع به صورت زیر عمل می کنیم:

گام اول: نقاط بحرانی تابع را با حل معادله $f'(x) = 0$ و یا پیدا کردن نقاطی که در آن ها $f'(x)$ موجود نیست، به دست می آوریم.

گام دوم: f' را در تعیین علامت می کنیم. اگر در اطراف نقطه ی بحرانی به طول a ، f' از منفی به مثبت تغییر علامت دهد، آن گاه a می نیمم نسبی و اگر از مثبت به منفی تغییر علامت دهد، آن گاه a ماکزیمم نسبی است. در غیر این صورت، یعنی اگر f' در اطراف a تغییر علامت ندهد، آن گاه a اکسترم نسبی نخواهد بود.

جدول تغییرات:

برای یافتن اکسترم های نسبی و بازه هایی که در آن ها تابع صعودی یا نزولی است، هم چنین برای نشان دادن جهت تغییرات نمودار تابع، از این جدول استفاده می کنیم.

ردیف اول این جدول، مربوط به x ، ردیف دوم مربوط به علامت y' در محدوده های x یا همان تعیین علامت y' و ردیف سوم مربوط به تغییرات y است.

مثال: ماکزیمم و می نیمم نسبی تابع $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 6x + 10$ را به دست آورید. آیا این تابع ماکزیمم مطلق یا می نیمم مطلق دارد؟ چرا؟

حل: ابتدا y' را یافته و برای تعیین علامت و یافتن اکسترم های نسبی، ریشه های آن را به دست می آوریم:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 6x + 10 \Rightarrow y' = x^2 - 5x + 6$$



$$\begin{aligned} y' = 0 \\ \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$




هم چنین مقادیر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ را نیز به دست می آوریم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x^3 = -\infty$$

حال جدول تغییرات را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

| | | | | |
|------|-----------|---|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 2 | 3 | $+\infty$ |
| y' | $+$ |  |  | $+$ |
| y | $-\infty$ | $\frac{44}{3}$ | $\frac{29}{2}$ | $+\infty$ |

با توجه به جدول تعیین علامت داریم:

(الف) با توجه به آزمون مشتق اول، تابع در $x = 2$ دارای ماکزیمم نسبی و در $x = 3$ دارای می نیمم نسبی است.

(ب) تابع در بازه های $(-\infty, 2)$ و $(3, +\infty)$ صعودی (چون $y' > 0$) و در بازه ی $(2, 3)$ نزولی (چون $y' < 0$) است.

(ج) چون $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ بنابراین تابع دارای ماکزیمم مطلق و می نیمم مطلق نیست.

مثال: اکستریم های نسبی و مطلق تابع $f(x) = (x^2 - 1)^3$ را به دست آورید.

حل:

$$f(x) = (x^2 - 1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(2x)(x^2 - 1)^2 \xrightarrow{f'(x)=0} \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ (x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1)^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1)^3 = +\infty$$

جدول تغییرات:

| | | | | | |
|---------------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $2x$ | $-$ | | \bullet | $+$ | |
| $(x^2 - 1)^2$ | $+$ | \bullet | | \bullet | $+$ |
| $f'(x)$ | $-$ | \bullet | \bullet | \bullet | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | \searrow | 0 | \searrow | 1 |
| | | \nearrow | 0 | \nearrow | $+\infty$ |

با توجه به جدول تعیین علامت داریم:

الف) با توجه به آزمون مشتق اول، تابع در $x = 0$ دارای می نیمم نسبی است.

ب) تابع در بازه $(-\infty, 0)$ نزولی (چون $y' < 0$) و در بازه $(0, +\infty)$ صعودی (چون $y' > 0$) است.

ج) چون $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و با توجه به جدول تغییرات تابع در $(0, 1)$ دارای

می نیمم مطلق است

مشتق مراتب بالاتر:

اگر تابع $y = f(x)$ مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه ی اول آن را با علامت $y' = f'(x)$ نشان می دهیم. اگر $y' = f'(x)$ نیز مشتق پذیر باشد، در این صورت مشتق مرتبه ی دوم f را با $y'' = f''(x)$ نمایش می دهیم. حال اگر از f'' نیز به شرط مشتق پذیر بودن دوباره مشتق بگیریم، مشتق مرتبه ی سوم حاصل خواهد شد که آن را با f''' یا $f^{(3)}$ نمایش می دهیم.

اگر این روند را برای مراحل بعدی تکرار کنیم، مشتق مرتبه ی چهارم و پنجم و ... و مرتبه ی n حاصل خواهد شد که به ترتیب با نمادهای $f^{(4)}$ و $f^{(5)}$ و ... و $f^{(n)}$ یا $y^{(4)}$ و $y^{(5)}$ و ... و $y^{(n)}$ نمایش داده می شوند و داریم:

$$f^{(n)}(x) = (f^{n-1}(x))'$$

مثال: مشتق مرتبه ی سوم تابع $y = x^4 - 5x^3 + 7x$ را به دست آورید.

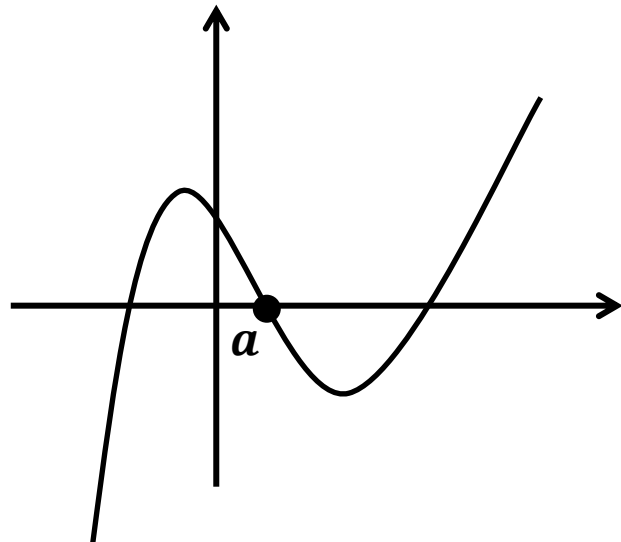
$$y' = 4x^3 - 15x^2 + 7 \Rightarrow y'' = 12x^2 - 30x \Rightarrow y''' = 24x - 30$$

حل:

تقعر منحنی:

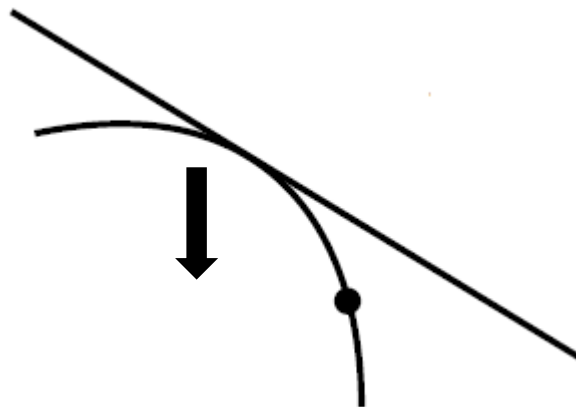
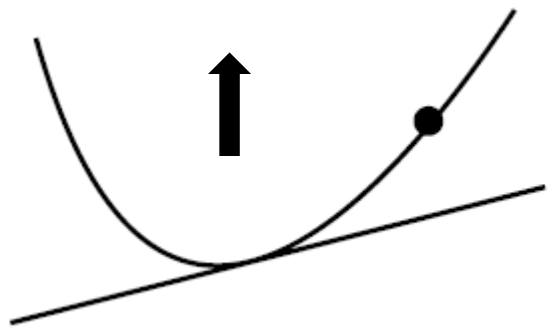
با دقت در نمودار تابع f در می یابیم که برای $x < a$ ، گودی یا دهانه ی نمودار به سمت پایین و برای $x > a$ دهانه ی نمودار به سمت بالا می باشد. اصطلاحاً می گوییم تقعر (گودی) منحنی در فاصله ی $(-\infty, a)$ ، رو به پایین و در فاصله ی $(a, +\infty)$ ، رو به بالا است.

حال اگر در نقاطی از نمودار تابع که تقعر نمودار رو به پایین است، مماسی بر منحنی رسم کنیم، وضعیت خط مماس نسبت به منحنی چگونه خواهد بود؟ در نقاطی که تقعر به سمت بالاست چه طور؟



نکته: اگر تقعر نمودار f در بازه ای مانند (a, b) رو به بالا باشد، آن گاه خطوط مماس بر منحنی در هر نقطه از این بازه زیر منحنی است. و برعکس.

هم چنین اگر تقعر نمودار f در بازه ای مانند (a, b) رو به پایین باشد، آن گاه خطوط مماس بر منحنی در هر نقطه از این بازه بالای منحنی است. و برعکس.



کاربرد مشتق در یافتن جهت تقعر منحنی:

همان طور که صعودی یا نزولی بودن تابع را از روی علامت مشتق اول مشخص می کنیم، جهت تقعر منحنی را نیز می توانیم با توجه به علامت مشتق دوم (y'') تعیین کنیم.

به این صورت که اگر تابع f که روی بازه ای حول a مشتق پذیر است، $f''(a) > 0$ ، در این صورت تقعر منحنی در این نقطه به سمت بالا و اگر $f''(a) < 0$ ، در این صورت تقعر منحنی در این نقطه به سمت پایین است.

بنابراین برای این که بینیم تقعر منحنی یک تابع مشتق پذیر در چه فاصله هایی به سمت بالا و در چه فاصله هایی به سمت پایین است، $f''(x)$ را تعیین علامت می کنیم.

مثال: جهت تقعر نمودار تابع $y = x^3$ را تعیین کنید.

حل: مشتق دوم را به دست آورده، سپس آن را تعیین علامت می کنیم.

$$y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2 \Rightarrow y'' = 6x \xrightarrow{y''=0} 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

جدول تعیین علامت:

| | | | |
|-------|------------------|------------|-----------------|
| x | $-\infty$ | \diamond | $+\infty$ |
| y'' | $-$ | \bullet | $+$ |
| y | تقعر رو به پایین | | تقعر رو به بالا |

پس تقعر منحنی $y = x^3$ در بازه $(-\infty, \diamond)$ رو به پایین و در بازه $(\diamond, +\infty)$ رو به بالا است.

نقطه ی عطف: نقطه ای است که در آن جهت تقعر منحنی عوض می شود.

برای به دست آوردن نقطه ی عطف یک تابع، مشتق دوم آن را تعیین علامت می کنیم. نقطه ای که علامت مشتق دوم در اطراف آن تغییر می کند، نقطه ی عطف می باشد.

مثال: نقطه ی عطف نمودار توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $y = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$

$$\Rightarrow y' = 3x^2 - 4x - 3 \Rightarrow y'' = 6x - 4 \stackrel{y''=0}{\Rightarrow} 6x - 4 = 0 \Rightarrow 6x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

| | |
|-------|------------------------------------|
| x | $\frac{2}{3}$ |
| y'' | $- \quad \bullet \quad +$ |
| y | تقعر رو به بالا تقعر رو به پایین |

چون علامت مشتق دوم در اطراف $x = \frac{2}{3}$ تغییر می کند، پس نقطه ی $x = \frac{2}{3}$ طول عطف منحنی می باشد.

ب) $y = (x + 1)^4$

$$\Rightarrow y' = 4(x + 1)^3 \Rightarrow y'' = 12(x + 1)^2$$

$$\stackrel{y''=0}{\Rightarrow} 12(x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

| | |
|-------|-----------------------------------|
| x | -1 |
| y'' | $+ \quad \bullet \quad +$ |
| y | تقعر رو به بالا تقعر رو به بالا |

چون علامت مشتق دوم در اطراف $x = -1$ تغییر نمی کند، پس نقطه ی $x = -1$ طول عطف منحنی نمی باشد.

نکته: اگر مبدا مختصات را به نقطه $w(a, b)$ انتقال دهیم، برای به دست آوردن معادله y جدید کافی است به جای x ، $X + a$ و به جای y ، $Y + b$ قرار دهیم.

مثال: معادله $y = x^2 + 3x$ در دستگاه xOy به صورت $y = x^2 + 3x$ می باشد. اگر مبدا مختصات را به نقطه $w(-1, 3)$ منتقل کنیم، معادله y این منحنی در دستگاه جدید را به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y + 3 \end{cases} \Rightarrow Y + 3 = (X - 1)^2 + 3(X - 1) \Rightarrow Y + 3 = X^2 - 2X + 1 + 3X - 3 \Rightarrow Y = X^2 + X - 5$$

نکته: اگر در یک منحنی x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل کنیم و معادله اولیه تغییر نکند، می گوییم مبدا مختصات، مرکز تقارن منحنی است.

مثال: نشان دهید منحنی $x^2 + 3y^2 = 5xy$ نسبت به مبدا مختصات متقارن است؟

$$\begin{cases} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \end{cases} \Rightarrow (-x)^2 + 3(-y)^2 = 5(-x)(-y) \Rightarrow x^2 + 3y^2 = 5xy$$

حل:

چون معادله y منحنی تغییر نکرد بنابراین مبدا مختصات مرکز تقارن است.

نکته: اگر مبدا مختصات را به نقطه $w(a, b)$ انتقال دهیم و معادله y جدید را بنویسیم و در معادله y جدید $X \rightarrow -X$ و $Y \rightarrow -Y$ تبدیل کنیم و معادله y جدید تغییر نکند، در این صورت گوییم منحنی نسبت به $w(a, b)$ تقارن دارد.

مثال: ثابت کنید نقطه $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 10$ منحنی $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 10$ مرکز تقارن آن است.

حل: ابتدا نقطه y عطف منحنی را به دست می آوریم:

$$y = x^3 - 4x^2 - 3x + 10 \Rightarrow y' = 3x^2 - 8x - 3 \Rightarrow y'' = 6x - 8 \stackrel{y''=0}{\implies} 6x - 8 = 0 \Rightarrow 6x = 8$$

$$\Rightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

| | |
|-------|--|
| x | $\frac{4}{3}$ |
| y'' | - ● + |
| y | تقعر رو به پایین تقعر رو به بالا |

چون مشتق دوم در $x = \frac{4}{3}$ تغییر علامت می دهد، بنابراین $\frac{4}{3}$ طول نقطه ی عطف منحنی می باشد.

$$x = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{4}{3}\right) + 10 = \frac{64}{27} - 4 \times \frac{4}{3} - 4 + 10 = \frac{64}{27} - \frac{16}{3} + 6 = \frac{64 - 144 + 162}{27}$$

$$\Rightarrow y = \frac{82}{27} \Rightarrow \text{نقطه ی عطف: } \left(\frac{4}{3}, \frac{82}{27}\right)$$

حال مبدا مختصات را به $W\left(\frac{4}{3}, \frac{82}{27}\right)$ منتقل می کنیم.

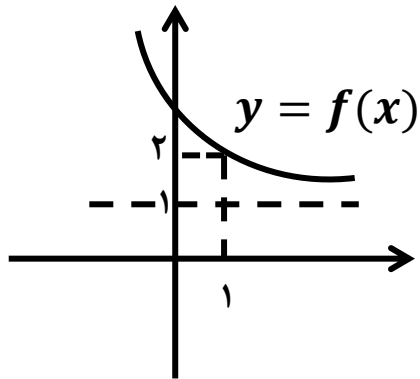
$$\begin{cases} x = X + \frac{4}{3} \\ y = Y + \frac{82}{27} \end{cases} \Rightarrow Y + \frac{82}{27} = \left(X + \frac{4}{3}\right)^3 - 4\left(X + \frac{4}{3}\right)^2 - 3\left(X + \frac{4}{3}\right) + 10 \Rightarrow Y = X^3 - \frac{25}{3}X$$

$$\begin{cases} X \rightarrow -X \\ Y \rightarrow -Y \end{cases} \Rightarrow -Y = (-X)^3 - \frac{25}{3}(-X) \Rightarrow -Y = -X^3 + \frac{25}{3}X \stackrel{\times(-1)}{\implies} Y = X^3 - \frac{25}{3}X$$

چون معادله تغییر نکرد، پس نقطه ی عطف مرکز تقارن است.

مجانب های نمودار توابع

(۱) مجانب افقی:



نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است. با توجه به نمودار، حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

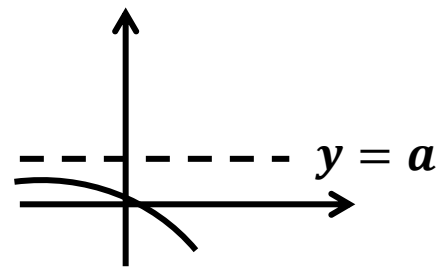
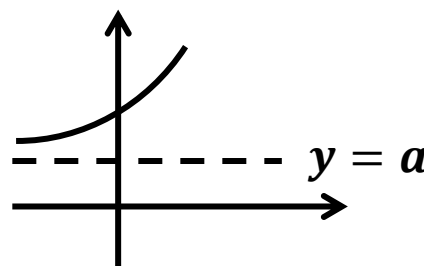
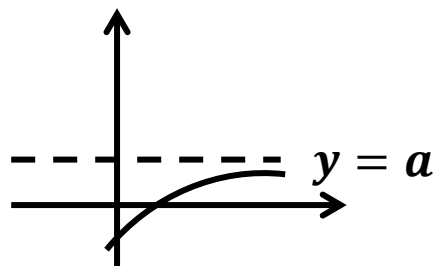
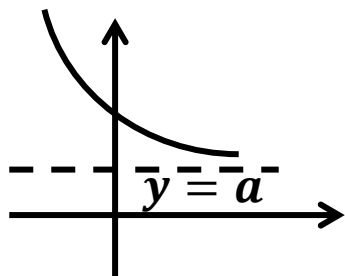
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ?$$

همان طور که از نمودار تابع پیداست، وقتی x به سمت یک میل می کند، $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می شود. اما وقتی x به سمت $+\infty$ میل می کند، یعنی خیلی بزرگ می شود، نمودار تابع به خط $y = 1$ نزدیک می شود. پس حد این تابع در $+\infty$ ، برابر ۱ است. خط $y = 1$ را که نمودار تابع در بی نهایت به آن نزدیک می شود، **مجانب افقی** تابع می گوئیم.

- خط $y = a$ را مجانب افقی تابع $y = f(x)$ گوئیم هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$$



نکته: ممکن است دامنه ی تابع طوری باشد که x نتواند به سمت $+\infty$ (یا $-\infty$) میل کند. در این صورت تابع در $+\infty$ (یا $-\infty$) مجانب افقی ندارد. به عنوان مثال اگر دامنه ی تابعی $(b, +\infty)$ باشد، در این صورت x نمی تواند به سمت $-\infty$ میل کند و تابع در $-\infty$ مجانب افقی ندارد. هم چنین اگر دامنه ی تابعی به صورت $[a, b]$ باشد در این صورت نمی تواند به سمت $\pm\infty$ میل کند و تابع مجانب افقی ندارد.

روش به دست آوردن مجانب های افقی یک تابع:

برای به دست آوردن مجانب افقی یک تابع (در صورت وجود) کافی است از تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ حد بگیریم. اگر حاصل حد، عدد حقیقی a باشد، آن گاه خط $y = a$ مجانب افقی تابع می باشد.

مثال: مطلوبست به دست آوردن مجانب افقی تابع $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

پس خط $y = 1$ مجانب افقی نمودار این تابع در $+\infty$ و $-\infty$ می باشد.

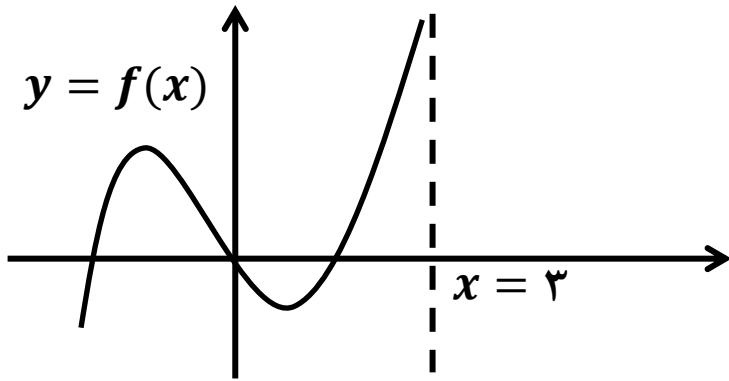
مثال: مطلوبست به دست آوردن مجانب افقی تابع $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x - 1}$.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$$

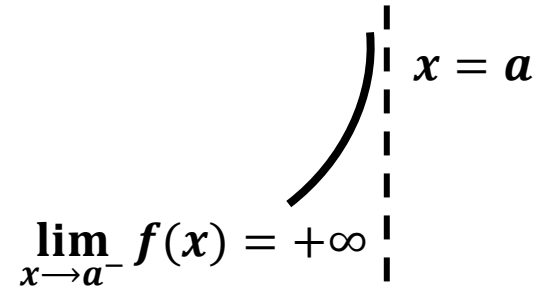
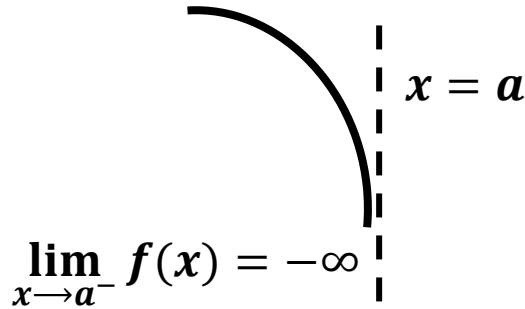
چون حاصل حد، عددی متناهی نشد، پس تابع مجانب افقی ندارد.

۲) مجانب قائم (عمودی):

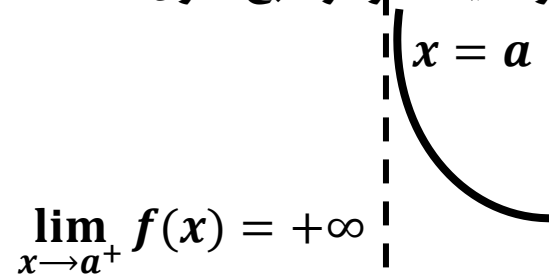
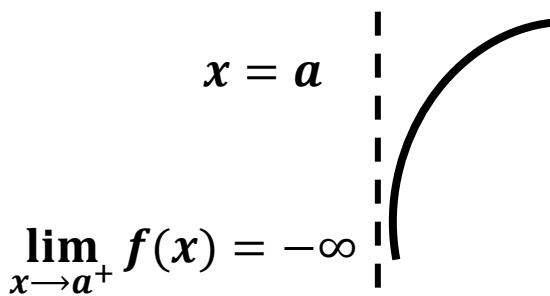


به نمودار تابع f دقت کنید. با توجه به نمودار، وقتی x از سمت چپ به عدد ۳ نزدیک می شود، مقادیر $f(x)$ بزرگ و بزرگ تر شده و در واقع $f(x)$ به سمت $+\infty$ میل می کند. در این جا خط $x = 3$ ، **مجانب قائم منحنی** نامیده می شود.

- در توابعی که حد چپ آن ها در نقطه ی $x = a$ ، $+\infty$ یا $-\infty$ شود، نمودار تابع با نزدیک شدن x به a از سمت چپ، در نزدیکی خط $x = a$ به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می کند. به این خط مجانب قائم منحنی تابع گفته می شود. در این حالت وضعیت نمودار تابع، حول خط $x = a$ (مجانب قائم) به یکی از صورت های زیر است:



نیز در توابعی که حد راست آن ها در نقطه ی $x = a$ ، $+\infty$ یا $-\infty$ شود، نمودار تابع با نزدیک شدن x به a از سمت راست، در نزدیکی خط $x = a$ به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می کند. به این خط نیز مجانب قائم منحنی تابع گفته می شود. در این حالت وضعیت نمودار تابع، حول خط $x = a$ (مجانب قائم) به یکی از صورت های زیر است:



نکته: در توابع کسری، که صورت و مخرج آن ها توابعی پیوسته است، ریشه های مخرج کسر در صورتی که ریشه ی صورت نباشند، مجانب قائم نمودار تابع می باشند. زیرا حد تابع در این نقاط برابر $\pm\infty$ می شود.

مثال: همه ی مجانب های تابع $y = \frac{5x^2 + 3}{x^2 - 4x + 3}$ را بیابید.

حل: برای یافتن مجانب افقی، حد تابع در بی نهایت را به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{x^2} = 5 \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 + 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2}{x^2} = 5$$

بنابراین خط $y = 5$ مجانب افقی نمودار این تابع می باشد.

برای یافتن مجانب های قائم، حد تابع در ریشه ی مخرج را به دست می آوریم:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x^2 + 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x^2 + 3}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{8}{\cdot^+} = +\infty$$

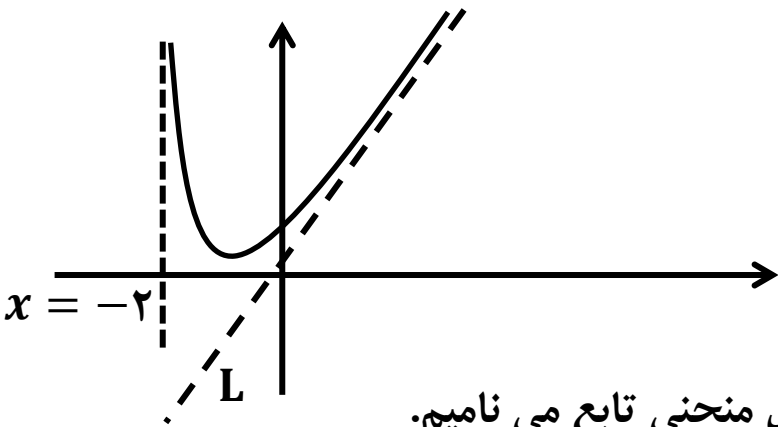
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x^2 + 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x^2 + 3}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{8}{\cdot^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{5x^2 + 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{5x^2 + 3}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{18}{\cdot^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5x^2 + 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5x^2 + 3}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{18}{\cdot^+} = +\infty$$

بنابراین خطوط $x = 1$ و $x = 3$ مجانب های قائم نمودار این تابع می باشند.

(۳) مجانب مایل نمودار تابع:



به نمودار تابع f دقت کنید. می دانیم خط $x = -2$ مجانب قائم نمودار این تابع می باشد. هم چنین مشاهده می کنیم که تابع در بی نهایت به خط L نیز بسیار نزدیک می شود. همان طور که در شکل می بینید در مجاورت این خط، $f(x)$ و $+\infty$ نیز به سمت $+\infty$ میل می کند.

معادله ی این خط به صورت $y = mx + b$ است و آن را مجانب مایل منحنی تابع می نامیم.

-- هرگاه حد تابع $f(x)$ در $+\infty$ یا $-\infty$ ، بی نهایت شود، ممکن است بتوان خطی به صورت $y = mx + b$ یافت به گونه ای که نمودار تابع $f(x)$ و خط $y = mx + b$ در $+\infty$ یا $-\infty$ به هم نزدیک شوند. خط $y = mx + b$ را **مجانب مایل منحنی تابع** گوئیم و در این صورت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$$

روش یافتن خطوط مجانب مایل نمودار یک تابع

هرگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ بی نهایت شود، نمودار تابع مجانب افقی ندارد. اما امکان دارد، مجانب مایل داشته باشد.

در این صورت از روش های زیر می توانیم خط $y = mx + b$ را بیابیم:

(۱) گاهی اوقات می توانیم ضابطه ی $f(x)$ را به صورت $(g(x) + mx + b)$ بنویسیم، به طوری که $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$. در این صورت خط $y = mx + b$ مجانب مایل تابع می باشد.

به عنوان مثال در تابع $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x}{x^2 + 1}$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + x^2 + 2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$$

بنابراین امکان وجود مجانب مایل هست. با تقسیم چندجمله ای صورت بر مخرج داریم:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 + 2x & x^2 + 1 \\ -(x^3 + x) & x + 1 \\ \hline x^2 + x & \\ -(x^2 + 1) & \\ \hline x - 1 & \end{array} \Rightarrow \frac{x^3 + x^2 + 2x}{x^2 + 1} = x - 1 + \frac{x - 1}{x^2 + 1}$$

حد تابع $g(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$ در $+\infty$ و $-\infty$ برابر صفر است. پس خط $y = x - 1$ مجانب مایل نمودار تابع می باشد.

— در مواردی که ضابطه ی تابع به صورت تقسیم دو چندجمله ای بوده و درجه ی صورت، یک واحد بیش تر از درجه ی مخرج باشد، از روش بالا استفاده می کنیم.

(۲) به طور کلی برای یافتن خط مجانب $y = mx + b$ ، باید دو ضریب m و b را به دست آوریم. برای این منظور ابتدا شیب خط (m) را با محاسبه ی حد زیر به دست می آوریم:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

سپس b را از رابطه ی زیر به دست می آوریم:

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$$

مثال: مطلوبست مجانب مایل منحنی $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 2}$

حل:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 1}{x(x^2 + x + 2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 1}{x^3 + x^2 + 2x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 1 - x^3 - x^2 - 2x}{x^2 + x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2 - 2x - 1}{x^2 + x + 2} = -1$$

بنابراین خط $y = x - 1$ ، مجانب مایل منحنی تابع می باشد.

مثال: مجانب مایل تابع $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^4}}{1+x}$ را در صورت وجود بیابید.

حل: ابتدا حد تابع در $+\infty$ و $-\infty$ را می یابیم.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{1+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{1+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$$

چون حد فوق نامتناهی شد، بنابراین امکان وجود مجانب مایل هست.

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{\sqrt{1+x^4}}{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{x(1+x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^4}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\sqrt{1+x^4}}{1+x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{1+x^4} - x(1+x)}{1+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{1+x^4} - x - x^2}{1+x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{1+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{1+x} = -1$$

بنابراین خط $y = -x - 1$

، مجانب مایل منحنی تابع در $+\infty$ و $-\infty$ می باشد. **23**

رسم نمودار یک تابع:

برای رسم نمودار $y = f(x)$ مراحل زیر را انجام می دهیم:

- (۱) دامنه ی تابع را تعیین می کنیم.
 - (۲) با توجه به دامنه ی تابع، اگر حد تابع در $\pm\infty$ ($x \rightarrow \pm\infty$) معنا داشته باشد، آن را محاسبه می کنیم. در این حالت ممکن است، نمودار تابع دارای مجانب افقی یا مایل باشد که آن ها را به دست می آوریم.
اگر دامنه ی تابع به صورت یک بازه مانند $[a, b]$ باشد، مقدار تابع را در ابتدا و انتهای بازه به دست می آوریم.
 - (۳) مجانب قائم نمودار تابع را در صورت وجود به دست می آوریم.
 - (۴) نقاط برخورد نمودار تابع با محورهای مختصات را به دست می آوریم.
 - (۵) y' را به دست آورده و آن را در جدول تغییرات را تشکیل می دهیم، تا فاصله های صعودی و نزولی و نقاط ماکزیمم و می نیمم نسبی به دست آیند.
 - (۶) y'' را در صورت امکان محاسبه می کنیم و با تعیین علامت آن، نقاط عطف را در صورت وجود به دست می آوریم.
 - (۷) با استفاده از اطلاعات قسمت های قبل، جدول تغییرات تابع را رسم می کنیم.
 - (۸) در صورت لزوم از نقاط کمکی استفاده می کنیم.
 - (۹) با استفاده از جدول تغییرات و با مشخص کردن نقاط به دست آمده، نمودار تابع را رسم می کنیم.
- تذکر ۱: اگر با تبدیل x به $-x$ معادله ی منحنی تغییر نکند، محور y ها محور تقارن منحنی تابع خواهد بود.
- تذکر ۲: اگر با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ معادله ی منحنی تغییر نکند، مبدأ مختصات محور تقارن منحنی تابع خواهد بود.

مثال: نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 3$ را رسم کنید.

حل: دامنه ی تابع R است. تابع دارای مجانب افقی، قائم و مایل نیست.

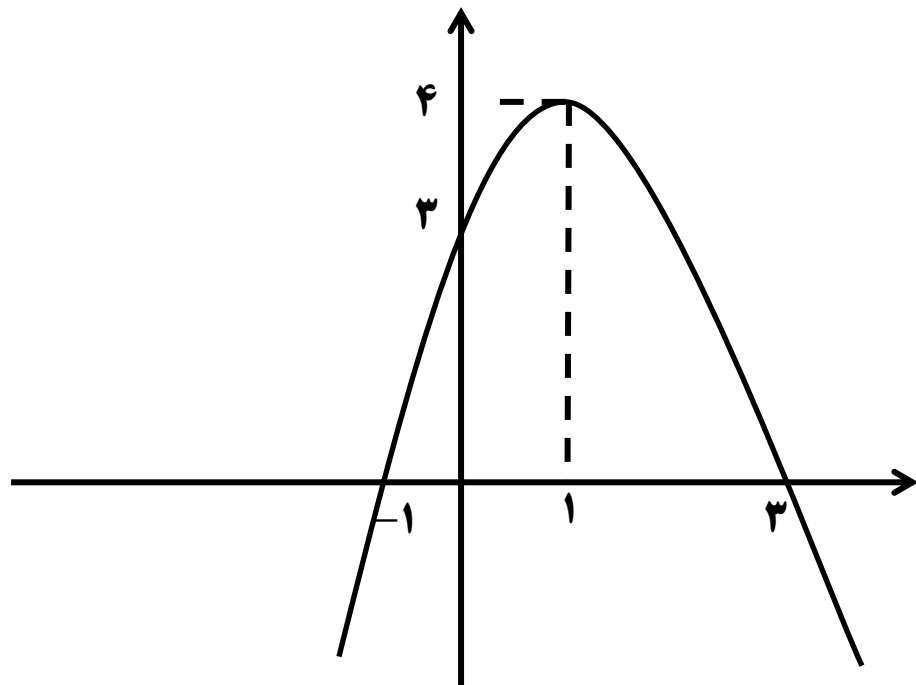
$$y' = -2x + 2 \stackrel{y'=0}{\implies} -2x + 2 = 0 \implies -2x = -2 \implies x = 1$$

$$\begin{cases} x = 0 \implies y = 3 \\ y = 0 \implies \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$y'' = -2 \implies$ تابع دارای نقطه ی عطف نیست

| | | | | | |
|-------|-----------|-----|-----------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
| y' | | $+$ | \bullet | $-$ | |
| y | $-\infty$ | | 4 | | $-\infty$ |
| y'' | | | | | |

تقعر رو به پایین



مثال: نمودار تابع $y = x^3 - 3x$ را رسم کنید.

حل: دامنه ی تابع R است. تابع دارای مجانب افقی، قائم و مایل نیست.

$$y' = 3x^2 - 3 \stackrel{y'=0}{\implies} 3x^2 - 3 = 0 \implies 3x^2 = 3 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1$$

$$y'' = 6x \stackrel{y''=0}{\implies} 6x = 0 \implies x = 0$$

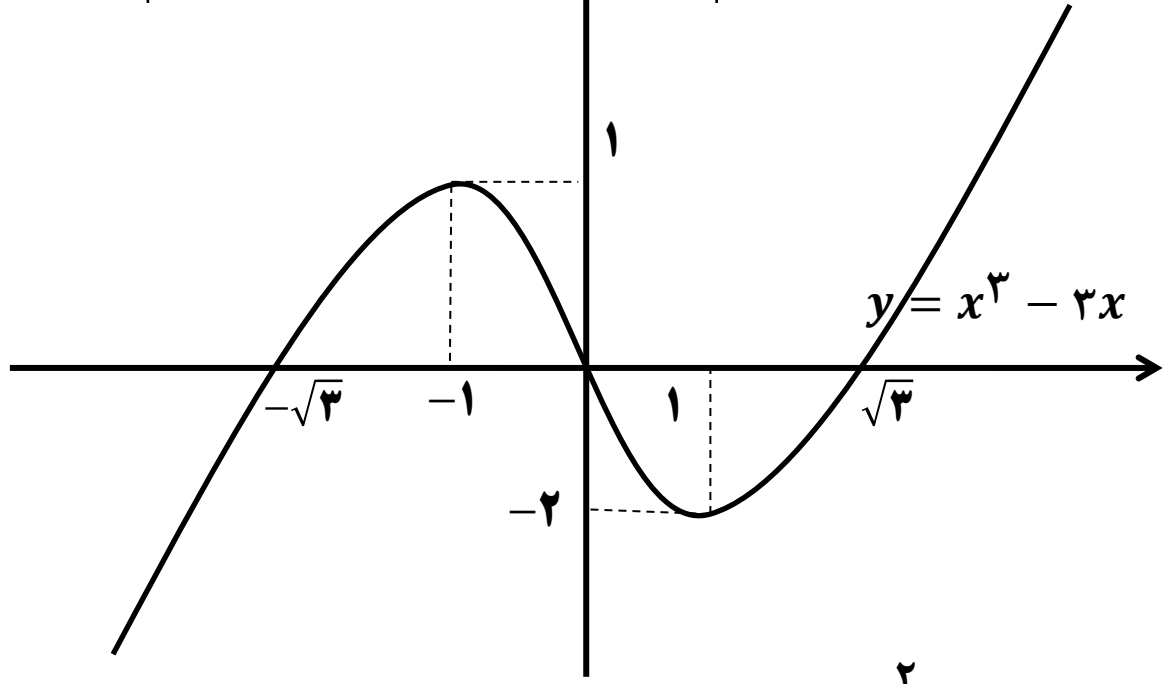
$$\begin{cases} x = \bullet \Rightarrow y = \bullet \\ y = \bullet \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \bullet \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$$

| | | | | | | | |
|-------|-----------|-------------|-----------|------------|------------|------------|------------|
| x | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | -1 | \bullet | 1 | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
| y' | $+$ | $+$ | \bullet | $-$ | \bullet | $+$ | $+$ |
| y | $-\infty$ | \nearrow | \bullet | \nearrow | \searrow | \searrow | \nearrow |
| y'' | | | | \bullet | | | |

تقعر رو به پایین تقعر رو به بالا

- ماکزیمم نسبی: $(-1, 2)$
- ماکزیمم نسبی: $(1, -2)$
- نقطه ی عطف: (\bullet, \bullet)



مثال: نمودار تابع $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ را رسم کنید.

حل: دامنه ی تابع R است. زیرا مخرج کسر ریشه ندارد ($\Delta < 0$). این تابع مجانب قائم نیز ندارد، چون مخرج کسر ریشه ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

بنابراین خط $y = 1$ مجانب افقی نمودار تابع در $+\infty$ و $-\infty$ است.

$$y' = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \xrightarrow{y'=0} 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y'' = \frac{2(x^2 + 1)^2 - 2 \times 2x(x^2 + 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2(x^2 + 1)^2 - 8x^2(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{(x^2 + 1)[2(x^2 + 1) - 8x^2]}{(x^2 + 1)^4}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{2x^2 + 2 - 8x^2}{(x^2 + 1)^3} = \frac{-6x^2 + 2}{(x^2 + 1)^3} \xrightarrow{y''=0} -6x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

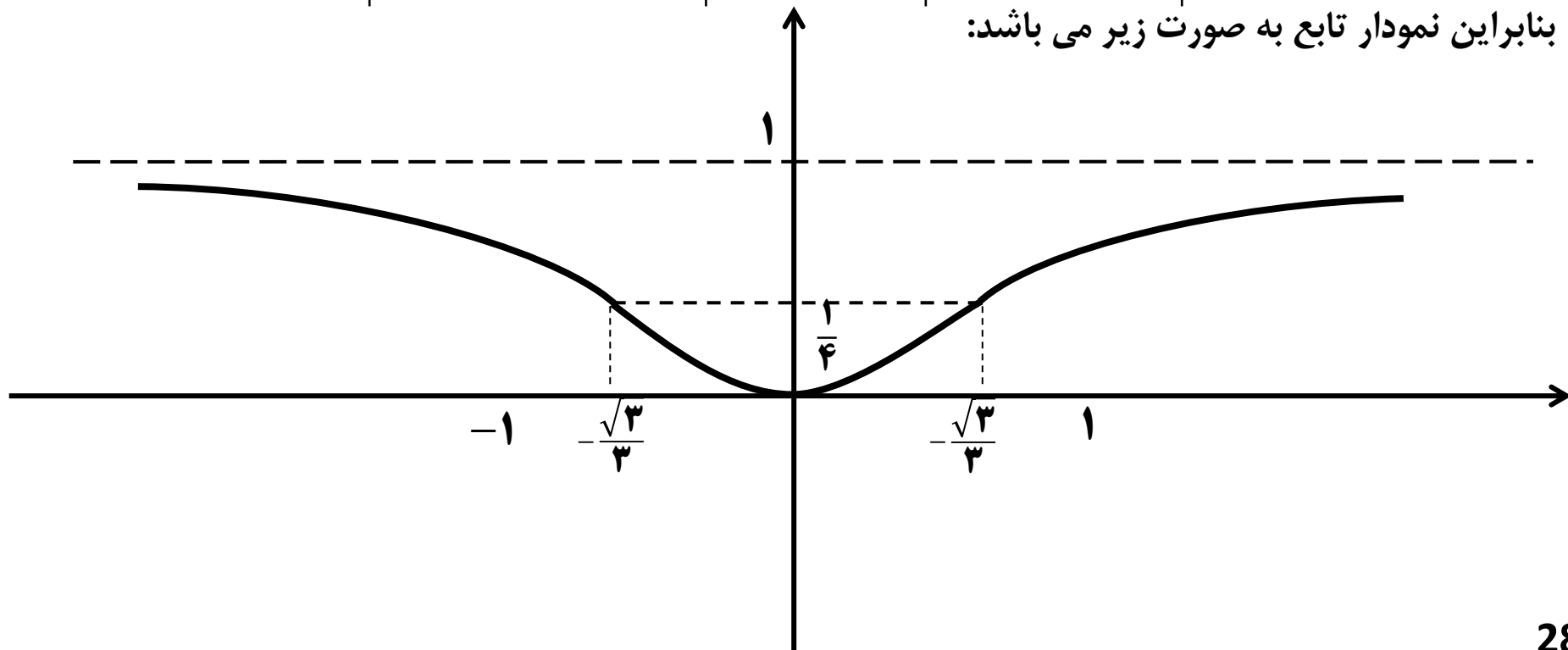
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{3}{9}}{\frac{3}{9} + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4} = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

جدول تغییرات: چون مخرج کسر y' و y'' مثبت می باشند، لذا برای تعیین علامت آن ها کافی است، فقط صورت کسر را تعیین علامت کنیم. حال با توجه به اطلاعات به دست آمده جدول تغییرات به صورت زیر می باشد:

| | | | | | |
|-------|-----------|-----------------------|---------------|----------------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | \cdot | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $+\infty$ |
| y' | | - | - | + | + |
| y | 1 | \searrow | $\frac{1}{4}$ | \nearrow | 1 |
| y'' | | - | + | + | - |

بنابراین نمودار تابع به صورت زیر می باشد:



مثال: نمودار تابع $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ را رسم کنید.

حل: ابتدا دامنه ی تابع را به دست می آوریم:

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

خطوط $x = 1$ و $x = -1$ (ریشه های مخرج) مجانب های قائم تابع می باشند. زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

مجانب افقی:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

بنابراین خط $y = 0$ مجانب افقی نمودار تابع در $+\infty$ و $-\infty$ است.

$$y' = \frac{0 \times (x^2 - 1) - 2x \times 1}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} \stackrel{y'=0}{\implies} -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y'' = \frac{-2 \times (x^2 - 1)^2 - (-2x) \times 2 \times 2x \times (x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{(x^2 - 1)[-2(x^2 - 1) + 8x^2]}{(x^2 - 1)^4} = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

$$\stackrel{y''=0}{\implies} 6x^2 + 2 = 0 \Rightarrow 6x^2 = -2 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow \text{تابع نقطه ی عطف ندارد} \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

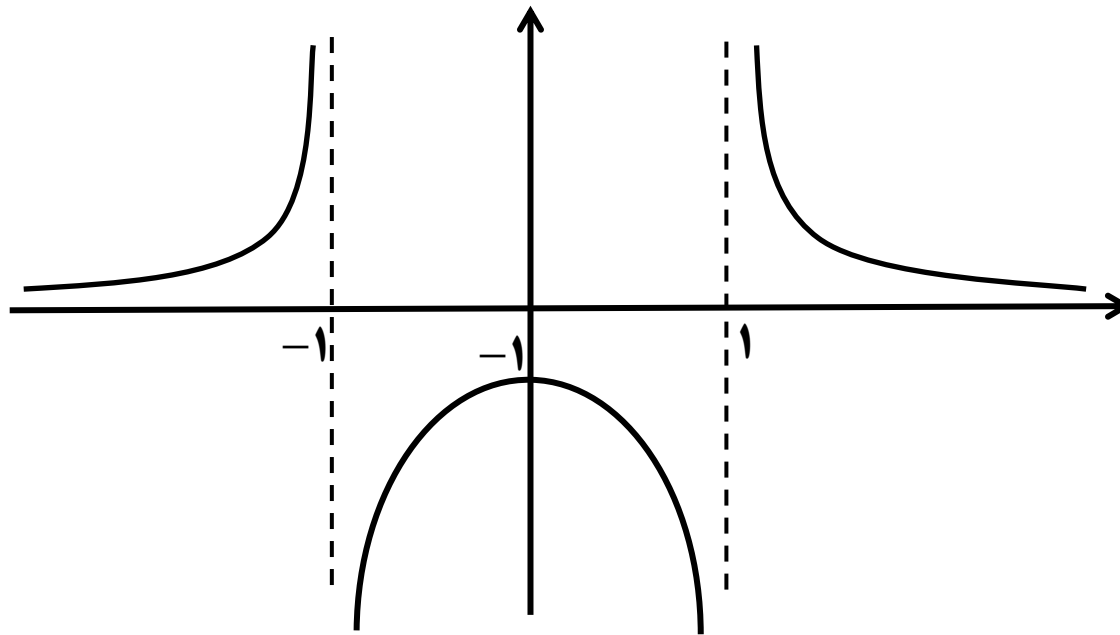
$$\begin{cases} x = \diamond \Rightarrow y = -1 \\ y = \diamond \Rightarrow x \text{ ی وجود ندارد} \end{cases}$$

نمودار با محور x ها برخورد نمی کند $\Rightarrow x$ ی وجود ندارد

جدول تغییرات: چون مخرج کسر y' مثبت می باشند، لذا برای تعیین علامت آن کافی است، فقط صورت کسر را تعیین علامت کنیم. حال با توجه به اطلاعات به دست آمده جدول تغییرات به صورت زیر می باشد:

| | | | | | | | | | |
|------|------------|-------------|------|-------------|------------|------|-------------|---|-------------|
| x | $-\infty$ | | -1 | | \diamond | | 1 | | $+\infty$ |
| y' | + | | + | | ● | - | | - | |
| y | \diamond | ↗ $+\infty$ | | ↗ $-\infty$ | | -1 | ↘ $-\infty$ | | ↘ $+\infty$ |

بنابراین نمودار تابع به صورت زیر می باشد:



مثال: نمودار تابع $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ را رسم کنید.

حل: ابتدا دامنه ی تابع را به دست می آوریم:

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

خط $x = 0$ (ریشه ی مخرج) مجانب قائم تابع می باشند. زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \pm\infty$$

مجانب افقی: این تابع دارای مجانب افقی نمی باشد. زیرا:

مجانب مایل:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0} \text{مجانب مایل: } y = x$$

$$y' = \frac{2x \times x - 1 \times (x^2 + 1)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \xrightarrow{y'=0} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y'' = \frac{(2x)(x^2) - (2x)(x^2 - 1)}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} \xrightarrow{y''=0} \text{تابع نقطه ی عطف ندارد} \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

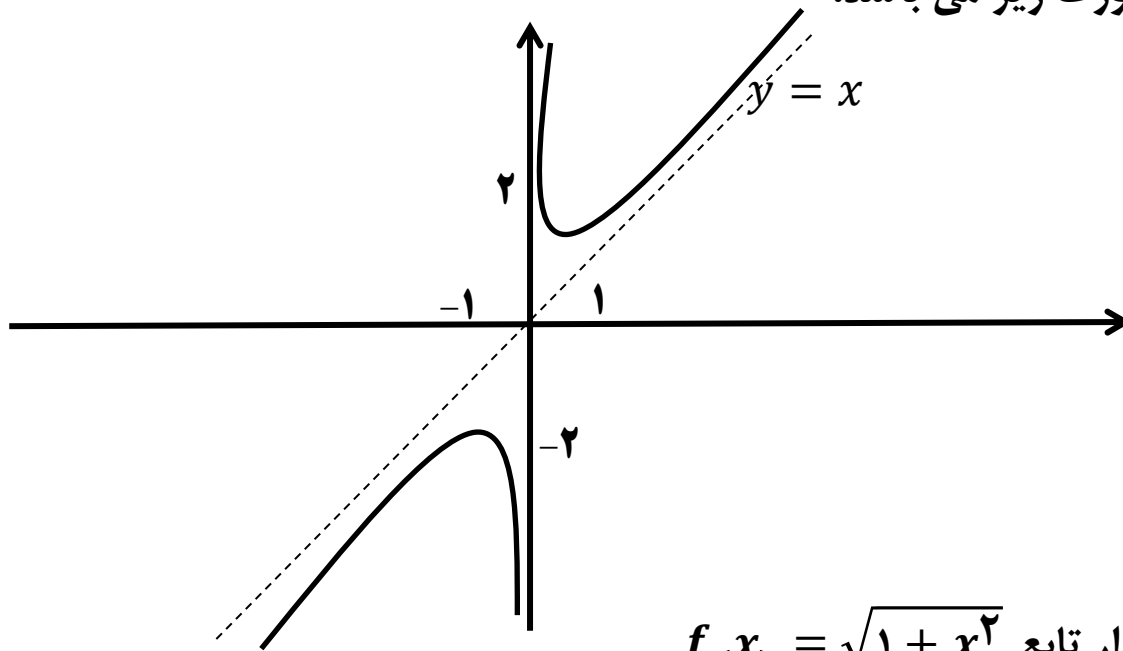
نمودار با محور y ها برخورد نمی کند $\Rightarrow y$ وجود ندارد $\Rightarrow x = 0$

نمودار با محور y ها برخورد نمی کند $\Rightarrow y$ وجود ندارد $\Rightarrow y = 0$

جدول تغییرات: چون مخرج کسر y' مثبت می باشند، لذا برای تعیین علامت آن کافی است، فقط صورت کسر را تعیین علامت کنیم. حال با توجه به اطلاعات به دست آمده جدول تغییرات به صورت زیر می باشد:

| | | | | | | |
|------|-----------|------------|------|------------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ | |
| y' | $+$ | \bullet | $-$ | $-$ | \bullet | $+$ |
| y | $-\infty$ | \nearrow | -2 | \searrow | $-\infty$ | $+\infty$ |

بنابراین نمودار تابع به صورت زیر می باشد:



مثال: مطلوبست رسم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

حل: ابتدا دامنه ی تابع را به دست می آوریم.

$$\geq 0 \Rightarrow 1+x^2 \geq 0 \Rightarrow D_f = \mathbf{R}$$

این تابع دارای مجانب قائم نیست. هم چنین به دلیل آن که $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ ، دارای مجانب افقی نیز نمی باشد.

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1 \end{cases}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x^2} - x) = \infty - \infty \stackrel{\text{رفع ابهام}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1+x^2} - x \times \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2} + x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

بنابراین خط $y = x$ در $+\infty$ مجانب مایل نمودار تابع می باشد.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x^2} + x) = -\infty + \infty \stackrel{\text{رفع ابهام}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{1+x^2} + x \times \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2} - x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-2x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

بنابراین خط $y = -x$ در $-\infty$ مجانب مایل نمودار تابع می باشد.

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow{y'=0} x = 0$$

$$y'' = \frac{1 \times (\sqrt{1+x^2}) - \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \times x}{(\sqrt{1+x^2})^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)(\sqrt{1+x^2})}$$

$y'' = 0$
 \implies تابع نقطه ی عطف ندارد \implies معادله جواب ندارد

با توجه به مثبت بودن y'' نتیجه می گیریم که تقعر منحنی همواره به سمت بالاست.

$$x = 0 \implies y = 1$$

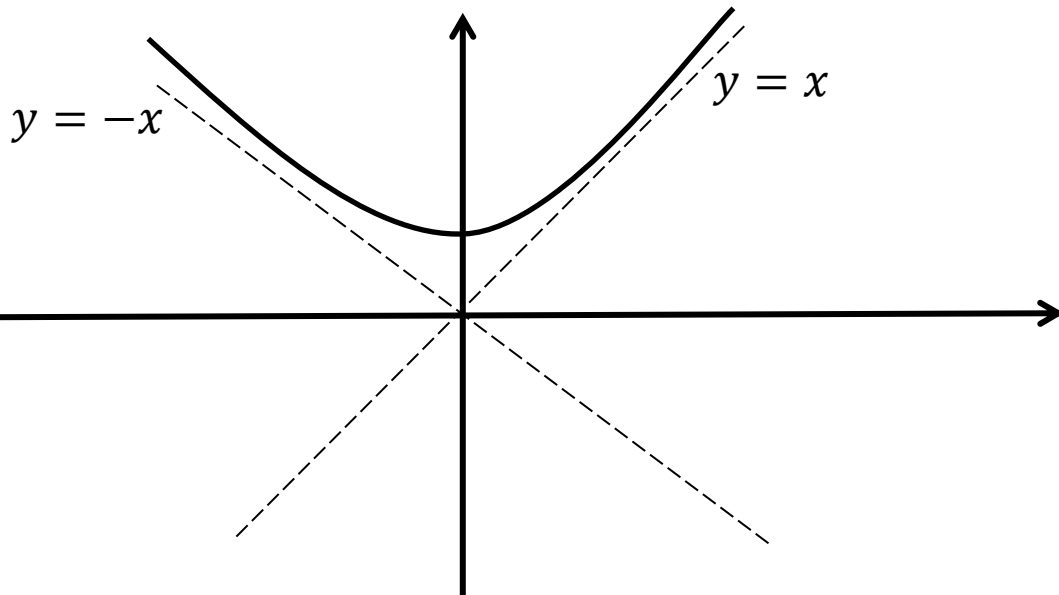
$$y = 0 \implies \sqrt{1+x^2} = 0 \implies 1+x^2 = 0 \implies x^2 = -1$$

نمودار با محور x ها برخورد نمی کند $\implies x$ ی وجود ندارد

جدول تغییرات: چون مخرج کسر y' مثبت می باشند، لذا برای تعیین علامت آن کافی است، فقط صورت کسر را تعیین علامت کنیم. حال با توجه به اطلاعات به دست آمده جدول تغییرات به صورت زیر می باشد:

| | | | | | |
|------|-----------|---|-----------|---|-----------|
| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
| y' | | - | \bullet | + | |
| y | $+\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |

بنابراین نمودار تابع به صورت زیر می باشد:



مثال: نمودار تابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ را رسم کنید.

حل: ابتدا دامنه ی تابع را به دست می آوریم.

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow \mathbf{D_f} = [-1, 1]$$

یا $x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \geq x^2 \Rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow$ زیر رادیکال

تابع بجانب قائم ندارد. زیرا به ازای هیچ مقداری حد تابع $+\infty$ یا $-\infty$ نمی شود. هم چنین بجانب افقی و مایل نیز ندارد. زیرا با توجه به محدود بودن دامنه ی تابع حد تابع در $\pm\infty$ معنی ندارد.

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow{y'=0} -x = 0 \Rightarrow x = 0$$

نقاط $x = 1$ و $x = -1$ (ریشه های مخرج) نیز نقاط بحرانی محسوب می شوند.

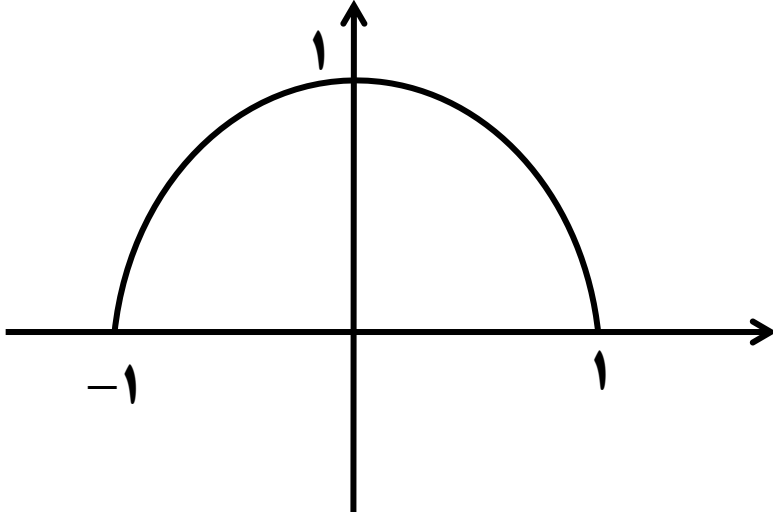
$$y'' = \frac{(-1)(\sqrt{1-x^2}) - (-x)\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{-\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{x^2 - 1 - x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$y''=0 \Rightarrow$ تابع نقطه ی عطف ندارد \Rightarrow معادله جواب ندارد

با توجه به منفی بودن(?) y'' نتیجه می گیریم که تقعر منحنی همواره به سمت پایین است.

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ y = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

جدول تغییرات: چون مخرج کسر y' مثبت می باشند، لذا برای تعیین علامت آن کافی است، فقط صورت کسر را تعیین علامت کنیم. حال با توجه به اطلاعات به دست آمده جدول تغییرات به صورت زیر می باشد:



| | | | |
|------|-----------|-------------------|-------------------------|
| x | -1 | | $+1$ |
| y' | $+$ | \bullet | $-$ |
| y | \bullet | \nearrow 1 | \searrow \bullet |

بنابراین نمودار تابع به صورت روبرو می باشد:

مثال: نمودار نمایش تغییرات تابع $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ را رسم کنید.

حل: ابتدا دامنه ی تابع را به دست می آوریم:

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

خطوط $x = 1$ و $x = -1$ (ریشه های مخرج) مجانب های قائم تابع می باشند. زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{\bullet^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{\bullet^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{+1}{x} = \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{-1}{\bullet^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{-1}{\bullet^-} = +\infty$$

مجانب افقی: خط $y = \bullet$ مجانب افقی تابع می باشد. زیرا:

مجانب مایل: تابع دارای مجانب مایل نیست.

$$y' = \frac{1 \times (x^2 - 1) - (2x)(x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \xrightarrow{y'=0} -x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

اما درباره ی تعیین علامت y' دقت داشته باشید، چون مخرج y' همواره مثبت است پس علامت y' به علامت صورت وابسته است. درباره ی صورت نیز باید گفت چون $\Delta < 0$ و $a < 0$ ، لذا علامت آن همواره منفی است و تابع همواره نزولی است.

$$y'' = \frac{(-2x)(x^2 - 1)^2 - 2 \times 2x(x^2 - 1)(-x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{(-2x)(x^2 - 1)^2 + 2 \times 2x(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4}$$

$$= \frac{(x^2 - 1)[(-2x)(x^2 - 1) + (4x)(x^2 + 1)]}{(x^2 - 1)^4} = \frac{(x^2 - 1)[-2x^3 + 2x + 4x^3 + 4x]}{(x^2 - 1)^4} = \frac{(x^2 - 1)[2x^3 + 6x]}{(x^2 - 1)^4}$$

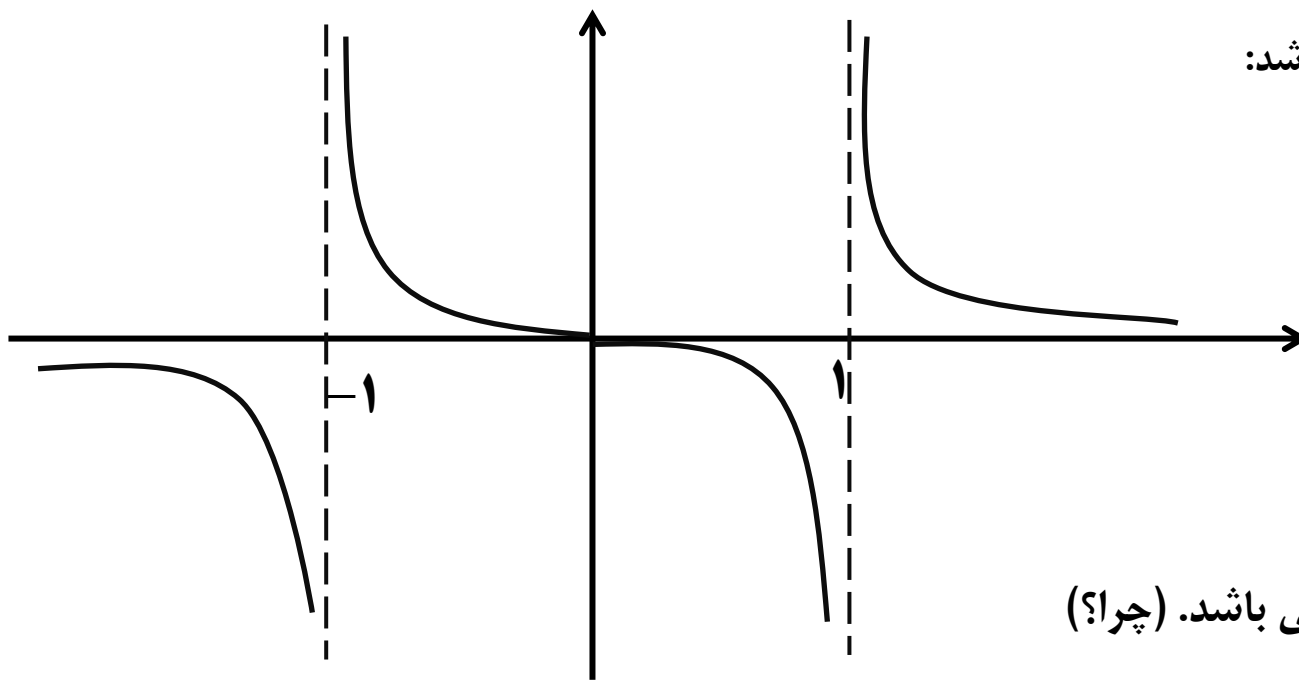
$$= \frac{(x^2 - 1)2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^4}$$

علامت $\frac{2(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^4}$ همواره مثبت است. بنابراین علامت y'' به $x(x^2 - 1)$ وابسته است.

جدول تغییرات:

| x | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ |
|-----------|------------------------|------|------------------------|-------------|------------------------|
| y' | - | | - | - | - |
| y | \diamond ↘ $-\infty$ | | $+\infty$ ↘ \diamond | ↘ $-\infty$ | $+\infty$ ↘ \diamond |
| x | - | | - | + | + |
| $x^2 - 1$ | + | | - | - | + |
| y'' | - | | + | - | + |

بنابراین نمودار تابع به صورت زیر می باشد:



مبدا مختصات محور تقارن منحنی می باشد. (چرا؟)

مثال: نمودار تابع $y = \frac{1}{1+x^2}$ را رسم کنید.

حل: ابتدا دامنه ی تابع را به دست می آوریم:

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow 1 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \xrightarrow{\text{معادله جواب ندارد}} D_f = \mathbf{R}$$

تابع مجانب قائم ندارد. زیرا به ازای هیچ مقداری حد تابع $+\infty$ یا $-\infty$ نمی شود.

مجانب افقی: خط $y = 0$ مجانب افقی تابع می باشد. زیرا:

مجانب مایل: تابع دارای مجانب مایل نیست.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$$y' = \frac{0 \times (1+x^2) - (2x)(1)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \xrightarrow{y'=0} -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y'' = \frac{-2(1+x^2)^2 - 2(2x)(1+x^2)(-2x)}{(1+x^2)^4} = \frac{(1+x^2)[-2 - 2x^2 + 8x^2]}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

$$y'' = 0 \implies 6x^2 - 2 = 0 \implies 6x^2 = 2 \implies x^2 = \frac{1}{3} \implies x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

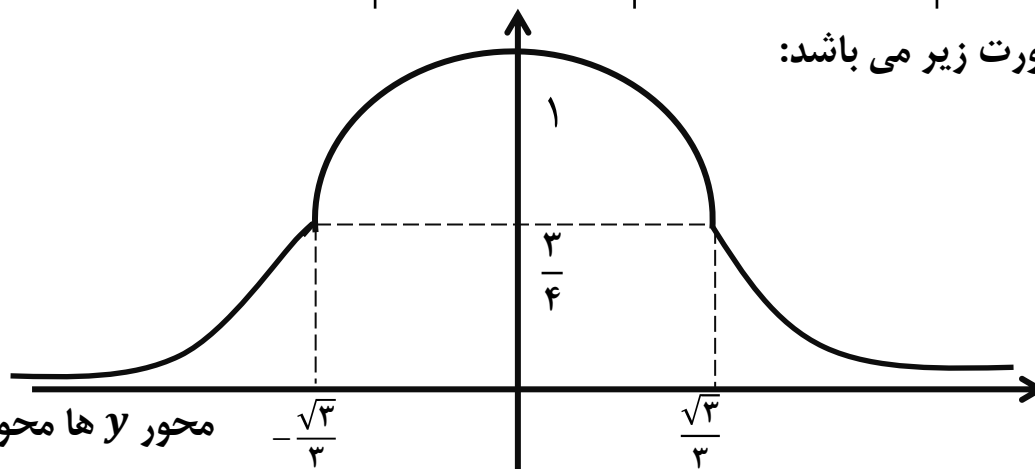
$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \implies y = 1 \end{array} \right.$$

نمودار با محور x ها برخورد نمی کند $\implies x$ ی وجود ندارد $y = 0$

جدول تغییرات: چون مخرج کسر y' و y'' مثبت می باشند، لذا برای تعیین علامت آن ها کافی است، فقط صورت کسر را تعیین علامت کنیم. حال با توجه به اطلاعات به دست آمده جدول تغییرات به صورت زیر می باشد:

| | | | | | |
|-------|-----------|-----------------------|---------------|----------------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $+\infty$ |
| y' | | + | + | - | - |
| y | 0 | \nearrow | $\frac{3}{4}$ | \searrow | 0 |
| y'' | | + | - | - | + |

بنابراین نمودار تابع به صورت زیر می باشد:



محور y ها محور تقارن تابع می باشد. چرا(؟)

تابع هموگرافیک:

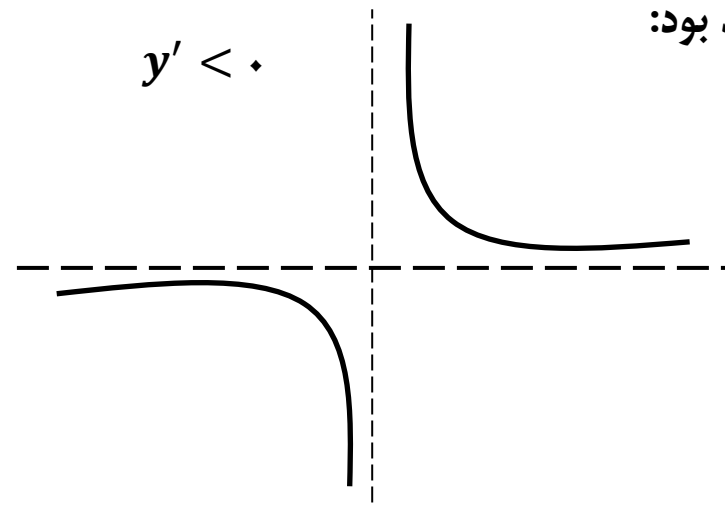
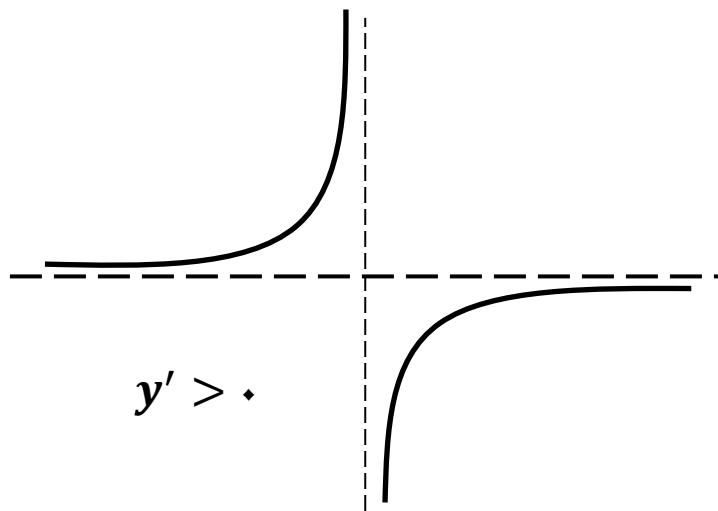
هر تابع به فرم $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ که $c \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$ را یک تابع هموگرافیک می‌گوییم.

مشتق اول این تابع $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ می‌باشد. این تابع یک مجانب قائم به معادله $x = -\frac{d}{c}$ (ریشه ی مخرج) و یک مجانب افقی به معادله $y = \frac{a}{c}$ دارد. زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax + b}{cx + d} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax}{cx} = \frac{a}{c}$$

محل برخورد مجانب های قائم و افقی این تابع، نقطه $w\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ است که مرکز تقارن منحنی نیز می‌باشد.

در توابع هموگرافیک، y' همواره مثبت یا همواره منفی است. اگر y' همواره مثبت باشد در نتیجه تابع همواره صعودی است و اگر y' همواره منفی باشد، آن گاه تابع همواره نزولی است. نمودار تابع در اطراف مجانب قائم آن به صورت های زیر خواهد بود:



مثال: نمودار تابع $y = \frac{2x+3}{3x+5}$ را رسم کنید.

حل: ابتدا دامنه ی تابع را به دست می آوریم:

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow 3x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{3} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{3}\right\}$$

مجانب قائم: خط $x = -\frac{5}{3}$ مجانب قائم تابع می باشد. زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{3}^+} \frac{2x+3}{3x+5} = \frac{-\frac{1}{3}}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{3}^-} \frac{2x+3}{3x+5} = \frac{-\frac{1}{3}}{0^-} = +\infty$$

مجانب افقی: خط $y = \frac{2}{3}$ مجانب افقی تابع می باشد. زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+3}{3x+5} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

تابع دارای مجانب مایل نیست.

$$y' = \frac{2(3x+5) - 3(2x+3)}{(3x+5)^2} = \frac{6x+10-6x-6}{(3x+5)^2} = \frac{4}{(3x+5)^2} \xrightarrow{y'=0} \text{تابع نقطه ی اکسترمم ندارد} \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

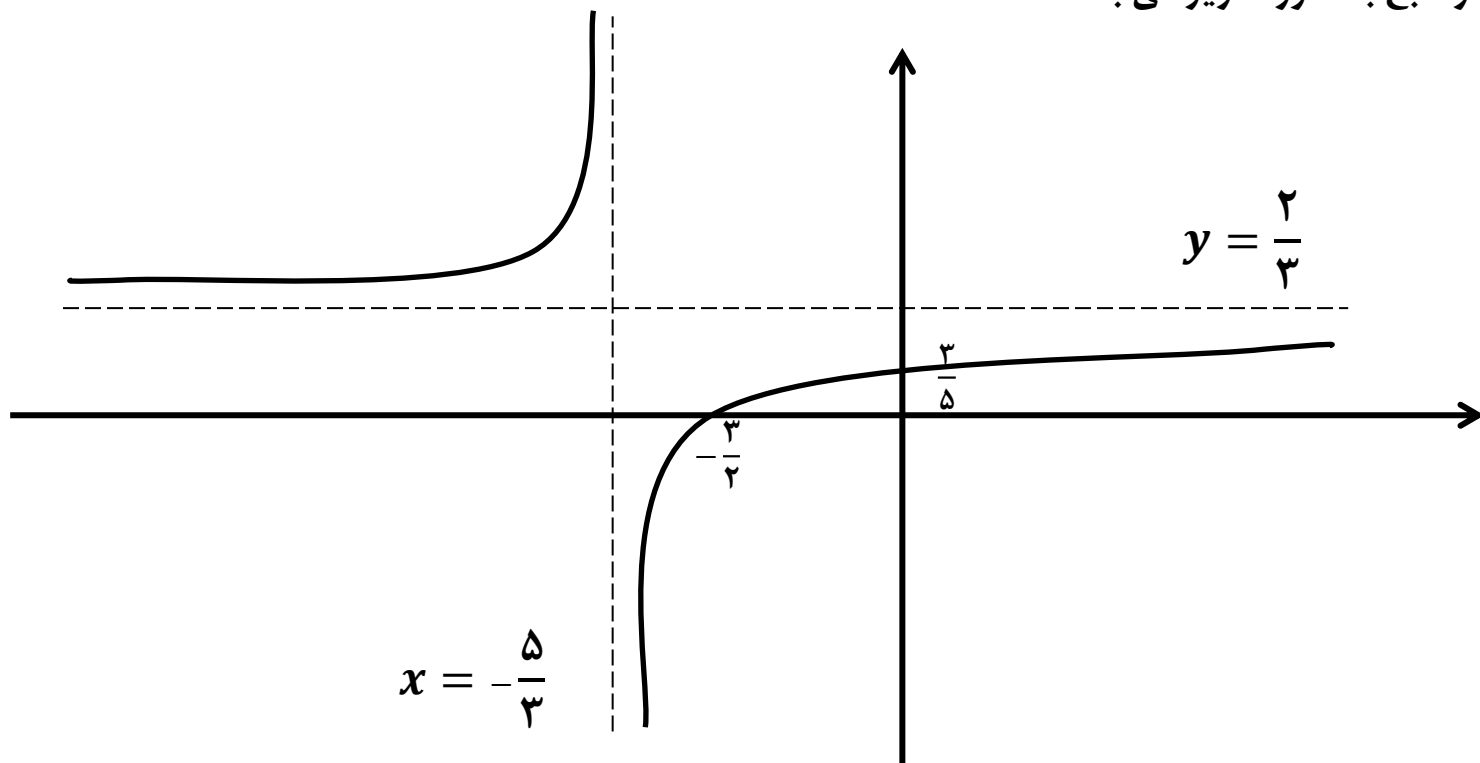
$$y'' = \frac{0 \times (3x+5)^2 - 6(3x+5) \times 4}{(3x+5)^4} = \frac{-24(3x+5)}{(3x+5)^4} = \frac{-72x-120}{(3x+5)^4} \xrightarrow{y''=0} -72x-120=0 \Rightarrow x = \frac{120}{-72} = \frac{-5}{3}$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{5} \\ y = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

جدول تغییرات: چون مخرج کسر y' مثبت می باشند، لذا برای تعیین علامت آن کافی است، فقط صورت کسر را تعیین علامت کنیم. حال با توجه به اطلاعات به دست آمده جدول تغییرات به صورت زیر می باشد:

| | | | |
|-------|-------------------|----------------|---------------------------|
| x | $-\infty$ | $-\frac{5}{3}$ | $+\infty$ |
| y' | + | | + |
| y | $\frac{2}{3}$ ↗ | $+\infty$ | $-\infty$ ↗ $\frac{2}{3}$ |
| y'' | + تقعر رو به بالا | | - تقعر رو به پایین |

بنابراین نمودار تابع به صورت زیر می باشد:



به نام خداوند بخشنده و مهربان

ریاضی عمومی پیش دانشگاهی تجربی / فصل پنجم:

هندسه مختصاتی و منحنی های درجه دوم

Ordinate geometry and quadratic curves

هندسه ی مختصاتی:

معادله ی خط: معادله ی یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به شکل $ax + by + c = 0$ است که در آن a و b همزمان صفر نیستند. (زیرا در این صورت معادله ی حاصل، که فاقد a و b است، نمایانگر معادله ی یک خط نیست).

حال اگر طرفین معادله را بر b تقسیم کنیم، داریم: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ که $-\frac{a}{b}$ را ضریب زاویه یا شیب خط می نامیم.

زاویه ی بین خط $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ با جهت مثبت محور x ها، برابر α است که $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ و $\tan\alpha = -\frac{a}{b}$

معادله ی خط:

با در اختیار داشتن شیب (m) و یک نقطه مانند $(A(x_A, y_A))$ از یک خط می توان معادله ی آن را به صورت زیر نوشت.

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

هم چنین اگر مختصات دو نقطه مانند $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ از خط داده شده باشد، معادله ی خط به صورت زیر نوشته می شود:

$$y - y_A = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_A)$$

و در نهایت اگر یک نقطه از خط مانند $A(x_A, y_A)$ و زاویه ای که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد، داده شده باشد معادله ی خط از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$y - y_A = \tan\alpha (x - x_A)$$

مثال: معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه ی $A(1, 2)$ بگذرد و جهت مثبت محور طول ها را با زاویه ی 45° درجه قطع کند.

حل: 2

$$y - y_A = \tan\alpha (x - x_A) \xrightarrow{A(1,2), \alpha=45^\circ} y - 2 = \tan 45^\circ (x - 1) \Rightarrow y - 2 = 1 \times (x - 1) \Rightarrow y = x + 1$$

خطوط موازی:

دو خط l و l' را موازی گویند، هرگاه شیب های آن ها یکسان باشند.

مثال: دو خط $y = 2x + 3$ و $3y - 6x + 9 = 0$ با هم موازی هستند. زیرا:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \Rightarrow m = 2 \\ 3y - 6x + 9 = 0 \Rightarrow 3y = 6x - 9 \Rightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow m' = 2 \end{cases}$$

نکته: خطوط $x = \alpha$ و $x = \beta$ با هم موازی اند و به طور مشابه خطوط $y = \alpha$ و $y = \beta$ نیز با هم موازیند.

دو خط عمود بر هم:

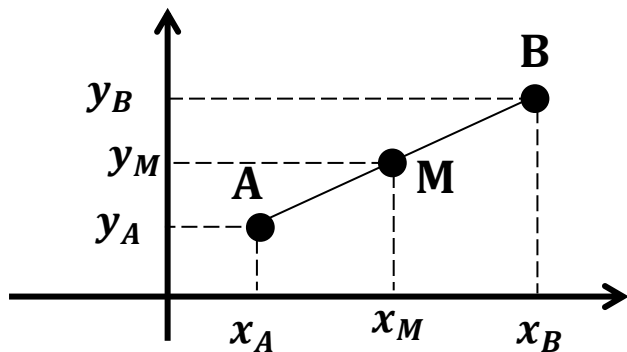
دو خط l و l' به معادلات $y = mx + b$ و $y' = m'x + b'$ را عمود بر هم گوئیم، هرگاه حاصل ضرب شیب های آن ها منفی یک شود ($m \cdot m' = -1$).

مثال: دو خط $y = 2x + 4$ و $y = -\frac{1}{2}x + 1$ عمود بر هم هستند. زیرا:

$$\begin{cases} m = 2 \\ m' = -\frac{1}{2} \Rightarrow m \cdot m' = 2 \times \frac{-1}{2} = -1 \end{cases}$$

مختصات نقطه ی وسط یک پاره خط:

پاره خط AB با شیب دلخواه m را در صفحه ی مختصات مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. مختصات نقطه ی M وسط این پاره خط برابر است با:

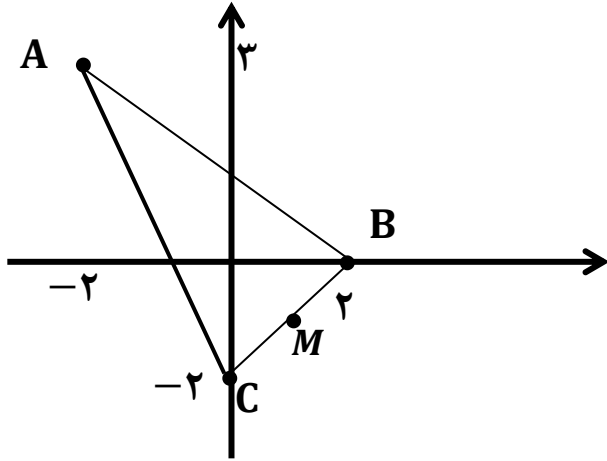


$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

یادآوری: فاصله ی دو نقطه ی $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

مثال: اگر $A(-2, 3)$ و $B(2, 0)$ و $C(0, -2)$ سه راس مثلث ABC باشند، طول میانه ی AM را به دست آورید.



حل: ابتدا نقطه ی وسط پاره خط BC را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2 + 0}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0 - 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow M(1, -1)$$

$$AM = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

فاصله ی یک نقطه از خط:

اگر خط L به معادله ی $ax + by + c = 0$ و نقطه ی $P(x_0, y_0)$ خارج از این خط مطابق شکل مفروض باشند، آن گاه منظور از فاصله ی نقطه ی P تا خط L ، طول کوتاه ترین پاره خطی است که از نقطه ی P به خط L عمود می شود. این فاصله از فرمول زیر به دست می آید:

$$d = PH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

قدر مطلق

تذکر: برای استفاده از فرمول بالا، معادله ی خط داده شده حتما باید به صورت $ax + by + c = 0$ باشد.

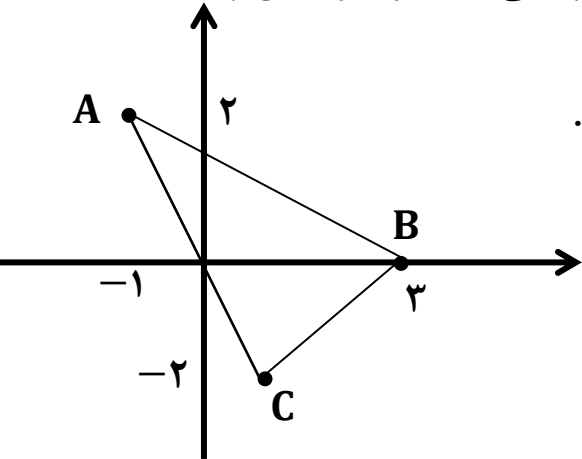
مثال: فاصله ی نقطه ی $A(1,4)$ از خط $4x + 3y = 12$ را به دست آورید.

حل: ابتدا معادله ی خط را به صورت $ax + by + c = 0$ می نویسیم.

$$4x + 3y = 12 \Rightarrow 4x + 3y - 12 = 0 \Rightarrow PH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \begin{matrix} (x_0, y_0) = (1, 4) \\ a = 4, b = 3 \end{matrix}$$

$$PH = \frac{|(4)(1) + (3)(4) - 12|}{\sqrt{(4)^2 + (3)^2}} = \frac{|4 + 12 - 12|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|4|}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

مثال: اگر $A(-1,2)$ و $B(3,0)$ و $C(1,-2)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادله ی ارتفاع AH و طول آن را به دست آورید.



حل: AH بر BC عمود است. پس شیب AH ، قرینه و معکوس شیب BC خواهد بود.

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{0 - (-2)}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow m_{AH} = -\frac{1}{1} = -1$$

حال با داشتن شیب خط AH و نقطه ی $A(-1,2)$ روی آن، معادله ی AH را از رابطه ی زیر به دست می آوریم:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -1 \times (x - (-1)) \Rightarrow y - 2 = -(x + 1) \Rightarrow y - 2 = -x - 1$$

$$\Rightarrow y = -x + 1 \Rightarrow y + x - 1 = 0$$

یافتن طول AH مانند آن است که فاصله ی نقطه ی A تا خط BC را به دست آوریم. برای این کار نیاز به معادله ی خط BC داریم.

$$y - y_B = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} (x - x_B) \Rightarrow y - 0 = \frac{-2 - 0}{1 - 3} (x - 3) \Rightarrow y = \frac{2}{2} (x - 3) \Rightarrow y = x - 3 \Rightarrow y - x + 3 = 0$$

$$PH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \xrightarrow{(x_0, y_0) = (-1, 2)} PH = \frac{|(-1)(-1) + (1)(2) + 3|}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2}} = \frac{|1 + 2 + 3|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

فاصله ی دو خط موازی:

دو خط L و L' به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ مفروضند. فاصله ی بین این دو خط از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

تذکر: در معادلات دو خط موازی همواره ضرایب x و y نظیر به نظیر ضربی از هم می باشند. از فرمول بالا زمانی می توان استفاده نمود که ضرایب x و y در دو معادله با هم مساوی باشند. بنابراین اگر ضرایب مساوی نبود، ابتدا با ضرب یا تقسیم کردن، ضرایب را در هر دو معادله یکسان کرده و سپس از فرمول بالا استفاده می کنیم.

مثال: فاصله ی دو خط موازی $2x + 4y + 2 = 0$ و $x + 2y + 3 = 0$ را به دست آورید.
حل:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 2 = 0 \Rightarrow x + 2y + 1 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - 3|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

معادلات خطی:

هر معادله به صورت $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ که در آن اعدادی ثابت و x_1, x_2, \dots, x_n متغیر (مجهول) می باشند، را یک معادله ی خطی می گوییم.

همان طور که ملاحظه می کنید، توان تمام متغیرها (مجهول ها) در یک معادله ی خطی برابر یک است.

به عنوان مثال در حالت $n = 2$ ، معادله ی $5x_1 + 4x_2 = 1$ یا $5x + 4y = 1$ معادله ی یک خط راست در صفحه ی مختصات می باشد.

دستگاه معادلات خطی: System of linear equations

دستگاه m معادله ی خطی و n مجهولی (یا یک دستگاه خطی)، مجموعه ای است شامل m معادله ی خطی n مجهولی که می توان آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \text{ معادله } m$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ مجهول}}$

در دستگاه بالا، x_1, x_2, \dots, x_n مجهولات و بقیه ضرایب معلوم های دستگاه می باشند. منظور از حل دستگاه بالا، یافتن x_1, x_2, \dots, x_n هایی است که در همه ی معادلات موجود در دستگاه صدق کند.

در دستگاه بالا اگر $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ ، در این صورت دستگاه را همگن می گوئیم.

اگر دستگاه خطی بالا، جواب نداشته باشد، دستگاه را ناسازگار و چنان چه دارای جواب باشد، آن را سازگار می گوئیم.

مثال: دستگاهی با سه معادله و سه مجهول x_1, x_2, x_3 است که جواب های این

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

دستگاه پس از حل ($x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3$) در هر سه معادله صدق می کند.

تذکر: دو دستگاه خطی را هم ارز گوئیم هرگاه جواب های آن های یکسان باشند.

مثال: دستگاه های دو معادله و دو مجهولی $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 3x - 3y = 12 \end{cases}$ و $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$ هم ارز هستند. زیرا جواب های هر دو

دستگاه ($x = 3, y = -1$) با هم برابر است.

انواع دستگاه ها:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{ (الف) دستگاه دو معادله و دو مجهول به فرم:}$$

در گذشته با حل چنین دستگاهی به روش حذفی آشنا شده ایم. برای یادآوری و تکمیل، یک مثال حل می کنیم.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -3 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2(x_1 - 3x_2 = -3) \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases} = \begin{cases} -2x_1 + 6x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow 7x_2 = 14 \Rightarrow x_2 = 2$$

حال جواب به دست آمده را در یکی از دستگاه ها قرار داده تا جواب دیگر را به دست آوریم.

$$2x_1 + x_2 = 8 \xrightarrow{x_2=2} 2x_1 + 2 = 8 \Rightarrow 2x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 3$$

بحثی راجع به تعداد جواب های دستگاه دو معادله و دو مجهول:

دستگاه دو معادله و دو مجهول، همیشه دارای یک جواب نیست. گاهی اوقات دارای بیشمار جواب و در مواقعی بدون جواب می باشد.

مثال: دستگاه $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 7 \\ 2x_1 - 6x_2 = 7 \end{cases}$ را حل کنید.

حل:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 7 \\ 2x_1 - 6x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2(x_1 - 3x_2 = 7) \\ 2x_1 - 6x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + 6x_2 = -14 \\ 2x_1 - 6x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow 0 = -7$$

تساوی به دست آمده، هیچ گاه برقرار نمی باشد. بنابراین دستگاه جواب ندارد.

روش تشخیص تعداد جواب های دستگاه دو معادله و دو مجهولی

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

(الف) اگر $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ، آن گاه دستگاه یک جواب دارد. به عنوان مثال دستگاه $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$ چون $\frac{-1}{2} \neq \frac{2}{1}$ ، دارای

یک جواب می باشد.

(ب) اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ، آن گاه دستگاه جواب ندارد. به عنوان مثال دستگاه $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$ چون $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{5}$ دارای جواب نیست.

(ج) اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ، آن گاه دستگاه بیشمار جواب دارد. به عنوان مثال دستگاه $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$ چون

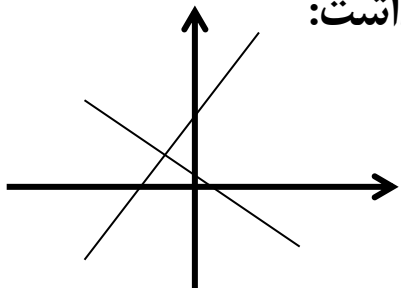
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

بنابراین بیشمار جواب دارد.

بررسی تعداد جواب های دستگاه دو معادله و دو مجهول به روش هندسی:

دستگاه دو معادله و دو مجهولی $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. می دانیم نمودار هر یک از معادلات این دستگاه خطی راست در صفحه ی مختصات می باشد. منظور از حل دستگاه بالا، در حقیقت یافتن نقاط تلاقی این دو خط راست می باشد که با توجه به موقعیت های دو خط نسبت به هم، یکی از سه حالت زیر را خواهیم داشت:

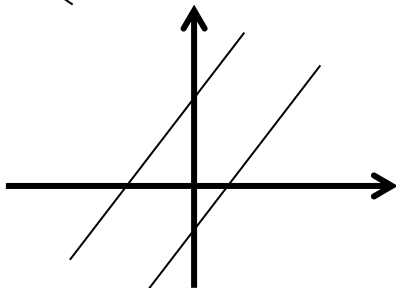
(الف) دو خط متقاطعند.



در این حالت مختصات نقاط برخورد جواب های معادله می باشند.

(ب) دو خط موازیند.

در این حالت دو خط همدیگر را قطع نمی کنند. بنابراین دستگاه جواب ندارد.



(ج) دو خط بر هم منطبقند.

در این حالت دو خط روی هم قرار گرفته و در بی شمار نقطه همدیگر را قطع می کنند.

بنابراین دستگاه بی شمار جواب دارد

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \quad \text{ب) دستگاه دو معادله و سه مجهولی}$$

در این حالت چون تعداد مجهولات بیش تر از تعداد معادله ها می باشد، دستگاه بی شمار جواب دارد. مگر آن که معادلات داده شده با یک دیگر تناقض داشته باشند که در این صورت جواب نداریم.

مثال: دستگاه های معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1(x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4) \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = +4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

جمع دو معادله

$$\xrightarrow{\text{جمع دو معادله}} x_1 - x_2 = 8 \Rightarrow x_1 = x_2 + 8 \text{ (I)}$$

در این رابطه x_1 بر حسب x_2 می باشد. مقدار x_1 با توجه به اینکه x_2 چه عددی است، به دست می آید.

حال با جایگذاری رابطه ی (I) در معادله ی اول دستگاه داده شده، x_3 را نیز بر حسب x_2 به دست می آوریم.

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \xrightarrow{x_1 = x_2 + 8} x_2 + 8 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \Rightarrow 3x_2 - 3x_3 = -12 \xrightarrow{\div 3} x_2 - x_3 = -4$$

$$\Rightarrow -x_3 = -x_2 - 4 \Rightarrow x_3 = x_2 + 4$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 8 \\ x_3 = x_2 + 4 \\ x_2: \text{ عدد حقیقی دلخواه} \end{cases}$$

بنابراین جواب دستگاه داده شده برابر است با:

به عبارت دیگر دستگاه داده شده، بی نهایت جواب دارد. زیرا به ازای هر x_2 دلخواهی که به دستگاه می دهیم، جوابی برای x_1 و x_3 به دست می آید. به عنوان مثال داریم:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 8, x_3 = 4 \\ x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 9, x_3 = 5 \end{cases}$$

به همین ترتیب می توانیم بی شمار مقدار دیگر برای x_2 در نظر بگیریم و با جایگذاری در جواب دستگاه، بی شمار مقدار برای x_1 و x_3 به دست آوریم.

$$ب) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 8 \\ 6x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(3x_1 + 4x_2 - x_3 = 8) \\ 6x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 16 \\ 6x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

سمت چپ معادلات دستگاه بالا باهم برابر است. اما سمت راست آنها متفاوت است. که این یک تناقض است. در چنین حالتی دستگاه جواب ندارد.

$$ج) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \text{ (ج) دستگاه سه معادله و سه مجهولی}$$

برای حل دستگاه بالا مراحل زیر را اجرا می کنیم:

مرحله ی اول: می توان (مثلا) معادلات اول و دوم را با هم و (مثلا) معادلات اول و سوم را نیز با هم درون دستگاههای جداگانه قرار داده و سپس یکی از متغیرها (مثلا x) را در هر دو دستگاه جدید حذف کنیم.

$$\text{به عنوان مثال در دستگاه} \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - 3y + 2z = 14 \\ 3x + y - z = -2 \end{cases} \text{ داریم:}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - 3y + 2z = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2(x + 2y + 3z = 6) \\ 2x - 3y + 2z = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 4y - 6z = -12 \\ 2x - 3y + 2z = 14 \end{cases} \Rightarrow -7y - 4z = 2 \text{ (I)}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 3x + y - z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3(x + 2y + 3z = 6) \\ 3x + y - z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - 6y - 9z = -18 \\ 3x + y - z = -2 \end{cases} \Rightarrow -5y - 10z = -20 \text{ (II)}$$

مرحله ی دوم: معادلات به دست آمده بعد از حذف متغیر(در این جا x) را در یک دستگاه قرار داده، سپس دستگاه را حل می کنیم.

$$\begin{cases} -7y - 4z = 2 \\ -5y - 10z = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(-7y - 4z = 2) \\ -2(-5y - 10z = -20) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -35y - 20z = 10 \\ +10y + 20z = 40 \end{cases} \Rightarrow -25y = 50 \Rightarrow y = -2$$

حال جواب به دست آمده را در یکی از دستگاه ها قرار داده تا جواب دیگر را به دست آوریم.

$$-7y - 4z = 2 \xrightarrow{y=-2} -7(-2) - 4z = 2 \Rightarrow 14 - 4z = 2 \Rightarrow -4z = -12 \Rightarrow z = 3$$

مرحله ی سوم: مقادیر به دست آمده را در یکی از معادلات دستگاه داده شده قرار می دهیم تا مجهول سوم نیز به دست آید.

$$x + 2y + 3z = 6 \xrightarrow{y=-2, z=3} x + 2(-2) + 3(3) = 6 \Rightarrow x - 4 + 9 = 6 \Rightarrow x = 6 - 5 = 1$$

تذکر: اگر دستگاه سه معادله و سه مجهولی به فرم $\begin{cases} \frac{x + \alpha}{P} = \frac{y + \beta}{q} = \frac{z + \gamma}{r} \\ ax + by + cz = d \end{cases}$ بیان شود، کافی است هر سه کسر

داده شده در $\frac{x + \alpha}{P} = \frac{y + \beta}{q} = \frac{z + \gamma}{r}$ را مساوی t قرار داده و سپس سه مجهول را بر حسب t به دست آورده و در

نهایت با جایگذاری مجهولات بر حسب t در معادله $ax + by + cz = d$ ابتدا t را به دست آورده و در نهایت با داشتن t ، تمامی متغیرها حاصل می شوند.

مثال: دستگاه $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \\ x + y + z = 9 \end{cases}$ را حل کنید.

$$\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2t$$

$$\frac{y}{3} = t \Rightarrow y = 3t$$

$$\frac{z}{4} = t \Rightarrow z = 4t$$

حل:

$$x + y + z = 9 \xrightarrow{x=2t, y=3t, z=4t} 2t + 3t + 4t = 9 \Rightarrow 9t = 9 \Rightarrow t = 1$$

با به دست آمدن t تمامی مجهولات محاسبه می شوند:

$$x = 2t \xrightarrow{t=1} x = 2$$

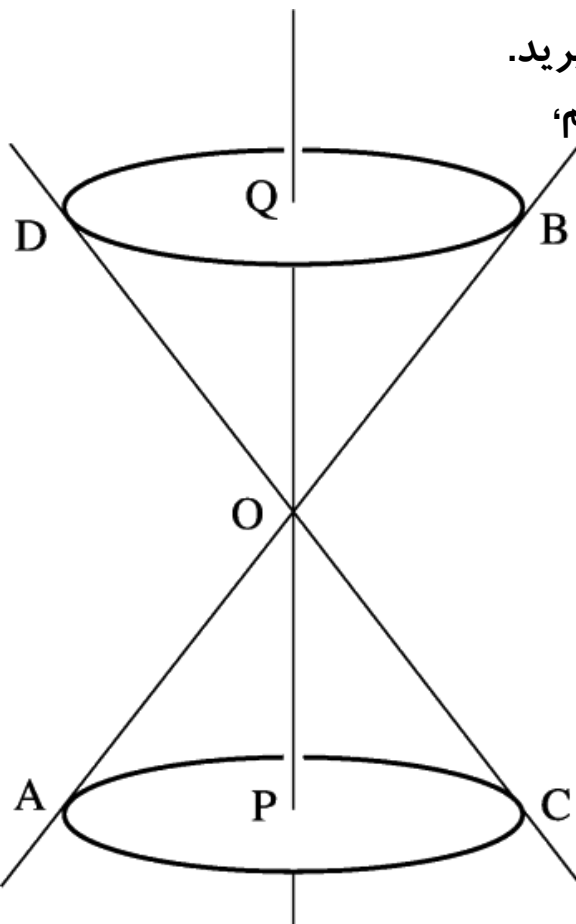
$$y = 3t \xrightarrow{t=1} y = 3$$

$$z = 4t \xrightarrow{t=1} z = 4$$

منحنی های درجه دوم:

سطح مخروطی دوار:

دو خط متقاطع AB و PQ که زاویه ی بین آن ها θ ($\theta < 90^\circ$) است، را در نظر بگیرید. اگر خط PQ را ثابت نگه داشته و خط AB را حول خط PQ با زاویه ی θ دوران دهیم، سطحی مانند شکل مقابل به دست می آید که به آن **سطح مخروطی دوار** می گوئیم.



در این شکل، نقطه ی O را راس، خط ثابت PQ را محور سطح مخروطی دوار و خط AB را مولد سطح مخروطی دوار می نامیم.

حال اگر صفحه ای این سطح مخروطی دوار را قطع کند، منحنی هایی که در محل برخورد صفحه و سطح مخروطی دوار به وجود می آیند (فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی دوار) را **مقاطع مخروطی** می گوئیم.

در معادله ی این منحنی ها، x یا y و یا هر دو از درجه ی ۲ می باشند و به همین دلیل آن ها را منحنی های درجه دوم می نامیم.

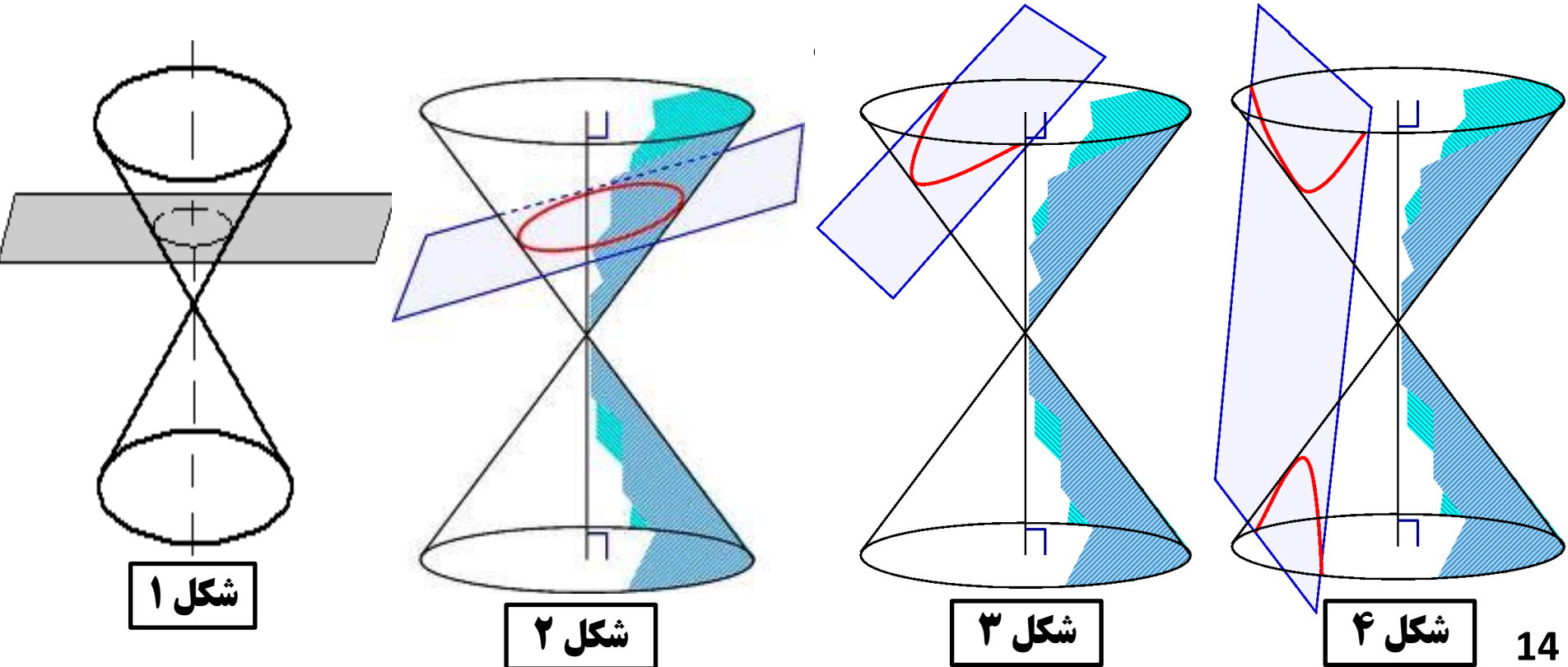
بسته به اینکه صفحه با چه وضعیتی سطح مخروطی دوار را قطع کند، چهار منحنی درجه دوم مهم زیر می توانند به دست آیند:

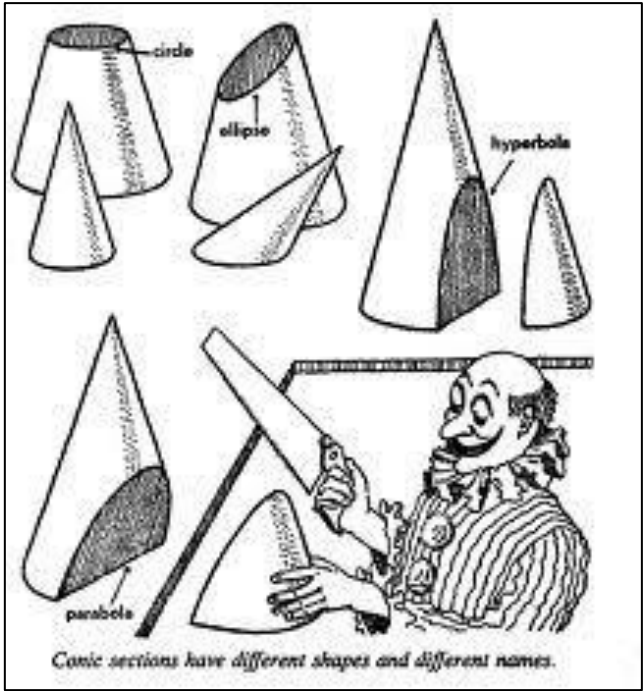
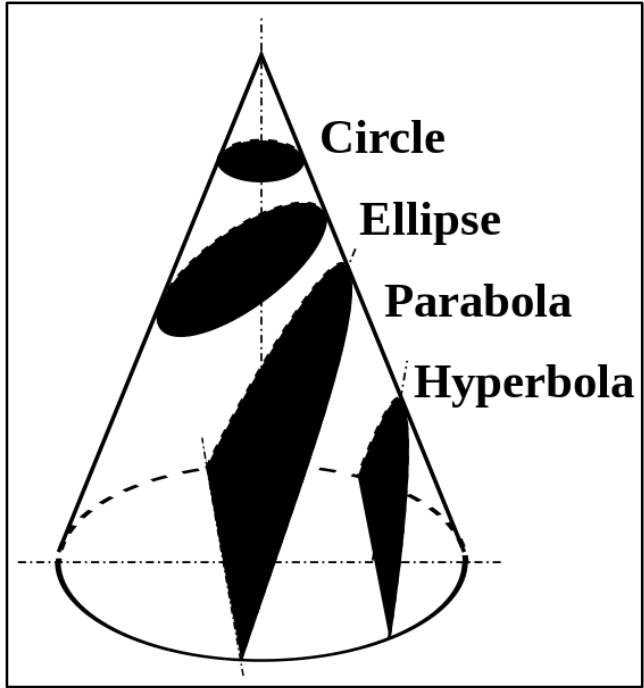
۱- **دایره:** اگر مانند شکل ۱، صفحه به صورت افقی مخروط را قطع کند، منحنی ایجاد شده دایره می باشد.
(صفحه عمود بر محور سطح مخروطی دوار)

۲- **بیضی:** اگر مانند شکل ۲، صفحه به صورت مایل مخروط را قطع کند، منحنی ایجاد شده یک بیضی می باشد.

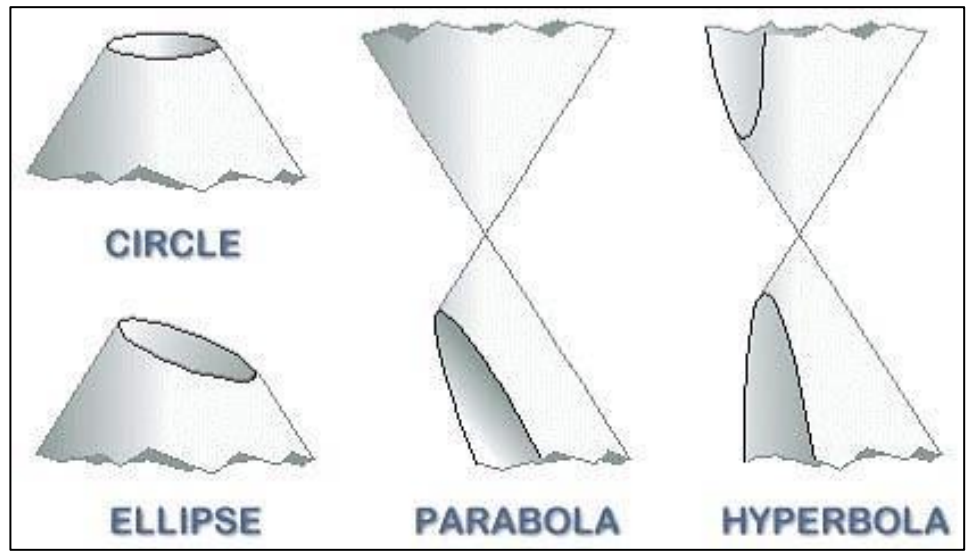
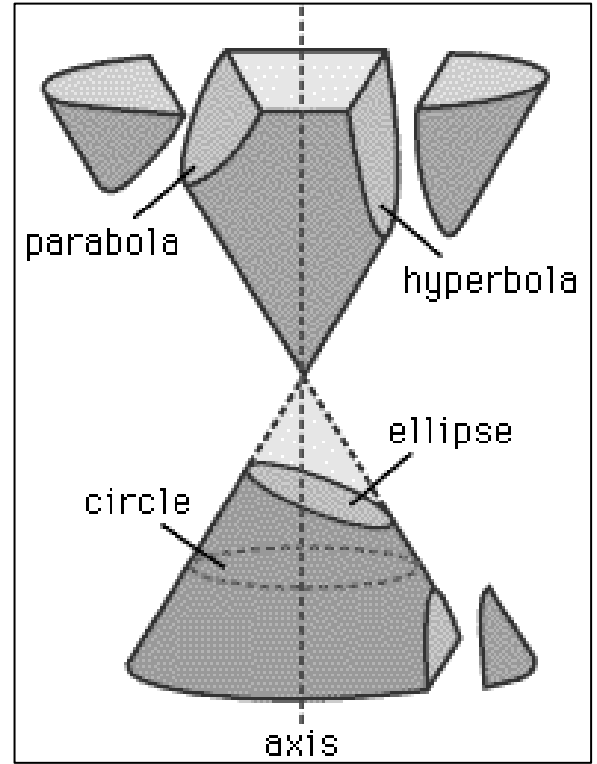
۳- **سهمی:** اگر مانند شکل ۳، صفحه را باز هم مایل تر کنیم، به طوری که با یکی از مولدهای سطح مخروطی دوار موازی باشد، منحنی ایجاد شده، یک سهمی است:

۴- **هذلولی:** اگر مانند شکل ۴، صفحه موازی محور مخروط باشد، منحنی ایجاد شده را یک هذلولی می نامیم.
در ادامه به مطالعه ی ویژگی های این منحنی های درجه دو می پردازیم.



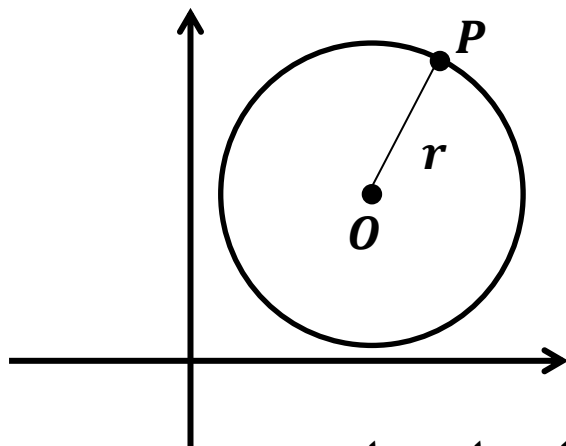


Animation



دایره: (Circle)

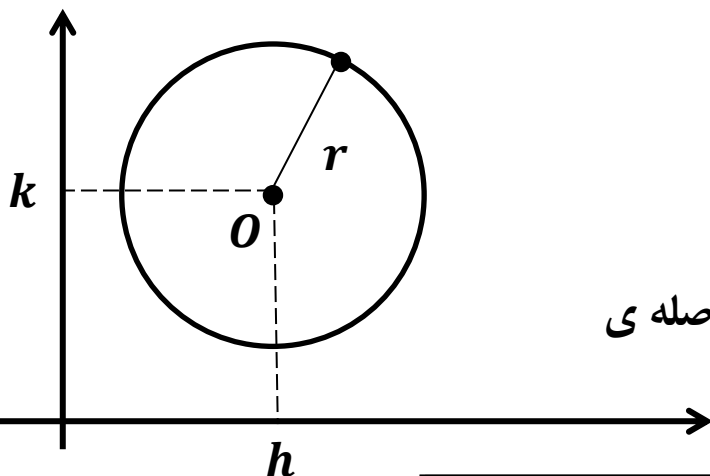
مجموعه‌ی نقاطی از صفحه‌ی مختصات (مانند P) که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت (O)، مقداری ثابت (r) باشد، دایره نامیده می‌شود.



نقطه ثابت O را مرکز دایره و مقدار ثابت r را شعاع دایره می‌نامیم.

معادله‌ی دایره: اگر نقطه‌ی $O(h, k)$ مرکز یک دایره باشد و اندازه‌ی شعاع این دایره برابر r باشد، معادله‌ی دایره به صورت زیر خواهد بود:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

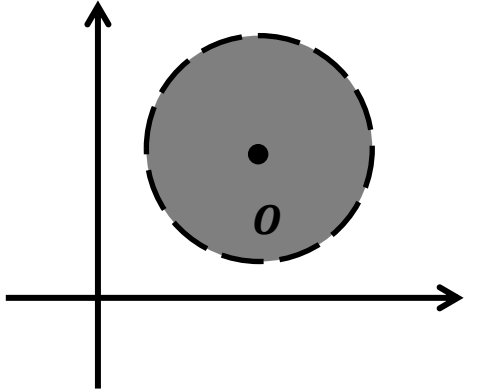


برهان: فرض کنیم نقطه‌ی $P(x, y)$ روی این دایره باشد، چون فاصله‌ی P از O برابر مقدار ثابت r است، داریم:

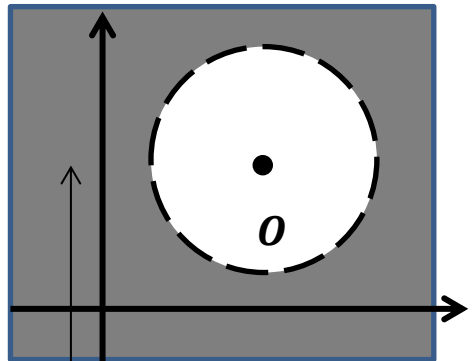
$$|OP| = r \Rightarrow \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

حال اگر فاصله‌ی نقطه‌ی P از صفحه‌ی مختصات، از مرکز دایره $O(h, k)$ ، کم‌تر از شعاع دایره r باشد، آن نقطه درون دایره، و اگر این فاصله بیش‌تر از شعاع دایره باشد، نقطه خارج از دایره قرار دارد.

به عبارت دیگر، نامعادله $(x - h)^2 + (y - k)^2 < r^2$ مجموعه نقاط درون دایره به مرکز $O(h, k)$ و شعاع r را مشخص می کند. نامعادله $(x - h)^2 + (y - k)^2 > r^2$ مجموعه نقاط خارج از این دایره را مشخص می کند.



$$(x - h)^2 + (y - k)^2 < r^2$$



$$(x - h)^2 + (y - k)^2 > r^2$$

17

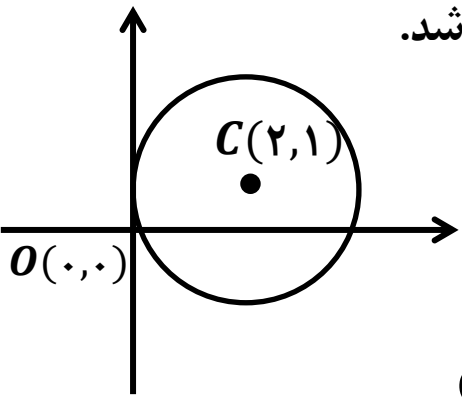
مثال: معادله ی دایره ای به شعاع ۳ و مرکز $O(-3, 2)$ را بنویسید.

حل:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \xrightarrow{(h, k) = (-3, 2), r = 3} (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

مثال: معادله ی دایره ای را بنویسید که از نقطه ی $O(0, 0)$ گذشته و $C(2, 1)$ مرکز آن باشد.

حل: با محاسبه ی OC شعاع دایره را به دست می آوریم:



$$r = OC = \sqrt{(2 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

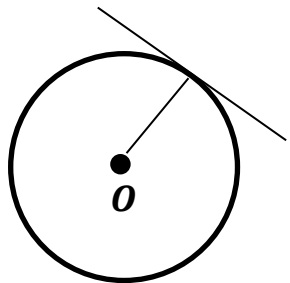
حال با جایگذاری در معادله دایره داریم:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \xrightarrow{(h, k) = (2, 1), r = \sqrt{5}} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

مثال: معادله ی دایره ای را بنویسید که مرکزش $C(1,2)$ بوده و خط $3x + 4y + 1 = 0$ بر آن مماس باشد.

حل:

هرگاه خطی بر دایره مماس شود، فاصله ی مرکز دایره از آن خط، برابر شعاع آن دایره است. زیرا شعاعی از دایره که از نقطه ی تماس می گذرد، بر خط مماس عمود است. بنابراین برای به دست آوردن شعاع دایره کافی است فاصله ی مرکز دایره از خط مماس را بیابیم.



$$r = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 + 1|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{|3 + 8 + 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|12|}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \xrightarrow[r = \frac{12}{5}]{(h, k) = (1, 2)} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{144}{25}$$

معادله ی گسترده ی دایره:

همان طور که گفتیم معادله ی یک دایره به مرکز $O(h, k)$ و به شعاع r به صورت زیر است:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

حال با توجه به اتحاد مربع دو جمله ای داریم:

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

در فرمول بالا، h, k, r ، اعداد حقیقی ثابت هستند. پس اگر قرار دهیم:

$$h^2 + k^2 - r^2 = F \text{ و } -2y = E, -2h = D$$

معادله ی زیر به دست می آید که به آن فرم گسترده ی معادله ی دایره می گوییم: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

هرگاه این فرم از معادله ی دایره را داشته باشیم، می توانیم مرکز و شعاع دایره را از روابط زیر به دست آوریم:

$$\text{مرکز} : O \left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2} \right) \qquad \text{شعاع} : r = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

برهان:

$$\left. \begin{array}{l} D = -2h \Rightarrow h = -\frac{D}{2} \\ E = -2k \Rightarrow k = -\frac{E}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow O \left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2} \right) = (h, k)$$

$$D^2 + E^2 - 4F = (-2h)^2 + (-2k)^2 - 4(h^2 + k^2 - r^2) = 4h^2 + 4k^2 - 4h^2 - 4k^2 + 4r^2 = 4r^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2} = \frac{1}{2} (2r) = r$$

تذکره: در فرم گسترده ی معادله ی دایره، ممکن است x^2 و y^2 ضریب عددی داشته باشند که حتما باهم برابر هستند.

(در غیر این صورت معادله ی دایره نمی باشد.) در این صورت برای پیدا کردن مرکز و شعاع، ابتدا طرفین معادله را بر این ضریب عددی تقسیم می کنیم.

مثال: مرکز و شعاع دایره به معادله ی $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 8 = 0$ را به دست آورید.

حل:

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 8 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 - \underset{\substack{\uparrow D \\ -2}}{2}x + \underset{\substack{\uparrow E \\ 3}}{3}y - \underset{\substack{\uparrow F \\ -4}}{4} = 0$$

$$O \left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2} \right) = \left(\frac{-(-2)}{2}, \frac{-3}{2} \right) = \left(1, -\frac{3}{2} \right) \qquad r = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 3^2 - 4(-4)} = \frac{1}{2} \sqrt{29}$$

مثال: مقدار F را طوری تعیین کنید که $x^2 + y^2 - 2x + 6y + F = 0$ معادله ی دایره ای به شعاع ۲ را مشخص کند.

حل:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F} \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 6^2 - 4(F)} \Rightarrow 4 = \sqrt{4 + 36 - 4F} \Rightarrow 4 = \sqrt{40 - 4F}$$

طرفین به توان ۲

$$\Rightarrow 16 = 40 - 4F \Rightarrow 16 - 40 = -4F \Rightarrow -24 = -4F \Rightarrow F = 6$$

مثال: معادله ی دایره ای را بنویسید که از نقاط $A(0,0)$ ، $B(1,-1)$ و $C(1,6)$ بگذرد. مرکز و شعاع دایره را نیز بیابید.

حل: برای حل این مثال از معادله ی گسترده ی دایره استفاده می کنیم. می دانیم معادله گسترده ی دایره به صورت

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ است. برای نوشتن معادله ی دایره، کافی است پارامترهای } D, E \text{ و } F \text{ را به}$$

دست آوریم. نقاط A ، B و C روی دایره قرار دارند. پس مختصات آن ها در معادله ی دایره صدق می کند.

$$A(0,0) \xrightarrow{x=0, y=0} 0^2 + 0^2 + D(0) + E(0) + F = 0 \Rightarrow F = 0$$

$$B(1,-1) \xrightarrow{x=1, y=-1, F=0} 1^2 + (-1)^2 + D(1) + E(-1) + 0 = 0 \Rightarrow D - E = -2 \text{ (I)}$$

$$C(1,6) \xrightarrow{x=1, y=6, F=0} 1^2 + 6^2 + D(1) + E(6) + 0 = 0 \Rightarrow D + 6E = -37 \text{ (II)}$$

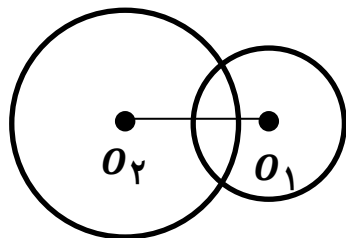
$$\xrightarrow{\text{(I) و (II)}} \begin{cases} D - E = -2 \\ D + 6E = -37 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} D = -7, E = -5$$

بنابراین معادله ی گسترده ی دایره به صورت $x^2 + y^2 - 7x - 5y = 0$ می باشد.

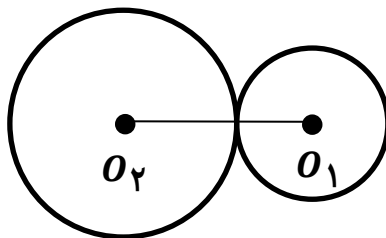
$$O\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right) = \left(\frac{-(-7)}{2}, \frac{-(-5)}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2} \sqrt{(-7)^2 + (-5)^2 - 4(0)} = \frac{1}{2} \sqrt{74}$$

وضعیت دو دایره نسبت به هم:

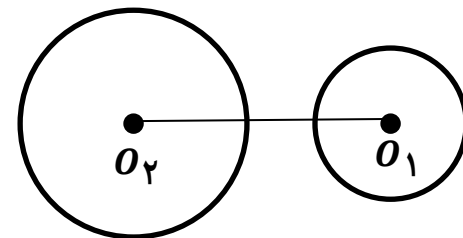
دو دایره یکی به مرکز O_1 و شعاع r_1 و دیگری به مرکز O_2 و شعاع r_2 را در نظر می گیریم. وضعیت این دو دایره نسبت به هم می تواند به یکی از حالت های زیر باشد:



ج

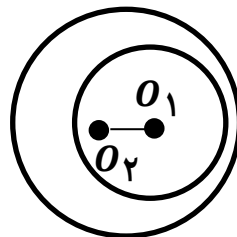
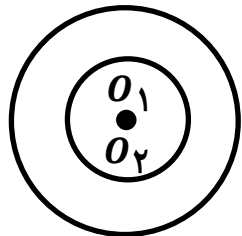


ب

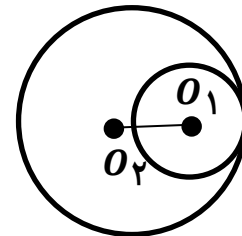


الف

و



ه



د

حال در هر یک از این حالت ها، اندازه ی فاصله ی مرکزهای دو دایره یعنی پاره خط $O_2 O_1$ را با $r_1 + r_2$ و $|r_1 - r_2|$ مقایسه می کنیم.

الف) در این حالت، دو دایره **متخارج** (خارج از هم) هستند و طبق شکل مشخص است که فاصله ی مرکزهای دو دایره از مجموع شعاع ها بیشتر است.

ب) در این حالت، دو دایره **مماس خارج** هستند و فاصله های O_2 و O_1 برابر مجموع شعاع های دو دایره است.

$$O_1 O_2 = r_1 + r_2$$

ج) در این حالت، دو دایره **مقاطع** هستند و هم دیگر را در دو نقطه قطع می کنند و داریم:

$$|r_1 - r_2| < O_1 O_2 < r_1 + r_2$$

$$O_1 O_2 = |r_1 - r_2|$$

(د) در این حالت، دو دایره مماس داخل هستند و داریم:

$$0 < O_1 O_2 < |r_1 - r_2|$$

(ه) در این حالت، دو دایره متداخل هستند و داریم:

(و) این حالت، حالتی خاص از دو دایره‌ی متداخل است که مرکزهای دو دایره بر هم منطبق شده و دو دایره هم مرکز هستند. پس $O_1 O_2 = 0$

بنابراین برای تعیین وضعیت دو دایره، اندازه‌ی پاره خط $O_1 O_2$ را پیدا کرده و با مقایسه‌ی آن با $r_1 + r_2$ و $|r_1 - r_2|$ به یکی از حالت‌های گفته شده می‌رسیم.

مثال: وضعیت دایره‌های زیر را نسبت به هم بررسی کنید.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$O_1 \left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2} \right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{-(-4)}{2} \right) = (-1, 2)$$

$$O_2 \left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2} \right) = \left(\frac{-(-2)}{2}, \frac{-4}{2} \right) = (1, -2)$$

$$O_1 O_2 = \sqrt{(x_{O_1} - x_{O_2})^2 + (y_{O_1} - y_{O_2})^2} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

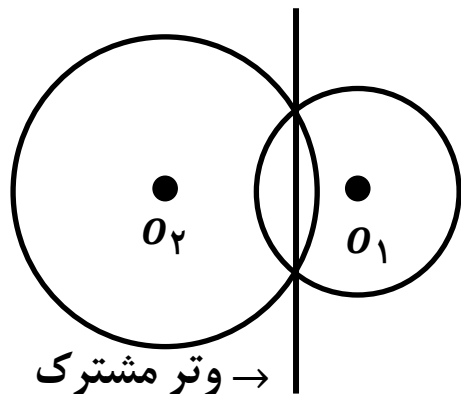
$$r_1 = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + (-4)^2 - 4(0)} = \frac{1}{2} \sqrt{20} = \sqrt{5}$$

$$r_2 = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4(-4)} = \frac{1}{2} \sqrt{18} = 3\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 = 4\sqrt{5} \\ |r_1 - r_2| = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

$\Rightarrow O_1 O_2 = |r_1 - r_2| \Rightarrow$ دو دایره مماس داخل هستند

وتر مشترک دو دایره ی متقاطع:



در حالتی که دو دایره متقاطع باشند و هم دیگر را در دو نقطه قطع کنند،
 $|r_1 - r_2| < O_1 O_2 < r_1 + r_2$ ، خطی که از دو نقطه ی تقاطع می گذرد را وتر مشترک دو دایره می گوئیم.

معادله ی وتر مشترک دو دایره:

فرض کنیم معادله ی دو دایره ی متقاطع به صورت های

$$\begin{cases} C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \\ C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \end{cases}$$
 باشد.

در این صورت معادله ی وتر مشترک از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$C_1 - C_2 = x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 - (x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$$

$$\Rightarrow (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0$$

مثال: معادله ی وتر مشترک دایره های $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 14 = 0$ بنویسید.

حل:

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0 \Rightarrow (6 - (-4))x + (8 - (-6))y + (0 - (-14)) = 0$$

$$\Rightarrow 10x + 14y + 14 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر 2}} 5x + 7y + 7 = 0$$

مثال: ابتدا معادله وتر مشترک دو دایره به معادله های زیر را به دست آورید.

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + 2x + 2y - 24 = 0$$

سپس با استفاده از معادله وتر مشترک مختصات نقاط تقاطع دو دایره را به دست آورید.

حل:

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0 \Rightarrow (4 - 2)x + (2 - 2)y + (-20 - (-24)) = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 4 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر 2}} x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \text{وتر مشترک موازی محور } y \text{ ها است}$$

برای یافتن نقاط تقاطع دو دایره، چون این نقاط روی دو دایره و روی وتر مشترک قرار دارند، مختصات آن ها را می توانیم با قطع دادن وتر مشترک با یکی از دایره ها، به دست آوریم:

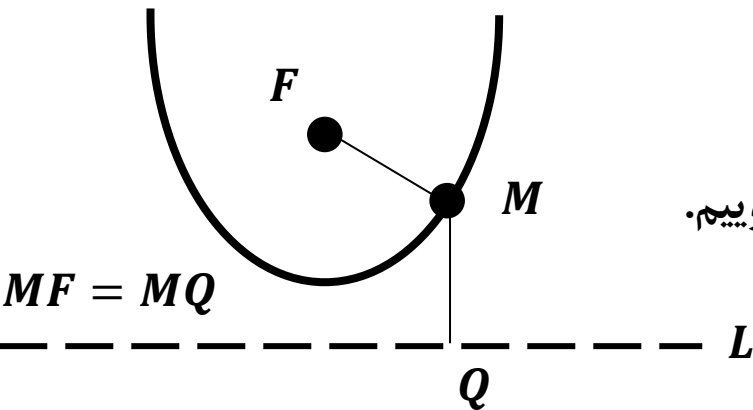
$$\begin{cases} x = -2 \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-2)^2 + y^2 + 4(-2) + 2y - 20 = 0 \Rightarrow 4 + y^2 - 8 + 2y - 20 = 0 \Rightarrow y^2 + 2y - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (y - 4)(y + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = -6 \end{cases} \xrightarrow{\text{مختصات نقاط تقاطع دو دایره}} A = (-2, 4), B = (-2, -6)$$

سهمی: (Parabola)

سهمی، مجموعه‌ی تمام نقاطی از صفحه است که فاصله‌ی آن‌ها از یک نقطه‌ی ثابت (F) و یک خط ثابت (L) یکسان می‌باشد. نقطه‌ی ثابت F را **کانون سهمی** و خط ثابت L را **خط هادی سهمی** می‌گوییم.



اصطلاحات مهم در سهمی:

- (۱) **محور سهمی (محور تقارن سهمی):** خطی است که از کانون سهمی گذشته و بر خط هادی عمود است.
- (۲) **راس سهمی:** نقطه‌ی تلاقی محور تقارن سهمی با سهمی را راس سهمی می‌گوییم و آن را با حرف S نمایش می‌دهیم.
- (۳) **فاصله‌ی کانونی سهمی:** فاصله‌ی راس سهمی از کانون F یا فاصله‌ی راس سهمی از خط هادی را فاصله‌ی کانونی نامیده و آن را با P نمایش می‌دهیم.

انواع سهمی:

الف) سهمی افقی: سهمی را افقی می‌گوییم هرگاه محور سهمی موازی محور x ها باشد. معادله‌ی سهمی افقی اگر مختصات راس سهمی $S(\alpha, \beta)$ و فاصله‌ی کانونی عدد مثبت P باشد، به یکی از حالات زیر است:

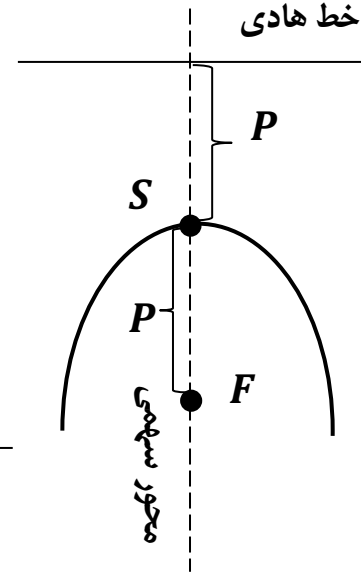
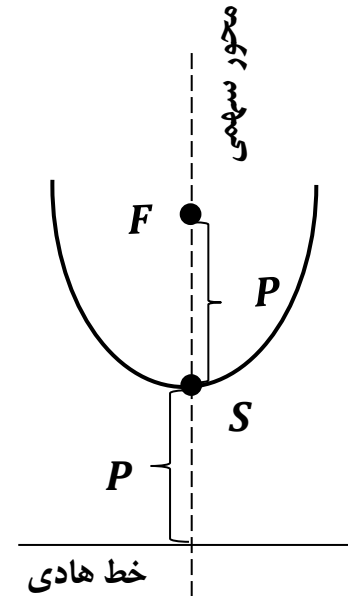
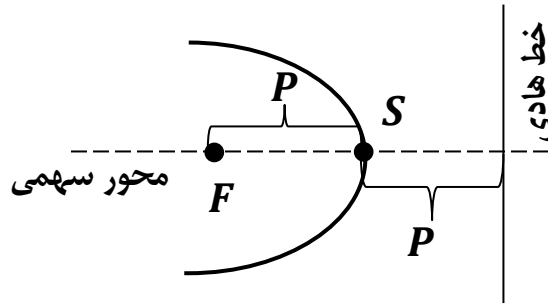
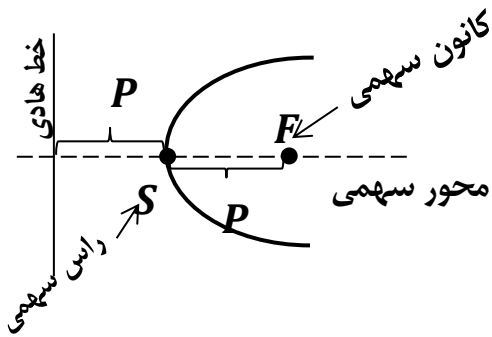
شکل الف : دهانه رو به راست : $(y - \beta)^2 = 4P(x - \alpha)$

شکل ب : دهانه رو به چپ : $(y - \beta)^2 = -4P(x - \alpha)$

الف) سهمی قائم: سهمی را قائم گوییم هرگاه محور سهمی موازی محور y ها باشد. معادله ی سهمی قائم اگر مختصات راس سهمی $S(\alpha, \beta)$ و فاصله ی کانونی عدد مثبت P باشد، به یکی از حالات زیر است:

شکل ج $(x - \alpha)^2 = 4P(y - \beta)$: دهانه رو به بالا

شکل د $(x - \alpha)^2 = -4P(y - \beta)$: دهانه رو به پایین



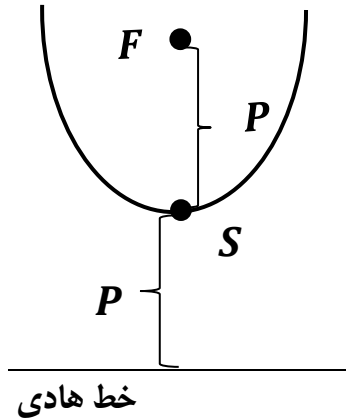
تذکره ۱: اگر در معادله ی سهمی، x از درجه ی دوم باشد، سهمی قائم و اگر y از درجه ی دوم باشد، سهمی افقی است. به عنوان مثال، معادله ی $(x - 1)^2 = y + 1$ ، بیانگر یک سهمی قائم و معادله ی $(y + 2)^2 = 4x$ بیانگر یک سهمی افقی است.

تذکره ۲: در معادله ی استاندارد سهمی، اگر ضریب پیرانتزی که در آن متغیر از درجه اول می باشد، مثبت (یا منفی) باشد، دهانه ی سهمی به سمت جهت مثبت (یا منفی) محورها می باشد.

به عنوان مثال، در سهمی قائم به معادله $(x - 3)^2 = -4(y + 2)$ ، چون ضریب پرانتز $(y + 2)$ که متغیر y آن از درجه ی اول است؛ منفی می باشد، نتیجه می گیریم که این سهمی قائم، رو به جهت منفی محور y ها (رو به پایین) قرار دارد و در سهمی افقی $(y - 1)^2 = 3(x + 2)$ ، چون ضریب پرانتز $(x + 2)$ مثبت است، پس دهانه ی این سهمی افقی، رو به جهت مثبت محور x ها (رو به راست) قرار دارد.

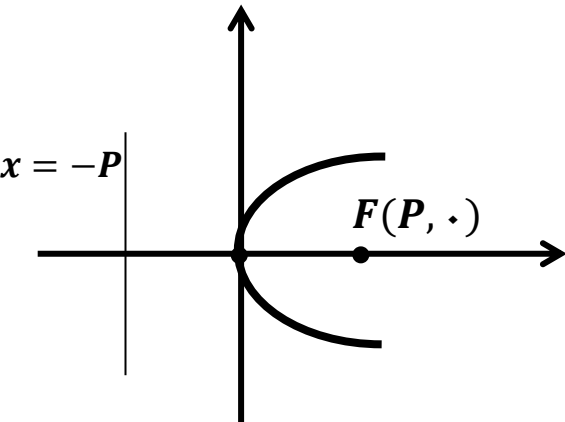
تذکر ۳: در سهمی افقی، راس سهمی (S) و کانون سهمی (F) دارای عرض یکسان $(y_S = y_F)$ و در سهمی قائم، راس سهمی (S) و کانون سهمی (F) دارای طول یکسان $(x_S = x_F)$ می باشند.

از این مطلب برای تشخیص افقی یا قائم بودن یک سهمی نیز استفاده می شود. به عنوان مثال، سهمی که مختصات راس آن $S(2, 3)$ و مختصات کانون آن $F(5, 3)$ باشد، یک سهمی افقی است. زیرا عرض های راس و کانون آن، با هم برابر است.



تذکر ۴: فاصله ی راس (S) تا کانون (F) برابر P و فاصله ی راس (S) تا خط هادی نیز P می باشد. اما فاصله ی کانون تا خط هادی $2P$ می باشد.

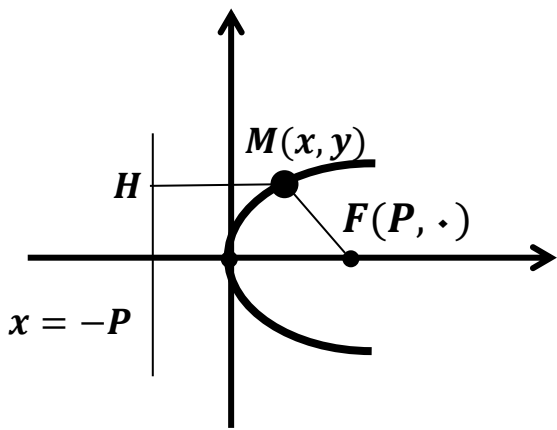
تذکر ۵: در سهمی افقی (قائم)، خط هادی موازی محور y ها (x ها) بوده و معادله ی آن به صورت $x = a$ $(y = b)$ می باشد.



مثال: با توجه به شکل مقابل، نشان دهید $y^2 = 4Px$ معادله ی سهمی است که راس آن واقع بر مبدا مختصات است و دهانه ی آن رو به راست باز می شود.

حل: بنابر تعریف سهمی، فاصله ی هر نقطه مانند $M(x, y)$ روی سهمی از کانون و خط هادی یکسان است.

بنابراین با توجه به شکل با فرض آن که مختصات کانون $F(P, \cdot)$ و معادله ی خط هادی $x = -P \Rightarrow x + P = \cdot$ باشد، داریم:



$$MF = \sqrt{(x_M - x_F)^2 + (y_M - y_F)^2} = \sqrt{(x - P)^2 + (y - \cdot)^2}$$

$$\Rightarrow MF = \sqrt{(x - P)^2 + y^2}$$

MH : $x + P = \cdot$ فاصله نقطه M از خط $= \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \times x + \cdot \times y + P|}{\sqrt{1^2 + \cdot^2}} = \frac{x + P}{1} = x + P$

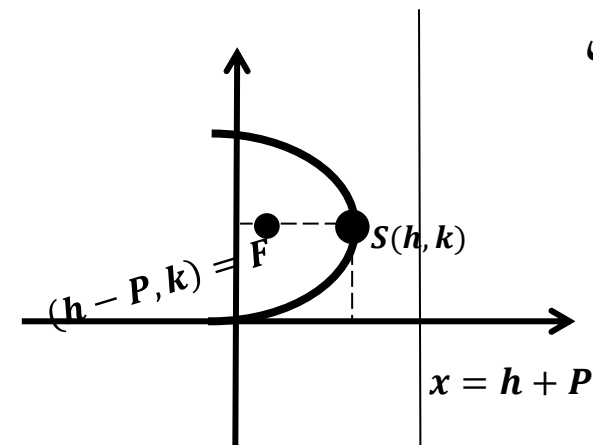
$MF = MH \Rightarrow \sqrt{(x - P)^2 + y^2} = x + P \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \left(\sqrt{(x - P)^2 + y^2} \right)^2 = (x + P)^2$

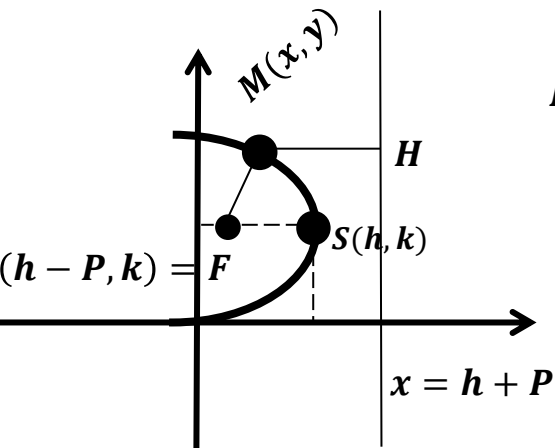
$\Rightarrow (x - P)^2 + y^2 = (x + P)^2 \Rightarrow x^2 + P^2 - 2Px + y^2 = x^2 + P^2 + 2Px \Rightarrow y^2 = 4Px$

مثال: با توجه به شکل مقابل، نشان دهید $(y - k)^2 = -4P(x - h)$ معادله ی سهمی است که رأس آن $S(h, k)$ است و دهانه ی آن رو به چپ باز می شود.

حل: بنابر تعریف سهمی، فاصله ی هر نقطه مانند $M(x, y)$ روی سهمی از کانون و خط هادی یکسان است.

بنابراین با توجه به شکل با فرض آن که مختصات کانون $F(h - P, k)$ و معادله ی خط هادی $x = h + P \Rightarrow x - h - P = \cdot$ باشد، داریم:





$$MF = \sqrt{(x_M - x_F)^2 + (y_M - y_F)^2} = \sqrt{(x - (h - P))^2 + (y - k)^2}$$

$$\Rightarrow MF = \sqrt{(x - h + P)^2 + (y - k)^2}$$

MH: $x - h - P =$ فاصله نقطه M از خط $= \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \times x + 0 \times y - h - P|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{x - h - P}{1}$
 $= x - h - P$

$MF = MH \Rightarrow \sqrt{(x - h + P)^2 + (y - k)^2} = x - h - P$ طرفین به توان ۲

$$\left(\sqrt{(x - h + P)^2 + (y - k)^2} \right)^2 = (x - h - P)^2 \Rightarrow (x - h + P)^2 + (y - k)^2 = (x - h - P)^2$$

حال با استفاده از اتحاد $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ تساوی بالا را ساده می کنیم.

$$x^2 + (-h)^2 + P^2 + 2x(-h) + 2xP + 2(-h)P + y^2 + k^2 - 2yk = x^2 + (-h)^2 + (-P)^2 + 2x(-h) + 2x(-P) + 2(-h)(-P) \Rightarrow x^2 + h^2 + P^2 - 2xh + 2xP - 2hP + y^2 + k^2 - 2yk = x^2 + h^2 + P^2 - 2xh - 2xP + 2hP$$

پس از ساده کردن $\Rightarrow y^2 + k^2 - 2yk = -2xP + 2hP - 2xP + 2hP \Rightarrow y^2 + k^2 - 2yk = -4xP + 4hP$

$$\Rightarrow (y - k)^2 = -4P(x - h)$$

معادله ی گسترده ی سهمی:

هر معادله به صورت $Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$ یا $Ax^2 + By + Cx + D = 0$ با شرط $A \neq 0$ و $C \neq 0$ معادله ی گسترده ی یک سهمی می باشد.

از طرفی می دانیم در سهمی افقی، y از درجه ی دوم و در سهمی قائم، x از درجه ی دوم است. بنابراین نتیجه می گیریم که معادله ی $Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$ بیانگر یک سهمی افقی و معادله ی $Ax^2 + By + Cx + D = 0$ بیانگر یک سهمی قائم است.

برای یافتن مشخصات یک سهمی اعم از راس، کانون و ... باید معادله ی گسترده را به فرم استاندارد تبدیل کنیم. برای این منظور از اتحاد مربع دو جمله ای و شیوه ی مربع کامل کردن استفاده می کنیم.

مثال: معادله ی گسترده ی $x^2 + 8x + 4y = 0$ را به فرم استاندارد تبدیل کنید.

حل:

$$x^2 + 8x + 4y = 0 \Rightarrow x^2 + 8x = -4y \xrightarrow[\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 4^2 = 16]{\text{اضافه و کم کردن نصف ضریب } x \text{ به توان دو}} x^2 + 8x + 16 - 16 = -4y$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 = -4y + 16 \Rightarrow (x + 4)^2 = -4(y - 4)$$

کانون، راس و خط هادی سهمی:

الف) مختصات راس سهمی: در معادله ی استاندارد سهمی، برای به دست آوردن مختصات راس سهمی، هر دو پراتنز شامل x و y را مساوی صفر قرار می دهیم. ریشه های به دست آمده طول و عرض راس سهمی می باشد.

$$(y - \beta)^2 = 4P(x - \alpha) \Rightarrow \text{مختصات راس سهمی: } S(\alpha, \beta) \quad \left| \quad (x - \alpha)^2 = 4P(y - \beta) \Rightarrow \text{مختصات راس سهمی: } S(\alpha, \beta)$$

$$\begin{aligned} y - \beta &= 0 & x - \alpha &= 0 \\ \Rightarrow y &= \beta & \Rightarrow x &= \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - \alpha &= 0 & y - \beta &= 0 \\ \Rightarrow x &= \alpha & \Rightarrow y &= \beta \end{aligned}$$

مثال: در سهمی به معادله $(y + 3)^2 = 4(x + 2)$ مختصات رأس سهمی عبارت است از:

$$\begin{cases} y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \Rightarrow S(-2, -3)$$

(ب) مختصات کانون و معادله ی خط هادی سهمی: برای به دست آوردن مختصات کانون و معادله ی خط هادی در یک سهمی افقی یا قائم، از شکل تقریبی سهمی استفاده می کنیم و به کمک آن تمام ویژگی های سهمی را به دست می آوریم.

مثال: مختصات کانون و رأس و خط هادی هریک از سهمی های زیر را به دست آورید.

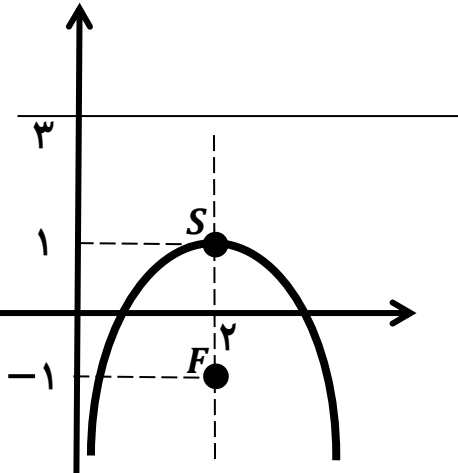
اضافه و کم کردن نصف

ضریب x به توان دو

$$\text{الف) } 8y = 4 + 4x - x^2 \xrightarrow{\left(\frac{4}{-2}\right)^2 = 2^2 = 4} 8y = 4 + 4x - x^2 + 4 - 4 \Rightarrow 8y = -x^2 + 4x - 4 + 8$$

$$\Rightarrow 8y - 8 = -(x^2 - 4x + 4) \Rightarrow -(x - 2)^2 = 8(y - 1) \Rightarrow (x - 2)^2 = -8(y - 1) \Rightarrow S(2, 1)$$

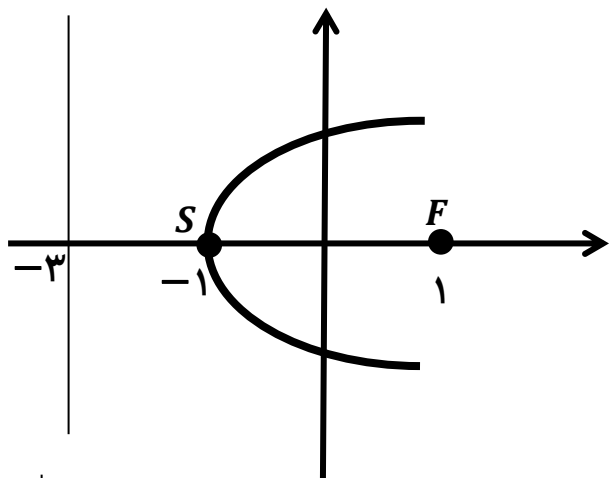
$$4P = 8 \Rightarrow P = 2$$



با توجه به معادله ی استاندارد به دست آمده، سهمی قائم و دهانه ی آن رو به پایین می باشد. حال برای محاسبه ی مختصات کانون و معادله ی خط هادی، شکل تقریبی آن را رسم می کنیم.

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{کانون } 2 \text{ واحد پایین تر از رأس} \Rightarrow F(2, -1) \\ \text{معادله ی خط هادی} \Rightarrow \text{خط هادی } 2 \text{ واحد بالاتر از رأس} \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

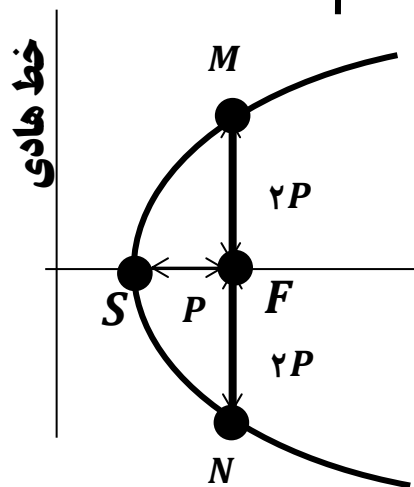
$$b) y^2 - 8x - 8 = 0 \Rightarrow y^2 = 8x + 8 \Rightarrow y^2 = 8(x + 1) \Rightarrow S(-1, 0) \quad 4P = 8 \Rightarrow P = 2$$



با توجه به معادله ی استاندارد به دست آمده، سهمی افقی و دهانه ی آن رو به سمت راست می باشد. حال برای محاسبه ی مختصات کانون و معادله ی خط هادی، شکل تقریبی آن را رسم می کنیم.

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{کانون } F(1, 0) \text{ واحد جلو تر از راس} \\ \text{خط هادی } y = -3 \text{ واحد عقب تر از راس} \end{cases}$$

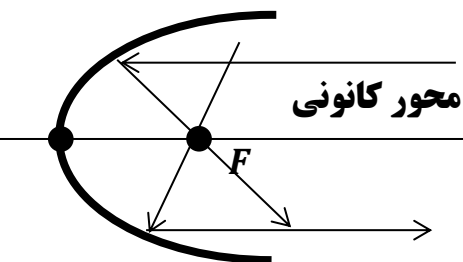
وتر کانونی سهمی:



سهمی مقابل را در نظر بگیرید. پاره خطی را که در کانون بر محور کانونی سهمی عمود شده و سهمی را در نقاط M و N قطع کرده است، **وتر کانونی** سهمی نام دارد. طول پاره خط MN (وتر کانونی)، برابر $4P$ (چهار برابر فاصله ی کانونی) می باشد. مطابق شکل، محور کانونی عمود منصف وتر کانونی (پاره خط MN) می باشد.

ویژگی بازتابندگی سهمی ها:

در یک سهمی، اگر پرتویی از کانون (F) به سهمی برخورد کند، موازی با محور سهمی خارج می شود و برعکس. یعنی اگر پرتویی موازی با محور سهمی به آن برخورد کند، از کانون سهمی عبور می کند. این ویژگی را **ویژگی بازتابندگی سهمی** می گوئیم. این ویژگی، سبب شده است که سهمی کاربرد وسیعی در صنعت داشته باشد.

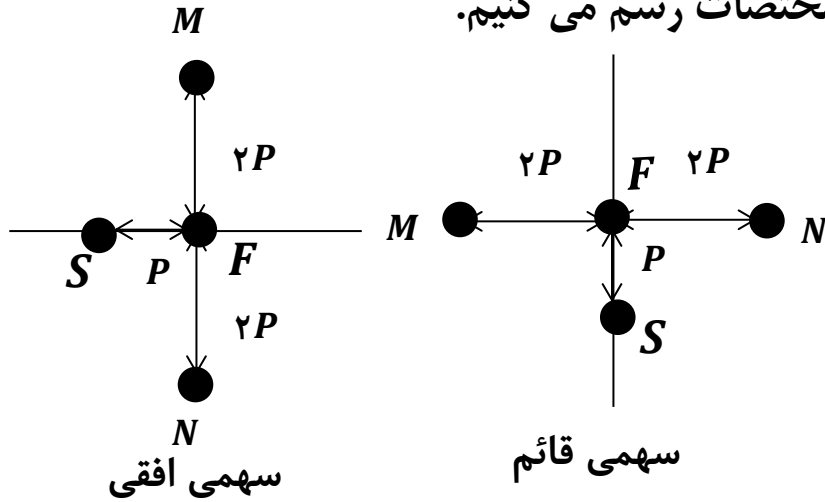


رسم سهمی:

برای رسم یک سهمی مراحل زیر را طی می کنیم:

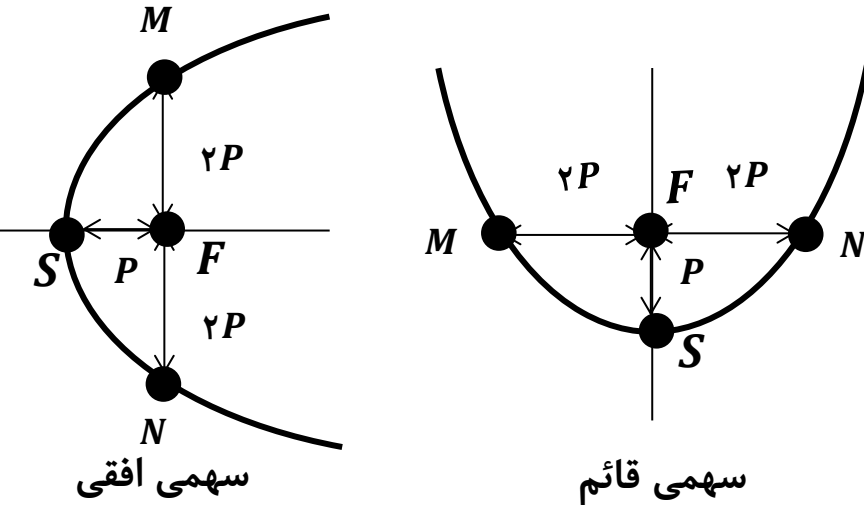
(۱) ابتدا معادله ی سهمی را اگر به صورت گسترده باشد، به فرم استاندارد تبدیل کرده و سپس با توجه به آن، نوع سهمی (افقی یا قائم)، نقاط راس و کانون و خط هادی سهمی را می یابیم.

(۲) نقاط به دست آمده و خط هادی و محور کانونی را در صفحه ی مختصات رسم می کنیم.



(۳) با توجه به نوع سهمی (افقی یا قائم)، از نقطه ی کانونی (F) به اندازه ی $2P$ واحد به سمت بالا و پایین (برای سهمی افقی) یا به سمت چپ و راست (برای سهمی قائم) جدا کرده، آن ها را N و M می نامیم.

در حقیقت با این کار وتر کانونی سهمی را رسم می کنیم که برابر پاره خط MN می شود و بر محور تقارن سهمی عمود است.



(۴) در صورت امکان محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را به دست می آوریم.

(۵) در نهایت نقاط به دست آمده را با توجه به نوع سهمی به هم وصل می کنیم.

مثال: نمودار سهمی $y^2 + 4y + 4x = 0$ را رسم کنید.

حل: ابتدا معادله ی داده شده را به فرم استاندارد تبدیل می کنیم.

اضافه و کم کردن نصف

ضریب y به توان دو

$$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 2^2 = 4$$

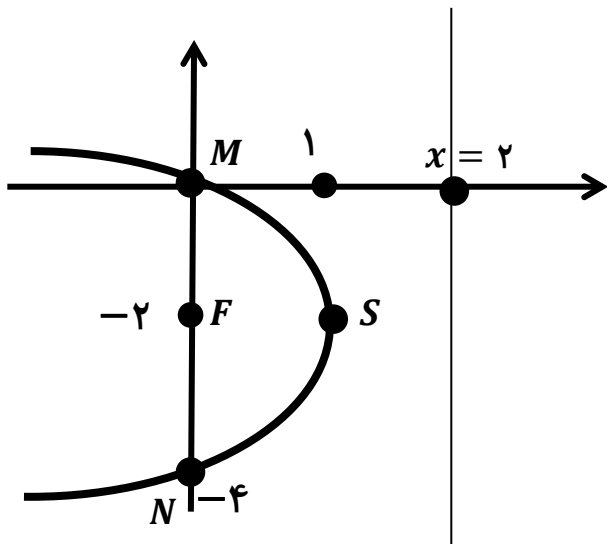
$$y^2 + 4y + 4x = 0 \Rightarrow y^2 + 4y + 4x + 4 - 4 = 0 \Rightarrow y^2 + 4y + 4 + 4x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{y^2 + 4y + 4}_{(y+2)^2} = \underbrace{-4x + 4}_{-4(x-1)} \Rightarrow (y+2)^2 = -4(x-1) \Rightarrow \begin{cases} S(1, -2) \\ 4P = 4 \Rightarrow P = 1 \end{cases}$$

فاکتورگیری از -4 اتحاد مربع دو جمله ای

با توجه به معادله ی استاندارد به دست آمده، سهمی افقی و دهانه ی آن به سمت چپ می باشد. هم چنین نقطه ی $(0, 2)$ کانون سهمی و $x = 2$ خط هادی سهمی می باشد.

حال نقاط راس، کانون و خط هادی را در صفحه ی مختصات مشخص می کنیم و سپس از نقطه ی F به اندازه ی $2P$ واحد به سمت بالا و پایین رفته و آن را M و N می نامیم. سپس محل برخورد سهمی با محورهای مختصات را به دست می آوریم.



$$\begin{cases} \text{محل برخورد سهمی با محور } x \text{ ها} \\ y = 0 \Rightarrow (0 + 2)^2 = -4(x - 1) \\ \Rightarrow 4 = -4(x - 1) \Rightarrow x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{محل برخورد سهمی با محور } y \text{ ها} \\ x = 0 \Rightarrow (y + 2)^2 = -4(0 - 1) \\ \Rightarrow (y + 2)^2 = 4 \Rightarrow y + 2 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - 2 = 0 \\ y = -2 - 2 = -4 \end{cases} \end{cases}$$

مثال: نمودار سهمی $x^2 + 8x + 8y = 0$ را رسم کنید.

حل: ابتدا معادله ی داده شده را به فرم استاندارد تبدیل می کنیم.

اضافه و کم کردن نصف

ضریب x به توان دو

$$x^2 + 8x + 8y = 0 \xrightarrow{\text{اضافه و کم کردن نصف ضریب } x \text{ به توان دو}} x^2 + 8x + 8y + 16 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 + 8y - 16 = 0$$

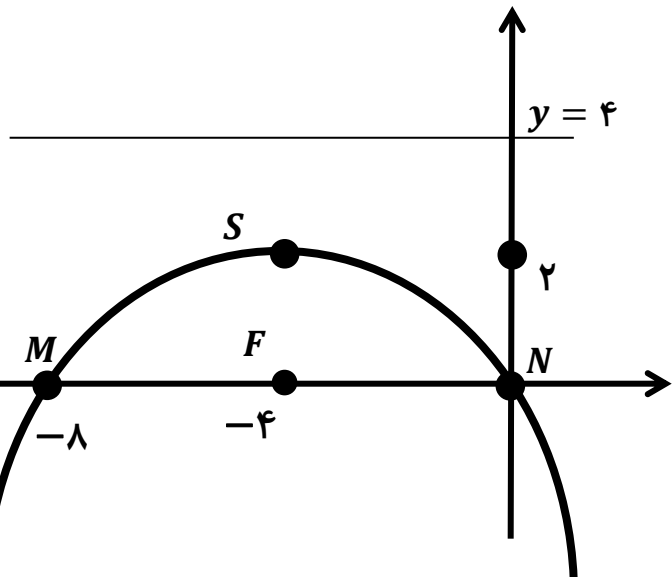
$$\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 4^2 = 16$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2 + 8x + 16}_{(x+4)^2} = \underbrace{-8y + 16}_{-8(y-2)} \Rightarrow (x+4)^2 = -8(y-2) \Rightarrow \begin{cases} S(-4, 2) \\ 4P = 8 \Rightarrow P = 2 \end{cases}$$

فاکتورگیری از -8 اتحاد مربع دو جمله ای

با توجه به معادله ی استاندارد به دست آمده، سهمی قائم و دهانه ی آن به سمت پایین می باشد. هم چنین نقطه ی $(-4, 0)$ کانون سهمی و $y = 4$ خط هادی سهمی می باشد.

حال نقاط راس، کانون و خط هادی را در صفحه ی مختصات مشخص می کنیم و سپس از نقطه ی F به اندازه ی $2P$ واحد به سمت چپ و راست رفته و آن را M و N می نامیم. سپس محل برخورد سهمی با محورهای مختصات را به دست می آوریم.



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{محل برخورد سهمی با محور } x \text{ ها} : y = 0 \Rightarrow (x+4)^2 = -8(0-2) \\ \Rightarrow (x+4)^2 = 16 \Rightarrow x+4 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x = +4-4 = 0 \\ x = -4-4 = -8 \end{cases} \\ \text{محل برخورد سهمی با محور } y \text{ ها} : x = 0 \Rightarrow (0+4)^2 = -8(y-2) \\ \Rightarrow -8(y-2) = 16 \Rightarrow y-2 = -2 \Rightarrow y = 0 \end{array} \right.$$

بیضی: (Ellipse)

مجموعه ی نقاطی از صفحه ی مختصات به طوری که مجموع فاصله ی هر نقطه از دو نقطه ی ثابت، مقدار ثابتی باشد، یک بیضی را مشخص می کند.

دو نقطه ی ثابت را **کانون های بیضی** می نامیم و آن ها را با F و F' نمایش می دهیم. هم چنین مقدار ثابت را $2a$ نامیده و داریم:

$$MF + MF' = NF + NF' = \dots = 2a$$

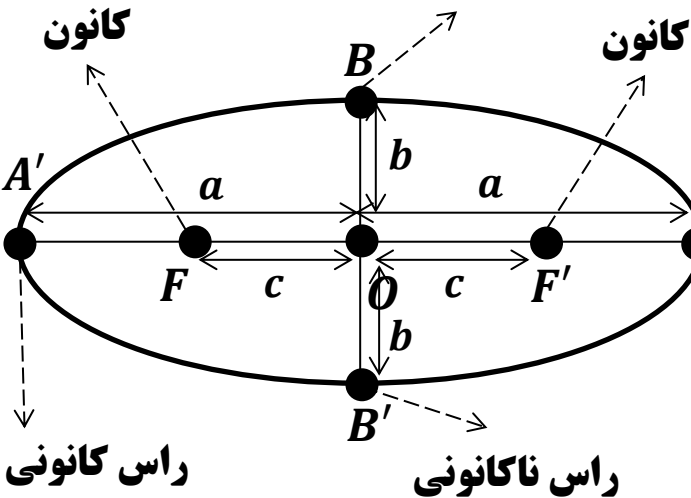
اصطلاحات مهم در بیضی:

(۱) **محور کانونی بیضی:** کانون های بیضی در امتداد یک خط قرار دارند. این خط محور کانونی بیضی نام دارد.

(۲) **فاصله ی کانونی:** فاصله ی بین دو کانون بیضی را فاصله ی کانونی بیضی نامیده و آن را با $2c$ نمایش می دهیم.

(۳) **مرکز بیضی:** وسط پاره خطی که دو کانون بیضی را به هم وصل می کند مرکز بیضی می باشد که فاصله ی آن از هر یک از کانون ها برابر c می باشد.

راس ناکانونی



(۴) **راس های کانونی:** نقاط محل برخورد محور کانونی بیضی با بیضی، یعنی نقاط A و A' در شکل زیر، راس های کانونی بیضی می باشند که طول AA' یعنی قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ است.

(۵) **راس های ناکانونی:** در شکل مقابل، پاره خط BB' که از مرکز بیضی می گذرد و بر محور کانونی عمود است، قطر کوچک بیضی می باشد که اندازه ی آن را با $2b$ نمایش می دهیم. نقاط B و B' را رئوس ناکانونی بیضی می گوئیم.

توجه: مرکز بیضی، وسط فاصله ی کانونی، وسط قطر بزرگ و وسط قطر کوچک بیضی می باشد.
تذکر: در هر بیضی، اندازه پارامتر a از پارامترهای b و c بیش تر است و رابطه ی زیر بین آن ها برقرار است:

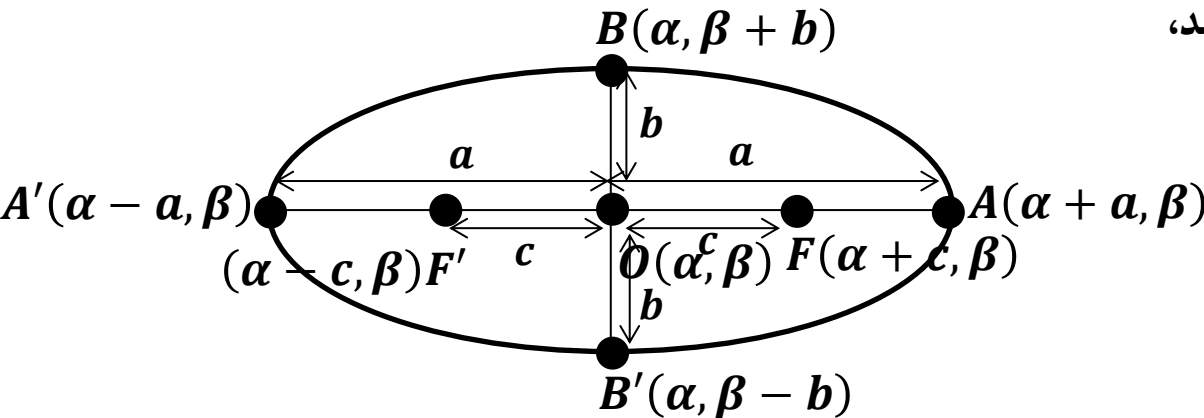
$$a^2 = b^2 + c^2$$

بیضی افقی و قائم و معادله ی آن ها:

الف) بیضی افقی: اگر محور کانونی یک بیضی، موازی محور x ها باشد، بیضی را افقی می گوئیم.

معادله ی بیضی افقی:

معادله ی بیضی افقی که مرکز آن $O(\alpha, \beta)$ ، فاصله ی کانونی آن $2c$ ، قطر بزرگ آن $2a$ و قطر کوچک آن $2b$ باشد، به صورت زیر است:

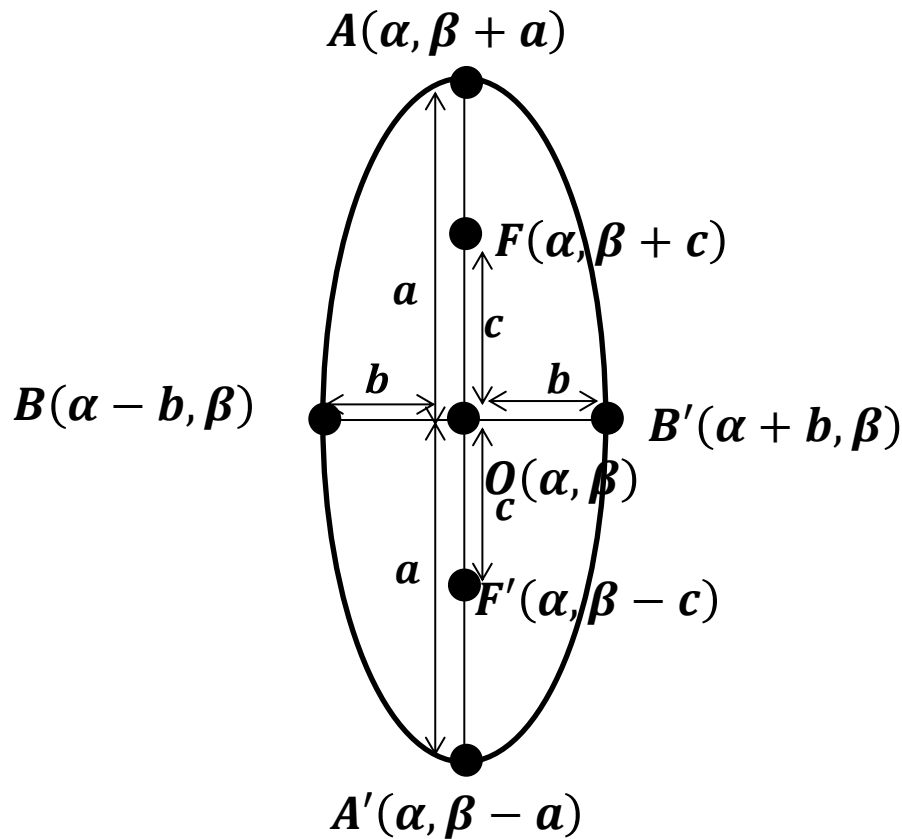


$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$

الف) بیضی قائم: اگر محور کانونی یک بیضی، موازی محور y ها باشد، بیضی را قائم می گوئیم.

معادله ی بیضی قائم:

معادله ی بیضی افقی که مرکز آن $O(\alpha, \beta)$ ، فاصله ی کانونی آن $2c$ ، قطر بزرگ آن $2a$ و قطر کوچک آن $2b$ باشد، به صورت زیر است:



$$\frac{(x - \alpha)^2}{b^2} + \frac{(y - \beta)^2}{a^2} = 1$$

روش تشخیص بیضی های قائم و افقی:

(۱) در معادله ی بیضی افقی، عدد بزرگ تر (a^2) در مخرج $(x - \alpha)^2$ قرار دارد و در بیضی قائم عدد بزرگ تر (a^2) در مخرج $(y - \beta)^2$ قرار دارد.

(۲) در بیضی افقی رئوس کانونی (A, A') ، کانون ها (F, F') و مرکز بیضی $(O(\alpha, \beta))$ همگی روی محور کانونی بیضی که خطی افقی می باشد، قرار دارند. بنابراین عرض تمام این نقاط با هم برابر است. در حالی که در بیضی قائم، محور کانونی خطی قائم است. در نتیجه نقاط ذکر شده در بالا، نقاطی هم طول هستند.

مثال: معادله ی بیضی قائمی که مرکزش $O(5, -3)$ و طول قطر بزرگش ۴ و طول قطر کوچکش ۲ باشد را بنویسید.

حل: می دانیم طول قطر بزرگ یعنی AA' برابر $2a$ و طول قطر کوچک یعنی BB' برابر $2b$ است. پس:

$$AA' = 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

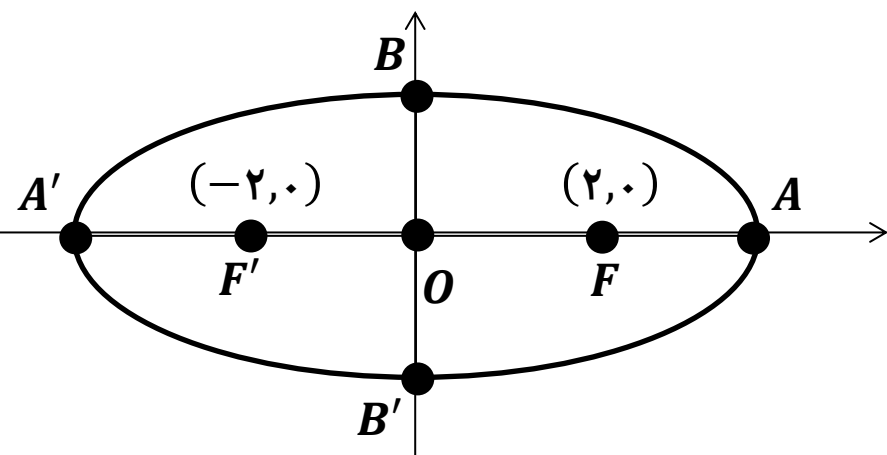
هم چنین می دانیم معادله ی بیضی قائم به مرکز $O(\alpha, \beta)$ به صورت زیر است:

$$\frac{(x - \alpha)^2}{b^2} + \frac{(y - \beta)^2}{a^2} = 1 \xrightarrow{O(5, -3), a=2, b=1} \frac{(x - 5)^2}{1^2} + \frac{(y - (-3))^2}{2^2} = 1 \Rightarrow (x - 5)^2 + \frac{(y + 3)^2}{4} = 1$$

مثال: معادله ی بیضی را بنویسید که نقاط $(2, 0)$ و $(-2, 0)$ کانون های آن باشند و طول قطر کوچکش برابر ۸ باشد.

حل: کانون های $F(2, 0)$ و $F'(-2, 0)$ هم عرض هستند، یعنی روی یک خط افقی قرار دارند و در نتیجه محور کانونی موازی محور x ها است. پس بیضی افقی است.

از طرفی داریم:



$$\begin{aligned} FF' = 2c &\Rightarrow \sqrt{(x_F - x_{F'})^2 + (y_F - y_{F'})^2} = 2c \\ &\Rightarrow \sqrt{(2 - (-2))^2 + (0 - 0)^2} = 2c \Rightarrow \sqrt{4^2} = 2c \\ &\Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2 \end{aligned}$$

طول قطر کوچک $BB' = 2b \Rightarrow 8 = 2b \Rightarrow b = 4$

اما همواره داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow a = \sqrt{20}$$

از طرف دیگر مرکز بیضی (نقطه ی O) وسط پاره خط FF' است. پس:

$$\begin{cases} x_O = \frac{x_F + x_{F'}}{2} = \frac{2 - 2}{2} = 0 \\ y_O = \frac{y_F + y_{F'}}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{مختصات مرکز : } O(0,0)$$

$$\xrightarrow{\text{معادله ی بیضی افقی}} \frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x - 0)^2}{(\sqrt{20})^2} + \frac{(y - 0)^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$$

معادله ی گسترده ی بیضی:

معادله ی $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ در صورتی که ضرایب x^2 و y^2 اعدادی مخالف صفر، متمایز و هم علامت باشند، می تواند معادله ی یک بیضی باشد.

در این صورت برای یافتن مرکز بیضی و پارامترهای آن و یا برای رسم بیضی، باید معادله ی گسترده را به فرم استاندارد تبدیل کنیم.

به عنوان مثال معادله ی $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y - 11 = 0$ یک بیضی است. برای آن که آن را به فرم

استاندارد $\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$ تبدیل کنیم، باید عبارت مربع کامل $(x - \alpha)^2$ و $(y - \beta)^2$ را ایجاد کنیم.

برای این منظور از اتحاد مربع دو جمله ای و روش مربع کامل کردن استفاده می کنیم.

مثال: فرم استاندارد بیضی $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y - 11 = 0$ را بنویسید.

حل: فاکتورگیری از ضرایب x^2 و y^2 در هر پرانتز

$$\xrightarrow{\text{جملات شامل } x \text{ را کنار هم}} \xrightarrow{\text{جملات شامل } y \text{ را نیز کنار هم}} (9x^2 + 18x) + (4y^2 - 16y) = 11 \xrightarrow{\text{قرار می دهیم.}}$$

$$9(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 4y) = 11 \xrightarrow{\text{هر یک پرانتزها را مربع کامل می کنیم}} 9(x^2 + 2x + 1 - 1) + 4(y^2 - 4y + 4 - 4) = 11$$

$$\Rightarrow 9(x^2 + 2x + 1) - 9 + 4(y^2 - 4y + 4) - 16 = 11 \xrightarrow{\text{تجزیه}} 9(x+1)^2 + 4(y-2)^2 - 25 = 11$$

$$\Rightarrow 9(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 25 + 11 = 36 \Rightarrow 9(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 36 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر 36}}$$

$$\frac{9(x+1)^2 + 4(y-2)^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{9(x+1)^2}{36} + \frac{4(y-2)^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

پس این معادله مربوط به یک بیضی قائم است (زیرا عدد بزرگ تر در مخرج $(y-2)^2$ قرار دارد).
مختصات مرکز بیضی $O(-1, 2)$ و $a = \sqrt{4} = 2$ و $b = \sqrt{9} = 3$ می باشد.

نکته: مانند آن چه در بخش دایره گفتیم، اگر $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ معادله ی یک بیضی باشد،
نامعادله ی $ax^2 + by^2 + cx + dy + e < 0$ مجموعه نقاط داخل بیضی و نامعادله ی
 $ax^2 + by^2 + cx + dy + e > 0$ مجموعه نقاط خارج بیضی می باشد.

مثال: معادله ی یک بیضی به صورت زیر داده شده است. مرکز، راس های A و A' و کانون های بیضی را بیابید و سپس نمودار آن را رسم کنید.

$$9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y - 23 = 0$$

حل:

$$\xrightarrow{\text{جملات شامل } x \text{ را کنار هم و جملات شامل } y \text{ را نیز کنار هم}} (9x^2 + 18x) + (4y^2 - 8y) = 23 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از ضرایب } y^2 \text{ و } x^2 \text{ در هر پرانتز}}$$

$$\xrightarrow{\text{قرار می دهیم.}} 9(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 2y) = 23 \xrightarrow{\text{هر یک پرانتزها را مربع کامل می کنیم}} 9(x^2 + 2x + 1 - 1) + 4(y^2 - 2y + 1 - 1) = 23$$

$$\Rightarrow 9(x^2 - 2x + 1) - 9 + 4(y^2 + 2y + 1) - 4 = 23 \xrightarrow{\text{تجزیه}} 9(x-1)^2 + 4(y+1)^2 - 13 = 23$$

$$\Rightarrow 9(x-1)^2 + 4(y+1)^2 = 23 + 13 = 36 \Rightarrow 9(x-1)^2 + 4(y+1)^2 = 36 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر 36}}$$

$$\frac{9(x-1)^2 + 4(y+1)^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{9(x-1)^2}{36} + \frac{4(y+1)^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

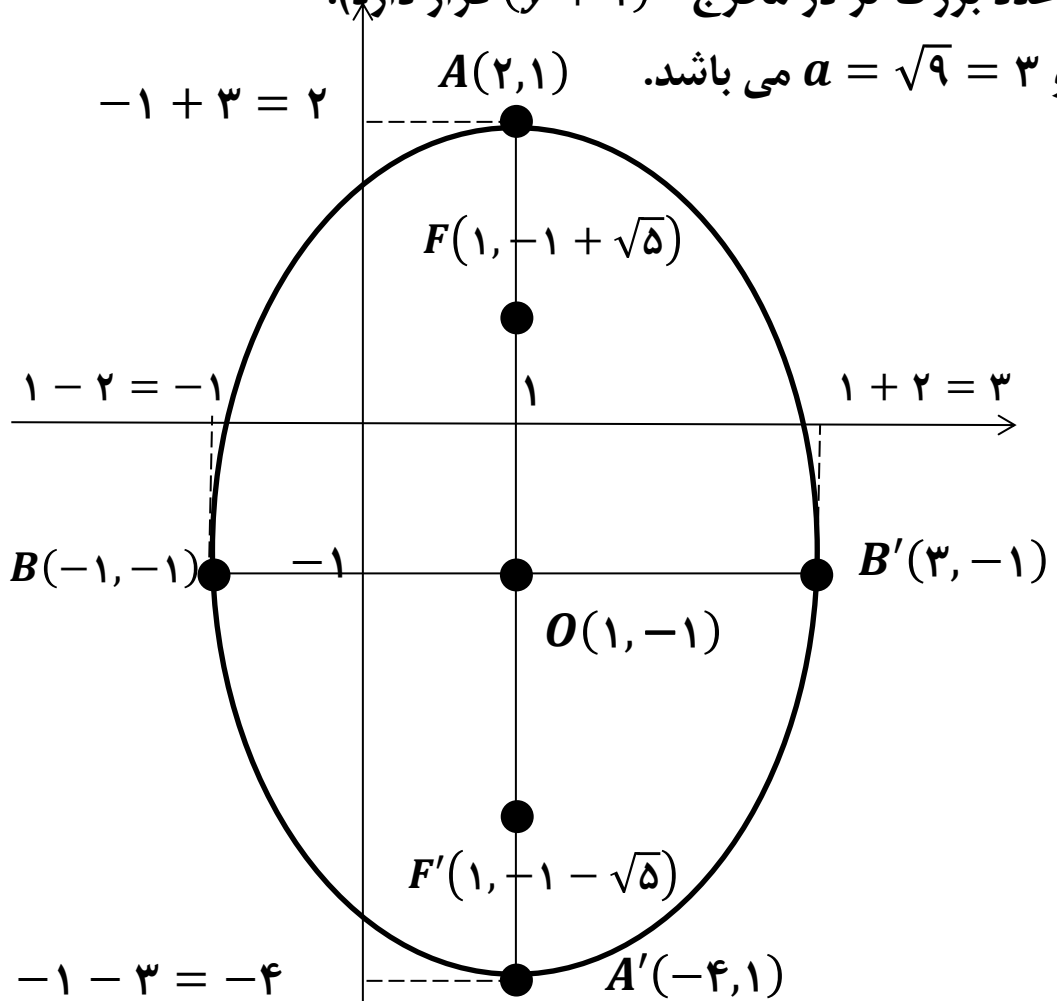
پس این معادله مربوط به یک بیضی قائم است (زیرا عدد بزرگ تر در مخرج $(y+1)^2$ قرار دارد).

مختصات مرکز بیضی $O(1, -1)$ و $a = \sqrt{9} = 3$ و $b = \sqrt{4} = 2$ می باشد.

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 3^2 = 2^2 + c^2$$

$$\Rightarrow c^2 = 9 - 4 = 5$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{5}$$



خروج از مرکز بیضی:

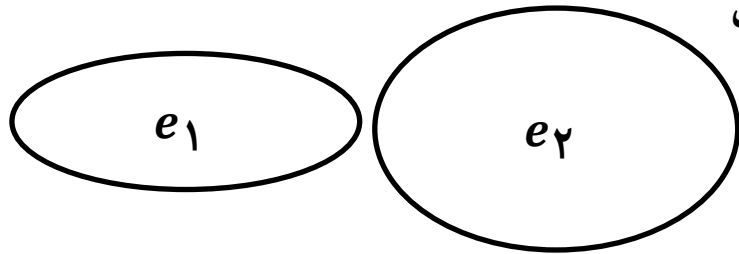
میزان اختلاف شکل بیضی با دایره را با معیاری به نام خروج از مرکز بیضی نشان می دهیم که در بیضی با پارامترهای a و b و c از فرمول زیر به دست می آید:

$$e = \frac{c}{a}$$

قبلا گفتیم که همواره در بیضی رابطه ی $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است، پس همواره $a > c$ می باشد و در نتیجه $e = \frac{c}{a}$ همواره عددی مثبت و کوچک تر از یک ($0 < e < 1$) است. هم چنین داریم:

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \xrightarrow{\div a} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \xrightarrow{\frac{c}{a}=e, a=\sqrt{a^2}} e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

$$\Rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$



هر چه e به صفر نزدیک باشد، شکل بیضی به شکل دایره متمایل است و هر چه e به عدد یک نزدیک تر باشد، شکل بیضی کشیده تر می شود و از شکل دایره دور می شود.

$$\Rightarrow e_1 > e_2$$

مثال: خروج از مرکز یک بیضی $\frac{4}{5}$ ، مرکزش $(-4, -1)$ و طول نقطه ی A راس کانونی آن برابر یک است. و قطر بزرگ

بیضی موازی محور x ها است. معادله ی بیضی را به دست آورید.

حل: چون قطر بزرگ بیضی موازی محور x ها است پس بیضی افقی می باشد و چون $(-4, -1)$ مرکز بیضی است پس

معادله ی آن به صورت زیر است

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x + 4)^2}{a^2} + \frac{(y + 1)^2}{b^2} = 1$$

حال باید مقادیر a و b را بیابیم.

چون بیضی افقی است پس عرض راس کانونی و عرض کانون بیضی با هم برابر است و داریم:

$$O(-4, -1) \xrightarrow{\text{بیضی افقی}} A(-4 \pm a, -1) \xrightarrow{x_A=1} -4 \pm a = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 + 4 = 5 \\ a = -1 - 4 = -5 \text{ (چون } a > 0 \text{ غ.ق.ق.)} \end{cases}$$

از طرفی داریم:

$$e = \frac{c}{a} \xrightarrow{e=\frac{4}{5}, a=5} \frac{4}{5} = \frac{c}{5} \Rightarrow c = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 5^2 = b^2 + 4^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow b = \sqrt{9} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{(x + 4)^2}{5^2} + \frac{(y + 1)^2}{3^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x + 4)^2}{25} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1$$

معادله ی پارامتری بیضی: اگر در معادله ی بیضی، مختصات x و y بر حسب پارامتری مانند t باشد، برای آن که معادله استاندارد بیضی را به دست آوریم، کافی است پارامتر t را بین x و y حذف کنیم.

مثال: نقطه ی M مفروض است. نشان دهید نقطه ی M روی یک بیضی قرار دارد.

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \sin t \\ y = 2 \cos t \end{cases}$$

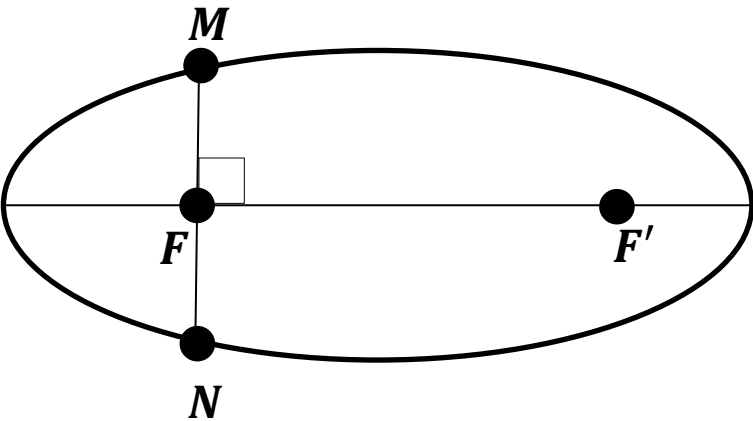
حل: می دانیم $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$. پس $\sin t$ و $\cos t$ را بر حسب x و y یافته و در این رابطه قرار می دهیم.

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \sin t \Rightarrow \sin t = \frac{x-1}{3} \\ y = 2 \cos t \Rightarrow \cos t = \frac{y}{2} \end{cases} \xrightarrow{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1} \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

معادله ی به دست آمده، معادله ی یک بیضی افقی به مرکز $(1, 0)$ است.

وتر کانونی بیضی:

پاره خطی که هر دو نقطه ی متمایز از بیضی را به هم وصل می کند، وتر بیضی نامیده می شود. اما وترى که از کانون بیضی می گذرد و بر محور کانونی عمود است (MN) را **وتر کانونی بیضی** می نامیم. وتر کانونی در واقع کوتاه ترین وترى است که از کانون می گذرد.



طول وتر کانونی از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$MN = \frac{2b^2}{a}$$

معادلات خطوط مماس و قائم بر بیضی:

برای نوشتن معادله ی خط مماس بر بیضی در نقطه ی (x_0, y_0) واقع بر آن، مانند منحنی های دیگر، شیب خط مماس برابر است با مشتق منحنی در نقطه ی تماس. بنابراین برای یافتن شیب خط مماس بر بیضی، از معادله ی بیضی که معادله ی ضمنی از x و y است، نسبت به x مشتق ضمنی می گیریم.

سپس در فرمول به دست آمده برای y' ، قرار می دهیم: $x = x_0$ و $y = y_0$ تا شیب خط مماس به دست آید. برای به دست آوردن شیب خط قائم بر بیضی در این نقطه، شیب خط مماس را قرینه و معکوس می کنیم.

مثال: در بیضی $x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 7 = 0$ معادله ی خطوط مماس بر بیضی را در نقاط به طول $x = 1$ واقع بر آن به دست آورید.

حل: ابتدا با قرار دادن $x = 1$ در معادله ی بیضی، عرض نقطه ی تماس را به دست می آوریم:

$$1^2 + 2y^2 - 2(1) - 8y + 7 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 8y + 6 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

بنابراین باید معادله ی خطوط مماس را در دو نقطه ی $T(1,1)$ و $T'(1,3)$ به دست آوریم.

برای یافتن شیب خطوط مماس از معادله ی بیضی مشتق ضمنی بگیریم.

$$x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 7 = 0 \Rightarrow f'(x, y) = -\frac{2x - 2}{4y - 8} = -\frac{x - 1}{2y - 4} \Rightarrow \begin{cases} f'(1,1) = -\frac{1-1}{2(1)-4} = 0 \\ f'(1,3) = -\frac{1-1}{2(3)-4} = 0 \end{cases}$$

در هر دو نقطه، شیب خط مماس بر بیضی، صفر است. پس معادله ی این خطوط مماس به صورت $y = k$ است.

بنابراین معادله ی خط مماس در نقطه ی $T(1,1)$ برابر $y = 1$ و در نقطه ی $T'(1,3)$ برابر $y = 3$ است.

مثال: به ازای چه مقادیر ثابت a و b و c ، بیضی $4x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در مبدا مختصات بر محور x ها مماس است و از نقطه ی $(-1, 2)$ می گذرد؟

حل: نقاط $(-1, 2)$ و $(0, 0)$ (مختصات مبدا) روی بیضی قرار دارد. پس مختصات آن ها در معادله ی بیضی صدق می کند.

$$4x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} (-1, 2): 4(-1)^2 + (2)^2 + a(-1) + b(2) + c = 0 \Rightarrow -a + 2b + c = -8 \text{ (I)} \\ (0, 0): 4(0)^2 + (0)^2 + a(0) + b(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

هم چنین بیضی در مبدا مختصات بر محور x ها (خط $y = 0$) مماس است. یعنی شیب خط مماس بر بیضی در این نقطه صفر است. بنابراین داریم:

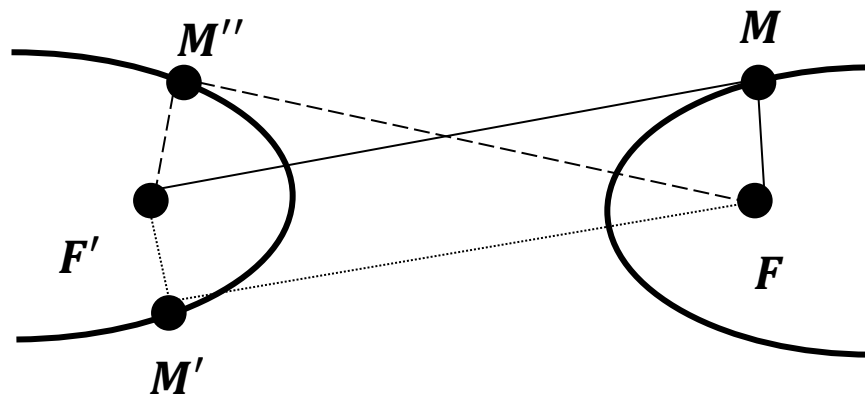
$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 + ax + by + c \Rightarrow f'(x, y) = -\frac{\lambda x + a}{2y + b} \Rightarrow f'(\cdot, \cdot) = 0 \Rightarrow -\frac{\lambda(\cdot) + a}{2(\cdot) + b} = 0$$

$$\frac{a}{b} = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ (III)} \xrightarrow{\text{(I) و (II) و (III)}} 2b = -8 \Rightarrow b = -4$$

هذلولی: (Hyperbola)

مجموعه‌ی نقاطی از صفحه‌ی مختصات که قدر مطلق تفاضل فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت و متمایز F و F' در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد را هذلولی می‌گوییم.

این دو نقطه‌ی ثابت و متمایز F و F' را کانون‌های هذلولی نامیده و این مقدار ثابت مثبت را با $2a$ نمایش می‌دهیم.



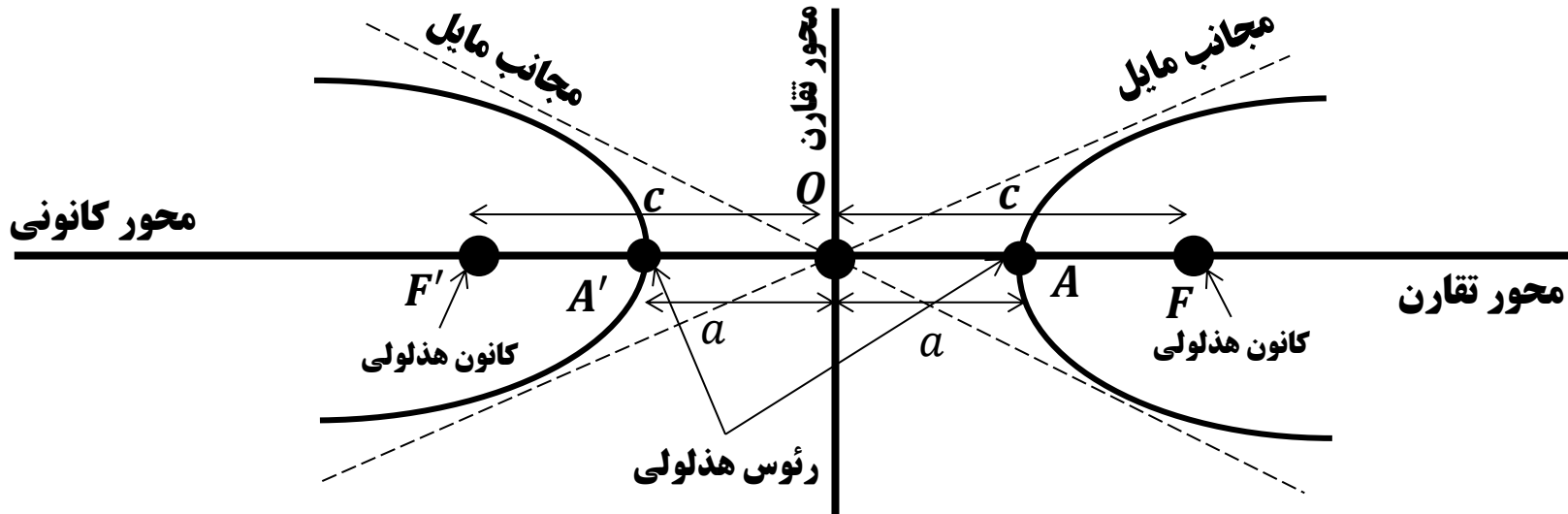
$$|MF - MF'| = |M'F - M'F'| = |M''F - M''F'| = \dots = 2a$$

اصطلاحات مهم در هذلولی:

با توجه به هذلولی زیر، اصطلاحات زیر را تعریف می‌کنیم:

(۱) **محور کانونی هذلولی:** خطی که دو نقطه‌ی ثابت F و F' (کانون‌های هذلولی) را به هم وصل می‌کند، محور کانونی هذلولی نام دارد.

(۲) **راس‌های هذلولی:** محور کانونی، هذلولی را در نقاط A و A' قطع می‌کند که به آن‌ها راس‌های هذلولی می‌گوییم. هر هذلولی دارای دو راس کانونی A و A' است ولی راس ناکانونی ندارد.



۳) مجانب های هذلولی: دو خطی که به صورت خط چین در شکل مشخص شده اند را، مجانب های هذلولی می نامیم. نمودار هذلولی در $\pm\infty$ ($x \rightarrow \pm\infty$) به این خطوط بسیار نزدیک می شوند.

۴) مرکز هذلولی: وسط پاره خط AA' یا پاره خط FF' را مرکز هذلولی (نقطه ی O) می نامیم که دو مجانب هذلولی در این نقطه همدیگر را قطع می کنند. هم چنین مرکز هذلولی، محل برخورد مجانب های هذلولی با محور کانونی است.

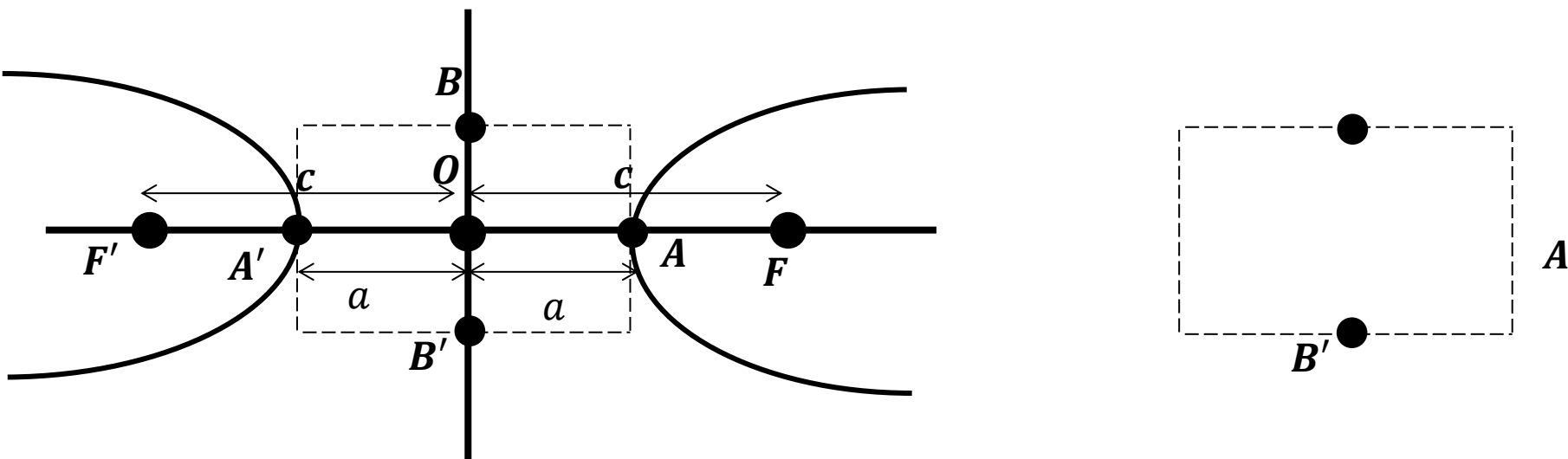
۵) فاصله ی کانونی: فاصله ی دو کانون F و F' (پاره خط FF') را فاصله ی کانونی نامیده و اندازه ی آن را با $2c$ نمایش می دهیم.

۶) قطر هذلولی: فاصله ی دو راس A و A' (پاره خط AA') را قطر هذلولی نامیده و اندازه ی آن را با $2a$ نمایش می دهیم.

۷) محورهای تقارن هذلولی: خط AA' و FF' و هم چنین خطی که در مرکز هذلولی بر این دو خط عمود است را محورهای تقارن هذلولی می نامیم.

۸) محور ناکانونی هذلولی: خط عمود بر AA' (یا FF') در مرکز هذلولی را محور ناکانونی هذلولی می گوئیم.

تذکر: رابطه ی بین پارامترهای a , b و c در هذلولی به صورت $c^2 = a^2 + b^2$ می باشد که در آن $2b$ را طول قطر موهومی هذلولی (یعنی BB') نامیده می شود و در واقع عرض مستطیل در شکل زیر است:



با توجه به شکل بالا و فرمول $c^2 = a^2 + b^2$ می توان نتیجه گرفت که پارامتر c همواره از دو پارامتر a و b بزرگ تر می باشد. اما نمی توان دو پارامتر a و b را با هم مقایسه نمود و با توجه به نوع هذلولی می تواند هر یک از سه حالت $a > b$, $a < b$ و یا حتی $a = b$ رخ دهد.

مثال: اگر نقاط $F(2, 3)$ و $F'(-4, 3)$ کانون های یک هذلولی باشد و هذلولی از نقطه ی $M(2, -5)$ عبور کند، طول قطر هذلولی را به دست آورید.

حل: طبق تعریف فاصله ی دو راس A و A' قطر هذلولی بوده که برابر $2a$ می باشد. با توجه به تعریف هذلولی چون $M(2, -5)$ روی هذلولی قرار دارد، پس قدر مطلق اختلاف فواصل آن از دو کانون F و F' برابر $2a$ می باشد. پس داریم:

$$MF = \sqrt{(x_F - x_M)^2 + (y_F - y_M)^2} = \sqrt{(2 - 2)^2 + (3 - (-5))^2} = \sqrt{0 + 64} = 8$$

فاصله ی M از F

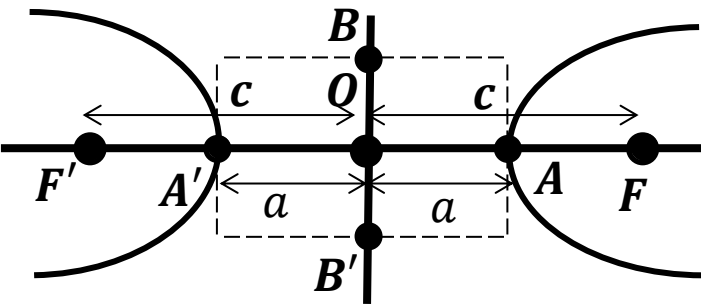
$$MF' = \sqrt{(x_{F'} - x_M)^2 + (y_{F'} - y_M)^2} = \sqrt{(-4 - 2)^2 + (3 - (-5))^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

فاصله ی M از F'

تعریف هذلولی

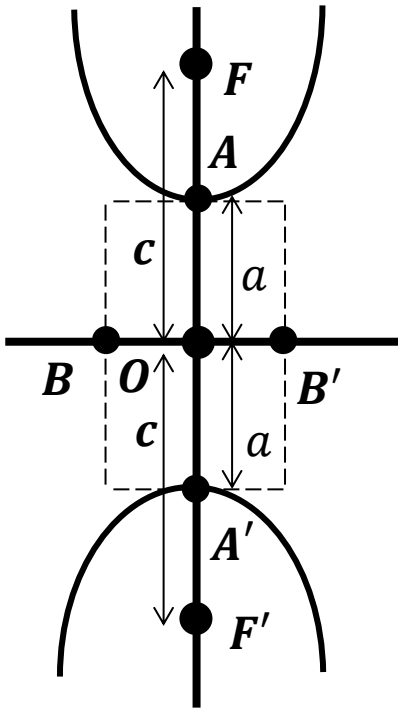
$$\Rightarrow |MF - MF'| = 2a \Rightarrow |8 - 10| = 2a \Rightarrow |-2| = 2a \Rightarrow 2a = 2$$

هذلولی افقی و قائم و معادله ی آن ها:



الف) هذلولی افقی: اگر محور کانونی یک هذلولی موازی محور x ها باشد، هذلولی افقی بوده و معادله ی آن در صورتی که مختصات مرکز آن $O(\alpha, \beta)$ باشد؛ به صورت زیر است:

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$



ب) هذلولی قائم: اگر محور کانونی یک هذلولی موازی محور y ها باشد، هذلولی قائم بوده و معادله ی آن در صورتی که مختصات مرکز آن $O(\alpha, \beta)$ باشد؛ به صورت زیر است:

$$\frac{(y - \beta)^2}{a^2} - \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} = 1$$

50

تذکره: در معادلات استاندارد بیان شده، پشت پرانتزهای $(x - \alpha)^2$ و $(y - \beta)^2$ هم چنین پشت x و y داخل پرانتزها،

هیچ عددی وجود ندارد. پس اگر معادله به صورت $\frac{m(x - \alpha)^2}{A} - \frac{n(y - \beta)^2}{B} = 1$ بود باید آن را به صورت زیر درآوریم:

$$\frac{(x - \alpha)^2}{\frac{A}{m}} - \frac{(y - \beta)^2}{\frac{B}{n}} = 1$$

تذکره: در معادله ی استاندارد هذلولی، یک طرف تساوی حتما باید عدد یک باشد و اگر معادله به صورت

باشد، باید طرفین تساوی را بر عدد $c \neq 0$ تقسیم کنیم تا به معادله ی استاندارد $\frac{(x - \alpha)^2}{m} - \frac{(y - \beta)^2}{n} = c$

هذلولی برسیم:

$$\frac{(x - \alpha)^2}{m} - \frac{(y - \beta)^2}{n} = c \Rightarrow \frac{(x - \alpha)^2}{\frac{m}{\frac{c}{1}}} - \frac{(y - \beta)^2}{\frac{n}{\frac{c}{1}}} = \frac{c}{\frac{c}{1}} \Rightarrow \frac{(x - \alpha)^2}{mc} - \frac{(y - \beta)^2}{nc} = 1$$

روش تشخیص هذلولی های افقی و قائم:

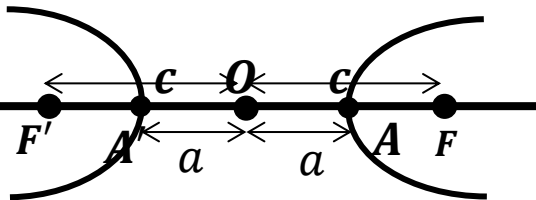
(۱) با توجه به معادلات بیان شده نتیجه می گیریم هرگاه در معادله ی استاندارد ضریب پیرانتز دارای x مثبت باشد، هذلولی افقی و هرگاه ضریب پیرانتز شامل y مثبت باشد، هذلولی قائم می باشد.

(۲) در معادله ی استاندارد هذلولی، مخرج کسر مثبت همیشه برابر a^2 و مخرج کسر منفی همیشه برابر b^2 است.

تذکره: اگر در یک هذلولی $a = b$ ، آن گاه هذلولی را متساوی الساقین یا متساوی القطرین می گویند.

مثال: معادله ی هذلولی را بنویسید که $F(6, 1)$ و $F'(-4, 1)$ کانون ها و طول قطر کانونی AA' برابر ۸ باشد.

حل: چون عرض کانون ها با هم برابر است، هذلولی افقی می باشد. مرکز هذلولی، نقطه ی وسط پاره خط FF' است. پس داریم:



$$\begin{cases} \alpha = x_0 = \frac{x_F + x_{F'}}{2} = \frac{6 + (-4)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \beta = y_0 = \frac{y_F + y_{F'}}{2} = \frac{1 + 1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow O(1, 1)$$

حال باید پارامترهای a ، b و c را به دست آوریم. فاصله ی دو راس که همان قطر کانونی هذلولی می باشد، طبق تعریف $2a$ و فاصله ی دو کانون برابر $2b$ است.

$$AA' = 2a \xrightarrow{AA' = 8} 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$FF' = 2c \Rightarrow \sqrt{(x_F - x_{F'})^2 + (y_F - y_{F'})^2} = 2c \Rightarrow \sqrt{(-4 - 6)^2 + (1 - 1)^2} = 2c \Rightarrow \sqrt{100} = 10 = 2c \Rightarrow c = 5$$

از طرفی داریم:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5^2 = 4^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$\xrightarrow{\text{معادله ی هذلولی افقی}} \frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{O(1,1) = (\alpha, \beta), a=4, b=3} \frac{(x - 1)^2}{4^2} - \frac{(y - 1)^2}{3^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 1)^2}{16} - \frac{(y - 1)^2}{9} = 1$$

معادله ی گسترده ی هذلولی:

به طور کلی معادله ی $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ در صورتی که ضرایب x^2 و x^2 یعنی a و b اعدادی مخالف صفر و مختلف علامه باشند، مختلف علامه باشند ($ab < 0$)، می تواند معادله ی گسترده ی هذلولی باشد. در این صورت برای یافتن مشخصات یک هذلولی باید معادله ی گسترده را به فرم استاندارد (همان گونه که در مورد بیضی گفته شد) تبدیل کنیم.

مثال: معادله ی گسترده ی هذلولی $9x^2 - 4y^2 + 18x + 8y - 31 = 0$ را به فرم استاندارد تبدیل کنید.
حل:

فاکتورگیری از ضرایب x^2 و y^2 در هر پرانتز $\xrightarrow{\hspace{10em}}$ $(9x^2 + 18x) + (-4y^2 + 8y) = 31$

جملات شامل x را کنار هم $\xrightarrow{\hspace{10em}}$ و جملات شامل y را نیز کنار هم قرار می دهیم.

هر یک پرانتزها را مربع کامل می کنیم $\xrightarrow{\hspace{10em}}$ $9(x^2 + 2x) - 4(y^2 - 2y + 1 - 1) = 31$

تجزیه $\xrightarrow{\hspace{10em}}$ $\Rightarrow 9(x^2 + 2x + 1) - 9 - 4(y^2 - 2y + 1) + 4 = 31 \Rightarrow 9(x+1)^2 - 4(y-1)^2 - 5 = 31$

اتحاد مربع دو جمله ای $\quad \quad \quad$ اتحاد مربع دو جمله ای

$\Rightarrow 9(x+1)^2 - 4(y-1)^2 = 31 + 5 = 36 \Rightarrow 9(x+1)^2 - 4(y-1)^2 = 36$

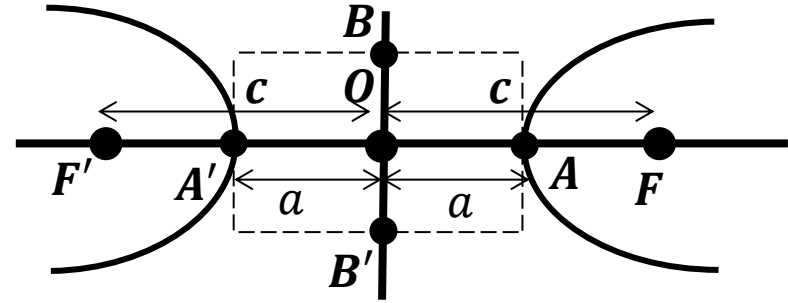
$\frac{9(x+1)^2 - 4(y-1)^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{9(x+1)^2}{36} - \frac{4(y-1)^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

تمرین: معادله ی گسترده ی $3y^2 - x^2 + 4x - 12y - 4 = 0$ را به فرم استاندارد تبدیل کنید.
مختصات مرکز، رئوس و کانون های هذلولی:

الف) مختصات مرکز $O(\alpha, \beta)$: در معادله ی استاندارد هذلولی، برای به دست آوردن مختصات مرکز هذلولی، هر دو پرانتز شامل x و y را مساوی صفر قرار می دهیم. ریشه های به دست آمده طول و عرض مرکز هذلولی می باشند. مثال:

$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ y-1 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \Rightarrow O(-1, 1):$ مختصات مرکز هذلولی

ب) مختصات رئوس و کانون ها: در هر هذلولی افقی (قائم) رئوس A و A' ، کانون های F و F' و مرکز هذلولی $O(\alpha, \beta)$ همگی روی محور کانونی هذلولی که خطی افقی (قائم) می باشد، قرار دارند. بنابراین عرض (طول) تمام این ۵ نقطه برابر β (α) می باشد و فقط طول های (عرض های) این نقاط با هم متفاوت است که با توجه به موقعیت نسبت به مرکز هذلولی، می توان آن ها را به دست آورد.



مثال: مختصات رئوس و کانون ها و مرکز هذلولی های زیر را به دست آورید.

الف) $4x^2 = y^2 - 4y + 8$

حل: ابتدا معادله ی داده شده را به روش مربع کامل و تجزیه به فرم استاندارد تبدیل می کنیم.

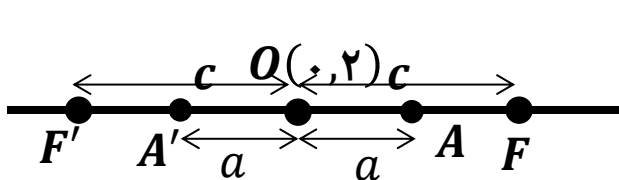
$$\Rightarrow 4x^2 = \underbrace{y^2 - 4y + 4}_{\text{اتحاد مربع دو جمله ای}} - 4 + 8 \Rightarrow 4x^2 = (y - 2)^2 + 4 \Rightarrow 4x^2 - (y - 2)^2 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{4x^2}{4} - \frac{(y - 2)^2}{4} = \frac{4}{4} \Rightarrow x^2 - \frac{(y - 2)^2}{4} = 1$$

با توجه به معادله ی به دست آمده، هذلولی افقی (چون ضریب پیرانتز x مثبت است) و مرکز هذلولی نقطه ی $O(0, 2)$ می باشد

هذلولی افقی $\Rightarrow a = \sqrt{1} = 1, b = \sqrt{4} = 2 \xrightarrow{c^2 = a^2 + b^2} c = \sqrt{5}$

برای محاسبه ی مختصات رئوس و کانون های هذلولی از شکل زیر کمک می گیریم.



$$A(\cdot + a, 2) \xrightarrow{a=1} A(1, 2)$$

$$F(\cdot + c, 2) \xrightarrow{c=\sqrt{5}} F(\sqrt{5}, 2)$$

$$A'(\cdot - a, 2) \xrightarrow{a=1} A(-1, 2)$$

$$F(\cdot - c, 2) \xrightarrow{c=\sqrt{5}} F(-\sqrt{5}, 2)$$

ب) $4x^2 - 5y^2 - 16x + 10y + 31 = 0$

حل: ابتدا معادله ی داده شده را به روش مربع کامل و تجزیه به فرم استاندارد تبدیل می کنیم.

فکتورگیری از ضرایب x^2 و y^2 در هر پرانتز

جملات شامل x را کنار هم و جملات شامل y را نیز کنار هم قرار می دهیم.

$$(4x^2 - 16x) + (-5y^2 + 10y) = -31$$

هر یک پرانتزها را مربع کامل می کنیم

$$\Rightarrow 4(x^2 - 4x) - 5(y^2 - 2y) = -31 \xrightarrow{\text{مربع کامل می کنیم}} 4(x^2 - 4x + 4 - 4) - 5(y^2 - 2y + 1 - 1) = -31$$

تجزیه

اتحاد مربع دو جمله ای اتحاد مربع دو جمله ای

$$\Rightarrow 4(x^2 - 4x + 4) - 16 - 5(y^2 - 2y + 1) + 5 = -31 \xrightarrow{\text{تجزیه}} 4(x - 2)^2 - 5(y - 1)^2 - 11 = -31$$

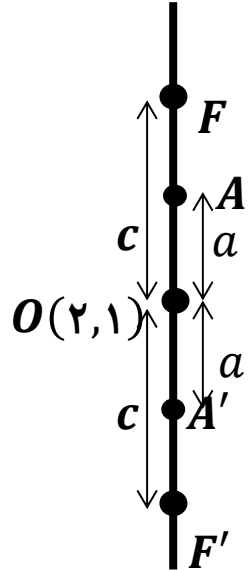
$$\Rightarrow 4(x - 2)^2 - 5(y - 1)^2 = -31 + 11 = -20 \Rightarrow 4(x - 2)^2 - 5(y - 1)^2 = -20$$

$$\Rightarrow \frac{4(x - 2)^2 - 5(y - 1)^2}{-20} = \frac{-20}{-20} \Rightarrow \frac{4(x - 2)^2}{-20} - \frac{5(y - 1)^2}{-20} = 1 \Rightarrow \frac{(y - 1)^2}{4} - \frac{(x - 2)^2}{5} = 1$$

با توجه به معادله ی به دست آمده، هذلولی قائم (چون ضریب پرانتز y مثبت است) و مرکز هذلولی نقطه ی $O(2, 1)$ می باشد

هذلولی قائم

$$\xrightarrow{\text{هذلولی قائم}} a = \sqrt{4} = 2, b = \sqrt{5} \quad c^2 = a^2 + b^2 \xrightarrow{\text{هذلولی قائم}} c = \sqrt{9} = 3$$



$$A(2, 1 + a) \xrightarrow{a=2} A(2, 3)$$

$$A(2, 1 - a) \xrightarrow{a=2} A(2, -1)$$

$$F(2, 1 + c) \xrightarrow{c=3} F(2, 1 + 3) \Rightarrow F(2, 4)$$

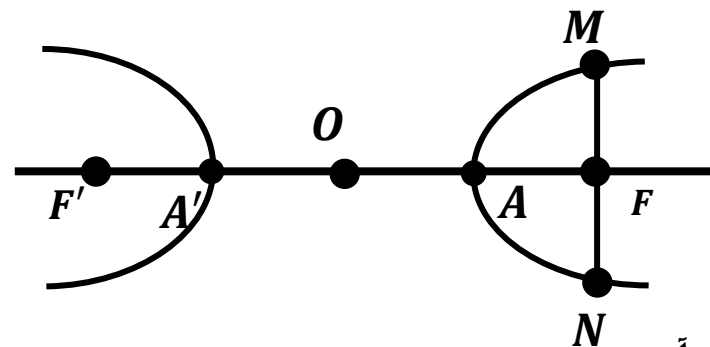
$$F(2, 1 - c) \xrightarrow{c=3} F(2, 1 - 3) \Rightarrow F(2, -2)$$

وتر کانونی هذلولی:

وتر گذرنده از کانون هذلولی و عمود بر محور کانونی هذلولی را وتر کانونی هذلولی می نامیم.

طول وتر کانونی هذلولی برابر است با:

$$MN = \frac{2b^2}{a}$$



مثال: طول وتر کانونی هذلولی $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} a = \sqrt{16} = 4 \\ b = \sqrt{9} = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow MN = \frac{2(3)^2}{4} = \frac{2 \times 9}{4} = 4.5$$

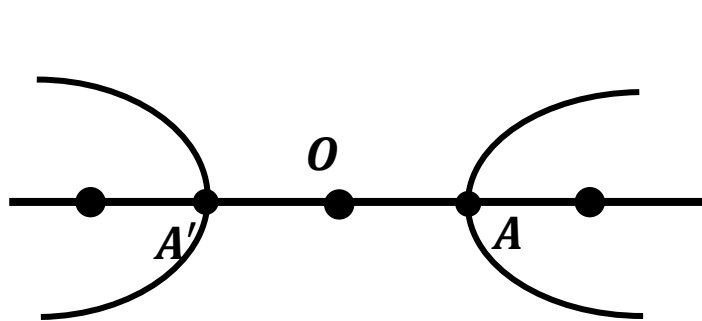
خروج از مرکز هذلولی:

خروج از مرکز هذلولی، همانند بیضی از فرمول $e = \frac{c}{a}$ به دست می آید و چون در هر هذلولی رابطه ی $c^2 = a^2 + b^2$ برقرار است، پس همواره $c > a$ و در نتیجه در هذلولی $e > 1$ می باشد. هم چنین داریم:

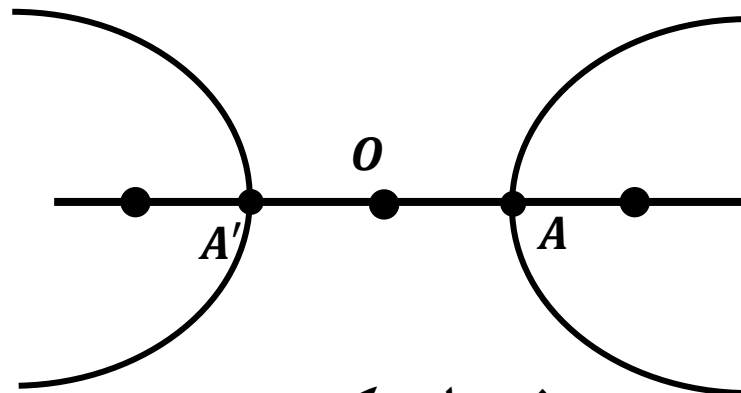
$$e = \frac{c}{a} \xrightarrow{c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}} e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \xrightarrow{a = \sqrt{a^2}} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}}$$

رابطه ای دیگر برای خروج از مرکز هذلولی: $\Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

تذکر: با افزایش (کاهش) e ، فاصله ی دو سر هر شاخه از هذلولی از هم بیش تر شده (کمتر شده) و دهانه ی شاخه ها بازتر (بسته تر) می شود.



خروج از مرکز: e_1



خروج از مرکز: e_2

$$\Rightarrow e_2 > e_1$$

رابطه ای دیگر برای وتر کانونی:

طول وتر کانونی را از رابطه ی $MN = 2b\sqrt{e^2 - 1}$ نیز می توان به دست آورد.

برهان:

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1 \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$$

از طرفی داریم:

$$MN = \frac{2b^2}{a} = 2b \cdot \frac{b}{a} \Rightarrow MN = 2b\sqrt{e^2 - 1}$$

مثال: معادله ی هذلولی را بنویسید که مرکزش مبدا مختصات، محور کانونی آن منطبق بر محور x ها، خروج از مرکزش $\frac{\sqrt{5}}{2}$ و طول وتر کانونی آن ۴ باشد.

حل: چون محور کانونی منطبق بر محور x ها است پس هذلولی افقی می باشد. هم چنین مختصات مرکز هذلولی $O(0,0)$ می باشد. حال با استفاده از فرمول وتر کانونی داریم:

$$MN = 2b\sqrt{e^2 - 1} \xrightarrow{MN=4, e=\frac{\sqrt{5}}{2}} 4 = 2b\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1} \Rightarrow 4 = 2b\sqrt{\frac{5}{4} - 1} \Rightarrow 2 = b\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow 2 = b \times \frac{1}{2} \Rightarrow b = 4$$

از طرفی فرمول دیگر وتر کانونی $MN = \frac{2b^2}{a}$ می باشد. پس داریم:

$$MN = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow 4 = \frac{2(4)^2}{a} \Rightarrow a = \frac{32}{4} = 8 \Rightarrow \frac{(x - \cdot)^2}{8^2} - \frac{(y - \cdot)^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1$$

معادلات خطوط مماس و قائم بر هذلولی:

برای نوشتن معادله ی خط مماس بر هذلولی در نقطه ی $M(x_0, y_0)$ واقع بر آن، همانند آن چه در باره ی بیضی گفته شد، ابتدا شیب خط مماس بر هذلولی در نقطه ی $M(x_0, y_0)$ (مشتق ضمنی y نسبت به x در نقطه ی $M(x_0, y_0)$) را به دست می آوریم. سپس معادله ی خط مماس را با داشتن شیب خط و یک نقطه از آن می نویسیم. اما برای یافتن معادله ی خط قائم بر هذلولی در نقطه ی $M(x_0, y_0)$ واقع بر آن، شیب خط مماس را قرینه و معکوس می کنیم. سپس با استفاده از شیب به دست آمده و نقطه ی $M(x_0, y_0)$ معادله ی خط قائم را می نویسیم.

مثال: معادله ی خط مماس بر هذلولی به معادله ی $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{9} = 1$ را در نقطه ی $(\frac{10}{3}, 1)$ واقع بر آن بنویسید.

حل: ابتدا شیب خط مماس در نقطه ی $(\frac{10}{3}, 1)$ را با استفاده از مشتق ضمنی به دست می آوریم.

$$f(x, y) = \frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{9} - 1 = 0 \Rightarrow f'(x, y) = -\frac{\frac{2x}{10}}{\frac{-2y}{9}} = \frac{9x}{10y} \Rightarrow f'(\frac{10}{3}, 1) = \frac{9 \times \frac{10}{3}}{10 \times 1} = \frac{9}{3} = 3$$

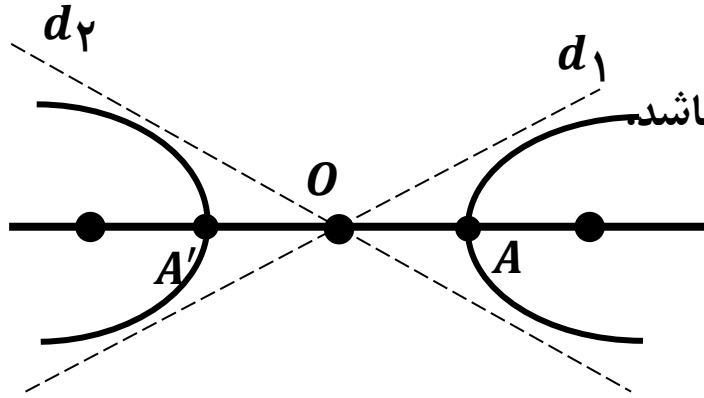
معادله ی خط مماس

$$\Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = 3\left(x - \frac{10}{3}\right) \Rightarrow y = 3x - 9$$

مجانب های هذلولی:

الف) هذلولی افقی:

مجانب های هذلولی افقی به معادله $\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$ مطابق شکل زیر، خطوط d_1 و d_2 می باشند که از مرکز هذلولی $O(\alpha, \beta)$ عبور می کنند.



به طور مشابه شیب خط d_1 برابر $\frac{b}{a}$ و شیب خط d_2 برابر $-\frac{b}{a}$ می باشد.

بنابراین معادله ی خطوط مجانب به صورت زیر می باشد:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{O(\alpha, \beta), m = \pm \frac{b}{a}} y - \beta = \pm \frac{b}{a}(x - \alpha)$$

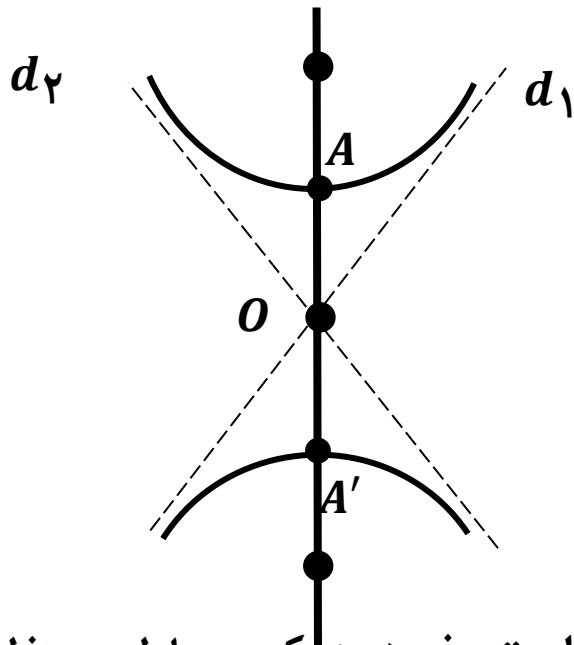
شکل دیگر معادلات مجانب های هذلولی به صورت زیر می باشد:

$$\frac{(x - \alpha)}{a} \pm \frac{(y - \beta)}{b} = 0$$

الف) هذلولی قائم:

مجانب های هذلولی قائم به معادله $\frac{(y - \beta)^2}{a^2} - \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} = 1$ مطابق شکل زیر، خطوط d_1 و d_2 می باشند که از مرکز هذلولی $O(\alpha, \beta)$ عبور می کنند.

به طور مشابه شیب خط d_1 برابر $\frac{a}{b}$ و شیب خط d_2 برابر $-\frac{a}{b}$ می باشد.



بنابراین معادله ی خطوط مجانب به صورت زیر می باشد:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{O(\alpha, \beta), m = \pm \frac{a}{b}} y - \beta = \pm \frac{a}{b}(x - \alpha)$$

شکل دیگر معادلات مجانب های هذلولی به صورت زیر می باشد:

$$\frac{(y - \beta)}{a} \pm \frac{(x - \alpha)}{b} = 0$$

تذکره: برای پیدا کردن معادله های مجانب های هذلولی های افقی یا قائم، کافی است جذر هر دو کسر معادله ی هذلولی را گرفته و بین آن ها علامت \pm قرار داده و در انتها به جای عدد ۱، عدد صفر را قرار می دهیم.

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$

جذر
جذر

$$\frac{(x - \alpha)}{a} \pm \frac{(y - \beta)}{b} = 0$$

$$\frac{(y - \beta)^2}{a^2} - \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} = 1$$

جذر
جذر

$$\frac{(y - \beta)}{a} \pm \frac{(x - \alpha)}{b} = 0$$

تذکره: تانژانت زاویه ی بین مجانب های هذلولی افقی را می توان به کمک فرمول زیر به دست آورد:

$$\tan \theta = \frac{2ab}{|a^2 - b^2|}$$

مثال: معادله ی خطوط مجانب هذلولی $1 = \frac{(y+1)^2}{4} - (x-1)^2$ را بنویسید.

حل: طبق نکته ی گفته شده داریم:

$$\frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

↓ جذر
↓ جذر

$$x-1 \pm \frac{y+1}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 + \frac{y+1}{2} = 0 \Rightarrow \frac{y+1}{2} = -x+1 \Rightarrow y+1 = -2x+2 \Rightarrow y = -2x+1 \\ x-1 - \frac{y+1}{2} = 0 \Rightarrow \frac{y+1}{2} = x-1 \Rightarrow y+1 = 2x-2 \Rightarrow y = 2x-3 \end{cases}$$

مثال: معادله ی یک هذلولی را بنویسید که خطوط $3x + 2y + 1 = 0$ و $3x - 2y - 7 = 0$ مجانب های آن بوده و از نقطه ی $M(1 + 2\sqrt{3}, 4)$ بگذرد.

حل: می دانیم محل تلاقی مجانب های هذلولی، مرکز هذلولی می باشد. پس با حل دستگاه زیر این نقطه را به دست

می آوریم. مرکز هذلولی $O(1, -2)$

$$\begin{cases} 3x + 2y + 1 = 0 \\ 3x - 2y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - 2y = +1 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow y = -2, x = 1$$

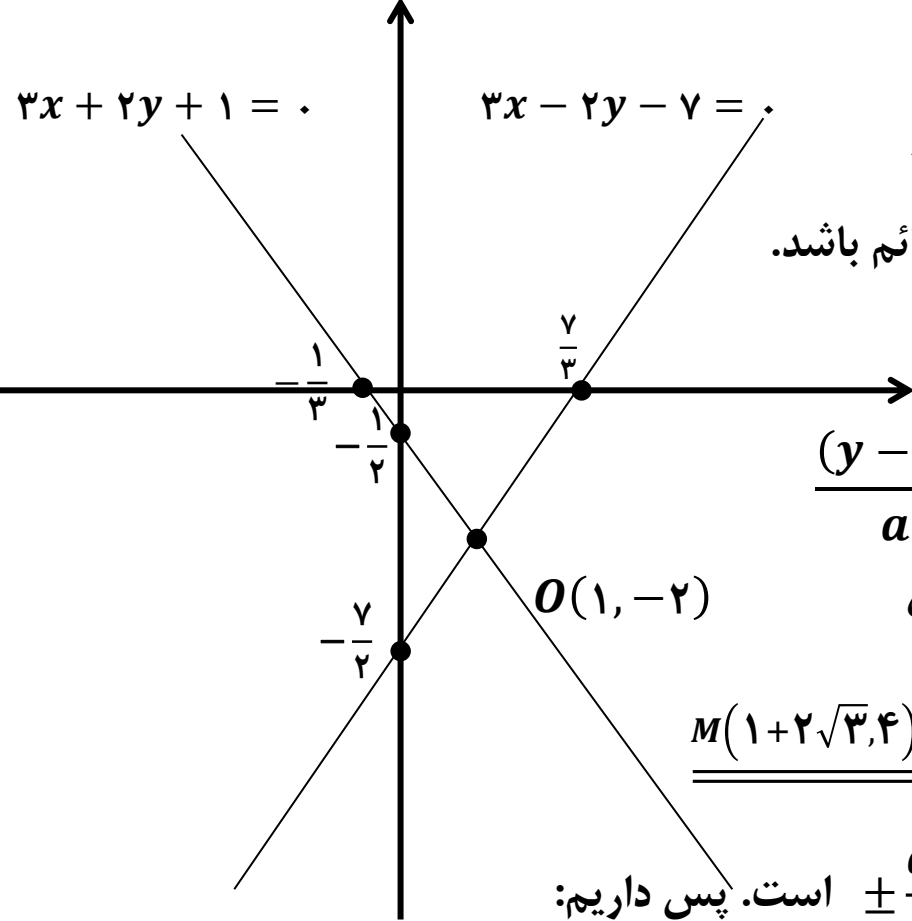
برای تشخیص افقی یا قائم بودن هذلولی نیازمند رسم تقریبی مجانب ها و محل قرار گرفتن نقطه ی $M(1 + 2\sqrt{3}, 4)$ نسبت به خطوط مجانب هستیم.

$$3x + 2y + 1 = 0$$

| | | |
|-----|----------------|----------------|
| x | 0 | $-\frac{1}{3}$ |
| y | $-\frac{1}{2}$ | 0 |

$$3x - 2y - 7 = 0$$

| | | |
|-----|----------------|---------------|
| x | 0 | $\frac{7}{3}$ |
| y | $-\frac{7}{2}$ | 0 |



$$M(1 + 2\sqrt{3} \approx 4.4, 4)$$

برای آن که نمودار هذلولی از نقطه M بگذرد، باید هذلولی قائم باشد. بنابراین با استفاده از فرم کلی هذلولی قائم داریم:

$$\frac{(y - \beta)^2}{a^2} - \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(y + 2)^2}{a^2} - \frac{(x - 1)^2}{b^2} = 1$$

چون نمودار هذلولی از نقطه M می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله‌ی هذلولی صدق می‌کند.

$$\xrightarrow{M(1+2\sqrt{3}, 4)} \frac{(4 + 2)^2}{a^2} - \frac{(1 + 2\sqrt{3} - 1)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{36}{a^2} - \frac{12}{b^2} = 1$$

از طرفی می‌دانیم شیب خطوط مجانب در هذلولی قائم برابر $\pm \frac{a}{b}$ است. پس داریم:

$$3x - 2y - 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} \Rightarrow m = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2a = 3b \Rightarrow a = \frac{3}{2}b$$

بنابراین داریم:

$$\frac{36}{a^2} - \frac{12}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{36}{\left(\frac{3}{2}b\right)^2} - \frac{12}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{36}{\frac{9b^2}{4}} - \frac{12}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4 \times 36}{9b^2} - \frac{12}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{16}{b^2} - \frac{12}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \xrightarrow{a = \frac{3}{2}b} a = \frac{3}{2}(2) = 3 \xrightarrow{\text{معادله‌ی هذلولی}} \frac{(y + 2)^2}{9} - \frac{(x - 1)^2}{4} = 1$$

الف) رسم هذلولی افقی: برای رسم هذلولی افقی مراحل زیر را انجام می دهیم:

(۱) مرکز هذلولی $O(\alpha, \beta)$ و مقادیر a و b را با استفاده از معادله ی هذلولی به دست می آوریم.

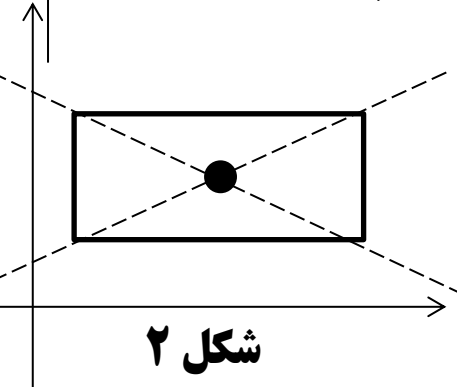
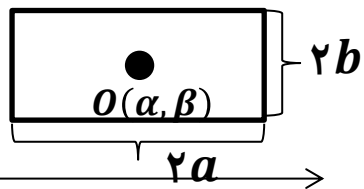
(۲) مستطیلی به ابعاد $2a$ در امتداد افقی و $2b$ در امتداد قائم و به مرکز $O(\alpha, \beta)$ رسم می کنیم. (شکل ۱)

(۳) قطر های مستطیل را رسم کرده و از دو طرف امتداد می دهیم تا مجانب های هذلولی حاصل شود. (شکل ۲)

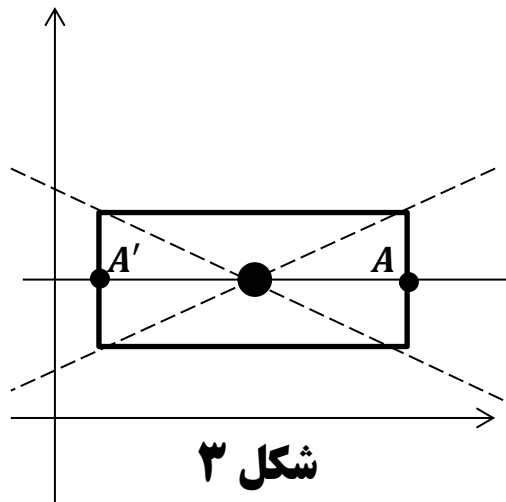
(۴) خطی افقی به گونه ای رسم می کنیم تا از مرکز مستطیل عبور کند. این خط که همان محور کانونی هذلولی افقی می باشد، مستطیل را در دو نقطه ی A و A' قطع می کند که این نقاط همان رئوس هذلولی می باشند. (شکل ۳)

(۵) شاخه های هذلولی را در نقاط A و A' بر مستطیل رسم شده، مماس کرده و در امتداد مجانب ها منحنی را ادامه می دهیم تا شکل هذلولی ایجاد گردد. (شکل ۴)

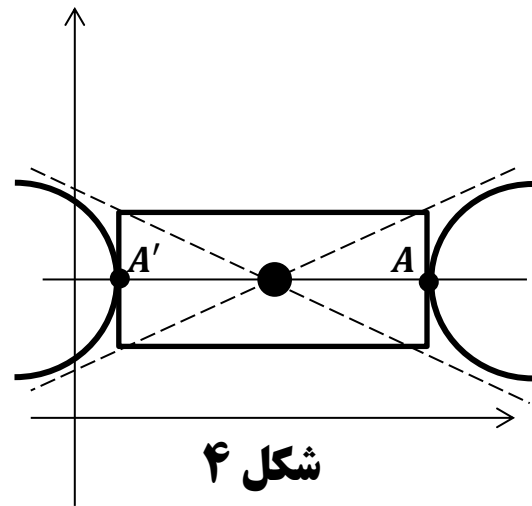
شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳



شکل ۴

ب) رسم هذلولی قائم: برای رسم هذلولی قائم، همانند قسمت الف عمل می کنیم با این تفاوت که مستطیل به ابعاد $2a$ در امتداد قائم و $2b$ در امتداد افقی رسم می کنیم و بعد از رسم قطرهای مستطیل (مجانِب ها)، خطی قائم رسم می کنیم تا از مرکز بگذرد و اضلاع افقی مستطیل را در نقاط A و A' قطع کند و در نهایت شاخه های هذلولی را در نقاط A و A' بر مستطیل رسم شده، مماس کرده و در امتداد مجانب ها منحنی را ادامه می دهیم تا شکل هذلولی ایجاد گردد.

مثال: نمودار هذلولی زیر را رسم کنید.

$$\frac{(y-1)^2}{4} - (x-1)^2 = 1$$

حل: هذلولی قائم (چون ضریب پیرانتز شامل y مثبت است) و مرکز آن $O(1,1)$ می باشد.

ثابت های هذلولی:

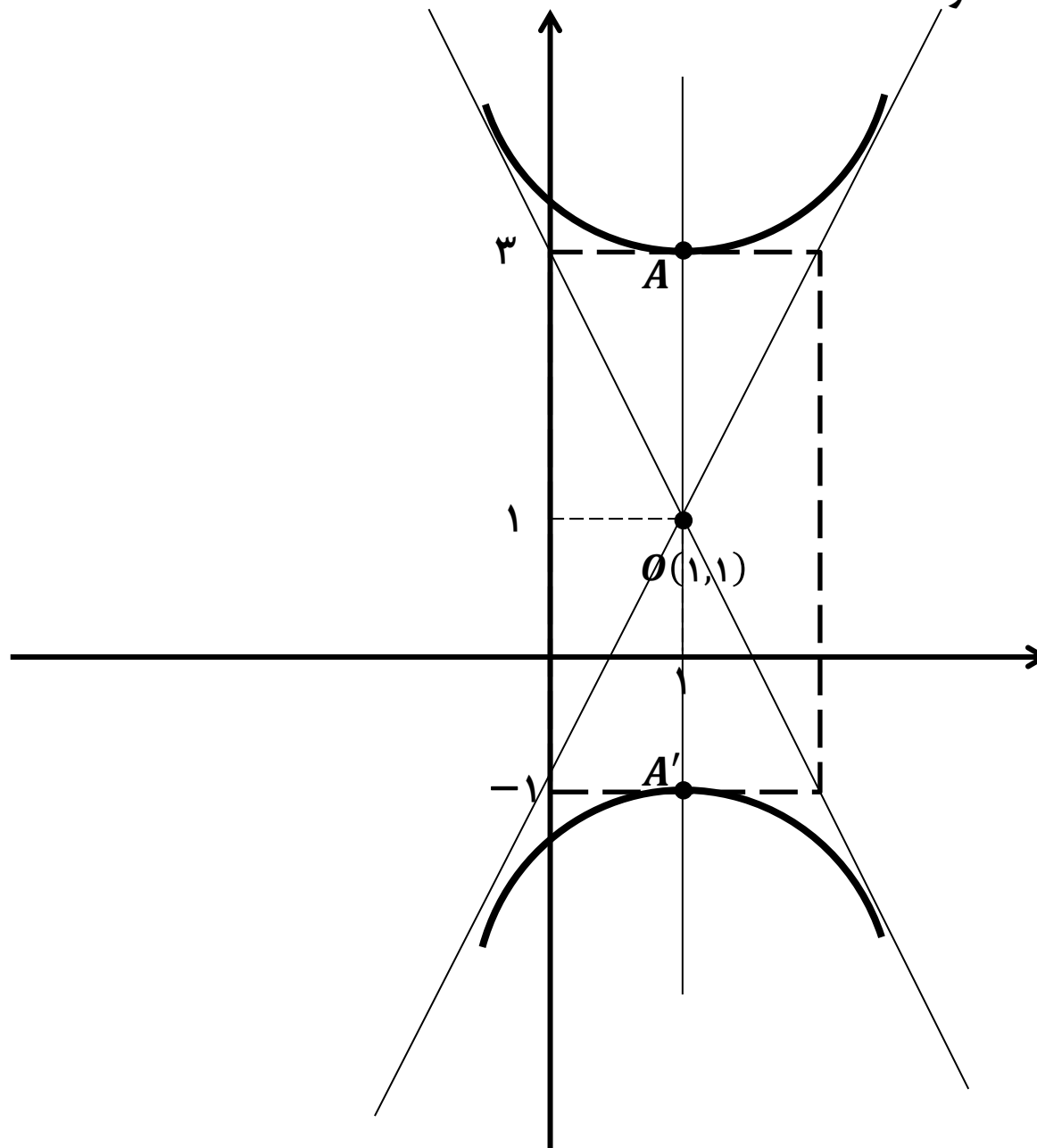
$$a = \sqrt{4} = 2, b = \sqrt{1} = 1 \xrightarrow{c^2 = a^2 + b^2} c^2 = 2^2 + 1^2 \Rightarrow c^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

۱) مستطیلی به ابعاد $2a = 4$ در امتداد قائم و $2b = 2$ در امتداد افقی به گونه ای رسم می کنیم که مرکز مستطیل $O(1,1)$ باشد.

۲) قطرهای مستطیل را رسم کرده و امتداد می دهیم تا مجانب های هذلولی به دست آید.

۳) خطی قائم به گونه ای رسم می کنیم تا از مرکز مستطیل عبور کرده و مستطیل را در دو نقطه A و A' قطع کند. این نقاط همان رئوس هذلولی هستند

۴) شاخه های هذلولی را در نقاط A و A' بر مستطیل رسم شده، مماس کرده و در امتداد مجانب ها، منحنی را امتداد می دهیم تا شکل هذلولی ایجاد شود.



به نام خداوند بخشنده و مهربان

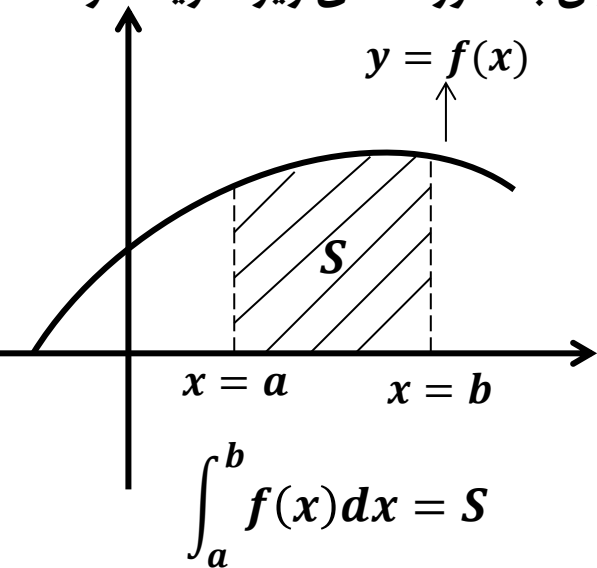
ریاضی عمومی پیش دانشگاهی تجربی / فصل ششم:

انتگرال

Integral

انتگرال معین: (Definite Integral)

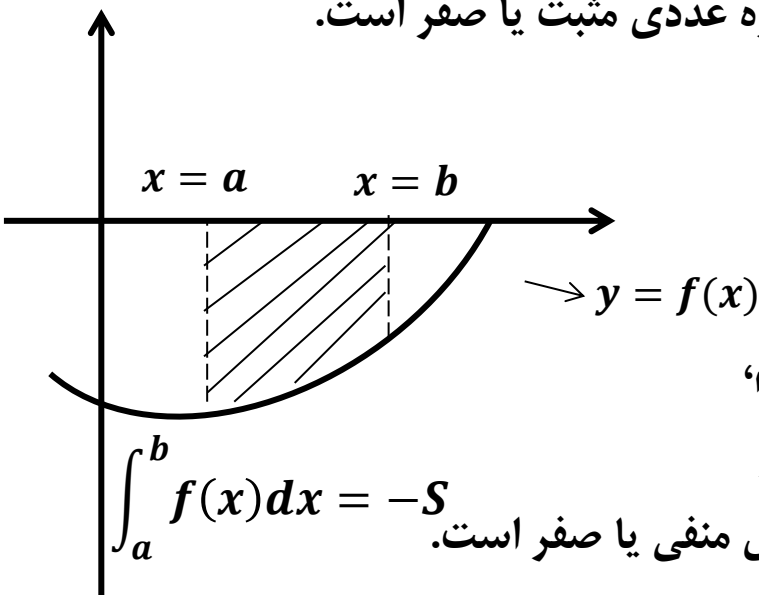
با توجه به موقعیت نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور x ها، انتگرال معین را می توان به صورت های زیر تعریف کرد:



الف) فرض کنیم تابع f در تمام نقاط بازه ی $[a, b]$ پیوسته (به جز احتمالاً در دو سر بازه یعنی a و b) و برای هر x در این بازه مقدار $f(x)$ نامنفی باشد (یعنی $f(x) \geq 0$). به عبارت دیگر نمودار بالای محور x ها یا روی آن باشد.

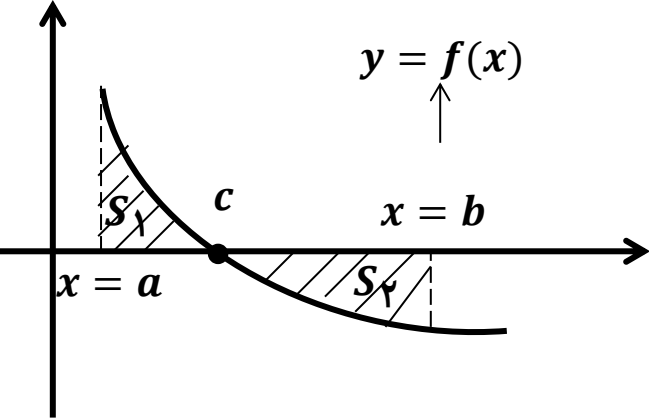
در این صورت $\int_a^b f(x) dx$ که آن را انتگرال $f(x)$ از a تا b می خوانیم، مساحت ناحیه ی محصور بین نمودار $y = f(x)$ ، محور x ها و خطوط $x = a$ و $x = b$ است.

مقادیر a و b را حدود انتگرال گیری نامیده و dx بیان کننده ی این است که متغیر انتگرال گیری x می باشد. بنابراین انتگرال توابع نامنفی، همواره عددی مثبت یا صفر است.



ب) فرض کنیم تابع f در تمام نقاط بازه ی $[a, b]$ پیوسته (به جز احتمالاً در دو سر بازه یعنی a و b) و برای هر x در این بازه مقدار $f(x)$ منفی یا صفر باشد (یعنی $f(x) \leq 0$). به عبارت دیگر نمودار زیر محور x ها یا روی آن باشد.

در این صورت $\int_a^b f(x) dx$ که آن را انتگرال $f(x)$ از a تا b می خوانیم، قرینه ی مساحت ناحیه ی محصور بین نمودار $y = f(x)$ ، محور x ها و خطوط $x = a$ و $x = b$ است. بنابراین انتگرال این توابع، همواره عددی منفی یا صفر است.

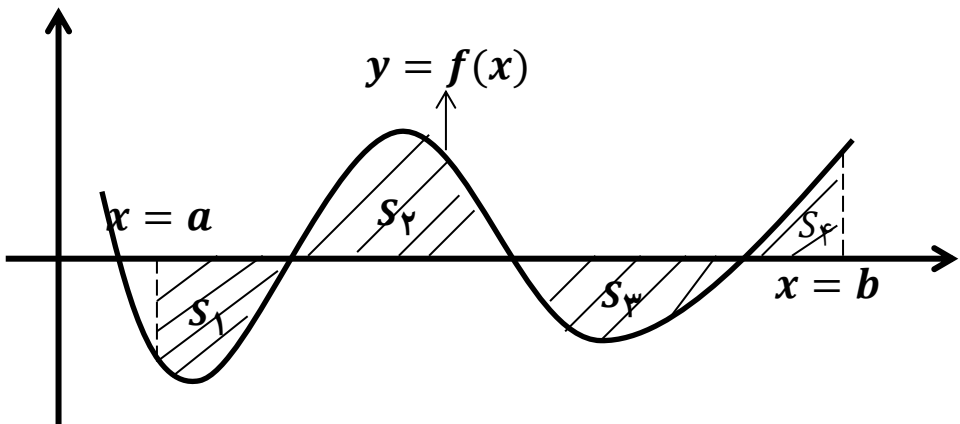


ج) فرض کنیم تابع f در تمام نقاط بازه $[a, b]$ پیوسته (به جز احتمالاً در دو سر بازه یعنی a و b) و نمودار آن مطابق شکل، در بازه $[a, c]$ بالای محور x ها و در بازه $[c, b]$ زیر محور x ها قرار داشته باشد. ($a < c < b$)

در این صورت $\int_a^b f(x) dx$ برابر با جمع جبری مساحت ها است، به طوری که مساحت بالای محور x ها با علامت مثبت و پایین محور x ها با علامت منفی می باشد.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = S_1 - S_2$$

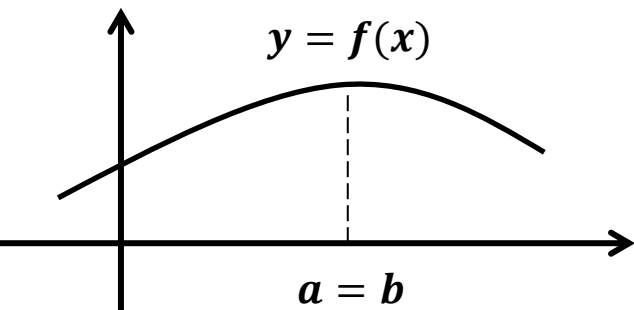
در حالت کلی تر، اگر نمودار تابع پیوسته f به صورت زیر باشد، می توان با استفاده از روش بیان شده $\int_a^b f(x) dx$ را به صورت زیر محاسبه کرد.



$$\int_a^b f(x) dx = S_2 + S_4 - S_1 - S_3$$

تذکره ۱: مساحت نمی تواند منفی شود، اما حاصل انتگرال معین می تواند منفی باشد.

تذکره ۲: حدود انتگرال گیری می توانند با هم برابر باشند ($a = b$). در این حالت مطابق شکل زیر، مساحت محدود به نمودار $y = f(x)$ و محور x ها و خطوط $x = a$ و $x = b$ برابر صفر می شود و داریم:



$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

تذکره ۳: اگر $c \in (a, b)$ ، می توان بازه ی انتگرال گیری $[a, b]$ را به دو زیربازه ی انتگرال گیری $[a, c]$ و $[c, b]$ تقسیم کرد. به عبارت دیگر داریم:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

تذکره ۴: طبق قرارداد داریم:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

اکنون با ذکر مثال هایی به محاسبه بعضی انتگرال های ساده خطی می پردازیم.

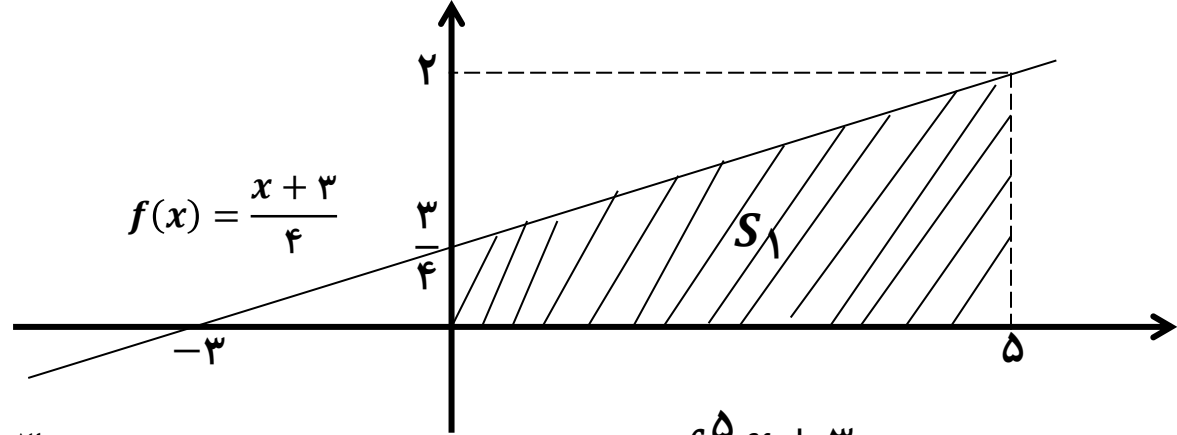
مثال: مقادیر انتگرال های معین زیر را پیدا کنید.

الف) $\int_1^5 \frac{x+3}{4} dx$

ب) $\int_{-5}^{-3} \frac{x+3}{4} dx$

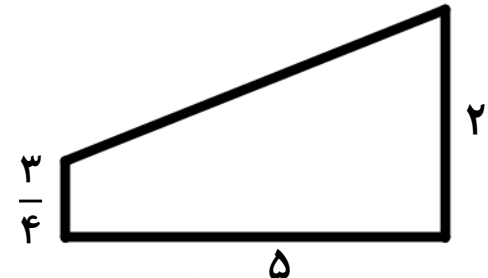
حل: برای محاسبه ی انتگرال های داده شده، نمودار تابع $f(x) = \frac{x+3}{4}$ را در بازه های داده شده رسم می کنیم.

| | | |
|-----|---------------|---------|
| x | \cdot | -3 |
| y | $\frac{3}{4}$ | \cdot |



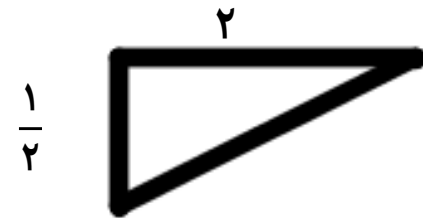
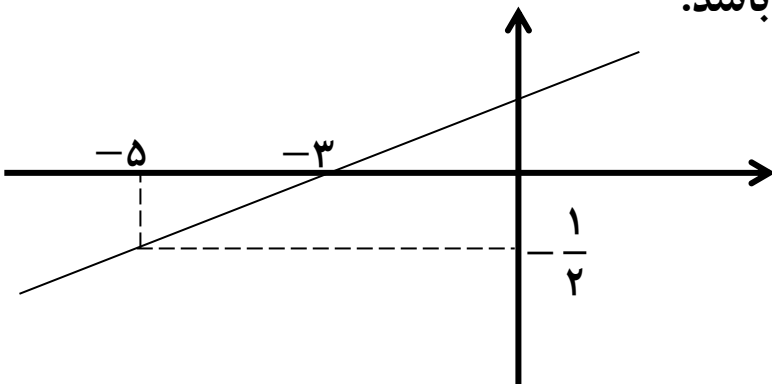
الف) طبق تعریف $\int_{\cdot}^5 \frac{x+3}{4} dx$ مساحت ناحیه ی محدود به نمودار تابع $f(x) = \frac{x+3}{4}$ و محور x ها و خطوط $x = 0$ و $x = 5$ می باشد. قسمت مورد نظر ذوزنقه ای به ابعاد زیر می باشد.

$$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده}}{2} = \frac{\left(\frac{3}{4} + 2\right) \times 5}{2} = \frac{\frac{11}{4} \times 5}{2} = \frac{55}{8}$$



$$\Rightarrow \int_{\cdot}^5 \frac{x+3}{4} dx = \frac{55}{8}$$

ب) طبق تعریف $\int_{-5}^{-3} \frac{x+3}{4} dx$ قرینه ی مساحت ناحیه ی محدود به نمودار تابع $f(x) = \frac{x+3}{4}$ و محور x ها و خطوط $x = -5$ و $x = -3$ می باشد. قسمت مورد نظر مثلثی به ابعاد زیر می باشد.



$$S_{\text{مثلث}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \times 2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{-5}^{-3} \frac{x+3}{4} dx = -S_{\text{مثلث}} = -\frac{1}{2}$$

مثال: مقدار $\int_{-5}^4 (2x+1) dx$ محاسبه کنید.

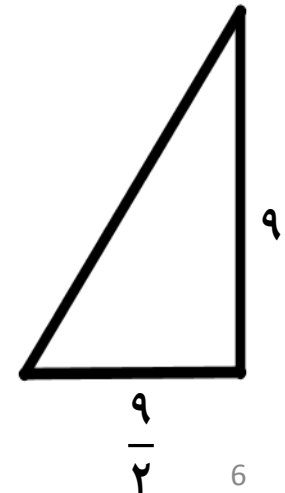
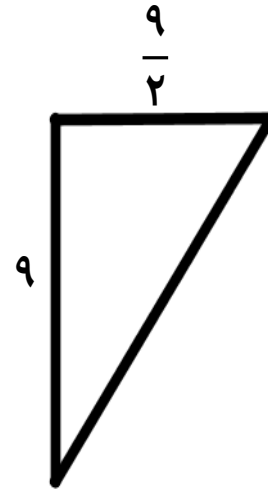
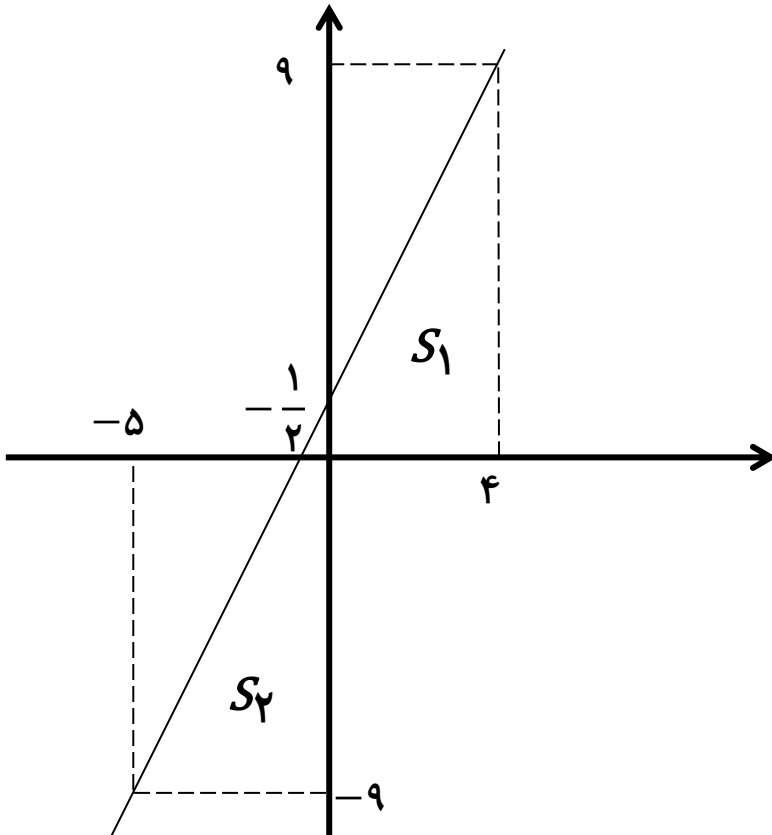
حل: با توجه به نمودار، این تابع در قسمتی از بازه ی انتگرال گیری مقادیر مثبت و در قسمت دیگری از آن مقادیر منفی به خود می گیرد. و می بایست انتگرال مورد نظر را طبق تعریف به مؤلفه های مثبت و منفی آن تجزیه کرده و نتایج حاصله را جمع (جمع جبری) کنیم.

هم چنین طبق تعریف $\int_{-5}^4 (2x+1) dx$ مجموع مساحت ناحیه ی

محدود به نمودار تابع $y = 2x + 1$ و محور x ها و

خطوط $x = -5$ و $x = 4$ می باشد.

قسمت مورد نظر دو مثلث و به ابعاد زیر می باشد.



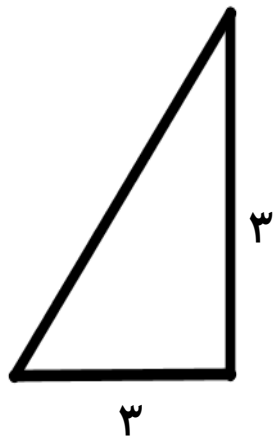
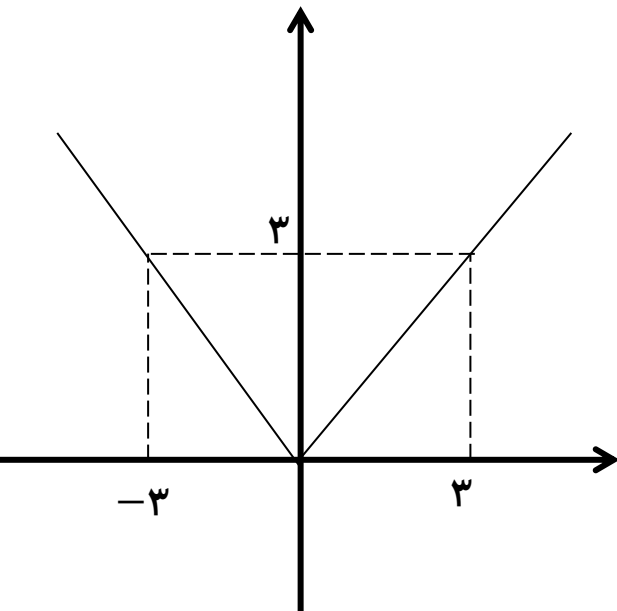
$$S_1 \text{ مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعدہ}}{۲} = \frac{\left(\frac{۹}{۲}\right) \times ۹}{۲} = \frac{۸۱}{۴} \Rightarrow \int_{-\frac{۱}{۲}}^۴ (۲x + ۱) dx = S_1 \text{ مثلث} = \frac{۸۱}{۴}$$

$$S_2 \text{ مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعدہ}}{۲} = \frac{\left(\frac{۹}{۲}\right) \times ۹}{۲} = \frac{۸۱}{۴} \Rightarrow \int_{-۵}^{-\frac{۱}{۲}} (۲x + ۱) dx = -S_2 \text{ مثلث} = -\frac{۸۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \int_{-۵}^۴ (۲x + ۱) dx = \int_{-۵}^{-\frac{۱}{۲}} (۲x + ۱) dx + \int_{-\frac{۱}{۲}}^۴ (۲x + ۱) dx = S_1 \text{ مثلث} - S_2 \text{ مثلث} = \frac{۸۱}{۴} - \frac{۸۱}{۴} = ۰$$

مثال: مقدار $\int_{-۳}^۳ |x| dx$ را محاسبه کنید.

حل: طبق تعریف $\int_{-۳}^۳ |x| dx$ مساحت ناحیه ی محدود به نمودار تابع $y = |x|$ و محور x ها و خطوط $x = -۳$ و $x = ۳$ می باشد. قسمت مورد نظر دو مثلث با ابعاد مساوی زیر می باشد.



$$S_{\text{مثلث}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعدہ}}{۲} = \frac{۳ \times ۳}{۲} = \frac{۹}{۲}$$

$$\int_{-۳}^۳ |x| dx = \int_{-۳}^۰ |x| dx + \int_{۰}^۳ |x| dx = ۲S_{\text{مثلث}} = ۹$$

محاسبه ی انتگرال توابع ناپیوسته (بد رفتار) در بازه ی انتگرال گیری:

فرض کنیم تابع f در نقاط محدود c_1, c_2, \dots, c_n از دامنه اش ناپیوسته باشد و این نقاط در بازه ی انتگرال گیری $[a, b]$ قرار داشته باشند.

برای محاسبه ی انتگرال $\int_a^b f(x) dx$ کافی است بازه ی $[a, b]$ را به زیر بازه های $[a, c_1], [c_1, c_2], \dots, [c_n, b]$ تقسیم کنیم و انتگرال را در هر یک از این زیربازه ها محاسبه کنیم که تابع در تمام نقاط آن زیربازه ها (به جز احتمالا در دو سر زیربازه ها) پیوسته باشد. بنابراین داریم:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_n}^b f(x) dx$$

مثال: مطلوبست محاسبه ی انتگرال معین $\int_{-3}^1 ([x] + 2) dx$.

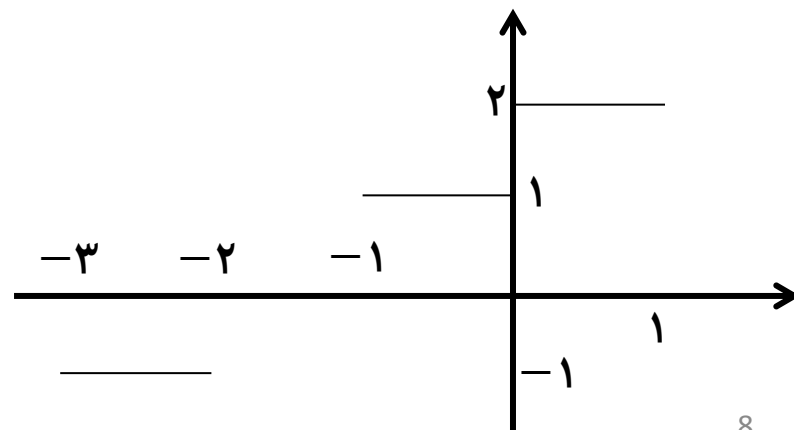
حل: ابتدا نمودار تابع $f(x) = [x] + 2$ را در بازه ی $(-4, 3)$ رسم می کنیم. (توجه کنید که باز یا بسته بودن دو سر بازه تاثیری در محاسبه ی انتگرال ندارد.)

$$-3 \leq x < -2 \Rightarrow [x] = -3 \Rightarrow y = -3 + 2 = -1$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = -2 + 2 = 0$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = -1 + 2 = 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = 0 + 2 = 2$$



با توجه به نمودار تابع f ، ملاحظه می کنیم که این تابع حالت خاصی از توابع پله ای بوده که در بازه ی انتگرال گیری $[-4, 3]$ جزء توابع بدرفتار ناپیوسته به حساب می آید.

حال بازه ی انتگرال گیری را به ۴ زیربازه ی $[0, 1), [-1, 0), [-2, -1), [-3, -2)$ تقسیم می کنیم و داریم:

$$\int_{-3}^1 ([x] + 2) dx = \int_{-3}^{-2} ([x] + 2) dx + \int_{-2}^{-1} ([x] + 2) dx + \int_{-1}^0 ([x] + 2) dx + \int_0^1 ([x] + 2) dx$$

$$\Rightarrow \int_{-3}^1 ([x] + 2) dx = -S_1 + 0 + S_2 + S_3 = -(1 \times 1) + 0 + (1 \times 1) + (1 \times 2) = -1 + 1 + 2 = 2$$

تذکره: توابعی که در بازه ی انتگرال گیری $[a, b]$ دارای مجانب قائم هستند، در این بازه انتگرال پذیر نمی باشند.

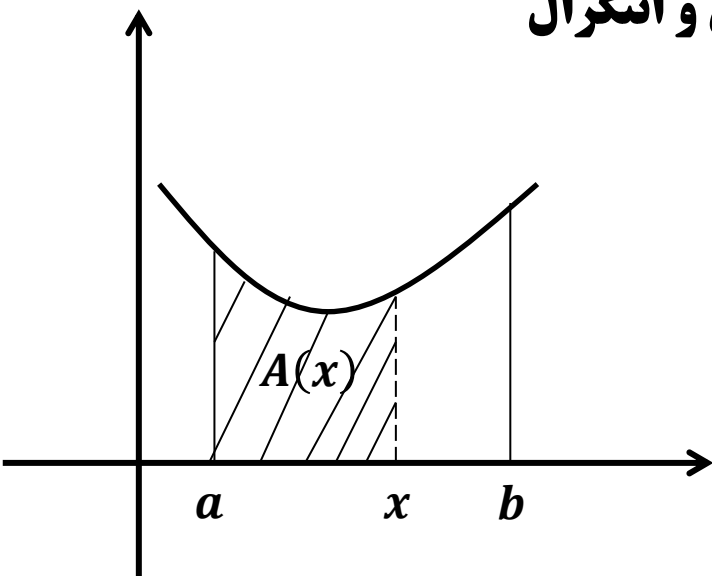
به عنوان مثال، انتگرال $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ تعریف نمی شود. زیرا تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در بازه ی انتگرال گیری $[-1, 1]$ دارای مجانب قائم $x = 0$ است.

اولین قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

اگر $y = f(x)$ تابعی پیوسته در بازه ی $[a, b]$ باشد، آن گاه تابع زیر را تعریف می کنیم:

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt$$

این تابع را **تابع مساحت** می نامیم.



در تعریف مذکور، حد بالای انتگرال گیری یعنی x ، متغیری در بازه $[a, b]$ می باشد. لذا تابع مساحت نیز متغیر بوده و مقدار آن وابسته به متغیر x است هم چنین عدد a ثابت است.

حال اولین قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را به صورت زیر تعریف می کنیم:

قضیه: فرض کنیم f تابعی پیوسته بر فاصله $[a, b]$ باشد و برای هر x متعلق به $[a, b]$ داشته باشیم:

در این صورت $A(x)$ در بازه $[a, b]$ مشتق پذیر بوده و داریم:

$$A'(x) = f(x)$$

قضیه ی بالا رابطه ی بین مشتق گیری و انتگرال گیری را مشخص می کند. در حقیقت، انتگرال گیری عکس عمل مشتق گیری می باشد. یعنی هنگامی که می خواهیم انتگرال تابعی مانند f را بیابیم، به دنبال تابعی هستیم (A) که اگر از آن مشتق بگیریم، تابع f به دست آید.

نکته: در انتگرال $A(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt$ ، اگر u تابعی از x باشد، آن گاه مشتق تابع $A(x)$ برابر است با:

$$A'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))$$

مثال: اگر $F(x) = \int_0^x t^2 e^t dt$ آن گاه $F'(x)$ را محاسبه کنید.

حل: با توجه به اولین قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم:

$$F'(x) = x^2 e^x$$

مثال: اگر $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t^2 + 1} dt$ آن گاه $F'(x)$ را محاسبه کنید.

$$F'(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$$

حل: با توجه به اولین قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم:

انتگرال نامعین:

تابع اولیه: تابع اولیه عکس مشتق گیری است. برای محاسبه ی تابع اولیه ی تابعی مانند f کافی است تابعی مانند g بیابیم به طوری که: $g'(x) = f(x)$

مثال: اگر $f(x) = 2x$ ، در این صورت $g(x) = x^2$ یک تابع اولیه برای f می باشد. زیرا:

$$g'(x) = 2x = f(x)$$

تابع اولیه ی f را به صورت $\int f(x) dx$ نشان داده و به آن **انتگرال نامعین** یا **تابع اولیه ی عمومی** f می گوئیم.

با فرض آن که $F(x)$ تابع اولیه ی تابع پیوسته ی f باشد ($F'(x) = f(x)$) داریم:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

فرمول بالا، بیانگر تمام توابع اولیه ی f است که با اضافه کردن عدد ثابت C به تابع اولیه ی F به دست می آید.

به عنوان مثال، می دانیم $F(x) = \sin x$ یک تابع اولیه برای $f(x) = \cos x$ است. زیرا:

$$(\sin x)' = \cos x (F'(x) = f(x))$$

پس با داشتن این تابع اولیه و اضافه کردن اعداد ثابت به آن، می توان بی شمار تابع اولیه ی دیگر برای تابع f پیدا کرد. و در کل می نویسیم:

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

تذکره: در برخی از مسائل، تابع اولیه ی باید شرایط خاصی داشته باشد، به این شرایط خاص، شرایط اولیه یا داده های اولیه می گوییم. به عنوان مثال، اگر بخواهیم تابع اولیه ای برای تابع $f(x) = \cos x$ به دست آوریم که شرط اولیه ی $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ را دارا باشد، با توجه به مثال قبل داریم:

$$F(x) = \sin x + C \xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C \xrightarrow{F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1} 1 = 1 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \sin x$$

خواص خطی انتگرال نامعین

$$۱) \int cf(x)dx = c \int f(x)dx \qquad ۲) \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

فرمول های انتگرال گیری

به کمک فرمول های زیر، می توانیم توابع اولیه ی برخی از توابع مهم را به دست آوریم. برای اثبات این فرمول ها، می توانیم از عبارت سمت راست تساوی ها مشتق گرفته و به عبارت داخل انتگرال ها برسیم.

$$۱) \int kdx = kx + C \qquad ۳) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \qquad ۵) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$۲) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad ۴) \int e^x dx = e^x + C \qquad ۶) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$۷) \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$$

$$۸) \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$$

نکته: اگر در فرمول های بالا، توابع داخل انتگرال بر حسب u باشند (که u تابعی بر حسب x است) در این صورت برای استفاده از فرمول های بالا، باید مشتق u بر حسب x ($u'(x)$) نیز به صورت عامل ضربی در داخل انتگرال وجود داشته و یا قابل ایجاد باشد. یعنی:

مشتق u به صورت عامل ضربی

$$\int \overset{\downarrow}{u'} f(u) dx = \int f(u) (\overset{\uparrow}{u'} dx) = \int f(u) du = F(u)$$

تابعی بر حسب x

مثال: انتگرال $\int 3(3x + 1)^4 dx$ را در نظر بگیرید. اگر این انتگرال را با فرمول های بیان شده مقایسه کنیم، متوجه خواهیم شد که شبیه فرمول ۲ است. در این صورت با توجه به فرمول بالا داریم:

$$\int 3(3x + 1)^4 dx \xrightarrow{u(x)=3x+1 \rightarrow u'(x)=3} \int u' u^4 dx = \int u^4 (u' dx) = \int u^4 du$$

حال می توانیم از فرمول ۲ استفاده کنیم.

$$\int u^4 du = \frac{u^{4+1}}{4+1} = \frac{u^5}{5} + C \xrightarrow{u(x)=3x+1} \int 3(3x + 1)^4 dx = \frac{(3x + 1)^5}{5} + C$$

تذکر در نکته: اگر $u'(x)$ به صورت عامل ضربی وجود نداشت، در صورت امکان آن را ایجاد می کنیم.

مثال: اگر انتگرال قبل، به صورت $\int (3x + 1)^4 dx$ داده شود، با فرض $u(x) = 3x + 1$ داریم: $u'(x) = 3$ که به عنوان عامل ضربی در درون انتگرال وجود ندارد. ولی برای ایجاد آن کافی است عدد 3 را در عبارت درون انتگرال ضرب و تقسیم کنیم. بنابراین داریم:

$$\int (3x + 1)^4 dx = \int \frac{1}{3} \times 3 (3x + 1)^4 dx = \frac{1}{3} \int 3 (3x + 1)^4 dx$$

حال عبارت درون انتگرال مانند مثال قبل شد و داریم:

$$\int (3x + 1)^4 dx = \frac{1}{3} \int 3 (3x + 1)^4 dx = \frac{1}{3} \int (3x + 1)^4 3 dx = \frac{1}{3} \int u^4 du = \frac{1}{3} \left(\frac{u^5}{5} + C \right)$$

$$= \frac{u^5}{15} + C \stackrel{u(x)=3x+1}{=} \int (3x + 1)^4 dx = \frac{(3x + 1)^5}{15} + C$$

مثال: مقدار $\int (\Delta x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 8) dx$ را حساب کنید.

حل: جمله به جمله انتگرال گیری کرده، ضرایب را بیرون برده و از فرمول $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} \int (\Delta x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 8) dx &= \Delta \int x^4 dx - 3 \int x^3 dx + 7 \int x^2 dx + \int x dx - \int 8 dx \\ &= \Delta \times \frac{x^5}{5} - 3 \times \frac{x^4}{4} + 7 \times \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 8x + C = x^5 - \frac{3x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 8x + C \end{aligned}$$

می‌توانیم پاسخ خود را با مشتق گیری کنترل و آزمایش کنیم:

$$\left(x^5 - \frac{3x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 8x + C \right)' = 5x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 8$$

مثال: $\int \left(\frac{4x^{\frac{2}{3}}}{7} - 5\sqrt{x} + \frac{\pi}{3x^2} \right) dx$ را حساب کنید.

حل: به منظور آسانی در عمل از نماهای کسری برای هر جمله استفاده می‌کنیم.

$$\int \left(\frac{4x^{\frac{2}{3}}}{7} - 5\sqrt{x} + \frac{\pi}{3x^2} \right) dx = \frac{4}{7} \int x^{\frac{2}{3}} dx - 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{\pi}{3} \int x^{-2} dx$$

$$= \frac{4}{7} \times \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} - 5 \times \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{\pi}{3} \times \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{4}{7} \times \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 5 \times \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{3} \times \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{12}{35} x^{\frac{5}{3}} - \frac{10}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{3x} + C$$

دومین قضیه ی اساسی حساب انتگرال:

قضیه: اگر f در تمام بازه ی $[a, b]$ پیوسته و F یک تابع اولیه ی دلخواه تابع f باشد ($F'(x) = f(x)$)، آن گاه:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

مثال: می خواهیم $\int_{\cdot}^1 x^3 dx$ را محاسبه کنیم. تابع $F(x) = \frac{x^4}{4}$ تابع اولیه ای برای تابع $f(x) = x^3$ می باشد. زیرا:

$$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = 4 \times \frac{x^3}{4} = x^3 \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

بنابراین با استفاده از دومین قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم:

$$\int_{\cdot}^1 x^3 dx = F(1) - F(\cdot) \stackrel{F(x) = \frac{x^4}{4}}{=} \frac{1^4}{4} - \frac{\cdot^4}{4} = \frac{1}{4} - \cdot = \frac{1}{4}$$

حال تابع اولیه ی دیگری مانند $G(x) = \frac{x^4}{4} + 1$ را برای f در نظر بگیرید. با استفاده از دومین قضیه ی اساسی داریم:

$$\int_{\cdot}^1 x^3 dx = G(1) - G(\cdot) \stackrel{G(x) = \frac{x^4}{4} + 1}{=} \left(\frac{1^4}{4} + 1\right) - \left(\frac{\cdot^4}{4} + 1\right) = \frac{1}{4} + 1 - 1 = \frac{1}{4}$$

می بینیم؛ عدد 1 در محاسبات حذف شده و جواب انتگرال مجدداً برابر $\frac{1}{4}$ می باشد. به طور کلی اگر به جای عدد ثابت 1

در تابع اولیه ی $G(x) = \frac{x^4}{4} + 1$ هر عدد ثابت دیگری مانند C قرار دهیم: $G(x) = \frac{x^4}{4} + C$ عدد C در محاسبات

حذف شده و تاثیری در جواب انتگرال معین ندارد. زیرا:

$$\int_{\cdot}^1 x^3 dx = G(1) - G(\cdot) \stackrel{G(x) = \frac{x^4}{4} + C}{=} \left(\frac{1^4}{4} + C\right) - \left(\frac{\cdot^4}{4} + C\right) = \frac{1}{4} + C - C = \frac{1}{4}$$

نکته ی ۱) عبارت $F(b) - F(a)$ معمولا با نماد $F(x) \Big|_a^b$ نیز نمایش داده می شود.

نکته ی ۲) کاربردهای نماد \int به صورت زیر می باشد:

الف) اگر این نماد، بدون حدود انتگرال گیری (یعنی به صورت $\int f(x) dx$) به کار رود، منظور از آن، انتگرال نامعین یا همان تابع اولیه ی عمومی f بوده و بیانگر بی شمار توابعی می باشد که اختلاف آن ها در یک عدد ثابت، مانند C است.

ب) اگر این نماد، با حدود انتگرال گیری (یعنی به صورت $\int_a^b f(x) dx$) به کار رود، منظور از آن، انتگرال معین بوده که حاصل آن عددی است حقیقی که برابر مساحت (یا قرینه ی مساحت) محصور به نمودار تابع $y = f(x)$ و محور x ها و خطوط $x = a$ و $x = b$ است.

مثال: $\int (4x - 3) dx$ و $\int_1^2 (4x - 3) dx$ را حساب کنید.

حل:

طبق اولین قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم: $\int (4x - 3) dx = 4 \times \frac{x^2}{2} - 3x = 2x^2 - 3x$

طبق دومین قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم:

$$\int_1^2 (4x - 3) dx = 2x^2 - 3x \Big|_1^2 = [2(2)^2 - 3(2)] - [2(1)^2 - 3(1)] = [8 - 6] - [2 - 3] = 3$$

انتگرال معین توابع دارای قدر مطلق:

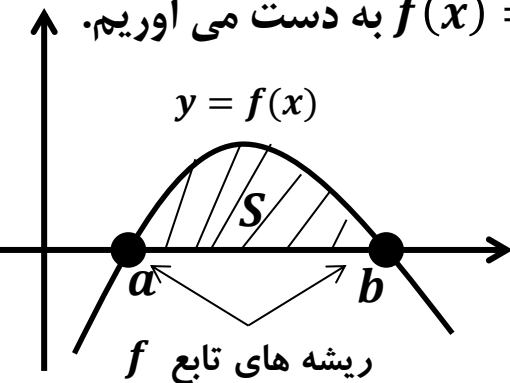
برای محاسبه ی انتگرال $\int_a^b f(x) dx$ که در آن $f(x)$ تابعی قدرمطلق می باشد، ابتدا ریشه ی عبارت داخل قدر مطلق را به دست می آوریم. سپس با توجه به ریشه ی به دست آمده، حدود انتگرال گیری را تفکیک کرده و در هر انتگرال با توجه به بازه ی انتگرال گیری، با مشخص کردن علامت عبارات درون قدرمطلق، قدرمطلق را برداشته و در آخر از عبارت به دست آمده انتگرال گیری می کنیم.

مثال:

$$\int_{-1}^1 |x| dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \left[-\frac{0^2}{2} - \left(-\frac{(-1)^2}{2} \right) \right] + \left[\frac{1^2}{2} - \left(-\frac{(-1)^2}{2} \right) \right]$$
$$= \left[0 + \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{1}{2} + 0 \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

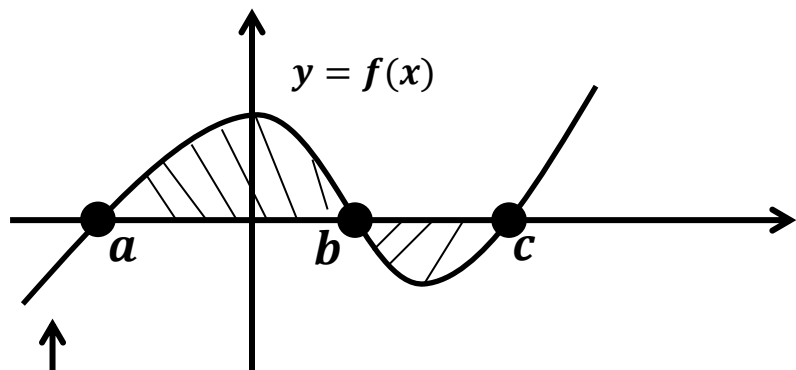
مساحت ناحیه ی محدود به منحنی تابع f و محور x ها

در این حالت ابتدا محل برخورد منحنی تابع با محور x ها را از طریق حل معادله ی $f(x) = 0$ به دست می آوریم. این نقاط در حقیقت همان حدود انتگرال گیری می باشند. پس داریم:



$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

تذکره: اگر جواب های معادله $f(x) = 0$ برابر a, b, c باشند (با فرض $a < b < c$) مساحت محصور را می توان از فرمول زیر به دست آورد:



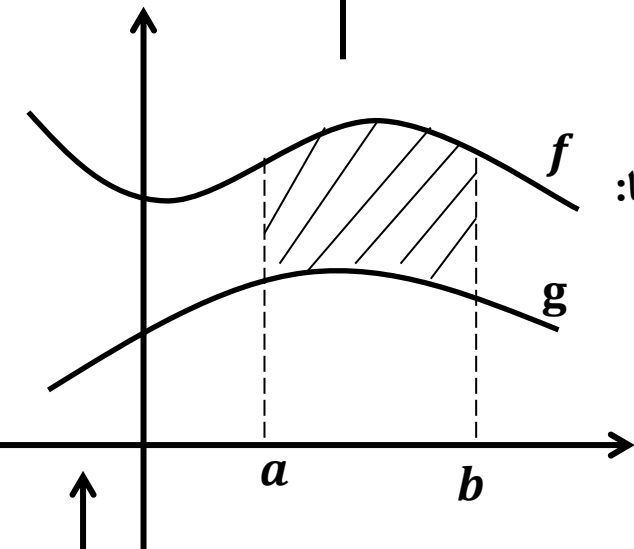
$$S = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \left| \int_c^b f(x) dx \right|$$

مساحت ناحیه ی محدود به دو منحنی:

(الف) اگر نمودارهای f و g در بازه $[a, b]$ به صورت زیر باشند، آن گاه سطح محصور بین این دو منحنی و خطوط $x = a$ و $x = b$ برابر است با:

$$S = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

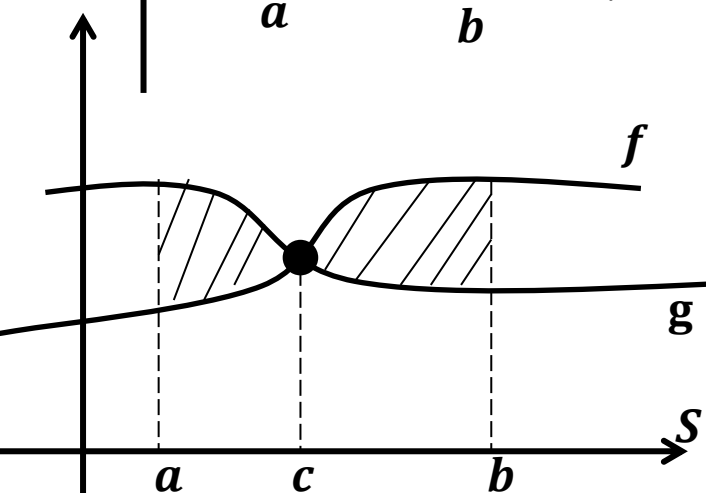
قدر مطلق

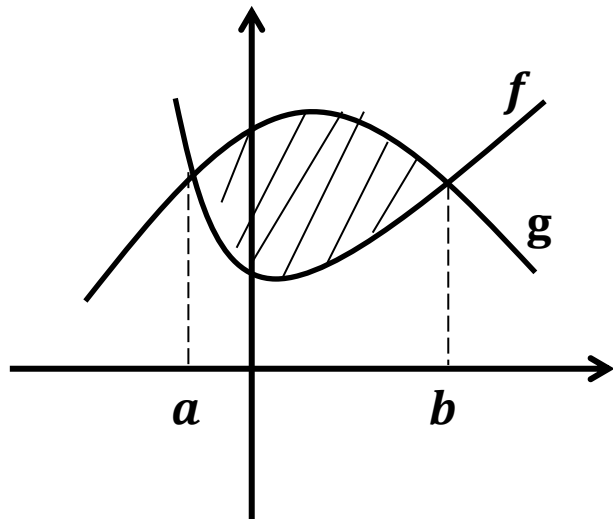


به عبارت دیگر معادله $f(x) = g(x)$ در بازه $[a, b]$ جواب ندارد.

(ب) اگر نمودارهای f و g در بازه $[a, b]$ به صورت زیر باشند، آن گاه سطح محصور بین این دو منحنی و خطوط $x = a$ و $x = b$ برابر است با:

$$S = \left| \int_a^c [f(x) - g(x)] dx \right| + \left| \int_c^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$





ج) برای محاسبه ی مساحت ناحیه ی محدود به منحنی های دو تابع f و g ، ابتدا معادله ی $f(x) = g(x)$ را حل کرده و جواب های این معادله (محل های تقاطع منحنی های f و g) را می یابیم. فرض کنیم جواب های معادله ی بالا برابر a و b بوده و نمودار آن ها به صورت زیر باشد. در این صورت مساحت S برابر است با:

$$S = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

مثال: مطلوبست محاسبه ی انتگرال های نامعین زیر:

$$۱) \int \sqrt{17} dx = \sqrt{17}x + C$$

$$۲) \int [\sin^2 x + \cos^2 x] dx = \int 1 \times dx = x$$

$$۳) \int \frac{2}{x^4} dx = \int 2 \times \frac{1}{x^4} dx = 2 \int x^{-4} dx = 2 \times \frac{x^{-4+1}}{-4+1} = 2 \times \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{2}{3x^3}$$

$$۴) \int \frac{x^3 - x^{-3}}{3} dx = \int \frac{x^3}{3} dx - \int \frac{x^{-3}}{3} dx = \frac{1}{3} \left(\frac{x^{3+1}}{3+1} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{x^{-3+1}}{-3+1} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{x^4}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{x^{-2}}{-2}$$

$$= \frac{x^4}{12} + \frac{1}{6x^2}$$

مثال: مطلوبست محاسبه ی انتگرال معین های زیر:

$$۱) \int_۴^۹ \sqrt{x} dx = \int_۴^۹ x^{\frac{۱}{۲}} dx = \frac{x^{\frac{۱}{۲}+۱}}{\frac{۱}{۲}+۱} \Big|_۴^۹ = \frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}} \Big|_۴^۹ = \frac{۲}{۳} \sqrt{x^۳} \Big|_۴^۹ = \frac{۲}{۳} x\sqrt{x} \Big|_۴^۹ = \frac{۲}{۳} (۲۷ - ۸) = \frac{۲}{۳} (۱۹) = \frac{۳۸}{۳}$$

$$۲) \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} (\delta \sin x - ۳ \cos x) dx = \delta \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} \sin x dx - ۳ \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} \cos x dx = \delta (-\cos x) \Big|_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} - ۳ (\sin x) \Big|_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}$$

$$= -\delta [\cos \pi - \cos \frac{\pi}{۲}] - ۳ [\sin \pi - \sin \frac{\pi}{۲}] = -\delta [-۱ - ۰] - ۳ [۰ - ۱] = \delta + ۳ = ۸$$

$$۳) \int_۰^۱ e^{۲x} dx = \int_۰^۱ \frac{۱}{۲} \times ۲ e^{۲x} dx = \frac{۱}{۲} \times \int_۰^۱ e^{۲x} (۲ dx) \xrightarrow{u=۲x \Rightarrow du=۲ dx} \frac{۱}{۲} \int_۰^۱ e^u du = \frac{۱}{۲} e^u \Big|_۰^۱ = \frac{۱}{۲} e^{۲x} \Big|_۰^۱$$

$$= \frac{۱}{۲} (e^۲ - e^۰) = \frac{۱}{۲} (e^۲ - ۱)$$

$$۴) \int_۱^{\delta} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_۱^{\delta} = \ln \delta - \ln ۱ = \ln \delta - ۰ = \ln \delta$$

$$۵) \int_۱^{\delta} \frac{x dx}{x^۲ + ۱} = \frac{۱}{۲} \times \int_۱^{\delta} \frac{۲x dx}{x^۲ + ۱} \xrightarrow{u=x^۲+۱ \Rightarrow du=۲x dx} \frac{۱}{۲} \times \int_۱^{\delta} \frac{du}{u} = \frac{۱}{۲} \ln u \Big|_۱^{\delta} = \frac{۱}{۲} \ln(x^۲ + ۱) \Big|_۱^{\delta}$$

$$= \frac{۱}{۲} (\ln ۲۶ - \ln ۲) = \frac{۱}{۲} \ln \frac{۲۶}{۲} = \frac{۱}{۲} \ln ۱۳ = \ln \sqrt{۱۳}$$