



موسسه ایران دانش نوین

رویای خودت شود...



@IranDaneshNovies

برای دانلود بقیه ی گام به گام ها و جزوات با کلیک روی لینک
های زیر به سایت یا کانال ما در تلگرام سر بزنید:

www.IDNovin.com

<https://telegram.me/irandaneshnovin>



مشت نمونه‌ی خروار

ریاضیات پایه

«تصاعد»

آموزش به همراه پرسش‌های چهارگزینه‌ای

احسان موسوی

سجاد ثمودی

تهران

انتشارات علمی فار

راهنمای کتاب



سلام! ریاضیات پایه در کنکور خیلی مهم است! خیلی! چون حدود بیست درصد تست‌ها از ریاضیات پایه است؟
نچ! چون یادگیری این مباحث نسبت به هندسه و مباحث ریاضیات پیش‌دانشگاهی بسیار ساده‌تر است. پس حیف است که وقتی کاری این‌قد ساده است، شما از کنارش به همین سادگی بگذرید.

ما در این کتاب ۶ فصل داریم:

محاسبات جبری و معادلات

تابع

مثلثات

تابع نمایی و لگاریتم

دنباله و تصاعد

آمار و مدل‌سازی

هر فصل به دو یا چند بخش کوچک‌تر تقسیم شده است. سعی کرده‌ایم که هر بخش، استقلال معنایی داشته باشد و بتوانید آن را یک‌ضرب بخوانید. تست‌های این کتاب یا تألیفی است، که سعی شده در راستای کنکور باشد و خیلی سلیقه‌مان را درگیرش نکنیم؛ یا تست‌های سراسری و آزاد داخل یا خارج از کشور است. بدون اغراق می‌توانیم بگوییم که همه‌ی تست‌های کنکور در هفت سال اخیر را در این کتاب می‌توانید ببینید. پس با زدن این تست‌ها، می‌توانید امیدوار باشید که آن‌قدر نمونه‌های مختلف دیده‌اید که سر جلسه‌ی کنکور هم از پس حل تست‌های ریاضیات پایه برمی‌آیید.

روش خواندن کتاب چه‌طوری است؟

شما ابتدا شروع به خواندن پلکان آموزش می‌کنید. متن درس را دقیق می‌خوانید. مثال بعد از مبحث آموزش را می‌بینید. بعد می‌روید سراغ کادر تست‌هایی که در ادامه‌اش آمده است. تست‌ها را بهتر است یکی‌یکی حل کنید و پاسخ‌ش را ببینید. در این مرحله نیازی نیست زمان بگیرید. مهم این است که پله‌پله که تست‌های سخت‌تر می‌شوند، توانایی خودتان را در حل مسئله بالا ببرید.

بعد از این مرحله، در آخر هر فصل، پلکان آزمون وجود دارد. این‌جا باید خود را محک بزنید. هر فصل حداقل یک آزمون «ساده و متوسط» و حداقل یک آزمون «استاندارد» دارد. البته بعضی فصل‌ها چهار تا آزمون هم دارند. بستگی به اهمیت فصل دارد. زمان بگیرید و با آزمون «ساده و متوسط» شروع کنید. بعد به سراغ آزمون‌های «استاندارد» بروید. بعد هم با خیال راحت بروید سر جلسه‌ی کنکور!

در آخر هم بگوییم که این فصل نمونه‌ی کتاب را که خواندید، لطف می‌کنید اگر برای ما نظرتان را بفرستید:

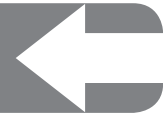
Email: phare.math@gmail.com



فهرست:

۲	بخش ۱: دنباله و تصاعد
۱۷	بخش ۲: مجموع جمله‌های دنباله‌ها
۲۸	پلکان آزمون

تصاعد



این فصل را به دو بخش تقسیم کرده‌ایم. بخش اول در مورد مفهوم دنباله، تصاعد حسابی و تصاعد هندسی بحث می‌کنیم. در کتاب درسی ریاضیات سال دوم این مباحث آمده است. بخش دوم در مورد مجموع جملات تصاعدها است. این بحث برای رشته‌ی ریاضی در کتاب حسابان و برای رشته‌ی تجربی در کتاب پیش‌دانشگاهی آمده است. ما برای انسجام مطلب، کل این مباحث را در فصل جمع‌وجور کرده‌ایم. این فصل، به‌واقع مبحث پیچیده‌ای ندارد. پس با خیال راحت پیش بروید! یادتان هم باشد که حتماً هر سال حداقل یک تست در کنکور از این فصل می‌آید.

شناسنامه فصل:

تعداد تست‌ها	تألیفی	سراسری	آزاد
	۸۲	۲۶	۲۲

بخش ۱ دنباله و تصاعد پلکان آموزش

۱ - مفهوم دنباله

هر تعدادی از اعداد را که پشت سر هم نوشته باشیم، یک دنباله از اعداد می‌نامیم. به هر عدد که در یک دنباله قرار گرفته است، یک جمله‌ی آن دنباله گفته می‌شود. جمله‌ی n ام دنباله را که n یک عدد طبیعی دلخواه است، جمله‌ی عمومی دنباله می‌نامند. جمله‌ی n ام یک دنباله را معمولاً با a_n یا b_n یا ... و خود دنباله را با $\{a_n\}$ یا $\{b_n\}$ یا ... نمایش می‌دهند. برای مثال دنباله‌ی اعداد طبیعی $۲, ۴, ۶, \dots, ۲n, \dots$

↓
جمله‌ی عمومی

۱. جمله‌ی عمومی چند دنباله داده شده است. هر کدام از دنباله‌ها را با چند جمله‌ی ابتدایی‌اش

نشان دهید. $a_n = 2n^2 - 1$ $b_n = \frac{1}{n+1}$ $c_n = \sin \frac{n\pi}{4}$

خیلی ساده است دیگر! در هر حالت مقدار n را برابر ۱، ۲، ۳ و ... قرار می‌هیم تا جمله‌های

دنباله‌ها به دست بیایند:

جمله‌های دنباله‌ی a_n در حال زیاد شدن هستند.
به این دنباله‌ها، دنباله‌های صعودی می‌گوییم.

$$a_n = 2n^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} n=1 \Rightarrow a_1 = 1 \\ n=2 \Rightarrow a_2 = 7 \\ n=3 \Rightarrow a_3 = 17 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \{a_n\}: 1, 7, 17, \dots$$

جمله‌های دنباله‌ی b_n در حال کم شدن هستند.
به این دنباله‌ها، دنباله‌های نزولی می‌گوییم.

$$b_n = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \begin{cases} n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2} \\ n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{3} \\ n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{4} \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \{b_n\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

جمله‌های دنباله‌ی c_n به‌طور تناوبی تکرار می‌شوند.
به این دنباله‌ها، دنباله‌های تناوبی می‌گوییم.

$$c_n = \sin \frac{n\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} n=1 \Rightarrow a_1 = \sin \frac{\pi}{4} = 1 \\ n=2 \Rightarrow a_2 = \sin \pi = 0 \\ n=3 \Rightarrow a_3 = \sin \frac{3\pi}{4} = 1 \\ n=4 \Rightarrow a_4 = \sin \pi = 0 \\ n=5 \Rightarrow a_5 = \sin \frac{5\pi}{4} = -1 \\ n=6 \Rightarrow a_6 = \sin \frac{3\pi}{2} = 0 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \{c_n\}: 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots$$

۱ - جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $4, -2, \frac{16}{9}, -2, \dots$ کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

$$a_n = \frac{4 \times (-1)^{n+1}}{n} \quad (4) \quad a_n = \frac{2^{2n}}{n} \quad (3) \quad a_n = \frac{(-2)^{n+1}}{n^2} \quad (2) \quad a_n = \frac{2 \times (-2)^n}{n} \quad (1)$$

۲ - جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n = \begin{cases} \frac{n^2}{4} & \text{زوج } n \\ \frac{n^2-1}{8} & \text{فرد } n \end{cases}$ است. مجموع جمله‌های چهارم و نهم این دنباله چه قدر است؟

$$16 \quad (4) \quad 14 \quad (3) \quad 13 \quad (2) \quad 11 \quad (1)$$

۳ - جمله‌ی $2n+3$ ام دنباله‌ای برابر $\frac{2n^2+6n+5}{n+2}$ است. جمله‌ی هفتم این دنباله چه قدر است؟

$$\frac{49}{25} \quad (4) \quad \frac{36}{16} \quad (3) \quad \frac{25}{4} \quad (2) \quad \frac{16}{9} \quad (1)$$

۴ - در دنباله‌ی $b_1 = b_2 = 2$ و $b_{n+1} = b_n + b_{n-1} - 1$ ، جمله‌ی هشتم برابر است با:

$$22 \quad (4) \quad 21 \quad (3) \quad 15 \quad (2) \quad 14 \quad (1)$$

۵ - جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $a_1 = 1$ و $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ کدام است؟

$$a_n = n^2 \quad (4) \quad a_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (3) \quad a_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (2) \quad a_n = \frac{n^2}{n+1} \quad (1)$$

۲ - دنباله‌ی حسابی

نام دیگر «دنباله‌ی حسابی»، «دنباله‌ی عددی» است!

دنباله‌هایی را که هر جمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول) از افزودن یک مقدار ثابت به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید، دنباله‌ی حسابی می‌نامیم و به این مقدار ثابت «قدرنسبت» دنباله می‌گوییم. برای نمونه دنباله‌ی زیر را ببینید:

$$\begin{array}{ccccccc} & +4 & & +4 & & +4 & & +4 & & +4 \\ 3 & \rightarrow & 7 & \rightarrow & 11 & \rightarrow & 15 & \rightarrow & 19 & \rightarrow \dots \end{array}$$

واضح است که دنباله‌ی بالا چه‌گونه ساخته می‌شود! عدد ۳ اولین جمله‌ای این دنباله است. این عدد با ۴ جمع می‌شود و جمله‌ی دوم که ۷ است تولید می‌شود. همین‌طور برای تولید جمله‌ی سوم، جمله‌ی دوم باز هم با همان ۴ جمع می‌شود و عدد ۱۱ تولید می‌شود و...

در این حالت اگر جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی a و قدرنسبت این دنباله d باشد، جملات دنباله

$$\begin{array}{ccccccc} & +d & & +d & & & +d \\ a & \rightarrow & a+d & \rightarrow & a+2d & \rightarrow & \dots & \rightarrow & a+(n-1)d & \rightarrow & a+nd & \rightarrow \dots \end{array}$$

جمله‌ی دوم جمله‌ی سوم جمله‌ی n ام جمله‌ی $(n+1)$ ام

به صورت زیر خواهند بود:

فرمول‌های عمومی دنباله‌ی حسابی

جمله‌ی عمومی یک تصاعد حسابی با جمله‌ی اول a_1 و قدرنسبت d برابر می‌شود با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

🔍 جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی $5, 11, 17, \dots$ را به دست بیاورید.

✓ برای به دست آوردن جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی، باید «جمله‌ی اول» و «قدرنسبت» دنباله را داشته باشیم. با یک نگاه می‌بینیم که جمله‌ی اول برابر ۵ است. پس:

$$a_1 = 5$$

حالا قدرنسبت چند است؟ مگر نه این که قدرنسبت در دنباله‌ی حسابی، اختلاف دو جمله‌ی متوالی است؟! پس این‌جا به راحتی می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 6$$

حالا با داشتن a_1 و d می‌توانیم جمله‌ی عمومی را بنویسیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow[d=6]{a_1=5} a_n = 5 + (n-1) \times 6 \Rightarrow a_n = 6n - 1$$

صعودی و نزولی: در دنباله‌ی حسابی، اگر قدرنسبت مثبت باشد، جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی افزایش می‌یابند و اگر قدرنسبت منفی باشد، جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی کاهش می‌یابند. به نوع اول، دنباله‌ی صعودی و به نوع دوم، دنباله‌ی نزولی می‌گوییم.

برای مثال دو دنباله‌ای را که با جمله‌ی ۳ شروع می‌شود و قدرنسبت یکی برابر ۵ و دیگری برابر ۵- است نگاه کنید:

$$d = 5: 3, 8, 13, 18, \dots \Rightarrow \text{دنباله‌ی صعودی}$$

$$d = -5: 3, -2, -7, -12, \dots \Rightarrow \text{دنباله‌ی نزولی}$$

ویژگی‌های مهم دنباله‌های حسابی

۱) تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی در تصاعد حسابی برابر قدرنسبت تصاعد است.

۲) اگر a_p و a_q دو جمله‌ی متفاوت و دل‌خواه از دنباله‌ی حسابی باشند، قدرنسبت تصاعد

$$d = \frac{a_p - a_q}{p - q} \quad \text{برابر است با:}$$

۳) اگر a_1 را جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی و a_n را جمله‌ی آخر آن بدانیم، تعداد جملات دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی $1 + \frac{a_n - a_1}{d} = n$ محاسبه می‌شود.

«دنباله‌ی حسابی» و «تصادد حسابی»، دو واژه برای یک مفهوم یک‌سان هستند. گیج نشوید!

واسطه‌ی حسابی: یک تصاعد حسابی به صورت $\dots, a, b, c, \dots$ را در نظر بگیرید. سه عدد a, b و c سه جمله‌ی متوالی این تصاعد حسابی هستند. در تصاعد حسابی، رابطه‌ی سه جمله‌ی متوالی به این صورت است که «**وسطی، میانگین دو تای کناری است**»، به زبان ریاضی یعنی:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

در این حالت می‌گوییم b واسطه‌ی حسابی دو عدد a و c است.

۶ - جمله‌ی عمومی چند دنباله داده شده است. کدام دنباله تشکیل تصاعد عددی می‌دهد؟

$$a_n = \frac{n^3}{\lambda} \quad (4)$$

$$a_n = \lambda + \frac{n}{\lambda} \quad (3)$$

$$a_n = \lambda n - n^2 \quad (2)$$

$$a_n = \frac{\lambda}{n} - 1 \quad (1)$$

۷ - در یک تصاعد حسابی، جمله‌ی دوم ۲ برابر جمله‌ی هفتم است. مقدار کدام جمله‌ی این تصاعد برابر صفر است؟

(۴) سیزدهم

(۳) دوازدهم

(۲) ششم

(۱) پنجم

۸ - مقدار x چه قدر باشد تا $x+2, x+4, 6x+8, 10x+8$ سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد حسابی باشند؟

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

۹ - اعداد $1-p, 5p, 4p+3$ و $3p+2$ سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد عددی هستند. قدرنسبت این تصاعد کدام است؟ (سراسری - ریاضی - ۱۴)

(۴) ۷

(۳) ۶

(۲) ۵

(۱) ۴

۱۰ - در یک تصاعد حسابی $t_p = q$ و $t_q = p$ و $p \neq q$ ، قدرنسبت تصاعد کدام است؟

(۴) ۱

(۳) $q-p$

(۲) -۱

(۱) $p-q$

۱۱ - اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند. اگر طول وتر این مثلث ۱۵ باشد، مجموع طول دو ضلع دیگر چه قدر خواهد بود؟

(۴) ۲۲

(۳) ۲۱

(۲) ۲۰

(۱) ۱۹

۱۲ - اگر به قدرنسبت یک تصاعد عددی ۳ واحد اضافه کنیم، به جمله‌ی ششم دنباله‌ی حاصل، چند واحد اضافه می‌شود؟

(۴) ۱۵

(۳) ۶

(۲) ۲

(۱) صفر

۱۳ - در یک تصاعد عددی $t_1 + t_v + t_{13} = 39$ ، اگر $t_5 = 5$ باشد، قدرنسبت تصاعد چه قدر است؟

(۴) -۴

(۳) ۴

(۲) $-\frac{1}{4}$

(۱) $\frac{1}{4}$

۱۴ - در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع دو جمله‌ی اول برابر $\frac{9}{5}$ و مجموع جملات سوم و چهارم، برابر $\frac{6}{5}$ است. قدرنسبت آن کدام است؟

(۴) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۲) $-\frac{1}{4}$

(۱) $-\frac{3}{4}$

۱۵ - تفاضل جمله ی دهم از جمله ی دوازدهم یک تصاعد عددی، ۵ و مجموع دو جمله ی دهم و دوازدهم، ۲۵ است. جمله ی بیست و یکم این تصاعد کدام است؟

(۱) ۳۵ (۲) ۳۶ (۳) ۳۷/۵ (۴) ۳۸/۵

۱۶ - در تصاعد حسابی $a_1 = 1$ و $a_7 = \frac{5}{3}$ حاصل $\frac{a_{15} + a_{17} + a_{19}}{a_{23} + a_{25} + a_{27}}$ کدام است؟

(۱) $\frac{35}{71}$ (۲) $\frac{105}{71}$ (۳) $\frac{7}{17}$ (۴) $\frac{21}{17}$

۱۷ - تعداد عددهای دو رقمی ای که باقی مانده ی تقسیم شان بر ۹ برابر ۲ باشد، برابر است با:

(۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۱۸ - اگر در یک تصاعد حسابی $a_1 + a_7 + a_{13} = 30$ باشد، جمله ی پنجم (a_5) چه قدر است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۱۹ - در یک تصاعد حسابی $a_n + a_p = a_{n-1}$ است. در این تصاعد $\frac{a_1}{d}$ کدام است؟

(۱) p (۲) -p (۳) n-p (۴) 2n-4

۲۰ - در یک تصاعد حسابی نزولی، مجموع سه جمله ی متوالی برابر ۲۷ و حاصل ضرب این سه جمله برابر ۲۸۸ شده است.

قدرنسبت این تصاعد چند است؟

(۱) -۸ (۲) -۷ (۳) -۶ (۴) -۴

۲۱ - در تصاعد حسابی $1, \frac{4}{5}, \dots$ جملات $a_5, a_{10}, a_{15}, \dots$ تشکیل تصاعد دیگری می دهند. قدرنسبت این تصاعد، چه قدر است؟

(۱) $-\frac{1}{5}$ (۲) -۱ (۳) -۵ (۴) $\frac{1}{5}$

۲۲ - در تصاعد عددی $7, 2, 11, \dots$ اولین جمله ای که بزرگ تر از ۴۲۰ است، کدام است؟

(۱) ۴۲۲ (۲) ۴۲۳ (۳) ۴۲۴ (۴) ۴۲۵

۲۳ - تصاعد حسابی به جمله ی اول ۶۳ و قدرنسبت -۴ چند جمله ی مثبت دارد؟

(۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸

۲۴ - در یک تصاعد حسابی $a_1 = 5$ و $a_7 = 9$ ، آنگاه $a_7 + a_8 + a_9$ چه قدر است؟

(۱) ۱۹ (۲) ۳۸ (۳) ۵۷ (۴) ۷۶

۲۵ - در یک تصاعد حسابی $a_5 + a_6 = 3$ و $a_8 + a_9 = -2$ ، حاصل $a_{15} + a_{13}$ چه قدر است؟

(۱) $-\frac{55}{6}$ (۲) $-\frac{37}{6}$ (۳) $-\frac{5}{6}$ (۴) $-\frac{67}{6}$

۲۶ - در تصاعد حسابی $1, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \dots$ جمله ی اول را با $\frac{3}{5}$ و جمله ی دوم را با $\frac{2}{5}$ و جمله ی سوم را با $\frac{1}{5}$ جمع می کنیم.

جمله ی نود و سوم تصاعد جدید چه قدر است؟

(۱) $\frac{139}{3}$ (۲) ۱۲۵ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴

۲۷ - در تصاعدهای عددی $5, 9, 13, \dots$ و $4, 7, 10, \dots$ چند جمله ی مساوی کوچک تر از ۵۰ وجود دارد؟

(۱) چهار جمله (۲) پنج جمله (۳) سه جمله (۴) دو جمله

۲۸ - بیست جمله ی اول تصاعد حسابی به جمله ی اول $a_1 = 3$ و قدرنسبت $d_1 = 2$ با بیست جمله ی اول تصاعد حسابی به جمله ی

اول $b_1 = 2$ و قدرنسبت $d_2 = 3$ چند جمله ی مساوی دارند؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۲۹ - بین دو عدد که تفاضل آنها ۷۲۰ است، پنج واسطه ی عددی درج شده است. قدرنسبت تصاعد چه قدر است؟

(۱) ۱۸۰ (۲) ۱۶۰ (۳) ۱۴۰ (۴) ۱۲۰

۳۰ - بین دو عدد ۱۹ و ۳۹، چهار واسطه ی حسابی درج کرده ایم تا یک تصاعد حسابی نزولی ایجاد شود. مجموع این چهار واسطه

چه قدر است؟

(۱) ۱۰۹ (۲) ۱۱۴ (۳) ۱۱۶ (۴) ۱۲۱

۳۱ - در تصاعد هندسی $4, 6, 9, \dots$ مجموع جملات پنجم و ششم چه قدر است؟

$$(1) \frac{135}{4} \quad (2) \frac{324}{16} \quad (3) \frac{405}{4} \quad (4) \frac{405}{8}$$

۳۲ - اگر a_1 و a_2 و a_3 سه جمله اول یک تصاعد هندسی با قدرنسبت ۲ باشند، کدام گزینه سه جمله اول یک تصاعد هندسی هستند؟

$$(1) a_1 + 1 \text{ و } a_2 + a_1 \text{ و } a_3 + a_2 \quad (2) a_1 + 1 \text{ و } a_2 + 4 \text{ و } a_3 + 16 \\ (3) a_1 + 1 \text{ و } a_2 + 2 \text{ و } a_3 + 3 \quad (4) a_1 + 1 \text{ و } a_2 + 2 \text{ و } a_3 + 4$$

۳۳ - اگر $5x+1$ و $6x$ و $7x-2$ سه جمله متوالی یک تصاعد هندسی باشند، چند مقدار قابل قبول برای x وجود خواهد داشت؟

$$(1) \text{ صفر} \quad (2) 1 \quad (3) 2 \quad (4) \text{ بیش تر از } 2$$

۳۴ - در یک تصاعد هندسی $a_4 a_7 = 2a_5$ است. جمله اول کدام است؟

$$(1) \sqrt{2} \quad (2) 2 \quad (3) 4 \quad (4) 2\sqrt{2}$$

۳۵ - در تصاعد هندسی $9, 12, 16, \dots$ حاصل $a_6 - a_5$ کدام است؟

$$(1) \frac{16}{9} \quad (2) \frac{64}{27} \quad (3) \frac{128}{9} \quad (4) \frac{256}{27}$$

۳۶ - در یک تصاعد هندسی با قدرنسبت ۲، حاصل $\frac{a_1 a_7}{a_4^2}$ کدام است؟

$$(1) \frac{1}{16} \quad (2) \frac{1}{4} \quad (3) \frac{1}{2} \quad (4) \frac{1}{8}$$

۳۷ - جمله نهم یک تصاعد هندسی ۵ برابر جمله ششم آن است. نسبت جمله یازدهم به جمله پنجم برابر است با:

$$(1) 125 \quad (2) 25 \quad (3) 15 \quad (4) 5$$

۳۸ - در یک تصاعد عددی جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله متوالی از تصاعد هندسی صعودی اند. قدرنسبت

تصاعد هندسی کدام است؟ (سراسری - ریاضی - ۸۷ - خارج از کشور)

$$(1) \frac{6}{5} \quad (2) \frac{5}{4} \quad (3) \frac{4}{3} \quad (4) \frac{3}{2}$$

۳۹ - در یک تصاعد عددی جملات سوم، هفتم و نهم، می توانند سه جمله متوالی از تصاعد هندسی باشند. چندمین جمله این

تصاعد، صفر است؟ (سراسری - تجربی - ۸۸)

$$(1) 9 \quad (2) 10 \quad (3) 11 \quad (4) 12$$

۴۰ - قدرنسبت دو تصاعد هندسی برابر و جمله اول یکی چهار برابر جمله اول دیگری است. جمله n ام تصاعد اول چند برابر

جمله n ام تصاعد دوم است؟

$$(1) 4 \quad (2) 4n \quad (3) 4^n \quad (4) n^4$$

۴۱ - واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $2^2 \times 5 \times 7^2$ و $2^2 \times 5^3 \times 11^2$ کدام است؟

$$(1) 7700 \quad (2) 7800 \quad (3) 8500 \quad (4) 8700$$

۴۲ - در یک تصاعد هندسی حاصل ضرب n ه جمله اول برابر هشت است. $(a_1 a_2 \dots a_n = 8)$ آن گاه حاصل ضرب $a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7$ چه قدر

است؟ (آزاد - ریاضی - ۸۱)

$$(1) 2\sqrt{2} \quad (2) 2\sqrt{2} \quad (3) 2\sqrt[4]{2} \quad (4) 4$$

۴۳ - بین دو عدد ۳ و ۱۹۲ پنج واسطه‌ی هندسی درج کرده‌ایم. مجموع واسطه‌ها برابر کدام یک از گزینه‌ها می تواند باشد؟

$$(1) -55 \quad (2) -66 \quad (3) -77 \quad (4) -88$$

۴۴ - دو تصاعد هندسی با جمله‌های اول یک‌سان را در نظر بگیرید. قدرنسبت تصاعد اول برابر ۳- و قدرنسبت تصاعد دوم برابر ۲۷

است. جمله‌ی هفتم از تصاعد دوم، با جمله‌ی چندم از تصاعد اول برابر است؟

$$(1) \text{ بیستم} \quad (2) \text{ نوزدهم}$$

(۳) هیچ‌کدام (۴) با هیچ‌کدام از جمله‌های تصاعد اول برابر نیست.

۴- دنباله‌ی تقریبات اعشاری

برای به دست آوردن دنباله‌ی تقریبات اعشاری، ابتدا یک عدد کسری مانند $\frac{a}{b}$ را در نظر می‌گیریم. وقتی عمل تقسیم a بر b را انجام دهیم، خارج‌قسمتی به دست می‌آید که تشکیل یک عدد اعشاری می‌دهد. با اضافه کردن هر بخش از اعداد اعشاری (یعنی دهم، صدم و ...) دنباله‌ای از اعداد اعشاری ساخته می‌شود که جملات آن به عدد گویای $\frac{a}{b}$ نزدیک می‌شوند یا میل پیدا می‌کنند.

این دنباله‌ی اعداد اعشاری برای اعداد حقیقی مثبت ساخته می‌شود که باید به عدد x نزدیک شوند. با توجه به توضیحات بیان شده، جمله‌ی n ام این دنباله یک عدد اعشاری با n رقم اعشار است و جمله‌ی بعدی با اضافه کردن یک رقم اعشار به جمله‌ی قبلی حاصل می‌شود. بنابراین جمله‌ی n ام تقریب اعشاری x با n رقم اعشار است.

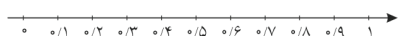
به عنوان مثال با تقسیم 13 بر 6 دنباله‌ی اعشاری که خارج‌قسمت آن تشکیل می‌دهد به صورت زیر است:

نحوه‌ی ساختن دنباله‌ی تقریبات اعشاری: ابتدا مشخص می‌کنیم عدد گویای موجود، بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد. بین این دو عدد صحیح را به ده قسمت تقسیم کرده و عدد دهم عدد اعشاری را انتخاب می‌کنیم. به همین شیوه عدد صدم، هزارم و ... را به دست آورده و در هر مرحله با افزودن یک عدد اعشاری دنباله‌ی تقریبات اعشاری موردنظر را تشکیل می‌دهیم.

مثال ۴-۱ عدد $x = \frac{5}{7}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم دنباله‌ای از اعداد اعشاری را پیدا کنیم که جملات آن به $\frac{5}{7}$ میل می‌کنند.

مرحله‌ی اول: عدد $\frac{5}{7}$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

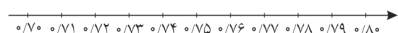
بین صفر و ۱. $0 < \frac{5}{7} < 1$



مرحله‌ی دوم: حال روی محور اعداد، فاصله‌ی بین صفر و ۱ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. x بین کدام دو عدد قرار می‌گیرد؟

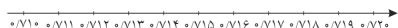
باید دقیق‌ترین محدوده را تعیین کنیم. به راحتی دیده می‌شود که $\frac{5}{7} > \frac{5}{10}$ است، پس به جست‌جویمان در بعد از $5/10$ ادامه می‌دهیم.

$$\frac{5}{7} > \frac{6}{10}, \quad \frac{5}{7} > \frac{7}{10}, \quad \frac{5}{7} < \frac{8}{10} \Rightarrow \frac{7}{10} < \frac{5}{7} < \frac{8}{10}$$



مرحله‌ی سوم: حالا نوبت رقم دوم بعد از اعشار است. بازه‌ی بین $7/10$ و $8/10$ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. عدد $\frac{5}{7}$ بین کدام دو عدد قرار دارد؟

$$\frac{71}{100} < \frac{5}{7}, \quad \frac{72}{100} > \frac{5}{7} \Rightarrow 0/71 < \frac{5}{7} < 0/72$$



مرحله‌ی چهارم: می‌رسیم به سومین رقم بعد از اعشار. بازه‌ی بین $71/100$ و $72/100$ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. عدد $\frac{5}{7}$ بین کدام دو تا قرار دارد؟

$$\frac{711}{1000} < \frac{5}{7}, \quad \frac{712}{1000} < \frac{5}{7}, \quad \frac{713}{1000} < \frac{5}{7}, \quad \frac{714}{1000} < \frac{5}{7}, \quad \frac{715}{1000} > \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow 0/714 < \frac{5}{7} < 0/715$$

با تکرار مراحل بالا، دنباله‌ای ساخته می‌شود که به عدد موردنظر نزدیک می‌شود. برای $x = \frac{5}{7}$ ، دنباله به صورت روبه‌رو است:

$$0/7, 0/71, 0/714, \dots$$

۴۵ - کسر متعارفی مساوی عدد اعشاری $\overline{۱/۶۹}$ به صورت $\frac{p}{q}$ است که $(p, q) = ۱$ ، مجموع ارقام q کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۴۶ - کسر مولد بسط ده گانی $۰/۱۳۳۳...$ کدام است؟

$\frac{۱۲}{۹۹}$ (۴)

$\frac{۱۲}{۹۰}$ (۳)

$\frac{۱۳}{۹۹}$ (۲)

$\frac{۱۳}{۹۰}$ (۱)

۵ - نزدیک شدن جملات دنباله به یک عدد

ابتدا باید تشخیص دهیم در چه صورتی جملات دنباله به یک عدد نزدیک می شوند. اگر جملات دنباله را از یک عدد معین کم کنیم و تک تک جملات حاصل شده به عدد صفر نزدیک شوند، می توانیم بگوییم جملات دنباله ی مورد نظر به آن عددی که آن را از جملات دنباله کم کردیم، نزدیک می شوند. به عنوان مثال تقسیم عدد ۴ بر ۳ را در نظر گرفته و آن را به صورت دنباله ی تقریبات اعشاری نمایش می دهیم. بنابراین داریم:

تفاضل این جملات از عدد $\frac{۴}{۳}$ به صفر نزدیک می شوند. بنابراین جملات دنباله به عدد $\frac{۴}{۳}$ نزدیک می شوند.

در دنباله ی ثابت جملات دنباله به همان مقدار ثابت نزدیک می شوند. فقط در این مورد خاص است که می توان گفت جملات دنباله دقیقاً همان عددی هستند که به آن نزدیک می شوند.

۵.۵ مثال جمله های دنباله ای با جمله ی عمومی $a_n = \frac{1}{n}$ با افزایش n به کدام عدد نزدیک می شوند؟

راه شهودی کار این است که چند جمله از دنباله را بنویسیم و روند آن را دنبال کنیم:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4}$$

$$a_{100} = \frac{1}{100}, \quad a_{1000} = \frac{1}{1000}, \quad a_{10000} = \frac{1}{10000}$$

می بینیم که هر چه مقدار n را بیش تر می کنیم، جمله های دنباله کوچک تر و کوچک تر می شوند؛ یعنی به عدد «صفر» نزدیک می شوند.

پاسخ تست های پلکان آموزش

پله ی دوم: مقدار جمله ی نهم را هم با استفاده از جمله ی عمومی مربوط به n های فرد محاسبه می کنیم:

$$n \text{ فرد} : a_n = \frac{n^2 - 1}{8} \Rightarrow a_9 = \frac{9^2 - 1}{8} = \frac{81 - 1}{8} = \frac{80}{8} = 10$$

پله ی سوم: مجموع جمله های چهارم و نهم برابر است با:

$$a_4 + a_9 = 4 + 10 = 14$$

۳ - پله ی یکم: برای تعیین جمله ی هفتم ابتدا باید n ای را تعیین کنیم که به ازای آن $2n + 3$ برابر ۷ می شود. چون ما مستقیم نمی توانیم n را در جمله ی عمومی دنباله قرار دهیم و مقدار a_n را به دست آوریم. پس معادله ی $2n + 3 = 7 \Rightarrow 2n = 4 \Rightarrow n = 2$ را حل می کنیم:

پله ی دوم: اگر در جمله ی عمومی داده شده n را برابر ۲ قرار دهیم، جمله ی هفتم را محاسبه کرده ایم. بنابراین خواهیم داشت:

$$a_7 = \frac{2(2)^2 + 6(2) + 5}{2 + 2} = \frac{8 + 12 + 5}{4} = \frac{25}{4}$$

۴ - پله ی یکم: در دنباله هایی که جملات دنباله به هم وابسته هستند، برای به دست آوردن جمله ی n ام آن دنباله راه ساده این است که از جمله ی اول مرحله به مرحله جلو برویم تا بتوانیم جمله ی n ام را حساب کنیم.

پله ی دوم: با داشتن این که $b_1 = b_2 = 2$ است، جمله های دنباله را تک تک حساب می کنیم تا جمله ی هشتم را به دست آوریم. ببینید:

$$b_3 = b_2 + b_1 - 1 = 2 + 2 - 1 = 3$$

$$b_4 = b_3 + b_2 - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$$

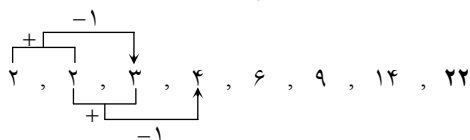
$$b_5 = b_4 + b_3 - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$$

$$b_6 = b_5 + b_4 - 1 = 6 + 4 - 1 = 9$$

$$b_7 = b_6 + b_5 - 1 = 9 + 6 - 1 = 14$$

$$b_8 = b_7 + b_6 - 1 = 14 + 9 - 1 = 22$$

راه شاید ساده تر؛ جمله های سوم به بعد این دنباله، از جمع دو جمله ی قبلی منهای عدد یک به دست می آیند. پس داریم:



۱ - چشم انداز: در این مدل تست ها، بهترین کار این است که چند جمله از جمله های عمومی داده شده را بنویسید. سپس به راحتی می توانید جمله ی عمومی دنباله را مورد نظر را تعیین کنید.

$$a_n = \frac{2 \times (-2)^n}{n}$$

$$a_1 = \frac{2 \times (-2)^1}{1} = -4, \quad a_2 = \frac{2 \times (-2)^2}{2} = 4$$

با توجه به این که جمله ی دوم برابر ۴ شد، این جمله ی عمومی مربوط به دنباله ی داده شده نیست.

$$a_n = \frac{(-2)^{n+1}}{n^2}$$

$$a_1 = \frac{(-2)^{1+1}}{1} = 4$$

$$a_2 = \frac{(-2)^{2+1}}{2^2} = -2$$

$$a_3 = \frac{(-2)^{3+1}}{3^2} = \frac{16}{9}$$

:

بنابراین جمله ی عمومی دنباله ی داده شده می تواند به صورت $a_n = \frac{(-2)^{n+1}}{n^2}$ باشد.

$$a_n = \frac{2^n}{n}$$

آیا در مورد این جمله ی عمومی نیاز به تعیین دنباله ی آن هست؟ صد درصد خیر! چون در دنباله ای که در تست آمده است، جمله های منفی هم دیده می شود؛ ولی تمامی جملات این دنباله مثبت هستند. پس این جمله ی عمومی هم به درد ما نمی خورد!

$$a_n = \frac{4 \times (-1)^{n+1}}{n}$$

$$a_1 = \frac{4 \times (-1)^{1+1}}{1} = 4, \quad a_2 = \frac{4 \times (-1)^{2+1}}{2} = -2$$

$$a_3 = \frac{4 \times (-1)^{3+1}}{3} = \frac{4}{3}$$

بنابراین گزینه ی ۴ هم جواب تست نخواهد بود.

۲ - پله ی یکم: با توجه به جمله ی عمومی مربوط به جملات زوج (n های زوج) مقدار جمله ی چهارم را به دست می آوریم:

$$n \text{ زوج} : a_n = \frac{n^2}{4} \Rightarrow a_4 = \frac{4^2}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

۷- **پله‌ی یکم:** با توجه به اینکه $a_7 = 2a_4$ است، رابطه‌ی بین a_1 (جمله‌ی اول دنباله) و d (قدرنسبت تصاعد) را به دست می‌آوریم. بنابراین داریم:

$$a_7 = 2a_4 \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} a_1 + 6d = 2(a_1 + 3d) = 2a_1 + 6d$$

$$\Rightarrow a_1 = -11d \Rightarrow a_1 + 11d = 0$$

پله‌ی دوم: از رابطه‌ی $a_1 + 11d = 0$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
 $a_1 + 11d$ همان a_{12} یا جمله‌ی دوازدهم این تصاعد است. بنابراین جمله‌ی دوازدهم تصاعد برابر صفر است.

۸- **چشم‌انداز:** برای این‌که سه جمله از یک دنباله، سه جمله‌ی متوالی از یک تصاعد حسابی باشند، باید جمله‌ی وسط برابر میانگین دو جمله‌ی دیگر باشد؛ یعنی جمله‌ی وسط واسطه‌ی حسابی دو جمله‌ی قبل و بعد خود باشد.

پله‌ی یکم و آخر: با توجه به چشم‌انداز، مقدار x را حساب می‌کنیم.

$$6x + 4 = \frac{10x + 8 + x + 2}{2} = \frac{11x + 10}{2}$$

$$\Rightarrow 12x + 8 = 11x + 10 \Rightarrow x = 2$$

۹- **پله‌ی یکم:** با توجه به این‌که جمله‌ی وسط واسطه‌ی حسابی دو جمله‌ی دیگر است، ابتدا مقدار p را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$3p + 4 = \frac{2p + 3 + 5p - 1}{2} = \frac{7p + 2}{2} \Rightarrow 6p + 8 = 7p + 2 \Rightarrow p = 6$$

پله‌ی دوم: جملات متوالی دنباله به صورت ۲۹ و ۲۲ و ۱۵ درمی‌آیند. قدرنسبت تصاعد حسابی برابر است با تفاضل دو جمله‌ی متوالی:

$$d = 22 - 15 = 29 - 22 = 7$$

۱۰- **پله‌ی یکم:** اگر t_p و t_q دو جمله‌ی دلخواه از تصاعد حسابی باشند، رابطه‌ی $d = \frac{t_p - t_q}{p - q}$ در مورد آن برقرار است.

پله‌ی دوم: با توجه به این‌که $t_p = q$ و $t_q = p$ است، مقدار قدرنسبت تصاعد را تعیین می‌کنیم:

$$d = \frac{t_p - t_q}{p - q} = \frac{q - p}{p - q} = \frac{-(p - q)}{p - q} = -1$$

۱۱- **پله‌ی یکم:** اضلاع مثلث قائم‌الزاویه تشکیل تصاعد عددی می‌دهند. اگر دو ضلع قائم مثلث را x و y بنامیم، در این صورت خواهیم داشت:

$x, y, 15 \Rightarrow y = \frac{15+x}{2}$ I
 سه جمله‌ی متوالی
 از تصاعد حسابی
پله‌ی دوم: در مثلث قائم‌الزاویه رابطه‌ی فیثاغورث برقرار است. با توجه به رابطه‌ی I و رابطه‌ی فیثاغورث، مقدار x و y را تعیین می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 = 225 \xrightarrow{I} x^2 + \frac{(15+x)^2}{4} = 225 \Rightarrow 4x^2 + 225 + x^2 + 30x = 900$$

$$= 4x^2 + 225 \Rightarrow 5x^2 + 30x = 675 \xrightarrow{\div 5} x^2 + 6x = 135$$

$$\xrightarrow{x > 0} x = 9 \Rightarrow y = \frac{15+9}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

پله‌ی سوم: حاصل $x + y$ برابر است با:

$$x + y = 9 + 12 = 21$$

۵- **پله‌ی یکم:** اول از همه چند جمله‌ی اول دنباله‌ی داده‌شده را به دست می‌آوریم:

$$a_4 = a_1 + 3 = 1 + 3 = 4$$

$$a_7 = a_4 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$a_9 = a_7 + 2 = 7 + 2 = 9$$

$$a_{16} = a_9 + 7 = 9 + 7 = 16$$

$$a_{25} = a_{16} + 9 = 16 + 9 = 25$$

پس جمله‌های دنباله به صورت $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ در می‌آید.

پله‌ی دوم: بنابراین می‌توان حدس زد که جمله‌ی n ام دنباله، برابر مجذور n یا همان n^2 است. پس جمله‌ی عمومی دنباله به صورت $a_n = n^2$ در می‌آید.

۶- **چشم‌انداز:** چندجمله‌ی ابتدایی هریک از دنباله‌ها را مشخص می‌کنیم. در صورتی که تفاضل جمله‌های متوالی با هم برابر نباشد دنباله‌ی موردنظر تشکیل یک تصاعد عددی نمی‌دهد.

نکته: شرط این‌که تفاضل جمله‌های متوالی برابر باشد، شرط لازم دنباله‌هایی بود که تشکیل تصاعد عددی می‌دادند. مقدار این اختلاف برابر قدرنسبت تصاعد است.)

$$a_n = \frac{\Delta}{n} - 1$$

$$a_1 = 8 - 1 = 7, \quad a_4 = \frac{8}{4} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$a_7 = \frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7}$$

$$\left. \begin{aligned} a_4 - a_1 &= 1 - 7 = -6 \\ a_7 - a_4 &= \frac{1}{7} - 1 = -\frac{6}{7} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_4 - a_1 \neq a_7 - a_4$$

پس این دنباله تشکیل تصاعد عددی نمی‌دهد.

$$a_1 = 8 - 1 = 7, \quad a_4 = 16 - 4 = 12, \quad a_7 = 24 - 9 = 15$$

$$\left. \begin{aligned} a_4 - a_1 &= 12 - 7 = 5 \\ a_7 - a_4 &= 15 - 12 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_4 - a_1 \neq a_7 - a_4$$

این دنباله هم پُر!

$$a_1 = 8 + \frac{1}{8}, \quad a_4 = 8 + \frac{2}{8}, \quad a_7 = 8 + \frac{3}{8}$$

مشخص است که مقدار جمله‌های دنباله در هر مرحله به اندازه‌ی $\frac{1}{8}$ اضافه می‌شود. پس دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = 8 + \frac{n}{8}$ تشکیل یک تصاعد عددی می‌دهد.

$$a_1 = \frac{1}{8}, \quad a_4 = 1, \quad a_7 = \frac{27}{8}$$

تفاوت جمله‌های متوالی با هم برابر نیست. پس این دنباله هم تشکیل تصاعد عددی نمی‌دهد.

راه کمی هوشمندانه؛ راه حل ساده‌تر حل تست این بود که به عنوان جواب گزینه‌ای را انتخاب می‌کردید که در آن جمله‌ی عمومی دنباله از درجه‌ی اول باشد. تنها جمله‌ی عمومی که از درجه‌ی اول است همان $a_n = 8 + \frac{n}{8}$ است. به همین سادگی!

۱۷ - **پلهی یکم:** تعداد اعداد دو رقمی ای را می‌خواهیم تعیین کنیم که جمله‌ی عمومی آن‌ها $a_n = 9n + 2$ است.

ابتدا اولین عدد دو رقمی و آخرین عدد دو رقمی را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$a_n = 9n + 2 \xRightarrow{n=1} a_1 = 11 \quad \text{اولین عدد دو رقمی}$$

$$a_n = 9n + 2 < 100 \Rightarrow 9n < 98 \xRightarrow{\div 9} n < 10 \frac{8}{9} \\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 10 \Rightarrow a_{10} = 92$$

پلهی دوم: می‌بینیم که جمله‌های a_1 تا a_{10} دو رقمی هستند. تعداد این اعداد دو رقمی برابر ۱۰ می‌شود.

۱۸ - **پلهی یکم:** تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم. ببینید:

$$a_1 + a_p + a_{1p} = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 11d) \\ = 3a_1 + 12d = 30 \Rightarrow 3(a_1 + 4d) = 30 \Rightarrow a_1 + 4d = 10$$

پلهی دوم: مگر نه این‌که $a_1 + 4d$ همان a_5 است؟ پس جمله‌ی پنجم این تصاعد حسابی برابر ۱۰ است.

۱۹ - **پلهی یکم:** در یک تصاعد حسابی، اختلاف دو جمله‌ی متوالی برابر قدرنسبت تصاعد یا همان d است. پس در این‌جا می‌توان نوشت:

$$a_n - a_{n-1} = d \quad \text{I}$$

پلهی دوم: با توجه به رابطه‌ی به‌دست‌آمده و فرض موجود در صورت تست، مقدار $\frac{a_1}{d}$ را تعیین می‌کنیم:

$$a_n + a_p = a_{n-1} \xRightarrow{\text{I}} d + a_p = 0 \Rightarrow d + a_1 + (p-1)d = 0 \\ \Rightarrow a_1 + pd = 0 \Rightarrow pd = -a_1 \Rightarrow \frac{a_1}{d} = -p$$

۲۰ - **چشم‌انداز:** تصاعد حسابی نزولی، تصاعدی است که در آن جملات تصاعد به یک میزان ثابت نسبت به جمله‌ی قبل کاهش پیدا کنند. در تصاعد حسابی نزولی، قدرنسبت تصاعد منفی است.

پلهی یکم: اگر x, y, z این سه جمله‌ی متوالی باشند، با توجه به این‌که $y = \frac{x+z}{2}$ است (چرا؟) داریم:

$$x + y + z = 27 \Rightarrow (x+z) + y = 27 \Rightarrow 2y + y = 27 \\ \Rightarrow 3y = 27 \Rightarrow y = 9$$

اگر قدرنسبت را d فرض کنیم، x برابر $y-d$ و z برابر $y+d$ می‌شود.

پلهی دوم: با دانستن حاصل‌ضرب این ۳ جمله‌ی متوالی مقدار d را محاسبه می‌کنیم:

$$xyz = 288 \Rightarrow (y-d)y(y+d) = 288 \xRightarrow{y=9} (9-d)9(9+d) = 288 \\ \xRightarrow{\div 9} (9-d)(9+d) = 32 \Rightarrow 81 - d^2 = 32 \Rightarrow d^2 = 81 - 32 = 49 \\ d < 0 \Rightarrow d = -7$$

۱۲ - **پلهی یکم:** قدرنسبت جدید را $d' = d + 3$ فرض می‌کنیم.

پلهی دوم: جمله‌ی ششم در تصاعد عددی اول برابر $a_1 + 5d$ است. در تصاعد عددی جدید جمله‌ی ششم برابر است با:

$$a_6 = a_1 + 5d' = a_1 + 5(d+3) = a_1 + 5d + 15$$

بنابراین به جمله‌ی ششم ۱۵ واحد اضافه می‌شود.

۱۳ - **پلهی یکم:** با توجه به تساوی $t_1 + t_7 + t_{13} = 39$ ، رابطه‌ی بین t_1 (جمله‌ی اول تصاعد) و d (قدرنسبت تصاعد) پیدا می‌کنیم:

$$t_1 + t_7 + t_{13} = t_1 + (t_1 + 6d) + (t_1 + 12d) \\ = 3t_1 + 18d = 39 \Rightarrow t_1 + 6d = 13$$

پلهی دوم: با داشتن این‌که $t_5 = 5$ است، به یک دو معادله و دو مجهول می‌رسیم. براساس، آن مقدار d را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\left. \begin{aligned} t_1 + 6d &= 13 \\ t_1 + 4d &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2d = 8 \Rightarrow d = 4$$

۱۴ - **پلهی یکم:** مجموع جملات اول و دوم و مجموع جملات سوم و چهارم در یک تصاعد حسابی برابر است با:

$$a_1 + a_p = a_1 + (a_1 + d) = 2a_1 + d \\ a_3 + a_4 = (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 2a_1 + 5d$$

پلهی دوم: اختلاف بین $a_3 + a_4$ و $a_1 + a_p$ برابر $4d$ است. پس می‌توانیم d را حساب کنیم:

$$(a_3 + a_4) - (a_1 + a_p) = 6/5 - 9/5 = 4d \Rightarrow -3 = 4d \Rightarrow d = -\frac{3}{4}$$

۱۵ - **پلهی یکم:** براساس فرض‌های موجود در تست مقدار a_1 و d را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$a_{12} - a_{10} = 2d = 5 \Rightarrow d = \frac{5}{2} \\ a_{10} + a_{12} = (a_1 + 9d) + (a_1 + 11d) = 2a_1 + 20d = 25 \\ d = \frac{5}{2} \Rightarrow 2a_1 + 50 = 25 \Rightarrow 2a_1 = -25 \Rightarrow a_1 = -\frac{25}{2} = -12 \frac{1}{2}$$

پلهی دوم: با داشتن a_1 و d مقدار جمله‌ی بیست و یکم این تصاعد را حساب می‌کنیم:

$$a_{21} = a_1 + 20d = -12 \frac{1}{2} + 20 \cdot \frac{5}{2} = -12 \frac{1}{2} + 50 = 37 \frac{1}{2}$$

۱۶ - **پلهی یکم:** با توجه به این‌که $a_1 = 1$ و $a_p = \frac{5}{3}$ است، مقدار d برابر است با:

$$d = a_p - a_1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

پلهی دوم: حاصل کسر داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\frac{a_{15} + a_{17} + a_{19}}{a_{33} + a_{35} + a_{37}} = \frac{(a_{15} + a_{19}) + a_{17}}{(a_{33} + a_{37}) + a_{35}} = \frac{2a_{17} + a_{17}}{2a_{35} + a_{35}} = \frac{3a_{17}}{3a_{35}} \\ = \frac{a_1 + 16d}{a_1 + 34d} = \frac{1 + \frac{32}{3}}{1 + \frac{68}{3}} = \frac{\frac{35}{3}}{\frac{71}{3}} = \frac{35}{71}$$

توضیح: متوجه شدید چه کار کردیم که به جای محاسبه‌ی مقدار a_{15} و a_{19} دو برابر مقدار a_{17} و به جای مقدار a_{33} و a_{37} دو برابر مقدار a_{35} را قرار دادیم. یک کم محاسبات را ساده‌تر می‌کند.

۲۱ - ۲) اختلاف دو جمله‌ی متوالی در تصاعد حسابی برابر قدرنسبت تصاعد است. اگر d' قدرنسبت تصاعد جدید و d قدرنسبت تصاعد اولیه باشد، d' برابر است با:

$$d = a_7 - a_1 = \frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5}$$

$$d' = a_{10} - a_5 = (a_1 + 9d) - (a_1 + 4d) = 5d = 5(-\frac{1}{5}) = -1$$

$$\Rightarrow d' = -1$$

۲۲ - ۴) پله‌ی یکم: ابتدا جمله‌ی عمومی تصاعد یا همان a_n را تعیین می‌کنیم. با محاسبه‌ی d و با داشتن a_1 ، a_n برابر است با:

$$d = a_7 - a_1 = 2 - (-7) = 2 + 7 = 9$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -7 + (n-1) \times 9 = 9n - 9 - 7 = 9n - 16$$

$$\Rightarrow a_n = 9n - 16$$

پله‌ی دوم: برای تعیین اولین جمله‌ی بزرگ‌تر از ۴۲۰، باید n ای را مشخص کنیم که به‌ازای آن، نامساوی $a_n > 420$ برقرار باشد. داریم:

$$a_n > 420 \Rightarrow 9n - 16 > 420 \Rightarrow 9n > 436$$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n > 48 \frac{4}{9} \sim n = 49$$

پله‌ی سوم: به‌ازای $n = 49$ اولین جمله‌ی بزرگ‌تر از ۴۲۰ به‌دست می‌آید.

$$a_{49} = (9 \times 49) - 16 = 441 - 16 = 425$$

a_{49} برابر است با:

۲۳ - ۲) پله‌ی یکم: جمله‌ی عمومی تصاعد حسابی را تشکیل می‌دهیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 63 + (n-1)(-4) = -4n + 63 + 4 = -4n + 67$$

پله‌ی دوم: تعداد جمله‌هایی را تعیین می‌کنیم که به‌ازای آن رابطه‌ی $a_n > 0$ برقرار باشد. پس داریم:

$$a_n > 0 \Rightarrow -4n + 67 > 0 \Rightarrow 4n < 67 \Rightarrow n < 16 \frac{7}{4}$$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{1, 2, 3, \dots, 16\}$$

بنابراین تصاعد حسابی دارای ۱۶ جمله‌ی مثبت است.

۲۴ - ۳) پله‌ی یکم: مقدار d یا همان قدرنسبت تصاعد را تعیین می‌کنیم:

$$a_7 - a_1 = 2d \Rightarrow 9 - 5 = 2d \Rightarrow 2d = 4 \Rightarrow d = 2$$

پله‌ی دوم: با توجه به این‌که $a_7 + a_9 = 2a_8$ است، حاصل عبارت داده‌شده برابر است با:

$$a_7 + a_8 + a_9 = (a_7 + a_9) + a_8 = 2a_8 + a_8 = 3a_8 = 3(a_1 + 7d)$$

$$= 3(5 + 14) = 3 \times 19 = 57$$

۲۵ - ۴) پله‌ی یکم: محاسبه‌ی a_1 و d را در دستور کار قرار می‌دهیم:

$$a_5 + a_6 = (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) = 2a_1 + 9d = 3$$

$$a_8 + a_9 = (a_1 + 7d) + (a_1 + 8d) = 2a_1 + 15d = -2$$

با کم کردن تساوی اول از تساوی دوم، خواهیم داشت:

$$6d = -2 - 3 = -5 \Rightarrow d = -\frac{5}{6}$$

$$2a_1 + 9(-\frac{5}{6}) = 2a_1 - \frac{45}{6} = 3 \Rightarrow 2a_1 = \frac{51}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{51}{4}$$

پله‌ی دوم: مقدار $a_{13} + a_{15}$ برابر است با:

$$a_{13} + a_{15} = (a_1 + 12d) + (a_1 + 14d) = 2a_1 + 26d$$

$$= \frac{51}{2} + 26(-\frac{5}{6}) = \frac{51}{2} - \frac{65}{3} = \frac{63 - 130}{6} = -\frac{67}{6}$$

۲۶ - ۳) پله‌ی یکم: تصاعد جدید را تشکیل می‌دهیم:

$$(1 + \frac{3}{5}), (\frac{7}{5} + \frac{2}{5}), (\frac{9}{5} + \frac{1}{5}), \dots$$

$$\frac{8}{5}, \frac{9}{5}, \frac{10}{5}, \dots$$

تصاعد جدید:

پله‌ی دوم: قدرنسبت تصاعد حسابی جدید برابر است با:

$$d = a_7 - a_1 = \frac{9}{5} - \frac{8}{5} = \frac{1}{5}$$

پله‌ی سوم: جمله‌ی نود و سوم تصاعد جدید برابر است با:

$$a_{93} = a_1 + 92d = \frac{8}{5} + \frac{92}{5} = \frac{100}{5} = 20$$

۲۷ - ۱) پله‌ی یکم: جمله‌ی عمومی دو تصاعد را تشکیل می‌دهیم:

$$5, 9, 13, 17, \dots \xrightarrow{\text{جمله‌ی عمومی}} a_n = 5 + 4n - 4 = 4n + 1$$

$$4, 7, 10, 13, \dots \xrightarrow{\text{جمله‌ی عمومی}} a_n = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$$

اولین جمله‌ی برابر این دو تصاعد جمله‌ی دوم با مقدار ۱۳ است. دومین مقدار مشترکی که در این دو تصاعد وجود دارد عدد ۲۵ است. بنابراین تصاعد جدید به‌صورت زیر می‌شود:

$$13, 25, \dots$$

پله‌ی دوم: این تصاعد یک تصاعد حسابی با جمله‌ی اول ۱۳ و قدرنسبت

۱۲ است. جمله‌های کوچک‌تر از ۵۰ این تصاعد برابر ۱۳، ۲۵، ۳۷، ۴۹

است. پس ۴ جمله‌ی کوچک‌تر از ۵۰ دارد.

۲۸ - ۲) پله‌ی یکم: جمله‌ی عمومی دو تصاعد را می‌نویسیم:

$$a_1 = 3, d_1 = 2 \Rightarrow a_n = 3 + 2n - 2 = 2n + 1$$

$$b_1 = 2, d_2 = 3 \Rightarrow b_n = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$$

پله‌ی دوم: حالا تصاعد جدید (جمله‌های مشترک) را به‌دست می‌آوریم:

$$3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

$$2, 5, 8, 11, \dots$$

$$5, 11, \dots$$

پس تصاعد جدید تصاعدی است با جمله‌ی اول ۵ و قدرنسبت ۶.

پله‌ی سوم: جمله‌ی بیستم هر دو دنباله را مشخص می‌کنیم:

$$n=20 \Rightarrow a_n = 2n + 1 \Rightarrow a_{20} = 41$$

$$n=20 \Rightarrow b_n = 3n - 1 \Rightarrow b_{20} = 59$$

پس این دو دنباله حداکثر می‌توانند تا عدد ۴۱ جمله‌ی مشترک داشته

$$c_n = 5 + 6(n-1) = 6n - 1 \leq 41 \Rightarrow 6n \leq 42$$

باشند؛ یعنی:

$$\Rightarrow n \leq 7 \Rightarrow n = 1, 2, \dots, 7$$

پس ۷ جمله‌ی مشترک خواهیم داشت:

$$5, 11, 17, 23, 29, 35, 41$$

توجه کنید که: می‌توانستیم از همان اول بیست جمله‌ی آغازین هر دو تصاعد را بنویسیم و دور عددهای مشترک دایره بکشیم! این همه هم خودمان را خسته نمی‌کردیم!

$$a_1 + 1 = a + 1$$

$$a_2 + 4 = 2a + 4 = 2(a + 2)$$

$$a_3 + 16 = 4a + 16 = 4(a + 4)$$

باز هم نمی‌توان نتیجه گرفت که این اعداد سه جمله‌ی متوالی از یک تصاعد هندسی باشند.

$$a_1 + 1 = a + 1$$

$$a_2 + 2 = 2a + 2 = 2(a + 1)$$

$$a_3 + 3 = 4a + 3$$

باز هم رابطه‌ی تصاعد هندسی بین این اعداد برقرار نیست.

$$a_1 + 1 = a + 1$$

$$a_2 + 2 = 2a + 2 = 2(a + 1)$$

$$a_3 + 4 = 4a + 4 = 4(a + 1)$$

$$\frac{a_2 + 2}{a_1 + 1} = 2 = \frac{a_3 + 4}{a_2 + 2}$$

پس این اعداد تشکیل یک تصاعد هندسی با قدرنسبت ۲ می‌دهند. همین گزینه جواب تست است.

۳۳ - چشم‌انداز: اگر سه جمله‌ی متوالی از یک تصاعد هندسی داشته

باشیم، جمله‌ی وسط، واسطه‌ی هندسی دو جمله‌ی دیگر است. یعنی مجذور جمله‌ی وسط برابر حاصل‌ضرب جمله‌ی قبل و بعدش است.

پله‌ی یکم: با توجه به «چشم‌انداز» داریم:

$$(6x)^2 = (7x - 2)(5x + 1) = 35x^2 - 3x - 2$$

$$\Rightarrow 36x^2 = 35x^2 - 3x - 2 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

پله‌ی دوم: با داشتن این دو مقدار برای x جملات تصاعد هندسی را تشکیل می‌دهیم. داریم: $x = -1 \Rightarrow$ جملات تصاعد $-9, -6, -4$

تصادد هندسی با قدرنسبت $\frac{2}{3}$ تشکیل شد.

$$x = -2 \Rightarrow$$
 جملات تصاعد $-16, -12, -9$

تصادد هندسی با قدرنسبت $\frac{3}{4}$ تشکیل شد.

پس ۲ مقدار قابل قبول برای x وجود دارد.

۳۴ - ۲ با توجه به این که در تصاعد هندسی $a_n = a_1 q^{n-1}$ است، مقدار

$$a_2 a_4 = 2a_5 \Rightarrow (a_1 q)(a_1 q^3) = 2(a_1 q^4)$$

a_1 را تعیین می‌کنیم:

$$\Rightarrow a_1^2 q^4 = 2a_1 q^4 \Rightarrow a_1 = 2$$

۳۵ - ۴ **پله‌ی یکم:** با داشتن a_1 و q جمله‌ی عمومی تصاعد یا همان

$$a_1 = 9, q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

a_n را تشکیل می‌دهیم.

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 9 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

۲۹ - ۴ **پله‌ی یکم:** دو عدد را a و b در نظر می‌گیریم. اگر جمله‌ی

اول تصاعد حسابی باشد و بخواهیم بین a و b پنج واسطه‌ی عددی درج کنیم، در این صورت b جمله‌ی هفتم این تصاعد خواهد بود. پس $a = a_1$ و $b = a_7$ است.

پله‌ی دوم: براساس نتیجه‌گیری پله‌ی یکم، قدرنسبت تصاعد با توجه به فرض انجام‌شده در صورت تست به راحتی تعیین می‌شود. ببینید:

$$b - a = 720 \Rightarrow a_7 - a_1 = 720 \Rightarrow 6d = 720 \Rightarrow d = 120$$

۳۰ - ۳ **پله‌ی یکم:** چون تصاعد حسابی نزولی است و می‌خواهیم

چهار واسطه‌ی حسابی بین ۱۹ و ۳۹ داشته باشیم، جمله‌ی اول تصاعد را عدد بزرگ‌تر یا همان ۳۹ و جمله‌ی ششم تصاعد را (جمله‌ی اول ۳۹ و ۴ جمله هم واسطه‌های حسابی هستند. در مجموع ۵ جمله قبل از ۱۹ داریم) عدد کوچک‌تر یا همان ۱۹ در نظر می‌گیریم.

پله‌ی دوم: قدرنسبت تصاعد حسابی نزولی برابر است با:

$$5d = a_6 - a_1 = 19 - 39 = -20 \Rightarrow d = -4$$

پله‌ی سوم: با تعیین ۴ واسطه‌ی عددی بین ۱۹ و ۳۹ مجموع آن‌ها را

$$a_2 = a_1 + d = 39 - 4 = 35$$

$$a_3 = a_2 + d = 35 - 4 = 31$$

$$a_4 = a_3 + d = 31 - 4 = 27$$

$$a_5 = a_4 + d = 27 - 4 = 23$$

$$35 + 31 + 27 + 23 = 116$$
 مجموع واسطه‌های عددی برابر است با:

۳۱ - ۴ **پله‌ی یکم:** جمله‌ی عمومی تصاعد هندسی را تعیین می‌کنیم:

$$a_1 = 4, a_2 = 6 \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 4 \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

پله‌ی دوم: تعیین جمله‌های پنجم و ششم:

$$a_5 = 4 \left(\frac{3}{2}\right)^{5-1} = 4 \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 4 \times \frac{81}{16} = \frac{81}{4}$$

$$a_6 = 4 \left(\frac{3}{2}\right)^{6-1} = 4 \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 4 \times \frac{243}{32} = \frac{243}{8}$$

پله‌ی سوم: مجموع جملات پنجم و ششم برابر است با:

$$a_5 + a_6 = \frac{81}{4} + \frac{243}{8} = \frac{162 + 243}{8} = \frac{405}{8}$$

۳۲ - ۴ **پله‌ی یکم:** a_1 و a_2 و a_3 را تشکیل می‌دهیم:

$$a_1 = a, a_2 = 2a, a_3 = 4a$$

پله‌ی دوم: گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم تا مشخص کنیم کدام گزینه سه جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی است.

$$a_1 + 1 = a + 1$$

$$a_2 + a_1 = a + 2a = 3a$$

$$a_3 + a_2 = 4a + 2a = 6a$$

این گزینه تشکیل یک تصاعد هندسی نمی‌دهد.

پله‌ی دوم: a_6 و a_5 را حساب می‌کنیم:

$$a_6 = 9\left(\frac{4}{3}\right)^{6-1} = 9\left(\frac{4}{3}\right)^5 = 9\left(\frac{1024}{243}\right) = \frac{1024}{27}$$

$$a_5 = 9\left(\frac{4}{3}\right)^{5-1} = 9\left(\frac{4}{3}\right)^4 = 9\left(\frac{256}{81}\right) = \frac{256}{9}$$

پله‌ی سوم: $a_6 - a_5$ برابر است با:

$$a_6 - a_5 = \frac{1024}{27} - \frac{256}{9} = \frac{1024 - 768}{27} = \frac{256}{27}$$

۳۶- با توجه به این که $q=2$ است، حاصل عبارت خواسته شده به راحتی محاسبه می‌شود. داریم:

$$\frac{a_1 a_7}{a_2^2} = \frac{a_1 (a_1 q^6)}{(a_1 q)^2} = \frac{a_1^2 q^6}{a_1^2 q^2} = q^4 \xrightarrow{q=2} \frac{a_1 a_7}{a_2^2} = 2^4 = 16$$

۳۷- پله‌ی یکم: قدرنسبت تصاعد را تعیین می‌کنیم:

$$a_4 = 5a_1 \Rightarrow a_1 q^3 = 5a_1 \Rightarrow q^3 = 5$$

لازم نیست برای به دست آوردن q از ۵ ریشه‌ی سوم بگیریم. فعلاً همین طوری به حل تست ادامه می‌دهیم!

پله‌ی دوم: نسبت $\frac{a_{11}}{a_5}$ را می‌خواهیم:

$$\frac{a_{11}}{a_5} = \frac{a_1 q^{10}}{a_1 q^4} = q^6 = (q^3)^2 = 5^2 = 25$$

دیدید لازم نبود تغییراتی در تساوی $q^3 = 5$ بدهیم!!

۳۸- پله‌ی یکم: چون جملات اول و پنجم و یازدهم تصاعد حسابی سه جمله‌ی متوالی از تصاعد هندسی صعودی هستند، جمله‌ی پنجم این تصاعد حسابی واسطه‌ی هندسی بین دو جمله‌ی اول و یازدهم تصاعد حسابی است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$a_5^2 = a_1 a_{11} \Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = a_1 (a_1 + 10d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1 d + 16d^2 = a_1^2 + 10a_1 d$$

$$\Rightarrow 2a_1 d = 16d^2 \Rightarrow a_1 = 8d$$

پله‌ی دوم: با تعیین سه جمله‌ی متوالی تصاعد هندسی، قدرنسبت تصاعد را به دست می‌آوریم:

$$b_1 = a_1 = 8d$$

$$b_2 = a_5 = a_1 + 4d = 8d + 4d = 12d$$

$$b_3 = a_{11} = a_1 + 10d = 8d + 10d = 18d$$

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{12d}{8d} = \frac{3}{2}$$

بنابراین:

۳۹- پله‌ی یکم: تعیین رابطه‌ی بین جمله‌ی اول و قدرنسبت

$$b_1 = a_3 = a_1 + 2d$$

$$b_2 = a_7 = a_1 + 6d$$

$$b_3 = a_9 = a_1 + 8d$$

تصاعد حسابی:

پله‌ی دوم: b_2 واسطه‌ی هندسی b_1 و b_3 است:

$$b_2^2 = b_1 b_3 \Rightarrow (a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 8d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 12a_1 d + 36d^2 = a_1^2 + 10a_1 d + 16d^2$$

$$\Rightarrow 2a_1 d = -20d^2 \Rightarrow a_1 = -10d$$

پله‌ی سوم: a_n را برابر صفر در نظر می‌گیریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 0 \Rightarrow -10d + (n-1)d = 0 \Rightarrow n = 11$$

۴۰- پله‌ی یکم: تعیین جملات n ام تصاعدهای اول و دوم:

$$a_1 = 4a, q_1 = q \Rightarrow a_n = a_1 q_1^{n-1} = 4a q^{n-1}$$

$$a_1 = a, q_2 = q \Rightarrow a_n = a_2 q_2^{n-1} = a q^{n-1}$$

پله‌ی دوم: نسبت جمله‌ی n ام تصاعد اول به دوم برابر ۴ است.

۴۱- پله‌ی یکم: برای تعیین واسطه‌ی هندسی بین دو عدد، آن دو عدد

را در هم ضرب کرده و از حاصل ضرب جذر می‌گیریم. مقدار حاصل شده همان واسطه‌ی هندسی بین دو عدد خواهد بود.

پله‌ی دوم: اگر واسطه‌ی هندسی بین دو عدد را با c نشان دهیم، مقدار c برابر است با:

$$c^2 = (2^2 \times 5 \times 7^2) \times (2^2 \times 5^3 \times 11^2) = 2^4 \times 5^4 \times 7^2 \times 11^2$$

$$\Rightarrow c = 2^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 100 \times 77 = 7700$$

۴۲- پله‌ی یکم: حاصل ضرب ۹ جمله‌ی اول برابر هشت است:

$$a_1 a_2 \dots a_9 = a_1^9 q^{1+2+\dots+8} = a_1^9 q^{\frac{8(9)}{2}} = a_1^9 q^{36} = 8$$

$$\Rightarrow (a_1 q^4)^9 = 8 \Rightarrow a_1 q^4 = \sqrt[9]{8} = \sqrt[3]{2}$$

پله‌ی دوم: حاصل ضرب a_7, a_6, a_5, a_4 برابر است با:

$$a_7 a_6 a_5 a_4 = a_1^4 q^{1+3+5+7} = a_1^4 q^{16}$$

$$(a_1 q^4)^4 = (\sqrt[3]{2})^4 = 2\sqrt[3]{2}$$

۴۳- پله‌ی یکم: جمله‌ی اول تصاعد هندسی برابر ۳ و جمله‌ی هفتم

برابر ۱۹۲ است. پس قدرنسبت تصاعد برابر است با:

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{192}{3} = 64 = q^6 \Rightarrow q = 2 \text{ یا } q = -2$$

پله‌ی دوم: با توجه به این که تمام گزینه‌های تست منفی هستند، q را برابر

-۲ در نظر گرفته و با تعیین ۵ واسطه‌ی هندسی مجموع آن‌ها را حساب

می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & , & -6 & , & 12 & , & -24 & , & 48 & , & -96 & , & 192 \\ \hline & \times (-2) & \times (-2) & \times (-2) & \times (-2) & \times (-2) & \times (-2) & \times (-2) & \times (-2) & \times (-2) & \times (-2) & \times (-2) & \times (-2) \end{array}$$

۵ واسطه‌ی هندسی

$$-66 = -6 + 12 - 24 + 48 - 96 = \text{مجموع واسطه‌های هندسی}$$

حالا اگر تفاضل $100x$ و x را حساب کنیم قسمت اعشاری عدد موردنظر حذف می شود. بنابراین داریم:

$$100x - x = 99x = 169/\overline{69} - 1/\overline{69} = 168 \Rightarrow x = \frac{168}{99} = \frac{p}{q}$$

پله‌ی دوم: چون $(p, q) = 1$ است، باید کسر به دست آمده را تا حد امکان

$$\frac{p}{q} = \frac{168}{99} = \frac{56}{33}, (56, 33) = 1 \quad \text{ساده کنیم:}$$

پله‌ی سوم: مجموع ارقام q برابر است با: $3 + 3 = 6$

۴۶ - پله‌ی یکم: ابتدا عدد اعشاری داده شده را به صورت یک عدد

$$x = 0.1333... = 0.1\overline{3} \quad \text{اعشاری متناوب نمایش می دهیم:}$$

پله‌ی دوم: حالا با راه کار حذف قسمت اعشاری عدد داده شده، کسر مولد

$$x = 0.1\overline{3} \xrightarrow{\times 10} 10x = 1.\overline{3} \xrightarrow{\times 10} 100x = 13.\overline{3} \quad \text{آن را به دست می آوریم:}$$

$$100x - 10x = 90x = 13.\overline{3} - 1.\overline{3} = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{90}$$

۴۴ - پله‌ی یکم: تعیین جمله های عمومی دو تصاعد:

$$a_1 = a, \quad q = -3 \Rightarrow a_n = a_1 q^{n-1} = a_1 (-3)^{n-1}$$

$$a_1 = a, \quad q = 27 \Rightarrow a_n = a_1 q^{n-1} = a (27)^{n-1}$$

پله‌ی دوم: تعیین جمله ی هفتم تصاعد دوم:

$$a_7 = a (27)^{7-1} = a (3^3)^6 = 3^{18} a$$

پله‌ی سوم: تعیین جمله ای از تصاعد اول که برابر $3^{18} a$ است. داریم:

$$3^{18} a = (-3)^{n-1} a \Rightarrow n-1 = 18 \Rightarrow n = 19$$

توجه کنید که؛ چون $n-1 = 18$ زوج است مقدار $3^{18} = (-3)^{18}$ است.

۴۵ - پله‌ی یکم: کسر $\frac{p}{q}$ را عددی مانند x در نظر می گیریم. برای

این که از شر قسمت اعشاری خلاص شویم به صورت زیر عمل می کنیم:

$$x = 1/\overline{69} \xrightarrow{\times 100} 100x = 169/\overline{69}$$

بخش ۲

مجموع جمله‌های دنباله‌ها

پلکان آموزش

۱ - مجموع جمله‌های دنباله‌ی حسابی

مجموعه n جمله‌ی اول یک تصاعد حسابی را با S_n نشان می‌دهیم؛ یعنی در واقع داریم:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

مجموع جمله‌های دنباله‌ی حسابی

اگر جمله‌ی نخست دنباله را a در نظر گرفته و قدرنسبت دنباله‌ی حسابی برابر d باشد، مجموع جمله‌های دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

مثال ۱ در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی پنجم ۱۹- و جمله‌ی دهم ۳۱ است. مجموع بیست جمله‌ی ابتدای این دنباله را به دست آورید. (تمرین کتاب ریاضی عمومی رشته‌ی تجربی)

با توجه به این که $a_5 = -19$ و $a_{10} = 31$ است، قدرنسبت دنباله را تعیین می‌کنیم:

$$a_{10} - a_5 = 5d \Rightarrow 5d = 31 - (-19) = 31 + 19 = 50 \Rightarrow d = 10$$

جمله‌ی اول دنباله یا همان a_1 را به دست می‌آوریم:

$$a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow -19 = a_1 + 40 \Rightarrow a_1 = -59$$

حالا دیگر می‌توانیم مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله را حساب کنیم:

$$S_{20} = \frac{20}{2} [-118 + (19 \times 10)] = 10(-118 + 190) = 10 \times 72 = 720$$

ویژگی‌های مجموع جمله‌های دنباله‌های حسابی

① مجموع n عدد طبیعی متوالی که از عدد ۱ شروع شده باشد برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

② مجموع n عدد طبیعی فرد متوالی که از عدد ۱ شروع شده برابر است با:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

③ مجموع n عدد طبیعی زوج متوالی که از عدد ۲ شروع شده برابر است با:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

④ اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول تصاعد حسابی و S_{n-1} مجموع $n-1$ جمله‌ی اول همان

تصاعد باشد، جمله‌ی n ام یا همان a_n برابر است با:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

مورد ③ را می‌توان از ① نتیجه گرفت. چه‌گونه؟

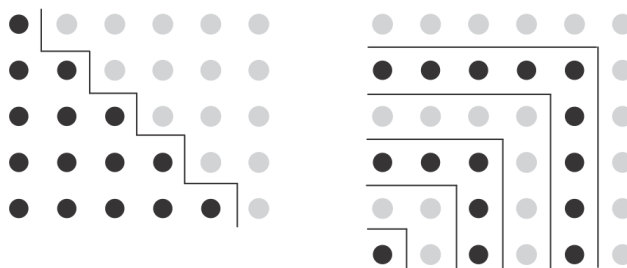
دلیل مورد ④ را می‌دانید؟! کاری ندارد که! نگاه کنید:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$$

حالا یک تفریق ساده، ما را به رابطه‌ی مهم $a_n = S_n - S_{n-1}$ می‌رساند!

❓ دو شکل زیر را ببینید. به نظرتان هر کدام از شکل‌ها، اثبات شهودی کدام یک از رابطه‌های بالاست؟



..... (شما الان مثلاً دارید فکر می‌کنید!)

- ۱ - در تصاعد عددی که جمله n ام آن $a_n = 2n + 1$ است، مجموع هفت جمله اول چه قدر است؟
 (۴) ۶۳ (۳) ۵۶ (۲) ۴۹ (۱) ۴۲
- ۲ - در یک تصاعد عددی جمله پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله ماقبل خود به اندازه $\frac{1}{4}$ کم‌تر است. مجموع ۱۰ جمله اول آن کدام است؟
 (۴) ۳۰ (۳) ۲۷/۵ (۲) ۲۵ (۱) ۲۲/۵
 (سراسری - تجربی - ۱۲)
- ۳ - در یک تصاعد عددی $a_6 + a_{14} = ۲۵$ است. مجموع بیست و چهار جمله اول این تصاعد برابر است با:
 (۴) ۳۵۰ (۳) ۳۰۰ (۲) ۲۵۰ (۱) ۲۰۰
- ۴ - در یک تصاعد حسابی جملات دوم و هشتم قرینه‌اند ($a_7 + a_8 = ۰$) و جمله هفتم برابر چهار است ($a_7 = ۴$). مجموع هشت جمله اول چه قدر است؟
 (۴) -۸ (۳) ۴ (۲) ۰ (۱) ۱۸
 (سراسری - تجربی - ۱۱)
- ۵ - مجموع تمام اعداد طبیعی بخش‌پذیر بر ۶ بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ کدام است؟
 (۴) ۲۵۵۰ (۳) ۲۵۲۰ (۲) ۲۴۵۰ (۱) ۲۴۲۰
- ۶ - اعداد $۱, x, y, \frac{5}{4}, \dots$ چهار جمله اول از یک تصاعد عددی‌اند. مجموع پانزده جمله اول این تصاعد کدام است؟
 (۲) ۶۲/۵ (۱) ۵۷ (۴) ۶۸ (۳) ۶۷/۵
 (سراسری - ریاضی - ۱۶ - خارج از کشور)
- ۷ - در تصاعد حسابی با جمله عمومی $a_n = \frac{1}{4}n + 1$ مجموع جملات متوالی شروع از جمله دهم و ختم به جمله سی‌ام کدام است؟
 (۴) ۲۳۱ (۳) ۲۱۰ (۲) ۱۸۹ (۱) ۱۶۸
- ۸ - مجموع چند جمله از تصاعد عددی $۱۰, ۶, ۲, \dots$ برابر جمله سیزدهم است؟
 (۴) جمله ۸ (۳) جمله ۵ (۲) جمله ۶ (۱) جمله ۱۰
- ۹ - مجموع چند جمله تصاعد عددی $۱۲, ۱۵, ۱۸, \dots$ برابر صفر است؟
 (۴) جمله ۱۳ (۳) جمله ۱۴ (۲) جمله ۱۰ (۱) جمله ۱۱
- ۱۰ - در یک تصاعد عددی، جمله هفتم نصف جمله سوم است. مجموع چند جمله اول از این تصاعد برابر صفر است؟
 (۲) ۱۹ (۱) ۱۸ (۴) ۲۱ (۳) ۲۰
 (سراسری - تجربی - ۱۱ - خارج از کشور)
- ۱۱ - در یک تصاعد حسابی $S_5 = a_1 + a_2 + \dots + a_5 = ۱۰۰$ و $S_7 = a_1 + a_2 + \dots + a_7 = ۴۴$ ، قدرنسبت تصاعد کدام است؟
 (۴) ۱۸ (۳) ۹ (۲) -۱۸ (۱) -۹
- ۱۲ - اگر مجموع هشت جمله اول از تصاعد حسابی $a_1 = 1 + 2p$ و $a_7 = p - 1$ برابر ۶۰ باشد ($S_8 = ۶۰$)، قدرنسبت تصاعد چه قدر است؟
 (۴) -۷ (۳) -۹ (۲) ۷ (۱) ۹
 (آزاد - ریاضی - ۱۱)

- ۱۳- اگر مجموع n جمله‌ی اول یک تصاعد حسابی از رابطه‌ی $S_n = n(3n+4)$ به دست بیاید، جمله‌ی هفتم تصاعد چه مقداری خواهد داشت؟
 (۱) ۳۹ (۲) ۴۱ (۳) ۴۳ (۴) ۴۵
- ۱۴- در یک تصاعد عددی، مجموع چهار جمله‌ی اول ۱۵ و مجموع پنج جمله‌ی بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله‌ی یازدهم این تصاعد کدام است؟
 (۱) $7/5$ (۲) ۸ (۳) $8/5$ (۴) ۹
 (سراسری - ریاضی - ۸۵ - خارج از کشور)
- ۱۵- مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش پذیر بر ۳ و کوچک تر از ۱۰۱ کدام است؟
 (۱) ۸۱۶ (۲) ۸۵۲ (۳) ۸۶۷ (۴) ۸۸۴
 (سراسری - تجربی - ۸۵)
- ۱۶- یک تصاعد حسابی صعودی متناهی از سیزده جمله تشکیل شده است. مجموع این جملات برابر ۳۲۵ است. اگر اختلاف جمله‌ی اول و آخر برابر ۴۸ باشد، جمله‌ی سوم چه قدر می‌شود؟
 (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۵
 (آزاد - ریاضی - ۸۷)
- ۱۷- در تصاعد حسابی $\dots, -21, x, -27$ مجموع جملات منفی کدام است؟
 (۱) -135 (۲) -150 (۳) -75 (۴) -270
- ۱۸- اگر در یک تصاعد حسابی مجموع n جمله‌ی اول آن $S_n = n(3n+2)$ باشد، جمله‌ی n ام این تصاعد برابر است با:
 (۱) $6n+1$ (۲) $6n-1$ (۳) $12n+2$ (۴) $12n-2$
- ۱۹- مجموع $2n+1$ جمله‌ی یک تصاعد حسابی ۱۸۷ و جمله‌ی وسط ۱۷ است. n کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲
 (آزاد - تجربی - ۸۷ - خارج از کشور)
- ۲۰- مجموع چند جمله از تصاعد عددی $\dots, 5, 3, 1$ برابر ۶۴ است؟
 (۱) ۷ جمله (۲) ۹ جمله (۳) ۸ جمله (۴) ۶ جمله
 (سراسری - ریاضی - ۸۳)
- ۲۱- در یک تصاعد عددی با جمله‌ی اول a اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود، آن گاه به مجموع ۲۰ جمله‌ی اول چه قدر افزوده خواهد شد؟
 (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۷۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۱۹۰
- ۲۲- مجموع شش عدد متوالی در یک تصاعد عددی صعودی برابر ۶۹ است. اگر بدانیم حاصل ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این عددها برابر ۷۶ است، جمله‌ی سوم چه قدر خواهد بود؟
 (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰
- ۲۳- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله‌ی هر دسته، مجذور کامل باشد: $(1), (2,3,4), (5,6,7,8,9), \dots$ مجموع جملات در دسته‌ی دهم کدام است؟
 (۱) ۱۶۹۱ (۲) ۱۷۱۰ (۳) ۱۷۲۹ (۴) ۱۷۴۸
 (سراسری - ریاضی - ۸۴ - خارج از کشور)
- ۲۴- چند جمله از تصاعد حسابی $\dots, 15, 9, 3$ را باید جمع کنیم تا عدد ۶۷۵ به دست بیاید؟
 (۱) سیزده (۲) پانزده (۳) هفده (۴) نوزده
- ۲۵- در یک تصاعد حسابی، مجموع شش جمله‌ی اول برابر ۱۰۲ و مجموع شش جمله‌ی بعدی برابر ۳۱۸ است. مجموع جمله‌های ششم و پانزدهم چه قدر است؟
 (۱) ۱۱۵ (۲) ۱۱۸ (۳) ۱۱۹ (۴) ۱۲۵
- ۲۶- بین ۱ و ۸۱ چه تعداد جمله درج شود تا مجموع جمله‌های تصاعد حسابی حاصل، برابر ۲۴۶ گردد؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۲۷- هرگاه داشته باشیم: $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2$ ، مقدار S چه قدر است؟
 (۱) ۳۶ (۲) ۵۵ (۳) ۷۸ (۴) ۱۰۵
- ۲۸- اگر $351 = (4n+3) + (4n+1) + \dots + 7 + 3$ باشد، n کدام است؟
 (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵
- ۲۹- در بیست جمله‌ی اول از تصاعد عددی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله‌ی اول کدام است؟
 (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
 (سراسری - تجربی - ۸۵ - خارج از کشور)

۲ - مجموع جمله‌های دنباله‌ی هندسی

مانند تصاعد حسابی، در این‌جا هم مجموع n جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی را با S_n نمایش

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + a_1q + \dots + a_1q^{n-1} \quad \text{می‌دهیم؛ یعنی:}$$

مجموع جمله‌های دنباله‌ی هندسی

اگر a جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی و q قدرنسبت همان دنباله باشد، مجموع n جمله‌ی

$$S = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a(q^n-1)}{q-1} \quad \text{اول این دنباله‌ی هندسی برابر است با:}$$

مثال مجموع ده جمله‌ی ابتدای دنباله‌ی $a_n = \frac{3}{4}(-2)^n$ را به دست آورید.

(تمرین کتاب ریاضی عمومی رشته‌ی تجربی)

این دنباله، دنباله‌ای است هندسی با جمله‌ی اول -3 و قدرنسبت -2 . بنابراین S_{10} برابر

$$S_{10} = \frac{-3(1-(-2)^{10})}{1-(-2)} = (1-1024) = -1023 \quad \text{است با:}$$

در یک دنباله هندسی نامتناهی با جمله‌ی اول a و قدرنسبت q که در آن $|q| < 1$ است، مجموع تمام جمله‌های دنباله از رابطه‌ی $S_{\infty} = \frac{a}{1-q}$ محاسبه می‌شود.

؟ به نظرتان دلیل نکته‌ی بالا چیست؟

راه‌نمایی هم می‌کنیم! یک عدد بین صفر و یک، وقتی به توان ∞ برسد، مقدارش به عدد صفر میل می‌کند.

(سراسری - ریاضی - ۸۶)

۳۰ - تصاعد هندسی $2, x, \frac{1}{4}, \dots$ غیرنزولی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

(۱) $\frac{41}{32}$ (۲) $\frac{21}{16}$ (۳) $\frac{11}{8}$ (۴) $\frac{23}{16}$

(آزاد - ریاضی - ۸۶)

۳۱ - در یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $q=2$ مجموع شش جمله اول چند برابر مجموع سه جمله اول است؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

(آزاد - تجربی - ۸۱)

۳۲ - در تصاعد هندسی $\dots$ و $\frac{1}{4}$ و ۲ مجموع ۵ جمله اول چند برابر مجموع پنج جمله دوم است؟

(۱) 2^{10} (۲) 2^2 (۳) ۲ (۴) 2^5

۳۳ - در یک تصاعد هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله‌ی اول آن ۳ می‌باشد. مجموع شش جمله‌ی

(سراسری - ریاضی - ۸۱)

اول آن کدام است؟

(۱) $10/8$ (۲) $11/2$ (۳) $12/6$ (۴) $13/4$

(سراسری - ریاضی - ۸۲)

۳۴ - حاصل $A = (1+x+x^2+\dots+x^8)(1-x+x^2-\dots+x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

(۱) ۵۰۷ (۲) ۵۱۱ (۳) ۵۱۲ (۴) ۵۱۶

(آزاد - ریاضی - ۷۸)

۳۵ - حاصل عبارت $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{16}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{64}) + \dots$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{5}{4}$

۳۶ - حد مجموع $S = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{8} + \dots$ برابر است با:

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۳۷ - حد مجموع جملات یک تصاعد هندسی با جمله ی n ام $a_n = 5(-\frac{2}{3})^{n-1}$ ، برابر چند است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) -۶ & (۲) -۵ & (۳) -\frac{30}{13} & (۴) -\frac{51}{5} \end{array}$$

۳۸ - حد مجموع جملات تصاعد هندسی نامحدود $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \dots$ برابر $k-8$ است. آن گاه k برابر است با:

$$\begin{array}{llll} (۱) \pm 2 & (۲) \pm 3 & (۳) \pm 4 & (۴) \pm 5 \end{array}$$

۳۹ - در تصاعد هندسی $a_1, \frac{a_1}{p}, \dots$ مقدار S_p و S_q را به صورت $S_q = a_q + a_{q+1} + \dots$ و $S_p = a_p + a_{p+1} + \dots$ تعریف می کنیم. کدام رابطه بین S_p و S_q برقرار است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) S_p = \frac{S_q}{8} & (۲) S_p = 8S_q & (۳) S_p = S_q & (۴) S_p = 3S_q \end{array}$$

۴۰ - حد مجموع جملات یک تصاعد هندسی بی پایان برابر 30 و حد مجموع مربعات آن جملات برابر 150 است. قدر نسبت این تصاعد چه قدر است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) \frac{2}{3} & (۲) \frac{7}{5} & (۳) \frac{3}{2} & (۴) \frac{5}{7} \end{array}$$

۴۱ - توپی را از ارتفاع 15 متری رها می کنیم. اگر پس از هر بار برخورد کردن به زمین، $\frac{1}{3}$ ارتفاع قبلی را بالا برود، مجموع مسافتی که توپ طی می کند تا بایستد چه قدر می شود؟

$$\begin{array}{llll} (۱) 21 & (۲) 22/5 & (۳) 23/5 & (۴) 30 \end{array}$$

۴۲ - مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع 6 مفروض است. وسط اضلاع این مثلث را به هم وصل می کنیم تا مثلث دیگری تشکیل شود. بار دیگر وسط اضلاع مثلث داخلی را به هم وصل می کنیم تا مثلث دیگری حاصل شود و... این کار را بی شمار دفعه انجام می دهیم. مجموع محیط های مثلث ها چه قدر خواهد بود؟

$$\begin{array}{llll} (۱) 30 & (۲) 33 & (۳) 36 & (۴) 39 \end{array}$$

۴۳ - حاصل $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} - \frac{1}{729} + \dots$ کدام است؟ (آزاد - ریاضی - ۸۳)

$$\begin{array}{llll} (۱) \frac{12}{27} & (۲) \frac{12}{29} & (۳) \frac{11}{26} & (۴) \frac{11}{27} \end{array}$$

۴۴ - بین دو عدد 2 و $16\sqrt{2}$ ، شش عدد چنان درج شده اند که هشت عدد حاصل، تصاعد هندسی تشکیل داده اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟ (سراسری - ریاضی - ۸۸ - خارج از کشور)

$$\begin{array}{llll} (۱) 30(2+\sqrt{2}) & (۲) 48\sqrt{2} & (۳) 30(\sqrt{2}+1) & (۴) 36(\sqrt{2}+1) \end{array}$$

پاسخ تست های پلکان آموزش

$$\Rightarrow a_1 + 4d = 0 \Rightarrow a_1 = -4d \quad \text{I}$$

$$a_7 = a_1 + 6d = 4 \Rightarrow -4d + 6d = 4 \Rightarrow 2d = 4 \Rightarrow d = 2$$

$$\text{I} \Rightarrow a_1 = -4(2) = -8$$

پله‌ی دوم: مجموع ۸ جمله‌ی اول برابر است با:

$$S_8 = \frac{8}{2}(2a_1 + 7d) = 4(-16 + 14) = 4(-2) = -8$$

۵- پله‌ی یکم: دنباله‌ی اعداد بخش‌پذیر بر ۶ که بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ قرار دارند را مشخص می‌کنیم:

۱۹۸, ۱۹۲, ..., ۱۱۴, ۱۰۸, ۱۰۲: دنباله‌ی اعداد

پله‌ی دوم: این دنباله یک تصاعد عددی با جمله‌ی اول ۱۰۲ و جمله‌ی آخر ۱۹۸ است. تعداد این جملات برابر است با تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۶ بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰. این تعداد از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$[\frac{200}{6}] - [\frac{100}{6}] = [\frac{33}{3}] - [\frac{16}{6}] = 33 - 16 = 17$$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر a از میان عددهای $1, 2, 3, \dots, n$ برابر $[\frac{n}{a}]$ است.

پله‌ی سوم: مجموع جملات دنباله برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{17} = \frac{17}{2}(102 + 198) = \frac{17 \times 300}{2} = 17 \times 150 = 2550$$

۶- پله‌ی یکم: x و y به شما داده شده تا سرگرم شوید!

خودتان را معطل این دو مجهول نکنید. جمله‌ی اول این تصاعد عددی برابر ۱ و جمله‌ی چهارم آن برابر $\frac{5}{3}$ است. بنابراین قدرنسبت تصاعد

$$a_4 - a_1 = 3d \Rightarrow \frac{5}{3} - 1 = 3d \Rightarrow d = \frac{1}{3}$$

پله‌ی دوم: با دانستن این که $a_1 = 1$ و $d = \frac{1}{3}$ است، مجموع پانزده جمله‌ی اول تصاعد را حساب می‌کنیم:

$$S_{15} = \frac{15}{2}(2a_1 + 14d) = \frac{15}{2}(2 + 7) = \frac{15 \times 9}{2} = 67 \frac{1}{2}$$

۱- پله‌ی یکم: مقدار a_7 (جمله‌ی هفتم) و a_1 (جمله‌ی اول) تصاعد

عددی را مشخص می‌کنیم: $a_n = 2n + 1 \Rightarrow a_7 = (2 \times 7) + 1 = 14 + 1 = 15$

$$a_n = 2n + 1 \Rightarrow a_1 = (2 \times 1) + 1 = 2 + 1 = 3$$

پله‌ی دوم: با استفاده از رابطه‌ی $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ مجموع هفت جمله‌ی اول تصاعد حسابی را به دست می‌آوریم:

$$S_7 = \frac{7}{2}(a_1 + a_7) = \frac{7}{2}(3 + 15) = \frac{7 \times 18}{2} = 63$$

۲- پله‌ی یکم: معنی عبارت «هر جمله‌ی تصاعد عددی از جمله‌ی

ما قبل خود به اندازه‌ی $\frac{1}{p}$ کم‌تر است» چیست؟

یعنی قدرنسبت تصاعد عددی برابر $\frac{1}{p}$ است و ما یک تصاعد عددی نزولی داریم.

پله‌ی دوم: با توجه به این که $a_5 = 3$ است، مقدار a_1 را تعیین می‌کنیم:

$$a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow 3 = a_1 - 2 \Rightarrow a_1 = 5$$

پله‌ی سوم: مجموع ۱۰ جمله‌ی اول برابر است با:

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2a_1 + 9d] = 5(10 - \frac{9}{3}) = 5 \times \frac{11}{3} = \frac{55}{3} = 18 \frac{1}{3}$$

۳- پله‌ی یکم: رابطه‌ی $a_6 + a_{14} = 25$ را باز می‌کنیم تا به نتایج

$$(a_1 + 5d) + (a_1 + 9d) = 25$$

$$2a_1 + 14d = 25 \quad \text{I}$$

پله‌ی دوم: با توجه به رابطه‌ی $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ در مورد مجموع جمله‌های تصاعد عددی، مجموع بیست و چهار جمله‌ی اول این تصاعد برابر است با:

$$S_{24} = \frac{24}{2}[2a_1 + 23d] \Rightarrow S_{24} = 12 \times 25 = 300$$

۴- پله‌ی یکم: با توجه به دو رابطه‌ی $a_7 + a_8 = 0$ و $a_7 = 4$ ، مقدار

a_1 و d را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$a_7 + a_8 = (a_1 + 6d) + (a_1 + 7d) = 2a_1 + 13d = 2(a_1 + 4d) = 0$$

پله‌ی دوم: با حل این دو معادله و دو مجهول، مقدار d یا همان قدرنسبت تصاعد را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 20 \\ 2a_1 + 3d = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_1 - 4d = -40 \\ 2a_1 + 3d = 22 \end{cases} \Rightarrow -d = -18 \Rightarrow d = 18$$

۱۲- پله‌ی یکم: قدرنسبت تصاعد را به صورت پارامتری حساب می‌کنیم. (یعنی برحسب p) داریم:

$$d = a_2 - a_1 = p - 1 - (1 + 2p) = -p - 2$$

پله‌ی دوم: مجموع هشت جمله‌ی اول تصاعد عددی با جمله‌ی اول $a_1 = 1 + 2p$ و قدرنسبت $d = -p - 2$ برابر 60 است. p برابر است با:

$$S_8 = \frac{8}{2}(2a_1 + 7d) = 4(2a_1 + 7d) = 60 \Rightarrow 2a_1 + 7d = 15$$

$$\Rightarrow 2(1 + 2p) + 7(-p - 2) = 2 + 4p - 7p - 14 = 15$$

$$-3p = 27 \Rightarrow p = -9$$

پله‌ی سوم: قدرنسبت تصاعد حسابی برابر است با:

$$d = -p - 2 = -(-9) - 2 = 9 - 2 = 7$$

۱۳- چشم‌انداز: جمله‌ی هفتم تصاعد حسابی برابر اختلاف مجموع جمله‌های اول تا هفتم و مجموع جمله‌های اول تا ششم است. تعمیم بدهید؛ همین مطلب برای جمله‌ی n ام به صورت زیر می‌شود:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

دلیل این را در قسمت آموزش گفته‌ایم. یادتان هست که؟!

پله‌ی یکم: S_7 و S_6 را حساب می‌کنیم:

$$S_7 = 7[(3 \times 7) + 4] = 7(21 + 4) = 7 \times 25 = 175$$

$$S_6 = 6[(3 \times 6) + 4] = 6(18 + 4) = 6 \times 22 = 132$$

پله‌ی دوم: جمله‌ی هفتم تصاعد برابر است با:

$$a_7 = S_7 - S_6 = 175 - 132 = 43$$

۱۴- پله‌ی یکم: وقتی مجموع چهار جمله‌ی اول 15 و مجموع پنج جمله‌ی بعد از آن 30 باشد، پس مجموع n جمله‌ی اول این تصاعد برابر 45 است. بنابراین داریم:

$$S_4 = 15 \Rightarrow \frac{4}{2}(2a_1 + 3d) = 15 \Rightarrow 4a_1 + 6d = 15$$

$$S_9 = 45 \Rightarrow \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) = 45 \Rightarrow 2a_1 + 8d = 10 \Rightarrow a_1 + 4d = 5$$

پله‌ی دوم: مقدار a_1 و d را حساب می‌کنیم:

$$a_1 + 4d = 5 \Rightarrow a_1 = 5 - 4d \quad \text{I}$$

$$4a_1 + 6d = 15 \Rightarrow 4(5 - 4d) + 6d = 15 \Rightarrow 20 - 16d + 6d = 15 \Rightarrow 10d = 5 \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

$$\text{I} \Rightarrow a_1 = 5 - 4 \times \frac{1}{2} = 5 - 2 = 3$$

پله‌ی سوم: a_{11} برابر است با:

$$a_{11} = a_1 + 10d = 3 + \frac{10}{2} = 3 + 5 = 8$$

۷- پله‌ی یکم: مقدار جمله‌ی دهم و جمله‌ی سی‌ام را حساب می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$a_n = \frac{1}{2}n + 1 \Rightarrow \begin{cases} a_{10} = \frac{10}{2} + 1 = 5 + 1 = 6 \\ a_{30} = \frac{30}{2} + 1 = 15 + 1 = 16 \end{cases}$$

پله‌ی دوم: تعداد جملات تصاعد حسابی با شروع از جمله‌ی دهم و ختم به جمله‌ی سی‌ام برابر 21 است. بنابراین مجموع این جملات برابر است با:

$$S = \frac{21}{2}(a_{10} + a_{30}) = \frac{21}{2}(6 + 16) = 21 \times 11 = 231$$

۸- پله‌ی یکم: مقدار جمله‌ی سیزدهم را حساب می‌کنیم:

$$d = a_2 - a_1 = 6 - 2 = 4$$

$$a_{13} = a_1 + 12d = 2 + (12 \times 4) = 2 + 48 = 50$$

پله‌ی دوم: می‌خواهیم ببینیم مجموع چند جمله از این تصاعد عددی برابر 50 می‌شود. داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[4 + 4(n-1)] = \frac{n}{2}(4n) = 2n^2 = 50$$

$$\Rightarrow n^2 = 25 \Rightarrow n = 5$$

۹- پله‌ی یکم: قدرنسبت تصاعد عددی برابر است با:

$$d = a_2 - a_1 = 15 - 18 = -3$$

پله‌ی دوم: می‌خواهیم تعیین کنیم مجموع چند جمله از این تصاعد عددی برابر صفر می‌شود. داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[36 - 3(n-1)] = \frac{n}{2}(39 - 3n) = 0$$

$$n \neq 0 \Rightarrow 39 - 3n = 0 \Rightarrow 3n = 39 \Rightarrow n = 13$$

۱۰- پله‌ی یکم: با توجه به این که «جمله‌ی هفتم نصف جمله‌ی سوم است»، داریم:

$$a_7 = \frac{1}{2}a_3 \Rightarrow a_1 + 6d = \frac{1}{2}(a_1 + 2d) \Rightarrow a_1 + 6d = \frac{a_1}{2} + d$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{2} = -5d \Rightarrow a_1 = -10d$$

پس جمله‌ی اول تصاعد 10 -برابر قدرنسبت تصاعد عددی است.

پله‌ی دوم: می‌خواهیم ببینیم مجموع چند جمله‌ی اول تصاعد برابر صفر می‌شود. S_n را برابر صفر قرار داده و مقدار n را تعیین می‌کنیم. در نتیجه داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[-20d + (n-1)d] = 0$$

$$n \neq 0 \Rightarrow d[(n-1) - 20] = 0 \Rightarrow n - 1 = 20 \Rightarrow n = 21$$

۱۱- پله‌ی یکم: یک رابطه‌ی دو معادله و دو مجهول بر اساس مجموع جملات داده شده تشکیل می‌دهیم. داریم:

$$S_5 = 100 \Rightarrow \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = 100 \Rightarrow 5a_1 + 10d = 100$$

$$\Rightarrow 5(a_1 + 2d) = 100 \Rightarrow a_1 + 2d = 20$$

$$S_4 = 44 \Rightarrow \frac{4}{2}(2a_1 + 3d) = 44 \Rightarrow 2a_1 + 3d = 22$$

۱۹- **پلهی یکم:** اگر $2n+1$ جمله داشته باشیم، جملهی وسط جملهی $(n+1)$ ام است. بنابراین $a_{n+1}=17$ است. پس داریم:

$$a_{n+1} = a_1 + (n+1-1)d = a_1 + nd = 17 \quad I$$

پلهی دوم: با توجه به این که $S_{2n+1} = 187$ است و با استفاده از رابطهی I، مقدار n را تعیین می کنیم. بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= \frac{2n+1}{2} [2a_1 + (2n+1-1)d] = \frac{2n+1}{2} (2a_1 + 2nd) \\ &= (2n+1)(a_1 + nd) = 187 \Rightarrow 17(2n+1) = 187 \Rightarrow 2n+1 = 11 \\ &\Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow n = 5 \end{aligned}$$

۲۰- **پلهی سوم:** می دانیم $S_n = 64$ است. می خواهیم n را به دست بیاوریم. با این اطلاعات که $a_1 = 1$ و $d = 2$ است. دست به کار می شویم:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = 64 \xrightarrow{a_1=1, d=2} \frac{n}{2} (2 + 2n - 2) = n^2 = 64 \\ &\Rightarrow n = 8 \end{aligned}$$

۲۱- **پلهی یکم:** مجموع بیست جملهی اول یک تصاعد عددی با جملهی اول a و قدرنسبت d برابر است با:

$$S_{20} = \frac{20}{2} (2a + 19d) = 10(2a + 19d)$$

پلهی دوم: فرض می کنیم یک واحد به قدرنسبت اضافه شود. در این حالت مجموع بیست جملهی اول را با S'_{20} نشان می دهیم. برابر است با:

$$\begin{aligned} S'_{20} &= \frac{20}{2} [2a + 19(d+1)] = 10(2a + 19d + 19) = 10(2a + 19d) + 190 \\ &\Rightarrow S'_{20} = S_{20} + 190 \end{aligned}$$

بنابراین به مجموع بیست جملهی اول ۱۹۰ واحد اضافه خواهد شد.

۲۲- **پلهی یکم:** کوچکترین جمله را a_1 و بزرگترین جمله را a_6 در نظر می گیریم. با توجه به فرضهای موجود در تست، روابط را نوشته و مقدار a_1 و a_6 را محاسبه می کنیم. بنابراین داریم:

$$S_6 = \frac{6}{2} (a_1 + a_6) = 69 \Rightarrow 3(a_1 + a_6) = 69 \Rightarrow a_1 + a_6 = 23$$

پلهی دوم: می دانیم $a_1 a_6 = 76$ است. تنها اعدادی که مجموعشان برابر ۲۳ و حاصل ضربشان برابر ۷۶ می شود، اعداد ۱۹ و ۴ هستند. پس $a_1 = 4$ و $a_6 = 19$ است.

پلهی سوم: با تعیین قدرنسبت تصاعد حسابی، مقدار جملهی سوم یا همان a_3 را حساب می کنیم: $a_6 - a_1 = 5d \Rightarrow 19 - 4 = 15 = 5d \Rightarrow d = 3$
 $a_3 = a_1 + 2d = 4 + (2 \times 3) = 4 + 6 = 10$

۲۳- **پلهی یکم:** ابتدا دسته ی دهم را تشکیل می دهیم. عدد آخر این دسته باید مجذور عدد ۱۰ باشد. پس آخرین عدد دسته برابر ۱۰۰ است. عدد اول دسته هم اولین عدد طبیعی بعد از مجذور عدد ۹ یا همان ۸۱ است. پس عدد اول این دسته برابر ۸۲ می باشد. پس این دسته به صورت ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ...، ۹۹، ۱۰۰ زیر در می آید:

۱۵- **پلهی یکم:** دنباله ی اعداد طبیعی فرد، بخش پذیر بر ۳ و کوچکتر از ۱۰۱، یک دنباله ی حسابی است. جمله های این دنباله به صورت زیر است:

$$3, 9, 15, 21, \dots, 93, 99$$

پلهی دوم: برای به دست آوردن این مجموع اعداد باید مجموع اعداد دنباله ی حسابی با جمله ی اول ۳ و قدرنسبت ۶ را محاسبه کنیم. هم چنین تعداد جملات این دنباله به صورت زیر به دست می آید:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 99 = 3 + 6(n-1)$$

$$6n - 3 = 99 \Rightarrow 6n = 102 \Rightarrow n = 17$$

پس این دنباله دارای ۱۷ جمله است!

پلهی سوم: پس مجموع این جملات برابر است با:

$$S = \frac{17}{2} (3 + 99) = \frac{17 \times 102}{2} = 17 \times 51 = 867$$

۱۶- **پلهی یکم:** فرض های موجود در تست را به طور دقیق مشخص می کنیم. اول از همه می دانیم $S_{13} = 325$ است. هم چنین

$$a_{13} - a_1 = 48 \Rightarrow 12d = 48 \Rightarrow d = 4$$

$$S_{13} = \frac{13}{2} (2a_1 + 12d) = 325 \Rightarrow \frac{13}{2} (2a_1 + 48) = 325$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 48 = 50 \Rightarrow 2a_1 = 2 \Rightarrow a_1 = 1$$

پس با یک تصاعد حسابی با جمله ی اول ۱ و قدرنسبت ۴ روبه رو هستیم.

پلهی دوم: جمله ی سوم یا a_3 برابر است با:

$$a_3 = a_1 + 2d = 1 + (4 \times 2) = 1 + 8 = 9$$

۱۷- **پلهی یکم:** قدرنسبت تصاعد را به دست می آوریم:

$$a_3 - a_1 = -21 - (-27) = -21 + 27 = 6 = 2d \Rightarrow d = 3$$

بنابراین یک تصاعد حسابی صعودی با قدرنسبت ۳ داریم.

پلهی دوم: آخرین جمله ی منفی این تصاعد حسابی برابر ۳- است که نهمین جمله ی تصاعد محسوب می شود. چون داریم:

$$-27, -24, -21, -18, -15, -12, -9, -6, -3$$

جمله ی نهم

پلهی سوم: مجموع جملات منفی این تصاعد حسابی را به دست می آوریم.

$$S_9 = \frac{9}{2} (-27 - 3) = \frac{9}{2} (-30) = 9(-15) = -135$$

۱۸- **پلهی یکم:** با توجه به رابطه ی داده شده برای محاسبه ی مجموع n جمله ی اول، مجموع $(n-1)$ جمله ی اول تصاعد حسابی را به دست می آوریم:

$$S_{n-1} = (n-1) [(3(n-1) + 2)] = (n-1)(3n-3+2) = (n-1)(3n-1)$$

پلهی دوم: برای تعیین جمله ی n ام این تصاعد، کافی است اختلاف S_n و S_{n-1} را حساب کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$a_n = S_n - S_{(n-1)} = n(3n+2) - (n-1)(3n-1)$$

$$= 3n^2 + 2n - 3n^2 + 4n - 1 = 6n - 1$$

۲۸ - ۱) پله‌ی یکم: با یک تصاعد حسابی که جمله‌ی اول آن $a_1 = 3$ و قدرنسبت آن $d = 4$ است روبه‌رو هستیم. باید ببینیم $4n + 3$ جمله‌ی چندم این تصاعد است با کمی دقت می‌توانیم بفهمیم که $4n + 3$ جمله‌ی $(n + 1)$ اُم تصاعد است (چرا؟)

پله‌ی دوم: با توجه به رابطه‌ی مجموع n جمله‌ی تصاعد حسابی، داریم:

$$S_{n+1} = \frac{n+1}{2} [a_1 + a_{n+1}] = 351$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2} [3 + 4n + 3] = 351 \Rightarrow (n+1)(2n+3) = 351$$

$$351 = 13 \times 27$$

$$\Rightarrow n+1 = 13 \Rightarrow n = 12$$

۲۹ - ۱) پله‌ی یکم: مجموع جملات ردیف فرد برابر ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج برابر ۱۵۰ شده است. به زبان ریاضی یعنی:

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} = 135 \quad \text{I}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = 150 \quad \text{II}$$

پله‌ی دوم: سطر اول را از سطر دوم کم می‌کنیم تا ببینیم به کجا می‌رسیم:

$$\text{II} - \text{I} \Rightarrow (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) + \dots + (a_{20} - a_{19}) = 15$$

پله‌ی سوم: می‌دانیم اختلاف دو جمله‌ی متوالی هر تصاعد حسابی برابر قدرنسبت است. بنابراین از رابطه‌ی بالا می‌توان نتیجه گرفت که:

$$d + d + d + \dots + d = 15 \Rightarrow 10d = 15 \Rightarrow d = 1/5$$

تا ۱۰

پله‌ی چهارم: حالا از رابطه‌ی مجموع n جمله‌ی تصاعد حسابی و II خواهیم داشت:

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_{20}] = \frac{10}{2} (a_1 + a_{20}) = 150$$

$$\Rightarrow 5[(a_1 + d) + (a_1 + 19d)] = 150 \Rightarrow 2a_1 + 20d = 30$$

$$d = 1/5$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 30 = 30 \Rightarrow a_1 = 0$$

۳۰ - ۲) پله‌ی یکم: قدرنسبت تصاعد هندسی را حساب می‌کنیم:

$$\frac{a_3}{a_1} = q^2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = q^2 \Rightarrow q = -\frac{1}{2}$$

چون در صورت تست شرط شده که تصاعد هندسی غیرنزولی است، پس مقدار $q = \frac{1}{2}$ غیرقابل قبول است.

در واقع اگر $q = \frac{1}{2}$ باشد، تصاعد به صورت $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ در می‌آید که نزولی است و به درد ما نمی‌خورد. اما اگر $q = -\frac{1}{2}$ باشد، تصاعد به صورت $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots$ در می‌آید که نه نزولی است و نه صعودی در واقع هی کم و زیاد می‌شود. به این دنباله‌ها، دنباله‌ی نوسانی می‌گوییم.

پله‌ی دوم: مجموع شش جمله‌ی اول برابر است با:

$$S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{2(1-(-\frac{1}{2})^6)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2(1-\frac{1}{64})}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \times \frac{63}{64} = \frac{21}{16}$$

پله‌ی دوم: این دسته یک تصاعد عددی با جمله‌ی اول ۸۲ و جمله‌ی آخر ۱۰۰ است. تعداد اعضای این دسته هم برابر ۱۹ است. پس مجموع اعداد این دسته برابر است با:

$$S = \frac{19}{2} (82 + 100) = \frac{19 \times 182}{2} = 19 \times 91 = 1729$$

۲۴ - ۲) می‌خواهیم در تصاعد حسابی با جمله‌ی اول ۳ و قدرنسبت ۶، مقداری برای n تعیین کنیم که رابطه‌ی $S_n = 675$ برقرار باشد. داریم:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2} [6 + 6(n-1)] = \frac{n}{2} (6n) = 3n^2 = 675$$

$$\Rightarrow n^2 = 225 \Rightarrow n = 15$$

۲۵ - ۲) پله‌ی یکم: در واقع $S_6 = 102$ و $S_7 = 318$ است. پس

$S_7 = 420$ است. با توجه به مقدار مجموع شش جمله‌ی اول و مجموع دوازده جمله‌ی اول، مقدار جمله‌ی اول و قدرنسبت تصاعد عددی را

$$S_6 = \frac{6}{2} (2a_1 + 5d) = 102 \Rightarrow 2a_1 + 5d = 34$$

تعیین می‌کنیم:

$$S_{12} = \frac{12}{2} (2a_1 + 11d) = 420 \Rightarrow 2a_1 + 11d = 70$$

با کم کردن رابطه‌ی اول از رابطه‌ی دوم d را حساب می‌کنیم:

$$6d = 70 - 34 = 36 \Rightarrow d = 6$$

$$2a_1 + 5d = 34 \xrightarrow{d=6} 2a_1 + 30 = 34 \Rightarrow 2a_1 = 4 \Rightarrow a_1 = 2$$

پله‌ی دوم: جمله‌های ششم و پانزدهم را تعیین می‌کنیم:

$$a_6 = a_1 + 5d = 2 + (5 \times 6) = 2 + 30 = 32$$

$$a_{15} = a_1 + 14d = 2 + (14 \times 6) = 2 + 84 = 86$$

پله‌ی سوم: مجموع جمله‌های ششم و پانزدهم برابر است با:

$$a_6 + a_{15} = 32 + 86 = 118$$

۲۶ - ۲) پله‌ی یکم: عدد ۱ را جمله‌ی اول و عدد ۸۱ را جمله‌ی n اُم فرض می‌کنیم. با توجه به این که $S_n = 246$ است، مقدار n را به دست می‌آوریم:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} (1 + 81) = 41n = 246 \Rightarrow n = 6$$

پله‌ی دوم: تعداد کل جمله‌ها برابر ۶ جمله است. پس بین ۱ و ۸۱ باید ۴ جمله درج شود تا مجموع جمله‌های تصاعد حسابی برابر ۲۴۶ شود.

۲۷ - ۳) خُب کاری ندارد! مجموع داده شده را ساده می‌کنیم:

$$S = 1^2 - 11^2 + 10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + \dots + 2^2 - 1^2$$

$$= (144 - 121) + (100 - 81) + (64 - 49) + \dots + (4 - 1)$$

$$= 23 + 19 + 15 + 11 + 7 + 3 = 78$$

توجه: در مواقعی که با یک محاسبه‌ی ساده می‌توانید مجموع یک تصاعد را حساب کنید، نیازی نیست خودتان را درگیر فرمول‌ها و نکته‌های تصاعد کنید. به خودتان اعتماد داشته باشید!

۳۱- **پله‌ی یکم:** S_6 و S_7 را به دست می‌آوریم:

$$S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q}, \quad S_7 = \frac{a_1(1-q^7)}{1-q}$$

پله‌ی دوم: نسبت $\frac{S_6}{S_7}$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{S_6}{S_7} &= \frac{\cancel{a_1}(1-q^6)}{\cancel{a_1}(1-q^7)} = \frac{1-q^6}{1-q^7} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \frac{(1-q^3)(1+q^3)}{1-q^7} = 1+q^3 \\ q=2 \implies \frac{S_6}{S_7} &= 1+2^3 = 1+8 = 9 \end{aligned}$$

۳۲- **پله‌ی یکم:** با توجه به این که $a_1 = 2$ و $q = \frac{1}{4}$ است. مجموع پنج

جمله‌ی اول یعنی S_5 و مجموع ۵ جمله‌ی دوم یعنی $S_5 - S_1$ (چرا؟)

پله‌ی دوم: حالا می‌رویم سراغ محاسبه‌ی نسبت این دو عبارت:

$$\begin{aligned} \frac{S_5 - S_1}{S_5} &= \frac{S_5}{S_5} - 1 = \frac{\cancel{a_1}(q^5 - 1)}{\cancel{a_1}(q^5 - 1)} - 1 = \frac{q^5 - 1}{q^5 - 1} - 1 \\ &= \frac{(q^5 + 1)(q^5 - 1)}{q^5 - 1} - 1 = q^5 \end{aligned}$$

پله‌ی سوم: ما حاصل معکوس این کسر را می‌خواهیم. پس:

$$\frac{S_5}{S_5 - S_1} = \frac{1}{q^5} = 2^{10}$$

۳۳- **پله‌ی یکم:** جمله‌ی اول و قدرنسبت تصاعد هندسی را مشخص

می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 &= 1 \implies a_1 + a_1 q^2 = 1 \implies a_1(1 + q^2) = 1 \quad \text{I} \\ S_4 &= 3 \implies a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 = 3 \implies a_1 q(1 + q^2) = 2 \implies \\ q &= 2 \end{aligned}$$

پله‌ی دوم: $a_1(1 + q^2) = 1 \xrightarrow{q=2} a_1(1 + 4) = 1 \implies a_1 = \frac{1}{5}$

پله‌ی سوم: مجموع ۶ جمله‌ی اول تصاعد برابر است با:

$$S_6 = \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{5}(2^6 - 1)}{2 - 1} = \frac{63}{5} = 12\frac{3}{5}$$

۳۴- **پله‌ی یکم:** هر کدام از پرانتزها مجموع ۹ جمله از یک تصاعد

هندسی هستند. داریم:

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \dots + x^8 &= \frac{1(x^9 - 1)}{x - 1} \\ 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^8 &= \frac{1(-x)^9 - 1}{-x - 1} \end{aligned}$$

پله‌ی دوم: حاصل عبارت بر حسب x :

$$\begin{aligned} \text{عبارت} &= \frac{x^9 - 1}{x - 1} \times \frac{x^9 + 1}{x + 1} = \frac{x^{18} - 1}{x^2 - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^{18} - 1}{(\sqrt{2})^2 - 1} = 2^9 - 1 = 511 \quad : x = \sqrt{2} \end{aligned}$$

۳۵- **پله‌ی یکم:** حد مجموع داده‌شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{64}\right) + \dots \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots\right) \end{aligned}$$

پله‌ی دوم: می‌دانیم حد مجموع بی‌نهایت جمله از یک تصاعد هندسی با

جمله‌ی اول a و قدرنسبت q که $|q| < 1$ است، برابر $S_\infty = \frac{a}{1-q}$ می‌شود.

دو بار از این رابطه استفاده می‌کنیم:

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

۳۶- **پله‌ی یکم:** حد مجموع داده‌شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right)$$

پله‌ی دوم: مانند تست قبل با محاسبه‌ی حد مجموع هریک از پرانتزهای

عبارت به دست آمده، مقدار S را محاسبه می‌کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$S = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۳۷- **پله‌ی یکم:** چند جمله‌ی اول این تصاعد هندسی را تشکیل می‌دهیم:

$$a_1 = 5\left(-\frac{2}{3}\right)^{2-1} = 5\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$a_2 = 5\left(-\frac{2}{3}\right)^{3-1} = 5\left(-\frac{2}{3}\right)^2$$

$$a_3 = 5\left(-\frac{2}{3}\right)^{4-1} = 5\left(-\frac{2}{3}\right)^3$$

پله‌ی دوم: قدرنسبت تصاعد برابر است با:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{5\left(-\frac{2}{3}\right)^2}{5\left(-\frac{2}{3}\right)} = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

پله‌ی سوم: حد مجموع جملات تصاعد هندسی برابر است با:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{5\left(-\frac{2}{3}\right)}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{-\frac{10}{3}}{\frac{5}{9}} = -\frac{90}{15} = -6$$

۳۸- **پله‌ی یکم:** حد مجموع جملات تصاعد هندسی نامحدود را

حساب می‌کنیم. داریم:

$$S = \frac{a_1}{1-q} \xrightarrow{a_1 = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}} S = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = 1$$

پله‌ی دوم: مقدار k را محاسبه می‌کنیم: $k^2 - 8 = 1 \implies k^2 = 9 \implies k = \pm 3$

۳۹- **پله‌ی یکم:** جمله‌ی سوم و جمله‌ی ششم تصاعد هندسی را

$$q = \frac{a_3}{a_1} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = a_1 q^2 = a_1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{a_1}{4}$$

$$a_6 = a_1 q^5 = a_1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{a_1}{32}$$

پله‌ی دوم: مجموع محیط مثلث‌های متساوی‌الاضلاع برابر حد مجموع تصاعد هندسی نامتناهی تشکیل شده است. در نتیجه داریم:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{18}{1-\frac{1}{2}} = 18 \times 2 = 36$$

۴۳- پله‌ی یکم: عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \dots \\ &= \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 - \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots \\ &= \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots\right) - 2\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots\right) \end{aligned}$$

پله‌ی دوم: با محاسبه‌ی حد مجموع هریک از پرانتزها مقدار S را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} - 2 \times \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} - 2 \times \frac{\frac{1}{27}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{26} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{13} = \frac{13-2}{26} = \frac{11}{26} \end{aligned}$$

۴۴- پله‌ی یکم: اگر شش عدد بین دو عدد 2 و $16\sqrt{2}$ قرار داشته باشند، در این صورت عدد ۲ جمله‌ی اول تصاعد هندسی و عدد $16\sqrt{2}$ جمله‌ی هشتم تصاعد هندسی است. پس قدرنسبت تصاعد هندسی برابر $\frac{a_8}{a_1} = q^7 \Rightarrow \frac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2} = (\sqrt{2})^7 = q^7 \Rightarrow q = \sqrt{2}$ است با:

پله‌ی دوم: مجموع این هشت جمله برابر است با:

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{2((\sqrt{2})^8 - 1)}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2(16 - 1)}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \frac{30}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{30(\sqrt{2} + 1)}{2 - 1} = 30(\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

پله‌ی دوم: با استفاده از رابطه‌ی $S = \frac{a}{1-q}$ که در آن a جمله‌ی اول حد مجموع است، نسبت S_3 و S_6 را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{S_3}{S_6} = \frac{\frac{a_3}{1-q}}{\frac{a_6}{1-q}} = \frac{a_3 q^2}{a_6 q^5} = \frac{1}{q^3} \xrightarrow{q=\frac{1}{2}} \frac{S_3}{S_6} = 8 \Rightarrow S_3 = 8S_6$$

۴۵- پله‌ی یکم: اگر جمله‌ی اول این تصاعد هندسی بی‌پایان a و قدرنسبت آن q باشد، در این صورت داریم:

$$I \quad S_{\infty} = \frac{a}{1-q} = 30 \quad \text{حد مجموع جملات}$$

$$S'_{\infty} = \frac{a^2}{1-q^2} = 150 \quad \text{حد مجموع مربع جملات}$$

پله‌ی دوم: با ایجاد تغییراتی در روابط بالا مقدار q یا همان قدرنسبت را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{a^2}{1-q^2} = \frac{a \times a}{(1-q)(1+q)} = \frac{a}{1-q} \times \frac{a}{1+q} \stackrel{I}{=} 30 \times \frac{a}{1+q} = 150$$

$$\stackrel{\div 30}{\Rightarrow} \frac{a}{1+q} = 5 \Rightarrow a = 5(1+q) \quad II$$

پله‌ی سوم:

$$\frac{a}{1-q} = 30 \stackrel{II}{\Rightarrow} \frac{5(1+q)}{1-q} = 30 \Rightarrow \frac{1+q}{1-q} = 6$$

$$\Rightarrow 1+q = 6-6q \Rightarrow 7q-5 = 0 \Rightarrow q = \frac{5}{7}$$

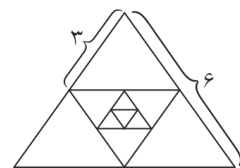
۴۱- پله‌ی یکم: دنباله‌ای که نشان‌دهنده‌ی مسافت طی‌شده توسط توپ در هر مرحله است را تشکیل می‌دهیم:

دنباله‌ی مسافت طی‌شده: $15, 5, 5, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \dots$

پله‌ی دوم: مجموع مسافت طی‌شده به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$S_{\infty} = 15 + 2\left(5 + \frac{5}{3} + \frac{5}{3^2} + \dots\right) = 15 + 2 \times \frac{5}{1-\frac{1}{3}} = 15 + 2\left(\frac{5}{\frac{2}{3}}\right)$$

$$15 + 2 \times \frac{15}{2} = 15 + 15 = 30$$



۴۲- پله‌ی یکم: شکل گویایی از

توضیحات بیان شده رسم می‌کنیم و دنباله‌ای را که شامل محیط مثلث‌های متساوی‌الاضلاع است، می‌نویسیم. داریم:

محیط مثلث‌های متساوی‌الاضلاع: $3 \times \frac{3}{4}, 3 \times 3, 3 \times 6, \dots$

پلکان آزمون

آزمون یکم (ساده و متوسط)

۵ دقیقه

۱ - مجموع ۱۰ جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی، $\frac{33}{32}$ برابر مجموع ۵ جمله‌ی اول همین تصاعد است. مقدار قدرنسبت این تصاعد چند است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۲ - در یک تصاعد عددی، جمله‌ی ششم برابر ۱۳ و جمله‌ی سیزدهم برابر ۶ است. مجموع شش جمله‌ی اول، چه قدر از مجموع شش جمله‌ی دوم بیش تر است؟

- (۱) ۳۳ (۲) ۳۴ (۳) ۳۵ (۴) ۳۶

۳ - اگر دو عدد ۵ و x به ترتیب جملات دوم و هفتم یک تصاعد عددی با قدرنسبت d و در عین حال جملات پنجم و ششم یک تصاعد هندسی با قدرنسبت q باشند، مقدار q - d چه قدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴ - در یک تصاعد حسابی رابطه‌های $a_4 + a_9 = 8$ و $a_6 + a_{11} = 11$ برقرار هستند. مجموع ۲۰ جمله‌ی اول این تصاعد چه قدر می‌شود؟

- (۱) ۲۳۰ (۲) ۲۲۰ (۳) ۲۱۰ (۴) ۲۰۰

۵ - در یک تصاعد هندسی، جمله‌ی دهم ۳ برابر جمله‌ی دوم است. اگر مجموع جمله‌های اول و نهم برابر ۱۲ باشد، مقدار جمله‌ی اول چه قدر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) -۳ (۴) -۴

۶ - در یک تصاعد عددی، مجموع سیزده جمله‌ی اول برابر ۱۰۴ است. اگر مجموع جمله‌ی اول و پنجم آن برابر صفر باشد، جمله‌ی هفتم چه قدر خواهد بود؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۷ - تصاعد عددی ...، -۲، $-\frac{13}{6}$ ، $-\frac{7}{3}$ را در نظر بگیرید. از جمله‌ی چندم به بعد، همه‌ی جمله‌های این تصاعد بزرگ‌تر از ۵۰ هستند؟

- (۱) ۳۱۴ (۲) ۳۱۵ (۳) ۳۱۶ (۴) ۳۱۷

۸ - حاصل ضرب کدام دو جمله در یک تصاعد هندسی، برابر مجذور جمله‌ی هفتم همان تصاعد می‌شود؟

- (۱) اول - دوازدهم (۲) چهارم - یازدهم

- (۳) پنجم - نهم (۴) سوم - سیزدهم

۹ - قدرنسبت دو تصاعد هندسی برابر و جمله‌ی اول تصاعد دوم، چهار برابر جمله‌ی اول دیگری است. جمله‌ی n ام تصاعد اول، چند برابر جمله‌ی n ام تصاعد دوم است؟

- (۱) 2^6 (۲) 2^{-2} (۳) 2^{-n} (۴) n^2

۱۰ - اگر سه زاویه‌ی مثلث ABC تشکیل تصاعد حسابی بدهند، یکی از زاویه‌ها حتماً برابر است با:

- (۱) ۹۰° (۲) ۶۰° (۳) ۴۵° (۴) ۳۰°

۱۱ - فرض کنید دنباله‌ی ...، x، y، ۴، ...، یک تصاعد حسابی نزولی را نشان می‌دهد. اگر ۱ واحد به x اضافه کنیم، سه جمله‌ی ۴، y، x+۱ تشکیل یک تصاعد هندسی می‌دهند. y کدام می‌تواند باشد؟

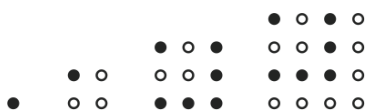
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۲ - حاصل $\frac{3^{-2} + 3^{-3} + 3^{-4} + \dots}{5^{-1} + 5^{-3} + 5^{-5} + \dots}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴) ۱

(سراسری - انسانی - ۸۳)

۱۳ - در درایه‌های مربعی شکل زیر، جمله‌ی دهم چند عضو سفید دارد؟



- (۱) ۵۵
(۲) ۷۲
(۳) ۶۵
(۴) ۵۶

۱۴ - مجموع جملات یک تصاعد حسابی برابر ۱۶ و جمله‌ی عمومی آن $\frac{n}{8} - \frac{1}{16}$ است. این تصاعد چند جمله دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

۱۵ - چه عددی باید به تک‌تک عددهای ۲۱ و ۱۱ و ۵ اضافه شود، تا سه عدد تشکیل تصاعد هندسی بدهند؟

- (۱) ۳ (۲) -۴ (۳) ۴ (۴) -۳

۱۶ - در یک تصاعد هندسی با جملات مثبت، اگر جمله‌ی هفتم برابر مجذور جمله‌ی دوم باشد، جمله‌ی چندم برابر مکعب جمله‌ی اول است؟

- (۱) نهم (۲) هشتم (۳) هفتم (۴) ششم

۱۷ - در یک تصاعد حسابی $S_8 = a_1 + a_2 + \dots + a_8 = 76$ و $S_4 = a_1 + a_2 + \dots + a_4 = 68$ است. قدرنسبت تصاعد کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{V}$ (۲) $-\frac{1}{V}$ (۳) $\frac{3}{V}$ (۴) $-\frac{3}{V}$

۱۸ - اگر $a > 1$ و $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^6} + \dots = \frac{5}{98}$ باشد، مقدار a برابر چه عددی خواهد بود؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۱۹ - بین دو عدد ۲ و -۴۸۶ چهار واسطه‌ی هندسی درج کرده‌ایم. مجموع این چهار واسطه چه قدر است؟

- (۱) ۱۱۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۳۰ (۴) ۱۴۰

۲۰ - مقدار x از معادله‌ی $3 + 5 + 13 + \dots + x = 407$ چه قدر است؟

- (۱) ۵۵ (۲) ۶۶ (۳) ۷۷ (۴) ۸۸

آزمون دوم (استاندارد)

۱۵ دقیقه

۱ - مجموع زوایای یک شش ضلعی 720° است. اندازه‌ی زاویه‌ها تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند. اگر بزرگ‌ترین زاویه 190° باشد، اختلاف

اندازه دو زاویه متوالی چه قدر است؟

- (۱) 28° (۲) 32° (۳) 36° (۴) 40°

۲ - مجموع n جمله‌ی اول یک تصاعد عددی $\frac{2n(7n-3)}{9}$ است. قدرنسبت این تصاعد بین کدام دو عدد است؟

- (۱) ۲ و ۳ (۲) ۳ و ۴ (۳) ۴ و ۵ (۴) ۵ و ۶

۳ - موجی بر روی نیم‌دایره‌های بالای یک محور حرکت می‌کند. با قطر اولیه‌ی ۱ واحد، هر بار که به محور برخورد کند، ۲۰ درصد از طول قطر آن کاسته می‌شود. اندازه‌ی محیط این نیم‌دایره‌های متوالی دنباله‌ی اعداد حقیقی است. مجموع این دنباله، کدام است؟ (سراسری - ریاضی - ۸۴)



- (۱) 2π (۲) 3π

- (۳) $\frac{3}{2}\pi$ (۴) $\frac{5}{4}\pi$

۴ - در یک تصاعد هندسی نزولی بی‌پایان، حد مجموع جملات پنج برابر جمله‌ی اول است. قدرنسبت چه قدر است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{5}{3}$

۵ - در یک تصاعد هندسی نزولی نامحدود، جمله‌ی اول برابر با $\frac{1}{4}$ مجموع جملات بعدی است. جمله‌ی اول چند برابر جمله‌ی چهارم است؟

- (۱) $\frac{125}{64}$ (۲) $\frac{64}{25}$ (۳) $\frac{27}{64}$ (۴) $\frac{64}{125}$

۶ - حاصل جمع $9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_{15 \text{ تا}}$ را حساب کنید. در عدد به دست آمده، چند رقم ۱ مشاهده می کنید؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۷ - دایره‌ای به قطر ۱ را در نظر بگیرید. دایره‌ی دیگری را رسم می کنیم که قطر آن با شعاع دایره‌ی اول برابر باشد و این عمل را ادامه می دهیم؛ یعنی پس از رسم هر دایره، دایره‌ی دیگری را به قطر برابر با شعاع دایره‌ی قبل رسم می کنیم. چندمین دایره محیطش از $\frac{\pi}{900}$ کوچک تر می شود؟

- (۱) هشتم (۲) نهم (۳) دهم (۴) یازدهم

۸ - بین جمله‌ی اول و یازدهم تصاعد حسابی $5, 9, 13, \dots$ می خواهیم سه عدد قرار دهیم، به طوری که این پنج عدد تشکیل تصاعد هندسی با جمله‌های مثبت بدهند. قدرنسبت این تصاعد چند است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $-\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{3}$

۹ - اگر $a, b, 4$ سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد عددی باشند و $a, b, 4$ سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد هندسی باشند و بدانیم که $a \neq b$ است، حاصل $a + b$ چه قدر خواهد بود؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) -۴

۱۰ - جملات اول، یازدهم و سی و یکم یک تصاعد حسابی، تشکیل یک تصاعد هندسی می دهند. قدرنسبت این تصاعد هندسی چند است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۱ - در یک تصاعد هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول آن ۱۵۳ می باشد. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟

- (۱) $\frac{81}{16}$ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۶
(سراسری - ریاضی - ۱۹)

۱۲ - در یک تصاعد عددی جمله‌ی n ام به صورت $a_n = \frac{3}{4}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله اول این تصاعد کدام است؟ (سراسری - تجربی - ۱۹)

- (۱) ۹۰ (۲) ۱۰۵ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۳۵

۱۳ - اعداد $3\sqrt{3}, 9, b, 3\sqrt{3}$ و 3^a جملات متوالی یک تصاعد هندسی هستند. واسطه هندسی بین دو عدد $a\sqrt{3}$ و b کدام است؟ (آزاد - ریاضی - ۱۹)

- (۱) $3\sqrt{3}$ (۲) ۳ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۹

۱۴ - در یک تصاعد هندسی مجموع ده جمله‌ی اول $4\sqrt{2} + 1$ برابر مجموع ۵ جمله اول است. در این تصاعد مجموع ۸ جمله اول چند برابر مجموع چهار جمله اول است؟ (آزاد - ریاضی - ۱۹)

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۹ (۴) ۱۷

۱۵ - در دنباله $a_n = n^2 - (n+1)^2$ مجموع ۱۹ جمله اول کدام است؟ (آزاد - تجربی - ۱۹)

- (۱) ۱ (۲) -۳۹۹ (۳) ۴۰۱ (۴) -۴۰۰

۱۶ - در یک تصاعد هندسی صعودی به صورت $4, a, 9, b, \dots$ مجموع شش جمله‌ی اول کدام است؟ (سراسری - ریاضی - ۱۹ - خارج از کشور)

- (۱) $81\frac{3}{8}$ (۲) $81\frac{7}{8}$ (۳) $82\frac{3}{8}$ (۴) $83\frac{1}{8}$

۱۷ - در یک تصاعد هندسی مجموع سه جمله‌ی متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آن‌ها ۲۱۶ می باشد. تفاضل کوچک ترین و بزرگ ترین این سه عدد کدام است؟ (سراسری - تجربی - ۹۰)

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۸ - در یک تصاعد عددی مجموع بیست جمله‌ی اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله‌ی سوم برابر ۶ باشد، جمله‌ی دهم کدام است؟ (سراسری - ریاضی - ۹۰)

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۴ (۳) ۳۶ (۴) ۳۸

۱۹ - در تصاعد هندسی $1, 2, 4, \dots$ مجموع چهارده جمله‌ی اول چند برابر مجموع هفت جمله‌ی اول آن است؟ (سراسری - تجربی - ۹۰ - خارج از کشور)

- (۱) ۶۵ (۲) ۶۳ (۳) ۱۲۷ (۴) ۱۲۹

۲۰ - مجموع n جمله‌ی اول از تصاعد عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این تصاعد مجموع جملات شروع از جمله هفتم و ختم به جمله‌ی هجدهم، کدام است؟ (سراسری - ریاضی - ۹۰ - خارج از کشور)

- (۱) ۹ (۲) $\frac{29}{3}$ (۳) $\frac{49}{3}$ (۴) ۱۸

پاسخ‌های پلکان آزمون

پاسخ تست‌های آزمون یکم



پله‌ی دوم: مقدار q یا قدرنسبت تصاعد هندسی را به‌دست می‌آوریم:

$$a_5 = 5, a_6 = x \Rightarrow \frac{a_6}{a_5} = q = \frac{x}{5}$$

پله‌ی سوم: $q - d$ برابر است با:

$$q - d = \frac{x}{5} - \frac{x-5}{5} = \frac{x-x+5}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

۴ - پله‌ی یکم: رابطه‌های داده‌شده را باز می‌کنیم و یک دستگاه دو

معادله و دو مجهول برحسب جمله‌ی اول (a_1) و قدرنسبت تصاعد (d)

تشکیل می‌دهیم:

$$a_7 + a_9 = 18 \Rightarrow (a_1 + 6d) + (a_1 + 8d) = 18 \Rightarrow 2a_1 + 14d = 18$$

$$\Rightarrow a_1 + 7d = 9 \quad \text{I}$$

$$a_6 + a_{11} = (a_1 + 5d) + (a_1 + 10d) = 2a_1 + 15d = 11 \quad \text{II}$$

پله‌ی دوم: با استفاده از دو معادله‌ی I و II مقدار a_1 و d را حساب

می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1 + 7d = 9 \\ 2a_1 + 15d = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_1 - 14d = -18 \\ 2a_1 + 15d = 11 \end{cases} \xrightarrow{+} d = 3$$

$$\xrightarrow{\text{I}} a_1 + 7d = 9 \xrightarrow{d=3} a_1 + (7 \times 3) = a_1 + 21 = 9 \Rightarrow a_1 = -12$$

پله‌ی سوم: مجموع بیست جمله‌ی اول تصاعد برابر است با:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 10(-24 + 57) = 10 \times 33 = 330$$

۵ - پله‌ی یکم: براساس این فرض که جمله‌ی دهم ۳ برابر جمله‌ی

دوم است، مقدار قدرنسبت تصاعد هندسی را حساب می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\frac{a_{10}}{a_2} = q^8 = 3$$

پله‌ی دوم: حالا مقدار جمله‌ی اول را حساب می‌کنیم:

$$a_1 + a_9 = a_1 + a_1 q^8 = a_1(1 + q^8)$$

$$= a_1(1 + 3) = 4a_1 = 12 \Rightarrow a_1 = 3$$

توجه کنید که؛ مشاهده کردید که نیازی نیست که q را محاسبه کنیم. با

توجه به روند حل، q^8 را داریم و این برای ما کافی است. زحمت

زیادی به خودتان ندهید!

۱ - پله‌ی یکم: مجموع ده جمله‌ی اول و پنج جمله‌ی اول یک تصاعد

هندسی با قدرنسبت q و جمله‌ی اول a را حساب می‌کنیم:

$$S_{10} = \frac{a(q^{10} - 1)}{q - 1}, S_5 = \frac{a(q^5 - 1)}{q - 1}$$

پله‌ی دوم: با توجه به این که $S_{10} = \frac{33}{32} S_5$ است، مقدار q را به‌دست می‌آوریم.

$$S_{10} = \frac{33}{32} S_5 \Rightarrow \frac{a(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{33}{32} \times \frac{a(q^5 - 1)}{q - 1}$$

داریم:

$$\Rightarrow (q^5 - 1)(q^5 + 1) = \frac{33}{32}(q^5 - 1)$$

$$\Rightarrow q^5 + 1 = \frac{33}{32} \Rightarrow q^5 = \frac{1}{32} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

۲ - پله‌ی یکم: با توجه به این که $a_6 = 13$ و $a_{13} = 6$ است، مقدار

a_1 و d را تعیین می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$a_{13} - a_6 = 7d \Rightarrow 7d = 6 - 13 \Rightarrow d = -1$$

$$a_6 = a_1 + 5d = a_1 - 5 = 13 \Rightarrow a_1 = 18$$

پله‌ی دوم: مجموع شش جمله‌ی اول را به‌دست می‌آوریم. برای محاسبه‌ی

مجموع شش جمله‌ی دوم هم ابتدا مجموع دوازده جمله‌ی اول را

به‌دست آورده و سپس مجموع شش جمله‌ی اول را از آن کم می‌کنیم.

دست به کار می‌شویم:

$$S_6 = \frac{6}{2}(a_1 + a_6) = 3(18 + 13) = 3 \times 31 = 93$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}(a_1 + a_{12}) = 6(18 + 7) = 6 \times 25 = 150$$

(متوجه شدید که چرا $a_{12} = 7$ است دیگه؟)

$$S_{12} - S_6 = 150 - 93 = 57 = S'$$

پله‌ی سوم: تفاوت مجموع شش جمله‌ی اول و دوم برابر است با:

$$S_6 - S' = 93 - 57 = 36$$

۳ - پله‌ی یکم: مقدار قدرنسبت تصاعد عددی یا همان d را محاسبه

می‌کنیم. داریم:

$$a_9 = 5, a_7 = x \Rightarrow a_9 - a_7 = 2d = x - 5 \Rightarrow d = \frac{x-5}{2}$$

۱۰ - **پلهی یکم:** سه زاویه‌ی مثلث ABC را x و y و z در نظر می‌گیریم. y واسطه‌ی حسابی بین x و z است. بنابراین داریم:

$$y = \frac{x+z}{2} \Rightarrow x+z=2y \quad I$$

پلهی دوم: با توجه به رابطه‌ی I مقدار y را حساب می‌کنیم:

$$x+y+z=180 \xrightarrow{I} 2y+y=180 \Rightarrow 3y=180 \Rightarrow y=60$$

۱۱ - **پلهی یکم:** y واسطه‌ی حسابی بین دو عدد x و 4 و واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $x+1$ و 4 است. بنابراین با توجه به روابط مربوط به

$$y = \frac{x+4}{2}, \quad y^2 = 4(x+1)$$

پلهی دوم: با توجه به روابط به‌دست‌آمده و با یادآوری این‌که تصاعد حسابی نزولی است (قدرنسبت تصاعد حسابی باید منفی باشد) مقدار y را حساب می‌کنیم:

$$y^2 = 4(x+1) \xrightarrow{x=2y-4} y^2 = 4(2y-3) = 8y-12 \\ \Rightarrow y^2 - 8y + 12 = 0 \Rightarrow (y-2)(y-6) = 0 \Rightarrow y=2 \text{ یا } y=6$$

تنها عدد ۲ در گزینه‌ها موجود است.

۱۲ - **پلهی یکم:** تغییراتی در صورت و مخرج کسر ایجاد می‌کنیم:

$$A = \frac{3^{-2} + 3^{-3} + 3^{-4} + \dots}{5^{-1} + 5^{-3} + 5^{-5} + \dots} = \frac{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 + (\frac{1}{3})^4 + \dots}{(\frac{1}{5}) + (\frac{1}{5})^3 + (\frac{1}{5})^5 + \dots}$$

پلهی دوم: صورت کسر تشکیل یک تصاعد هندسی نامتناهی با جمله‌ی اول $\frac{1}{9}$ و قدرنسبت $\frac{1}{3}$ می‌دهد. مخرج کسر هم تصاعد هندسی بی‌پایان با جمله‌ی اول $\frac{1}{5}$ و قدرنسبت $\frac{1}{5}$ است. پس مقدار کسر برابر است با:

$$A = \frac{\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}}}{\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}} = \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{25}} = \frac{25}{24}$$

۱۳ - **پلهی یکم:** مربع اول 1×1 است، مربع دوم 2×2 ، مربع سوم 3×3 و ... بنابراین مربع دهم 10×10 خواهد بود. دنباله‌ای که کل عضوهای سیاه و سفید را در مربع دهم نشان دهد به‌صورت زیر است:

$$1, (3), 5, (7), 9, (11), 13, (15), 17, (19)$$

پلهی دوم: اعدادی که مشخص شده‌اند، تعداد عضوهای سفید هستند. بنابراین کل تعداد عضوهای سفید برابر است با:

$$3+7+11+15+19=55$$

۱۴ - **پلهی یکم:** از روی جمله‌ی عمومی تصاعد مقدار جمله‌ی اول را حساب می‌کنیم:

$$a_n = \frac{n}{8} - \frac{1}{16} \xrightarrow{n=1} a_1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{2}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

۶ - **پلهی یکم:** مجموع جمله‌ی اول و پنجم برابر صفر است. بنابراین یک نتیجه‌گیری مهم انجام می‌دهیم: $a_1 + a_5 = 0 \Rightarrow a_1 + (a_1 + 4d) = 0$
 $\Rightarrow 2a_1 + 4d = 0 \Rightarrow a_1 + 2d = 0 \Rightarrow a_1 = -2d \quad I$

پلهی دوم: با توجه به این‌که مجموع سیزده جمله‌ی اول برابر ۱۰۴ است و با استفاده از رابطه‌ی I مقدار a_1 و d را تعیین می‌کنیم:

$$S_{13} = 104 \Rightarrow \frac{13}{2}(2a_1 + 12d) = 13(a_1 + 6d) = 104$$

$$\Rightarrow a_1 + 6d = 8 \xrightarrow{I} -2d + 6d = 8 \Rightarrow 4d = 8$$

$$\Rightarrow d = 2 \xrightarrow{I} a_1 = -2 \times 2 = -4$$

پلهی سوم: جمله‌ی هفتم را محاسبه می‌کنیم:

$$a_7 = a_1 + 6d = -4 + (6 \times 2) = -4 + 12 = 8$$

۷ - **پلهی یکم:** قدرنسبت تصاعد عددی برابر است با:

$$d = a_2 - a_1 = -\frac{13}{6} - (-\frac{7}{3}) = -\frac{13}{6} + \frac{7}{3} = \frac{-13+14}{6} = \frac{1}{6}$$

پلهی دوم: جمله‌ی عمومی تصاعد را می‌نویسیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -\frac{7}{3} + (n-1)(\frac{1}{6})$$

$$= \frac{n}{6} - \frac{7}{3} - \frac{1}{6} = \frac{n}{6} - \frac{15}{6} = \frac{n-15}{6}$$

پلهی سوم: نامساوی $a_n > 50$ را حل کرده و اولین مقدار برای n را که به‌ازای آن همه‌ی جمله‌های تصاعد از ۵۰ بزرگ‌تر است، تعیین می‌کنیم.

$$a_n > 50 \Rightarrow \frac{n-15}{6} > 50 \xrightarrow{\times 6} n-15 > 300$$

$$\Rightarrow n > 315 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 316$$

۸ - **پلهی یکم:** مجذور جمله‌ی هفتم در یک تصاعد هندسی برابر

$$a_7 = a_1 q^6 \Rightarrow a_7^2 = (a_1 q^6)^2 = a_1^2 q^{12}$$

است با:

پلهی دوم: حاصل‌ضرب دو جمله‌ی تصاعد هندسی باید برابر $a_1^2 q^{12}$ شود. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

$$a_1 a_{12} = a_1 (a_1 q^{11}) = a_1^2 q^{11} \quad I$$

$$a_4 a_{11} = (a_1 q^3)(a_1 q^8) = a_1^2 q^{11} \quad II$$

$$a_5 a_9 = (a_1 q^4)(a_1 q^5) = a_1^2 q^{12} \quad III$$

پس حاصل‌ضرب جمله‌های پنجم و نهم برابر مجذور جمله‌ی هفتم می‌شود.

$$a_3 a_{13} = (a_1 q^2)(a_1 q^{11}) = a_1^2 q^{13} \quad IV$$

۹ - **پلهی یکم:** جمله‌ی n ام تصاعد اول و دوم را تعیین می‌کنیم:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$b_n = b_1 q^{n-1} = 4a_1 q^{n-1}$$

پلهی دوم: نسبت a_n به b_n برابر است با:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 q^{n-1}}{4a_1 q^{n-1}} = \frac{1}{4} = 2^{-2}$$

۱۹ - **پله‌ی یکم:** بین ۲ و ۴۸۶ - چهار واسطه‌ی هندسی درج شده است. پس جمله‌ی اول تصاعد هندسی برابر ۲ و جمله‌ی ششم تصاعد هندسی برابر ۴۸۶ خواهد بود. بنابراین قدرنسبت تصاعد هندسی برابر

$$\frac{a_6}{a_1} = \frac{-486}{2} = -243 = q^5 \Rightarrow q = -3$$

است با:

پله‌ی دوم: مجموع شش جمله‌ی اول تصاعد هندسی را حساب می‌کنیم:

$$S_6 = \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{2((-3)^6 - 1)}{-3 - 1} = \frac{2(729 - 1)}{-4} = -\frac{728}{2} = -364$$

پله‌ی سوم: مجموع چهار واسطه‌ی هندسی برابر است با:

$$S = S_6 - (a_1 + a_6) = -364 - (2 - 486) = -364 - (-484) = -364 + 484 = 120$$

۲۰ - **پله‌ی یکم:** x جمله‌ی n ام یک تصاعد حسابی با جمله‌ی اول ۳- و قدرنسبت ۸ است. مجموع n جمله‌ی این تصاعد حسابی برابر ۴۰۷ شده است. بنابراین n را به دست می‌آوریم. داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[-6 + 8(n-1)]$$

$$= \frac{n}{2}(8n - 14) = n(4n - 7) = 407 = 11 \times 37 \Rightarrow n = 11$$

پله‌ی دوم: x جمله‌ی یازدهم این تصاعد حسابی است. پس مقدار آن برابر است با:

$$x = a_{11} = a_1 + 10d = -3 + (10 \times 8) = -3 + 80 = 77$$

پاسخ تست‌های آزمون دوم

۱ - **چشم‌انداز:** مجموع زوایای شش ضلعی که اعضای آن تشکیل تصاعد عددی می‌دهند، همان S_6 در یک تصاعد عددی است. بزرگ‌ترین زاویه هم a_6 است. حالا که این دو مقدار را داریم می‌توانیم مقدار قدرنسبت تصاعد عددی یا همان اختلاف اندازه‌ی دو زاویه‌ی متوالی را حساب کنیم.

$$S_6 = \frac{6}{2}(a_1 + a_6) = 3(a_1 + 190) = 720$$

$$\Rightarrow a_1 + 190 = 240 \Rightarrow a_1 = 50$$

پله‌ی دوم: مقدار قدرنسبت تصاعد عددی برابر است با:

$$a_6 - a_1 = 5d \Rightarrow 190 - 50 = 140 = 5d \Rightarrow d = 28$$

۲ - **پله‌ی یکم:** مقدار S_1 و S_2 که همان جمله‌ی اول است S_2 مجموع دو جمله‌ی اول و دوم است را حساب می‌کنیم. داریم:

$$S_1 = a_1 = \frac{2(V-3)}{9} = \frac{2 \times 4}{9} = \frac{8}{9}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{(2 \times 2)(14-3)}{9} = \frac{4 \times 11}{9} = \frac{44}{9}$$

پله‌ی دوم: با به دست آوردن مقدار جمله‌ی دوم، مقدار قدرنسبت تصاعد هم

$$a_1 + a_2 = \frac{44}{9} \Rightarrow \frac{8}{9} + a_2 = \frac{44}{9} \Rightarrow a_2 = \frac{36}{9} = 4$$

$$d = a_2 - a_1 = 4 - \frac{8}{9} = \frac{36}{9} - \frac{8}{9} = \frac{28}{9}$$

$\frac{28}{9}$ بین دو عدد ۳ و ۴ قرار دارد.

پله‌ی دوم: با داشتن a_1 و رابطه‌ی a_n که بیان می‌کند و هم‌چنین با دانستن این که $S_n = 16$ است، مقدار n یا همان تعداد جمله‌های تصاعد را تعیین می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{16} + \frac{n}{8} - \frac{1}{16}\right) = 16$$

$$\frac{n}{2}\left(\frac{n}{8}\right) = 32 \Rightarrow n^2 = 16 \times 16 = 2^8 \Rightarrow n = 2^4 = 16$$

۱۵ - **پله‌ی یکم:** عدد اضافه‌شده را x فرض می‌کنیم. در این صورت اعداد

$11+x$, $21+x$, $5+x$ تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند. پس عدد $11+x$ واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $21+x$ و $5+x$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$(11+x)^2 = (5+x)(21+x) \Rightarrow x^2 + 22x + 121 = x^2 + 26x + 105$$

$$\Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4$$

۱۶ - **پله‌ی یکم:** جمله‌ی هفتم مجذور جمله‌ی دوم است. با توجه به این که جملات تصاعد هندسی مثبت است، رابطه‌ی بین a_1 و قدرنسبت تصاعد هندسی به صورت زیر است:

$$a_7 = a_1^2 \Rightarrow a_1 q^6 = (a_1 q)^2 = a_1^2 q^2 \Rightarrow a_1 = q^4$$

پله‌ی دوم: فرض می‌کنیم جمله‌ی n ام برابر مکعب جمله‌ی اول باشد. در این صورت n را به دست می‌آوریم:

$$a_n = a_1^3 \xrightarrow{a_1=q^4} a_1 q^{n-1} = q^{12} \xrightarrow{a_1=q^4} q^4 \times q^{n-1} = q^{12}$$

$$\Rightarrow n-1=8 \Rightarrow n=9$$

۱۷ - **پله‌ی یکم:** با توجه به این که مقدار S_4 و S_7 را داریم، یک دستگاه دو معادله و دو مجهول بر حسب a_1 و d تشکیل می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$S_7 = \frac{7}{2}(2a_1 + 6d) = 7(a_1 + 3d) = 68 \Rightarrow 7a_1 + 21d = 68 \quad I$$

$$S_8 = \frac{8}{2}(2a_1 + 7d) = 4(2a_1 + 7d) = 76 \Rightarrow 2a_1 + 7d = 19$$

پله‌ی دوم: دستگاه دو معادله و دو مجهول را حل کرده و مقدار d را حساب می‌کنیم. داریم:

$$2a_1 + 7d = 19 \xrightarrow{\times 3} 6a_1 + 21d = 57$$

$$I \quad 7a_1 + 21d = 68 \Rightarrow a_1 = 11$$

$$2a_1 + 7d = 19 \xrightarrow{a_1=11} 22 + 7d = 19 \Rightarrow 7d = -3 \Rightarrow d = -\frac{3}{7}$$

۱۸ - **پله‌ی یکم:** مجموع بی‌شمار جمله از یک تصاعد هندسی برابر $0/98$ شده است. جمله‌ی اول این تصاعد ۱ و قدرنسبت آن $-\frac{1}{9}$ است.

پله‌ی دوم: با استفاده از رابطه‌ی $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$ خواهیم داشت:

$$S_\infty = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{9})} = 0/98 \Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{9}} = 0/98$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{a^2 + 1} = \frac{98}{100} = \frac{49}{50} \Rightarrow a^2 = 49 \xrightarrow{a>1} a = 7$$

پلهی سوم: اگر محیط دایره‌ی n ام را با a_n نشان دهیم، a_n برابر $\frac{\pi}{2^{n-1}}$ خواهد بود. مقداری برای n تعیین می‌کنیم که به‌ازای آن a_n از $\frac{\pi}{900}$ کوچک‌تر شود. داریم:

$$\frac{\pi}{2^{n-1}} < \frac{\pi}{900} \Rightarrow 2^{n-1} > 900 \Rightarrow n-1 \geq 10 \Rightarrow n \geq 11$$

محیط دایره‌ی یازدهم از $\frac{\pi}{900}$ کوچک‌تر می‌شود.

۸- پلهی یکم: جمله‌ی یازدهم تصاعد حسابی را تعیین می‌کنیم:

$$a_{11} = a_1 + 10d = 5 + (10 \times 4) = 5 + 40 = 45$$

پلهی دوم: می‌خواهیم بین ۵ و ۴۵، سه واسطه‌ی هندسی درج کنیم. پس جمله‌ی پنجم آن ۴۵ خواهد بود. با توجه به این‌که تمام جمله‌ها باید مثبت باشد، پس قدرنسبت تصاعد هندسی هم باید مثبت باشد. بنابراین داریم:

$$\frac{a_5}{a_1} = q^4 \Rightarrow \frac{45}{5} = q^4 \Rightarrow q^4 = 9 \Rightarrow q = \sqrt{3}$$

۹- پلهی یکم: b واسطه‌ی حسابی بین a و ۴ است. پس:

$$b = \frac{a+4}{2}$$

پلهی دوم: a واسطه‌ی هندسی بین b و ۴ است. پس:

$$a^2 = 4b$$

پلهی سوم: با تعیین a و b ، حاصل $a+b$ را به‌دست می‌آوریم:

$$b = \frac{a+4}{2} \xrightarrow{b=\frac{a^2}{4}} \frac{a^2}{4} = \frac{a+4}{2} \Rightarrow a^2 = 2a+8$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0 \Rightarrow (a-4)(a+2) = 0 \xrightarrow{a \neq -2} a = 4$$

$$b = \frac{a+4}{2} = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a+b = -2+1 = -1$$

پلهی چهارم: یک جمع ساده:

۱۰- پلهی یکم: جمله‌ی یازدهم، واسطه‌ی هندسی بین جمله‌های اول و سی‌ویکم است. پس داریم:

$$a_{11}^2 = a_1 \cdot a_{31} \Rightarrow (a_1 + 10d)^2 = a_1(a_1 + 30d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 20a_1d + 100d^2 = a_1^2 + 30a_1d$$

$$\Rightarrow 10a_1d = 100d^2 \Rightarrow a_1 = 10d$$

پلهی دوم: سه جمله‌ی متوالی تصاعد هندسی به‌صورت زیر در می‌آیند:

$$b_1 = a_1 = 10d$$

$$b_2 = a_{11} = a_1 + 10d = 10d + 10d = 20d$$

$$b_3 = a_{31} = a_1 + 30d = 10d + 30d = 40d$$

پلهی سوم: قدرنسبت تصاعد هندسی برابر است با:

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{20d}{10d} = 2$$

۱۱- پلهی یکم: با توجه به فرض‌های موجود در تست دستگاه دو

معادله و دو مجهولی داریم که مجهول‌های آن جمله‌ی اول تصاعد هندسی و قدرنسبت تصاعد هندسی هستند. ابتدا قدرنسبت تصاعد را

$$S_3 = \frac{a(q^3-1)}{q-1} = 136$$

به‌دست می‌آوریم:

$$S_6 = \frac{a(q^6-1)}{q-1} = \frac{a(q^3-1)(q^3+1)}{q-1} = 153$$

۳- پلهی یکم: دنباله‌ای که شعاع هر یک از این نیم‌دایره‌ها در هر مرحله

تشکیل می‌دهد، به‌صورت زیر می‌شود: $\frac{1}{2}, \frac{(\frac{4}{5} \times \frac{1}{2})}{\frac{2}{5}}, \frac{(\frac{4}{5} \times \frac{2}{5})}{\frac{2}{5}}, \dots$

پلهی دوم: دنباله‌ای که محیط این نیم‌دایره‌ها تشکیل می‌دهند به‌صورت

$$\frac{1}{2}\pi, \frac{2}{5}\pi, \frac{8}{25}\pi, \dots$$

زیر است:

پلهی سوم: حد مجموع این تصاعد هندسی بی‌پایان که برابر اندازه‌ی محیط نیم‌دایره‌های متوالی است، برابر می‌شود با:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{1-\frac{4}{5}} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{2}\pi$$

۴- حد مجموع جملات در یک تصاعد هندسی نزولی بی‌پایان از

رابطه‌ی $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$ حساب می‌شود. بنابراین q برابر است با:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = 5a_1 \Rightarrow 1-q = \frac{1}{5} \Rightarrow q = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

۵- پلهی یکم: مجموع جملات بعد از جمله‌ی اول برابر است با:

$$S = \frac{a_1}{1-q} - a_1 = \frac{-a_1 + a_1q + a_1}{1-q} = \frac{a_1q}{1-q}$$

پلهی دوم: جمله‌ی اول $\frac{1}{4}$ برابر مجموع جملات بعدی است. مقدار q برابر می‌شود با:

$$a_1 = \frac{1}{4}S \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4} \times \frac{a_1q}{1-q} \Rightarrow 4 - 4q = q \Rightarrow 5q = 4 \Rightarrow q = \frac{4}{5}$$

پلهی سوم: نسبت جمله‌ی اول به جمله‌ی چهارم برابر است با:

$$\frac{a_1}{a_4} = \frac{a_1}{a_1q^3} = \frac{1}{q^3} = \frac{1}{(\frac{4}{5})^3} = \frac{1}{\frac{64}{125}} = \frac{125}{64}$$

۶- پلهی یکم: برای محاسبه‌ی عبارت داده‌شده تغییراتی در آن ایجاد

$$A = 9 + 99 + 999 + \dots + \frac{99 \dots 9}{15}$$

می‌کنیم. داریم:

$$= (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \dots + (10^{15}-1)$$

$$= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{15}) - 15$$

پلهی دوم: عبارت داخل پرانتز تشکیل یک تصاعد هندسی با جمله‌ی

اول و قدرنسبت ۱۰ می‌دهد. پس مقدار A برابر است با:

$$A = \frac{10(10^{15}-1)}{10-1} - 15 = \frac{10}{9}(10^{15}-1) - 15$$

$$= \frac{10}{9}(\underbrace{99 \dots 9}_{15} - 1) - 15 = 10(\underbrace{11 \dots 1}_{15}) - 15 = 111 \dots 10 - 15 = \underbrace{11 \dots 1095}_{13}$$

بنابراین در عدد حاصل شده ۱۳ رقم ۱ مشاهده می‌شود.

۷- پلهی یکم: دنباله‌ای را که نشان‌دهنده‌ی قطر این دایره‌های متوالی

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

باشد، تشکیل می‌دهیم:

پلهی دوم: می‌دانیم محیط دایره برابر حاصل‌ضرب قطر دایره در عدد π

است. پس دنباله‌ای که نشان‌دهنده‌ی محیط این دایره‌ها باشد، به‌صورت

$$\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \dots$$

زیر خواهد بود:

۱۶ - پله‌ی یکم: قدرنسبت تصاعد را تعیین می‌کنیم:

$$q^2 = \frac{a_3}{a_1} = \frac{9}{4} \xrightarrow{q>0} q = \frac{3}{2}$$

پله‌ی دوم: مجموع شش جمله‌ی اول تصاعد هندسی برابر است با:

$$S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{4(1-(\frac{3}{2})^6)}{1-\frac{3}{2}} = \frac{4(1-\frac{729}{64})}{-\frac{1}{2}} = \frac{4(\frac{64-729}{64})}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{665}{16}}{-\frac{1}{2}} = \frac{665}{8} = 83\frac{1}{8}$$

۱۷ - پله‌ی یکم: اگر سه جمله‌ی متوالی را به صورت a و aq و $\frac{a}{q}$

در نظر بگیریم، با توجه به این که حاصل ضرب ۳ جمله برابر ۲۱۶ است،

$$\frac{a}{q} \times a \times aq = 216 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$$

a برابر است با:

پله‌ی دوم: حالا q را هم تعیین و در نهایت تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله را به دست می‌آوریم:

$$\frac{a}{q} + a + aq = 19 \Rightarrow 6(\frac{1}{q} + 1 + q) = 19 \xrightarrow{\times q}$$

$$6q^2 - 13q + 6 = 0 \Rightarrow q = \frac{2}{3}, q = \frac{3}{2}$$

$$q = \frac{2}{3}, a = 6 \Rightarrow \text{سه جمله } 9, 6, 4$$

$$q = \frac{3}{2}, a = 6 \Rightarrow \text{سه جمله } 4, 6, 9$$

در هر دو حالت تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله برابر ۵ است.

۱۸ - پله‌ی یکم: ابتدا مقدار d را بر حسب a یا جمله‌ی اول تصاعد

$$S_{20} = 3S_{17} \Rightarrow 10(2a + 19d) = 3 \times 6(2a + 11d)$$

$$\Rightarrow 5(2a + 19d) = 9(2a + 11d) \Rightarrow 10a + 95d = 18a + 99d$$

$$\Rightarrow 8a + 4d = 0 \Rightarrow 2a + d = 0 \Rightarrow d = -2a$$

پله‌ی دوم: با توجه به این که $a_3 = 6$ است مقدار a و d را تعیین می‌کنیم:

$$a_3 = 6 \Rightarrow a + 2d = 6 \xrightarrow{d=-2a} a - 4a = 6$$

$$-3a = 6 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow d = 4$$

$$a_{10} = a + 9d = -2 + 36 = 34 \quad \text{پله‌ی سوم: مقدار } a_{10} \text{ برابر است با:}$$

۱۹ - نسبت $\frac{S_{14}}{S_7}$ را می‌خواهیم:

$$\frac{S_{14}}{S_7} = \frac{\frac{a_1(1-q^{14})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^7)}{1-q}} = \frac{1-q^{14}}{1-q^7} = \frac{(1-q^7)(1+q^7)}{(1-q^7)} = 1+q^7$$

$$= 1+2^7 = 1+128 = 129$$

۲۰ - باید حاصل $S_{18} - S_6$ را حساب کنیم:

$$S_{18} - S_6 = \frac{18(18-15)}{6} - \frac{6(6-15)}{6} = (3 \times 3) - (-9) = 9 + 9 = 18$$

به جای مقدار $\frac{a(q^3-1)}{q-1}$ مقدار S_3 را قرار می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$136(q^3+1) = 153 \Rightarrow q^3+1 = \frac{153}{136} = \frac{9}{8} \Rightarrow q^3 = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

پله‌ی دوم: نسبت $\frac{a_1}{a_5}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{a_1}{a_5} = \frac{a_1}{a_1 q^4} = \frac{1}{q^4} \xrightarrow{q=\frac{1}{2}} \frac{a_1}{a_5} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16 \Rightarrow \frac{a_1}{a_5} = 16$$

۱۲ - پله‌ی یکم: جمله‌ی اول و جمله‌ی پانزدهم تصاعد عددی را

$$a_n = \frac{3}{2}n - 5 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2} - 5 = \frac{3}{2} - \frac{10}{2} = -\frac{7}{2}$$

حساب می‌کنیم:

$$a_{15} = \frac{3}{2} \times 15 - 5 = \frac{45}{2} - \frac{10}{2} = \frac{35}{2}$$

پله‌ی دوم: با داشتن مقدار a_1 و a_{15} ، محاسبه‌ی S_{15} کار دشواری نیست.

$$S_{15} = \frac{15}{2}(a_1 + a_{15}) = \frac{15}{2}(-\frac{7}{2} + \frac{35}{2})$$

داریم:

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} \times \frac{28}{2} = 15 \times 7 = 105$$

۱۳ - پله‌ی یکم: $3\sqrt{3}$ واسطه‌ی هندسی بین ۹ و 3^a است. بنابراین

$$a \text{ برابر است با: } a = 1 \quad (3\sqrt{3})^2 = 9 \times 3^a \Rightarrow 27 = 9 \times 3^a \Rightarrow 3^a = 3 \Rightarrow a = 1$$

پله‌ی دوم: با توجه به این که قدرنسبت تصاعد هندسی برابر $\sqrt{3}$ است

$$\frac{b}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow b = 9\sqrt{3} \quad \text{(چرا؟) مقدار } b \text{ برابر است با:}$$

پله‌ی سوم: واسطه‌ی هندسی بین $a\sqrt{3}$ که برابر $\sqrt{3}$ است و b که برابر

$$9\sqrt{3} \text{ می‌باشد، برابر است با: } c^2 = 9\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 27 \Rightarrow c = 3\sqrt{3}$$

۱۴ - پله‌ی یکم: فرض موجود در تست را به زبان ریاضی برمی‌گردانیم

تا ببینیم چه چیزی عایدمان می‌شود. داریم:

$$S_{10} = (4\sqrt{2}+1)S_5 \Rightarrow \frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1} = (4\sqrt{2}+1)\frac{a_1(q^5-1)}{q-1}$$

$$q^{10}-1 = (4\sqrt{2}+1)(q^5-1) \Rightarrow (q^5-1)(q^5+1) = (4\sqrt{2}+1)(q^5-1)$$

$$\Rightarrow q^5+1 = 4\sqrt{2}+1 \Rightarrow q^5 = 4\sqrt{2} = (\sqrt{2})^5 \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

پله‌ی دوم: نسبت $\frac{S_8}{S_4}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{S_8}{S_4} = \frac{\frac{a_1(q^8-1)}{q-1}}{\frac{a_1(q^4-1)}{q-1}} = \frac{q^8-1}{q^4-1} = \frac{(q^4-1)(q^4+1)}{(q^4-1)} = q^4+1$$

$$\xrightarrow{q=\sqrt{2}} \frac{S_8}{S_4} = (\sqrt{2})^4 + 1 = 4 + 1 = 5$$

۱۵ - پله‌ی یکم: اگر جمله‌ی عمومی را ساده کنیم به شکل

$$a_n = -2n - 1 \quad \text{در می‌آید. چون درجه‌ی } n \text{ برابر ۱ است، با یک دنباله}$$

حسابی روبه‌رو هستیم.

پله‌ی دوم: مقدار a_1 و a_{19} را حساب می‌کنیم:

$$a_1 = -2(1) - 1 = -3$$

$$a_{19} = -2(19) - 1 = -39$$

پله‌ی سوم: S_{19} برابر است با:

$$S_{19} = \frac{19}{2}(a_1 + a_{19}) = \frac{19}{2}(-3 - 39) = \frac{19}{2}(-42) = -19 \times 21 = -399$$



فهرست:

- بخش ۱: تابع نمایی و لگاریتم ۲
بخش ۲: معادله‌ها و نامعادله‌های نمایی و لگاریتمی ۱۱
پلکان آزمون ۱۹

فصل ۲ ← لگاریتم



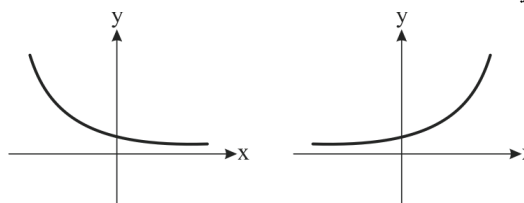
فصل لگاریتم در کتاب ریاضیات سال دوم آمده است. گرچه بچه‌های تجربی در کتاب پیش‌دانشگاهی‌شان هم یک چیزهایی از لگاریتم می‌خوانند. مبحث لگاریتم هم از مباحثی است که دانش‌آموزان به‌سرعت یاد می‌گیرند. هر سال هم که حتماً در کنکور حضور دارد. خیلی حیف است که آدم به‌راحتی از کنار یک تست ساده بگذرد!

تعداد تست‌ها	تألیفی	سراسری	آزاد
	۶۰	۲۱	۲۵

بخش ۱ تابع نمایی و لگاریتم پلکان آموزش

۱- تابع نمایی

ابتدا تعریفی از تابع نمایی داشته باشیم! تابع $y = a^x$ که در آن $a \in \mathbb{R}^+$ و $a \neq 1$ و $a > 0$ است و x یک متغیر می‌باشد، یک تابع نمایی نامیده می‌شود. حالا می‌خواهیم در مورد دامنه و برد تابع $y = a^x$ بحث کنیم. برای این که به راحتی در مورد آن صحبت کنیم، ابتدا نمودار تابع $y = a^x$ را در دو حالت رسم می‌کنیم. یک حالت وقتی $0 < a < 1$ است و حالت دیگر $a > 1$. شکل تابع $y = a^x$ به صورت زیر در می‌آید:



$y = a^x$ و $0 < a < 1$

$y = a^x$ و $a > 1$

مشاهده می‌شود که دامنه‌ی تابع $y = a^x$ برابر $\mathbb{R}$ یا مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برد تابع برابر بازه‌ی $(0, +\infty)$ است.

هم‌چنین با توجه به این که هر خطی که به موازات محور x ها رسم کنیم، نمودار تابع $y = a^x$ را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، تابع $y = a^x$ تابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. وارون تابع نمایی، تابع لگاریتمی است که در ادامه آن را توضیح می‌دهیم.

جدول زیر را مشاهده کنید و روندی را که اعداد دارند مقایسه کنید.

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
3^x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	۱	۳	۹	۲۷
$(\frac{1}{3})^x$	۲۷	۹	۳	۱	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

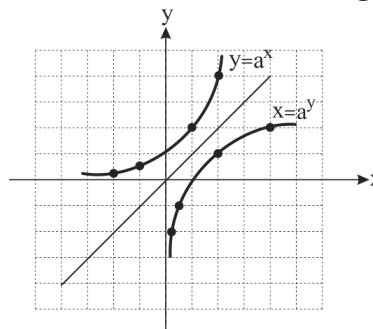
همان‌طور که مشاهده می‌کنیم در مورد تابع $y = 3^x$ به‌ازای مقادیر منفی x مقدار تابع کم‌تر از ۱ بوده و هر چه x کوچک‌تر می‌شود مقدار تابع هم کوچک می‌شود. با افزایش مقدار x مقدار تابع افزایش پیدا کرده و نتیجه می‌گیریم تابع صعودی است. در مورد تابع $y = (\frac{1}{3})^x$ به‌ازای x های منفی مقدار تابع بزرگ‌تر از یک و به‌ازای x های منفی مقدار تابع کوچک‌تر از یک است. بنابراین با افزایش مقدار x مقدار y کاهش پیدا کرده و تابع نزولی است.

با توجه به دو نمودار سمت راست، تابع $y = a^x$ ، به‌ازای $a > 1$ صعودی اکید و به‌ازای $0 < a < 1$ نزولی اکید است.

۲- لگاریتم و تابع لگاریتمی

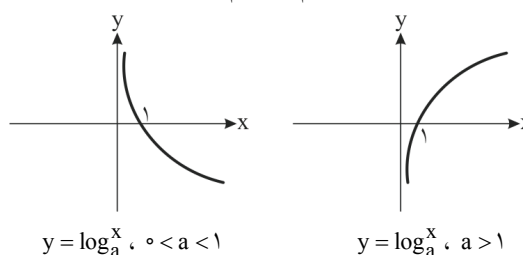
نمودار هر تابع و وارون آن، نسبت به خط $y = x$ تقارن دارند.

گفتیم که تابع $y = a^x$ یک تابع معکوس پذیر است. بنابراین در ابتدا نمودار تابع معکوس آن را با استفاده از قرینه کردن نمودار تابع $y = a^x$ نسبت به خط $y = x$ به دست می آوریم.



معکوس تابع نمایی، تابع لگاریتمی نام دارد. تابع لگاریتمی به صورت $y = \log_a^x$ است. نمودار

تابع $y = \log_a^x$ را به ازای $a > 1$ و $0 < a < 1$ رسم می کنیم. ببینید:



ویژگی های تابع $y = \log_a^x$

- ① دامنه ی تعریف تابع $y = \log_a^x$ در بازه ی $(0, +\infty)$ قرار دارد و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ یا همان مجموعه ی اعداد حقیقی است.
- ② تابع $y = \log_a^x$ یک به یک است. چون هر خطی که به موازات محور x ها رسم کنیم، نمودار تابع را در یک نقطه قطع خواهد کرد.
- ③ تابع $y = \log_a^x$ وقتی $a > 1$ است، صعودی اکید و وقتی $0 < a < 1$ است، نزولی اکید است.
- ④ هر مقدار قابل قبولی که داشته باشد، مقدار y به ازای $x = 1$ برابر صفر می شود.

از بخش «دامنه» در فصل «تابع» به یاد داریم که برای این که $y = \log_a^x$ تعریف شده باشد، باید داشته باشیم:

- ① $x > 0$
- ② $x > 0$, $x \neq 1$

۳- قوانین لگاریتم

۳-۱- ویژگی های توان و رادیکال

به احتمال زیاد، بیشتر شما با رابطه های «توان» و «رادیکال» آشنا هستید. ولی این جا برای یادآوری، بد نیست که یک مرور دیگری به این رابطه های ساده اما مهم بیاندازیم:

ویژگی های توان

- ① $a^m \times b^m = (ab)^m$
- ② $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
- ③ $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- ④ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- ⑤ $a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (a \neq 0)$
- ⑥ $(a^m)^n = a^{mn}$
- ⑦ $a^0 = 1$
- ⑧ $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$
- ⑨ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

۲-۲- محاسبه‌ی لگاریتم یک عدد

برای $y = \log_a^x$ را در نظر بگیرید. به a پایه یا مبنای لگاریتم گفته می‌شود و x عددی است که جلوی لگاریتم قرار می‌گیرد.
برای تبدیل لگاریتم به رابطه‌ی نمایی، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\log_b^a = c \xleftrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} a = b^c$$

$$x = 2^5 = 32$$

برای مثال اگر $\log_2^x = 5$ باشد، می‌توانیم بگوییم:

۳-۳- قوانین لگاریتم

قوانین زیر در حل مسائل لگاریتم کاربرد زیادی دارد:

قوانین لگاریتم

توضیح توانی قوانین لگاریتم:

- ① هر عدد به توان صفر برابر ۱ است.
- ② هر عدد به توان ۱ برابر خودش است.
- ⑤ توان به پشت لگاریتم منتقل می‌شود.
- ⑥ معکوس توان پایه به پشت لگاریتم منتقل می‌شود.
- ⑧ این قاعده به «تغییر مبنا» معروف است.

- ① $\log_a^1 = 0$
- ② $\log_a^a = 1$
- ③ $\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b \quad (a, b, c \in \mathbb{R}^+, c \neq 1)$
- ④ $\log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b \quad (a, b, c \in \mathbb{R}^+, c \neq 1)$
- ⑤ $\log_b^{a^n} = n \log_b^a$
- ⑥ $\log_b^{a^m} = \frac{1}{m} \log_b^a$
- ⑦ $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$
- ⑧ $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$
- ⑨ $\frac{1}{a} \log_b^a = \log_b^a = \frac{1}{b} \log_c^a$

مثال مقدار لگاریتم‌های داده‌شده را حساب کنید.

الف) $\log_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{1000}}$

ب) $\log_{\sqrt{7}}^9$

ج) $\log_8^{\sqrt[3]{2}}$

الف) $\log_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{1000}} = \log_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{10^3}} = \frac{3}{-1} \log_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{10}} = -3$

ب) $\log_{\sqrt{7}}^9 = \log_{7^{\frac{1}{2}}}^{3^2} = \frac{2}{3} \log_7^3 = \frac{2}{3}$

ج) $\log_8^{\sqrt[3]{2}} = 3 \log_2^{\sqrt[3]{2}} = 3 \log_2^{2^{\frac{1}{3}}} = 3^3 \log_2^2 = 3^3 = 27$



۱- تابع $y = a^x$ ، برای $a > 3$ و برای $0 < a < \frac{1}{3}$ است.

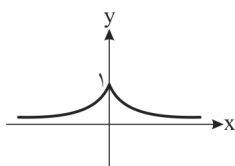
۴) صعودی - صعودی
(سراسری - ریاضی - ۸۰)

۳) صعودی - نزولی

۲) نزولی - نزولی

۱) نزولی - صعودی

۲- شکل مقابل نمودار کدام تابع است؟



۱) $y = 2^x$

۲) $y = 2^{|x|}$

۳) $y = 2^{-|x|}$

۴) $y = 2^{-x}$

۳- اگر $\log_{\frac{3}{4}}^A = \frac{3}{4}$ ، مقدار A کدام است؟

۴) ۱۶

۳) $\frac{1}{16}$

۲) ۸

۱) $\frac{1}{8}$

(آزاد - تجربی - ۸۱)

(۴) $\frac{5}{4}$

(۳) $\frac{4}{5}$

(۲) $-\frac{4}{5}$

(۱) $-\frac{5}{4}$

(آزاد - ریاضی - ۸۱)

(۴) $\frac{8}{9}$

(۳) $\frac{5}{8}$

(۲) $\frac{9}{8}$

(۱) $\frac{1}{4}$

(آزاد - ریاضی - ۸۶ - خارج از کشور)

(۴) $\frac{1}{3a}$

(۳) $3a$

(۲) $\frac{a}{a+3}$

(۱) $a+3$

(آزاد - ریاضی - ۸۵)

(۴) $\frac{1-k}{k}$

(۳) $\frac{k-1}{k}$

(۲) $\frac{k}{1-k}$

(۱) $\frac{1+k}{k}$

۸ - اگر $A = \log_2$ را در نظر بگیریم، حاصل $\log_{\sqrt{200}}$ برابر می شود با:

(۴) $\frac{A+2}{5}$

(۳) $\frac{2A+2}{5}$

(۲) $\frac{3A+2}{5}$

(۱) $\frac{2A+1}{5}$

(سراسری - ریاضی - ۸۱)

(۴) $\frac{4}{A}$

(۳) $\frac{2}{A}$

(۲) $\frac{A}{2}$

(۱) $\frac{A}{4}$

(آزاد - ریاضی - ۸۲)

(۴) $-\frac{1}{6}$

(۳) $\frac{1}{6}$

(۲) $\frac{17}{6}$

(۱) $\frac{19}{6}$

۱۰ - حاصل عبارت $\left| \log_{\frac{1}{2}} 8 \right| + \log_8 \frac{\sqrt{2}}{4}$ کدام است؟

(آزاد - تجربی - ۸۲)

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) 2

(۲) 24

(۱) $2\sqrt{6}$

۱۱ - حاصل کسر $\frac{\log 2 + \log 3 + \log 4}{\log 2 + \frac{1}{2} \log 6}$ کدام است؟

(آزاد - ریاضی - ۸۸ - خارج از کشور)

(۴) 3

(۳) $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) 2

۱۲ - حاصل $\log_6^{2\sqrt{3}} + \log_6^{3\sqrt{2}}$ کدام است؟

(آزاد - تجربی - ۸۳)

(۴) $2a+1$

(۳) $a+1$

(۲) $a+2$

(۱) a

۱۳ - اگر $\log_{12}^2 + \log_{12}^3 + \log_{12}^4 = a$ باشد، حاصل $\log_{12}^3 + \log_{12}^6 + \log_{12}^{16}$ کدام است؟

(آزاد - تجربی - ۸۳)

(۴) -3

(۳) 3

(۲) -2

(۱) صفر

۱۴ - حاصل $\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{8}{9}} + \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{9}{10}} + \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{10}{11}} + \dots + \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{31}{32}}$ کدام است؟

(آزاد - تجربی - ۸۸)

(۴) -7

(۳) $-\frac{1}{7}$

(۲) 7

(۱) $\frac{1}{7}$

۱۵ - حاصل عبارت $\log_2^2 \times \log_3^3 \times \log_4^4 \times \dots \times \log_{128}^{128}$ کدام است؟

۱۶ - حاصل عبارت $\log_a^b \cdot \log_b^a + \log_b^c \cdot \log_c^b$ برابر است با:

(۴) 2

(۳) $b+c$

(۲) 1

(۱) $a+b$

۱۷ - اگر $x = y^3 = \sqrt{a}$ باشد، حاصل $\frac{1}{3} \log_a^x + \frac{1}{4} \log_a^y$ چه قدر است؟

(۴) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{3}{4}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۱) $\frac{4}{5}$

(سراسری - تجربی - ۸۱)

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) 2

(۲) $\sqrt{2}$

(۱) 1

۱۸ - اگر $4^a = 2\sqrt{2}$ ، لگاریتم $4a+1$ در پایه ۴ کدام است؟

- ۱۹ - حاصل $a^{x \log_x b} - b^{x \log_x a}$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) $a^a - b^b$ (۳) $a^b - b^a$ (۴) $a - b$
 (آزاد - تجربی - ۸۰)
- ۲۰ - اگر $\log 2 = x$ و $\log 3 = y$ باشد، حاصل $\log_{18} 96$ کدام است؟
 (۱) $\frac{2y+3x}{5y+2x}$ (۲) $\frac{y+5x}{3y+x}$ (۳) $\frac{y+5x}{2y+x}$ (۴) $\frac{2y+x}{5y+2x}$
- ۲۱ - حاصل $\frac{1}{\log_{25} 5!} + \frac{1}{\log_{36} 4!} + \dots + \frac{1}{\log_{25} 5!}$ برابر است با:
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳۵ (۴) نامعین
- ۲۲ - حاصل $\log \tan 1^\circ + \log \tan 2^\circ + \dots + \log \tan 89^\circ$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲
- ۲۳ - اگر a و b ریشه‌های معادله $x^2 - 10x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\log a + \log b - \log(a+b)$ کدام است؟ (سراسری - تجربی - ۸۱ - خارج از کشور)
 (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۱
- ۲۴ - اگر $\log_7^{\sin 2^\circ} = a$ ، مقدار $\log_7^{\left(\frac{\sin 1^\circ + \sin 5^\circ}{\sin 4^\circ}\right)}$ کدام است؟
 (۱) $-1-a$ (۲) $-1+a$ (۳) $1-a$ (۴) $1+a$
- ۲۵ - مقدار $\log \frac{1}{\sqrt{e}} + \log \frac{1}{2}$ چند واحد از $\log 3$ کم تر است؟
 (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱
- ۲۶ - مقدار $\log_{11}^{\frac{1}{100}}$ در کدام بازه است؟
 (۱) $[-5, -4]$ (۲) $[-4, -3]$ (۳) $[-3, -2]$ (۴) $[-2, -1]$
- ۲۷ - اگر $\log_5^x = \frac{4}{3}$ باشد، x در کدام بازه قرار دارد؟
 (۱) $(8, 9)$ (۲) $(7, 8)$ (۳) $(9, +\infty)$ (۴) $(0, 7)$
- ۲۸ - کدام گزینه درست است؟
 (۱) $\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}} > \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{10}}$ (۲) $\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} > \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}}$ (۳) $\log_5^3 > \log_3^5$ (۴) $\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} > \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}}$
 (آزاد - ریاضی - ۸۲)
- ۲۹ - حاصل عبارت $\left[\log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt{5}} \right]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)
 (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۵ (۴) ۳
- ۳۰ - حاصل $\left[\log_6^2 \right] + \left[\log_6^6 \right]$ برابر است با: ([] نماد جزء صحیح است.)
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر
 (آزاد - ریاضی - ۸۱)
- ۳۱ - کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) $\log_{\frac{1}{3}}^{\frac{8}{3}} > \log_{\frac{1}{3}}^{\frac{9}{3}}$ (۲) $\log_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} > \log_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}}$ (۳) $\log_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} > \log_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}$ (۴) $\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{25}} > \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{20}}$
- ۳۲ - حاصل $A = \log_{(x-2)}^{(9x^2-36x+38)}$ به ازای $x=5$ در کدام فاصله است؟
 (۱) $2 < A < 3$ (۲) $3 < A < 4$ (۳) $4 < A < 5$ (۴) $5 < A < 6$
 (آزاد - ریاضی - ۸۴)
- ۳۳ - اگر $\log 2 = 0/30103$ فرض شود، عدد 2^{30} چند رقمی است؟
 (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲
- ۳۴ - اگر بدانیم $\log 2 = 0/3$ است، عدد 5^{21} چند رقمی است؟
 (۱) دوازده (۲) سیزده (۳) چهارده (۴) پانزده

داریم:

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_r^{\times \Delta}} = \frac{1}{\log_r^{\times} + \log_r^{\Delta}} = \frac{1}{1 + \log_r^{\Delta}} = k$$

$$\Rightarrow 1 + \log_r^{\Delta} = \frac{1}{k} \Rightarrow \log_r^{\Delta} = \frac{1}{k} - 1 = \frac{1-k}{k}$$

$$\begin{aligned} \log \sqrt[5]{\tau \circ \circ} &= \log(\tau \circ \circ)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \log \tau \circ \circ = \frac{1}{5} \log(\tau^{\tau} \times \circ^{\tau}) \quad \text{داریم:} \\ &= \frac{1}{5} \log \tau^{\tau} + \frac{1}{5} \log \circ^{\tau} = \frac{\tau}{5} \log \tau + \frac{\tau}{5} \log \circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \circ \circ &= \circ \Rightarrow \log(\circ \times \circ) = \log \circ + \log \circ = \circ \xrightarrow{\log \circ = A} A + \log \circ = \circ \\ &\Rightarrow \log \circ = \circ - A \end{aligned}$$

پله‌ی سوم: حاصل $\log \sqrt[5]{200}$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \log \sqrt[3]{\gamma \circ \omega} &= \frac{\gamma}{\omega} \log \gamma + \frac{\gamma}{\omega} \log \omega = \frac{\gamma}{\omega} A + \frac{\gamma}{\omega} (1 - A) \\ &= \frac{1}{\omega} A + \frac{\gamma}{\omega} = \frac{A + \gamma}{\omega} \end{aligned}$$

۹- پله‌ی یکم: مقدار $\log_e$ را بر حسب A حساب می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt[\varphi]{e^{\frac{\gamma}{\delta}}}} = \log_{\sqrt[\delta]{e^{\frac{\gamma}{\delta}}}} = \frac{\gamma}{\delta} \log_{\sqrt[\delta]{e}} = A \Rightarrow \log_{\sqrt[\delta]{e}} = \frac{\delta}{\gamma} A$$

پله‌ی دوم: حاصل $\log_{\sqrt{e}}^{32}$ برابر است با:

$$\log_{\sqrt{e}}^r = \log_{e^{\frac{1}{r}}}^{\frac{r}{\Delta}} = \frac{\Delta}{\frac{1}{r}} \log_e^r = r \circ \log_e^r$$

$$\log_e^{\gamma} = \frac{1}{\log_{\gamma}^e} \Rightarrow \log_{\sqrt{e}}^{\gamma\gamma} = \frac{1^{\circ}}{\log_{\gamma}^e} = \frac{1^{\circ}}{\frac{\delta}{\gamma}A} = \frac{\gamma^{\circ}}{\delta A} = \frac{\gamma}{A}$$

۱۰- **۲** پله‌ی یکم: مقدار $\log_{\frac{1}{2}}^A$ و $\log_8^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ برابر است با:

$$\log_{\frac{1}{\gamma}}^{\wedge} = \log_{\gamma^{-1}}^{\vee} = \frac{\vee}{-1} \log_{\gamma}^{\vee} = -\vee$$

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{r}}} = \log_{\frac{1}{\sqrt{r}}} = \log_{\frac{1}{\sqrt{r}}} = \frac{-1}{\sqrt{r}} \log_{\frac{1}{\sqrt{r}}} = -\frac{1}{\varepsilon}$$

پله‌ی دوم: حاصل عبارت داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\left| \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Lambda \right| + \log_{\Lambda} \frac{\sqrt{2}}{2} = |-3| - \frac{1}{6} = 3 - \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$$

۱۱- ۳ پله‌ی یکم: با توجه به ویژگی $\log a + \log b + \log c = \log abc$

مقدار صورت کسر را حساب می‌کنیم:

$$\log \mathfrak{Y} + \log \mathfrak{Z} + \log \mathfrak{X} = \log(\mathfrak{Y} \times \mathfrak{Z} \times \mathfrak{X}) = \log \mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$$

بهترین جزوات، مشاوره با رتبه های تک رقمی: @irandaneshnovin

۲۳ - **پلهی یکم:** اگر a و b ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم داده‌شده باشند، مجموع ریشه‌ها و حاصل ضرب ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم.

پلهی دوم: در معادله‌ی درجه دوم به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع ریشه‌ها از رابطه‌ی $S = -\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها از رابطه‌ی $P = \frac{c}{a}$ محاسبه می‌شود.

بنابراین داریم: $S = a + b = -(-\frac{1}{1}) = 1$

$P = a \cdot b = \frac{0}{1} = 0$

پلهی دوم: حاصل عبارت لگاریتمی را حساب می‌کنیم:

$\log a + \log b - \log(a + b) = \log ab - \log(a + b) = \log 0 - \log 1 = -\infty$

$\log 10^{-1} - \log 10 = -1 - 1 = -2$

۲۴ - **پلهی یکم:** عبارت مثلثاتی جلوی لگاریتم را ساده می‌کنیم. البته با یادآوری زیر:

$\sin p + \sin q = 2 \sin(\frac{p+q}{2}) \cos(\frac{p-q}{2})$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

حالا داریم: $\frac{\sin 10^\circ + \sin 50^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{2 \sin 30^\circ \cos 20^\circ}{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{1}{\sin 20^\circ}$

پلهی دوم: در سوال گفته شده که $\log_2 \sin 20^\circ = a$ است. داریم:

عبارت $= \log_2 \frac{1}{\sin 20^\circ} = \log_2 \frac{1}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 (\sin 10^\circ)^{-1}$

$= -\log_2 2 - \log_2 \sin 10^\circ = -1 - a$

۲۵ - **پلهی یکم:** مقدار $\log_2 \frac{1}{1} + \log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{10}$ را حساب می‌کنیم:

$\log_2 \frac{1}{1} + \log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{10} = \log(2/1 \times \frac{1}{10}) = \log 0.2 = \log 2 \times 10^{-1}$

$= \log 2 + \log 10^{-1} = \log 2 - \log 10 = \log 2 - 1$

پلهی دوم: مقدار $2 - \log 2$ ، $2 - \log 3$ واحد از $\log 3$ کم‌تر است.

۲۶ - **پلهی یکم:** ابتدا باید ببینیم که ۱۰۰۰ بین چه توان‌هایی از ۲۱ قرار دارد:

معکوس $\frac{1}{21^3} < \frac{1}{1000} < \frac{1}{21^2}$

$\Rightarrow 21^{-3} < 0.001 < 21^{-2}$

پلهی دوم: حالا از دو طرف نامساوی بالا، لگاریتم در پایه‌ی ۲۱ می‌گیریم:

$\log_{21} 21^{-3} < \log_{21} 0.001 < \log_{21} 21^{-2} \Rightarrow -3 < \log_{21} 0.001 < -2$

یعنی این عدد در بازه‌ی $[-3, -2]$ قرار دارد.

۲۷ - **پلهی یکم:** مقدار x را حساب می‌کنیم:

$\log_5 x = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 5^{\frac{4}{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{625}$

پلهی دوم: حالا باید ببینیم که ۶۲۵ بین کدام دو عدد مکعب کامل قرار دارد:

$6^3 = 216$ ، $7^3 = 343$ ، $8^3 = 512$ ، $9^3 = 729$

$8^3 < 625 < 9^3$

پس:

پلهی سوم: از نامساوی بالا ریشه‌ی سوم می‌گیریم:

$8 < \sqrt[3]{625} < 9 \Rightarrow x \in (8, 9)$

۱۷ - **پلهی یکم:** به جای x و y مقادیر مساوی با آن برحسب a را جای‌گزین کرده و مقدار عبارت داده‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$A = \frac{1}{3} \log_a x + \frac{1}{4} \log_a y \xrightarrow{x=a^{\frac{1}{3}}, y=a^{\frac{1}{4}}} A = \frac{1}{3} \log_a a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4} \log_a a^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{25}{144}$

۱۸ - **پلهی یکم:** مقدار a را حساب می‌کنیم:

$4^a = 2\sqrt{2} \Rightarrow (2^2)^a = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2^{2a} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$

پلهی دوم: لگاریتم $4a + 1$ در پایه‌ی ۴ برابر است با:

$\log_4 (4a+1) = \log_4 (3+1) = \log_4 4 = 1$

۱۹ - **پلهی یکم:** عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$A = a^{x \log_x b} - b^{x \log_x a} = (a^{\log_x b})^x - (b^{\log_x a})^x$

پلهی دوم: با استفاده از خاصیت $a^{\log_x b} = b^{\log_x a}$ از خواص لگاریتم مقدار A را محاسبه می‌کنیم:

$A = (b^{\log_x a})^x - (b^{\log_x a})^x = 0$

در واقع پراتر اول را با استفاده از ویژگی گفته‌شده به پراتر دوم تبدیل کردیم. این دو عبارت با هم یکی بودند، فقط قیافه‌شان با هم فرق داشت!

۲۰ - **پلهی یکم:** با استفاده از قاعده‌ی تغییر مبنا تست را حل می‌کنیم:

$\log_{18} 96 = \frac{\log 96}{\log 18} = \frac{\log 3 \times 2^5}{\log 3^2 \times 2} = \frac{\log 3 + 5 \log 2}{2 \log 3 + \log 2} = \frac{y + 5x}{2y + x} = \frac{5x + y}{x + 2y}$

۲۱ - **پلهی یکم:** با توجه به ویژگی $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ تغییراتی در عبارت داده‌شده ایجاد می‌کنیم:

$A = \frac{1}{\log_{25} 35} + \frac{1}{\log_{35} 25} + \dots + \frac{1}{\log_{25} 35} = \log_{25} 35 + \log_{35} 25 + \dots + \log_{25} 35$

پلهی دوم: با استفاده از ویژگی $\log_c a + \log_c b = \log_c ab$ می‌توانیم حاصل‌نهایی عبارت داده‌شده را حساب کنیم:

$A = \log_{25} 35 \times 25 \times \dots \times 25 = \log_{25} 35! = 1$

۲۲ - **پلهی یکم:** حاصل عبارت داده‌شده را با استفاده از ویژگی

$\log_t^a + \log_t^b + \dots + \log_t^z = \log_t^{ab \dots z}$ ساده می‌کنیم. داریم:

$\log \tan 10^\circ + \log \tan 20^\circ + \dots + \log \tan 80^\circ$

$= \log(\tan 10^\circ \times \tan 20^\circ \times \dots \times \tan 80^\circ) = A$

پلهی دوم: با توجه به اتحاد مثلثاتی $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$ عبارت جلوی

لگاریتم را ساده می‌کنیم:

$\tan 10^\circ \times \tan 20^\circ \times \tan 30^\circ \times \dots \times \tan 60^\circ \times \tan 70^\circ \times \tan 80^\circ$

$= \tan 10^\circ \times \tan 20^\circ \times \tan 30^\circ \times \dots \times \cot 30^\circ \times \cot 20^\circ \times \cot 10^\circ$

$= (\tan 10^\circ \times \cot 10^\circ) \times (\tan 20^\circ \times \cot 20^\circ) \times \dots = 1$

پلهی سوم: بنابراین حاصل لگاریتم برابر است با: $A = \log 1 = 0$

۲۸ - گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ - مقدار هر یک از دو لگاریتم را بر حسب ضربی از $\log_4^1$ حساب

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}} = \log_{4^{-1}}^{100^{-2}} = \frac{-2}{-1} \log_4^1 = 2 \log_4^1$$

می‌کنیم. داریم:

$$\log_{\frac{1}{2}}^1 = \log_{4^{-1}}^1 = \frac{1}{-1} \log_4^1 = -\log_4^1$$

با توجه به این که $\log_4^1 > 0$ است، داریم:

$$2 \log_4^1 > -\log_4^1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}} > \log_{\frac{1}{2}}^1$$

پس گزینه ۱ گزینه‌ی درست است. به جواب صحیح رسیدیم. برای کامل شدن پاسخ دیگر گزینه‌ها را هم بررسی می‌کنیم.

۲ - دو طرف را به ضربی از $\log_3^3$ تبدیل می‌کنیم:

$$\log_{\frac{1}{2}}^3 = \log_{4^{-1}}^3 = -\log_4^3$$

$$\log_4^3 = \frac{1}{\log_3^4}$$

$\log_4^3$ عددی مثبت و بزرگ‌تر از ۱ است. پس معکوس آن عددی مثبت و کوچک‌تر از ۱ است. پس این عدد مثبت همواره از عدد منفی $-\log_4^3$ بزرگ‌تر است. بنابراین گزینه ۲ نادرست است.

۳ - $\log_5^5$ یک عدد مثبت و بزرگ‌تر از ۱ است. اما $\log_5^3$ یک عدد مثبت کوچک‌تر از ۱ می‌باشد. پس رابطه‌ی $\log_5^3 > \log_5^5$ یک رابطه‌ی نادرست است.

$$\log_{\frac{1}{2}}^2 = \log_{4^{-1}}^2 = -\log_4^2 = -1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^3 = \log_{4^{-1}}^3 = -\log_4^3 \xrightarrow{\log_4^3 > 1} -\log_4^3 < -1 \Rightarrow -\log_4^2 > -\log_4^3 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^2 > \log_{\frac{1}{2}}^3$$

به رابطه‌ای عکس رابطه‌ی موجود در گزینه ۴ رسیدیم. پس گزینه ۴ هم نادرست است.

۲۹ - پله‌ی یکم: عبارت لگاریتمی را ساده می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt{5}} = \log_{2^{\frac{1}{3}}}^{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} \log_2^5 = \frac{3}{2} \log_2^5$$

پله‌ی دوم: مقدار $\log_2^5$ عددی بین ۲ و $\frac{5}{2}$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$2 < \log_2^5 < \frac{5}{2} \Rightarrow 3 < \frac{3}{2} \log_2^5 < \frac{15}{4} \Rightarrow 3 < \log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt{5}} < \frac{15}{4} \Rightarrow \left\lceil \log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt{5}} \right\rceil = 3$$

۳۰ - پله‌ی یکم: محدوده‌ی $\log_6^2$ و $\log_6^3$ را تعیین می‌کنیم:

$$\log_6^1 < \log_6^2 < \log_6^3 \Rightarrow 0 < \log_6^2 < 1$$

$$\log_6^4 < \log_6^5 < \log_6^6 \Rightarrow 2 < \log_6^5 < 3$$

پله‌ی دوم: حاصل عبارت داده‌شده برابر است با:

$$[\log_6^2] + [\log_6^5] = 0 + 2 = 2$$

۳۱ - گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ - برای مقایسه‌ی دو عبارت لگاریتمی، اگر پایه‌ی لگاریتم عددی بین ۰ و ۱ بود، در این صورت هر چه قدر عدد جلوی لگاریتم کوچک‌تر باشد حاصل عبارت لگاریتمی بزرگ‌تر است. پس در این جا $\log_{\frac{1}{3}}^8$ بزرگ‌تر

از $\log_{\frac{1}{3}}^9$ است و این گزینه درست است.

۲ - $\log_6^5$ عددی بزرگ‌تر از یک است، اما $\log_6^6$ عددی کوچک‌تر از یک است. پس رابطه‌ی $\log_6^5 > \log_6^6$ درست است.

۳ - $\log_3^2$ عددی است کوچک‌تر از یک اما $\log_{\frac{1}{4}}^5 = \log_{4^{-1}}^5 = -\frac{1}{2} \log_4^5$ عددی است منفی. پس رابطه‌ی $\log_{\frac{1}{4}}^5 > \log_3^2$ نادرست است.

$$\log_4^{125} = \log_{2^2}^{5^3} = \frac{3}{2} \log_2^5$$

$$\log_2^{25} = \log_2^{5^2} = 2 \log_2^5$$

$$2 \log_2^5 > \frac{3}{2} \log_2^5 \Rightarrow \log_2^{25} > \log_4^{125}$$

۳۲ - پله‌ی یکم: مقدار A را به ازای $x=5$ به دست می‌آوریم:

$$x=5 \Rightarrow A = \log_3^{(225-180+38)} = \log_3^{83}$$

پله‌ی دوم: باید مشخص کنیم عدد ۸۳ بین چه توان‌هایی از عدد ۳ قرار دارد.

$$\text{در مبنای ۳ لگاریتم می‌گیریم.} \Rightarrow \log_3^{83} < \log_3^{84} < \log_3^{85} \Rightarrow 4 < \log_3^{83} < 5 \Rightarrow 4 < A < 5$$

۳۳ - چشم‌انداز: اگر عدد x بین دو عدد 10^n و 10^{n+1} قرار داشته باشد، $n+1$ رقمی محسوب می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$10^n \leq x < 10^{n+1} \Leftrightarrow \log 10^n \leq \log x < \log 10^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow n \log 10 \leq \log x < (n+1) \log 10 \Leftrightarrow n \leq \log x < n+1$$

پس اگر لگاریتم عددی بین n و n+1 باشد، عدد n+1 رقمی است.

پله‌ی یکم: مقدار $\log_2^{30}$ را حساب می‌کنیم:

$$\log_2^{30} = 30 \log_2^2$$

پله‌ی دوم: چون $\log_2^2 = 0.30103$ است، خواهیم داشت:

$$30 \log_2^2 = 30 \times 0.30103 \approx 9.03$$

بنابراین عدد 2^{30} ، ۱۰ رقمی است.

۳۴ - پله‌ی یکم: مقدار $\log_5 5$ برابر است با:

$$\log_5 5 = \log_{\frac{1}{2}}^1 = \log_2^1 - \log_2^2 = 1 - 0.3 = 0.7$$

پله‌ی دوم: تعداد ارقام عدد 5^{21} را حساب می‌کنیم:

$$\log_5^{5^{21}} = 21 \log_5^5 = 21 \times 0.7 = 14.7$$

بنابراین عدد 5^{21} ، پانزده رقمی است.

بخش ۲ معادله‌ها و نامعادله‌های نمایی و لگاریتمی پلکان آموزش

۱ - معادله‌های نمایی

هنگامی که دو عدد توان‌دار با هم برابر هستند، اگر پایه‌هایشان برابر باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم که توان‌هایشان هم برابر است:

$$a^{\bigcirc} = a^{\bigcirc} \Rightarrow \bigcirc = \bigcirc$$

۱ - معادله‌ی $16^x + 4^x - 2 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۴) صفر

۳) ۴

۲) ۲

۱) ۱

۲ - معادله‌های لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی و نمایی، ابتدا دامنه‌ی تعریف تابع را تعیین می‌کنیم. سپس با استفاده از قوانین لگاریتم‌ها که در بخش قبل آموختیم، معادله‌ی لگاریتمی را حل می‌کنیم. در نهایت که جواب‌های معادله را به دست آوریم، آن‌ها را محض اطمینان در معادله‌ی اصلی چک می‌کنیم که جواب اضافی به دست نیاورده باشیم.

منظور از $\bigcirc$ در این جا یک چندجمله‌ای است که متغیری که می‌خواهیم تعیین کنیم در آن قرار دارد.

یک حالت از معادلاتی که امکان دارد با آن برخورد کنیم، معادلات به فرم $\log_{\bigcirc} a = a$ است. با شرط این که $\bigcirc > 0$ و $\bigcirc \neq 1$ است، ابتدا دامنه‌ی تعریف تابع را تعیین می‌کنیم. سپس با استفاده از رابطه‌ی $\bigcirc = \bigcirc^a$ معادله را حل می‌کنیم.

حالت دیگر معادلات لگاریتمی، تساوی دو عبارت لگاریتمی است. در صورتی که پایه‌های دو عبارت لگاریتمی برابر نباشد، ابتدا آن‌ها را با استفاده از قوانین لگاریتم یکسان می‌کنیم. سپس با مساوی قرار دادن عبارت‌های جلوی دو لگاریتم، معادله را حل می‌کنیم. به توضیح ریاضی زیر توجه کنید:

$$\log_a^{\bigcirc} = \log_a^{\bigcirc} \xrightarrow[\substack{\bigcirc > 0, \bigcirc \neq 1 \\ a > 0, a \neq 1}]{\bigcirc > 0} \bigcirc = \bigcirc$$

(تمرین کتاب ریاضی عمومی رشته‌ی تجربی)

۱) معادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_4^{(x-1)} = 3$

ب) $2 \log x - \log(x+1) = 1$

ج) $\log(2x-1) + \log(x-7) = \log 7$

الف) $\log_4^{(x-1)} = 3 \Rightarrow x-1 = 2^3 = 8 \Rightarrow 9$

ب) $2 \log x - \log(x+1) = 1 \Rightarrow \log x^2 - \log(x+1) = 1$

$$\log \frac{x^2}{x+1} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x+1} = 10 \Rightarrow x^2 = 10x + 10 \Rightarrow x^2 - 10x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{10 + \sqrt{140}}{2} \\ x_2 = \frac{10 - \sqrt{140}}{2} \end{cases}$$

از بین این دو جواب فقط x_1 قابل قبول است چون x_2 عبارت جلوی لگاریتمها را منفی می کند.

$$\text{ج) } \log(2x-1) + \log(x-7) = \log 7 \Rightarrow \log(2x-1)(x-7) = \log 7 \Rightarrow (2x-1)(x-7) = 7$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 15x + 7 = 7 \Rightarrow 2x^2 - 15x = 0 \Rightarrow x(2x-15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غلق} \\ x=\frac{15}{2} \end{cases}$$

این معادله فقط یک جواب داشته و $x = \frac{15}{2}$ قابل قبول است.

(سراسری - تجربی - ۸۲)

$$۲ - \text{اگر } \left| \frac{\log 5}{\log 2} \right| = \frac{\log 2}{\log 5} \text{ مقدار } x \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{2} \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

(آزاد - تجربی - ۸۲)

$$۳ - \text{جواب معادله } \log_{\sqrt{3}}^x + \log_{\sqrt{3}}^3 = \log_9^x \text{ کدام است؟}$$

$$x = 3^4 \quad (۴)$$

$$x = 3^5 \quad (۳)$$

$$x = 3^2 \quad (۲)$$

$$x = 3^2 \quad (۱)$$

(آزاد - تجربی - ۸۷ - خارج از کشور)

$$۴ - \text{معادله } \log(x-1) + \log(x-2) = \log(x^2+2) \text{ چند ریشه حقیقی دارد؟}$$

$$۳ \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$۱ \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

(سراسری - ریاضی - ۸۵)

$$۵ - \text{اگر } 2\log(x-2) = \log(x+10), \text{ آنگاه } \log_4(x+2) \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

(سراسری - ریاضی - ۸۷)

$$۶ - \text{اگر } \log_2(x-2) = 2\log_2(x-4) - \log_2(x-3) \text{ حاصل } \log_2(x-3) \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$-۱ \quad (۳)$$

$$۱ \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

(سراسری - تجربی - ۸۳)

$$۷ - \text{اگر } \log_{\frac{2}{x}} + \log(x+1) = 1 \text{ باشد، لگاریتم عدد } x \text{ در پایه } ۸ \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (۱)$$

(سراسری - ریاضی - ۸۵ - خارج از کشور)

$$۸ - \text{از معادله لگاریتمی } 2\log x = 1 + \log(x + \frac{1}{5}) \text{ مقدار } \log_5(2x+1) \text{ کدام است؟}$$

$$۲ \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$-۱ \quad (۱)$$

(سراسری - ریاضی - ۸۷ - خارج از کشور)

$$۹ - \text{اگر } x = 8\log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \text{ باشد، لگاریتم عدد } 4(x+3) \text{ در پایه } x \text{ کدام است؟}$$

$$۳ \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۱)$$

(سراسری - ریاضی - ۸۸ - خارج از کشور)

$$۱۰ - \text{از تساوی } \log(2x-1) + \frac{1}{4}\log x^2 = \log 3 \text{ مقدار لگاریتم } \frac{x}{3} \text{ در مبنای } ۴ \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{1}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۱)$$

(سراسری - تجربی - ۸۶ - خارج از کشور)

$$۱۱ - \text{اگر } \log_4^2 = \alpha^{-2} \text{ باشد، } 4\alpha^{-2} \text{ کدام است؟}$$

$$۱۸ \quad (۴)$$

$$۹ \quad (۳)$$

$$۶ \quad (۲)$$

$$\frac{9}{2} \quad (۱)$$

(سراسری - ریاضی - ۸۶)

$$۱۲ - \text{از تساوی } \log_2(2x-1) + \log_2(3x-5) = 1 \text{ مقدار } \log_4(6x+3) \text{ کدام است؟}$$

$$۵ \quad (۴)$$

$$۴ \quad (۳)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

$$۱۳ - \text{حاصل ضرب ریشه های معادله } (\log_3^x)^2 + 4\log_3^x = 8 \text{ چند است؟}$$

$$\frac{1}{25} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{16} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{12} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{9} \quad (۱)$$

(آزاد - تجربی - ۸۱)

$$۱۴ - \text{معادله } \log(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = \log x + \log(x+1) + \log(x+3) \text{ چند ریشه حقیقی دارد؟}$$

$$\text{صفر} \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

(آزاد - تجربی - ۸۵)

$$۱۵ - \text{معادله } \log x + \log(x+1) + \log(x+2) = \log 6 \text{ چند ریشه دارد؟}$$

$$۱ \quad (۴)$$

$$\text{صفر} \quad (۳)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

۱۶ - لگاریتم عددی در پایه ۵، چهار واحد از لگاریتم مجذور معکوس این عدد در پایه ۲۵ بیش‌تر است. لگاریتم این عدد در پایه ۱۲۵ برابر است با:

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{1}{3}$ (آزاد - ریاضی - ۸۱)
- ۱۷ - اگر $\frac{1}{6} - \frac{1}{\log_a^2} = \frac{1}{\log_a^2}$ باشد، آن‌گاه:

- (۱) $a = 8$ (۲) $a = \frac{1}{8}$ (۳) $a = \frac{1}{64}$ (۴) $a = 64$ (آزاد - ریاضی - ۸۶)
- ۱۸ - معادله $\log_4^x + \log_x^3 = 1$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (سراسری - ریاضی - ۸۸)
- ۱۹ - از معادله $\log_3^{(x^2-1)} = 1 + \log_3^{(x+3)}$ ، مقدار لگاریتم $(x-3)$ در مبنای ۴ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (سراسری - ریاضی - ۸۸)
- ۲۰ - کدام عدد جواب معادله $5^{2x} - 8(5^x) + 15 = 0$ است؟

- (۱) $\log_5^3$ (۲) $\log_5^0$ (۳) $\log_3^4$ (۴) $\log_7^3$ (آزاد - ریاضی - ۸۱)
- ۲۱ - اگر $\log a$ و $\log b$ ریشه‌های معادله $x^2 - 4mx - 3 = 0$ باشد آن‌گاه مقدار کسر $\frac{\log ab}{\log a \cdot \log b}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{2m}{30}$ (۲) $-\frac{2m}{30}$ (۳) $\frac{2m}{15}$ (۴) $-\frac{2m}{15}$ (سراسری - تجربی - ۸۷ - خارج از کشور)
- ۲۲ - کدام یک از مقدارهای زیر جواب دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x = \log 50 - \log 5 \end{cases}$ می‌باشند؟

- (۱) $x = 100$ و $y = 10$ (۲) $x = 20$ و $y = 10$ (۳) $x = 1$ و $y = 100$ (۴) $x = 2$ و $y = 10$ (سراسری - تجربی - ۸۷ - خارج از کشور)
- ۲۳ - از دو معادله $\log(y+2) = 1$ و $\log(y-x) + \log(4x+y) = 2$ ، مقدار x کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (آزاد - ریاضی - ۸۷)
- ۲۴ - اگر $\log xy^2 = 2$ و $\log x^2y = 4$ باشد، حاصل $\log xy^4$ چه قدر است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۸ (۴) ۶ (سراسری - تجربی - ۸۵)
- ۲۵ - اگر $4\sqrt{2} = 4^x = \log y$ و $1 + \log \sqrt{x+1} = \log y$ مقدار y کدام است؟

- (۱) $7/5$ (۲) $12/5$ (۳) ۱۵ (۴) ۲۵
- ۲۶ - حاصل ضرب ریشه‌های معادله $x^{\log_2^x} = 16x^3$ برابر چند است؟

- (۱) ۸ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) ۱۶ (۴) $\frac{1}{16}$
- ۲۷ - مجموع ارقام عدد $a+b$ از دستگاه معادلات $\begin{cases} \log_{25}^a - \log_5^b = 1 \\ a + 5b = 30 \end{cases}$ چند است؟ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰
- ۲۸ - معادله $(2\log \sqrt{x(x+1)} - 3\log \sqrt[3]{x}) = x+7$ چند جواب طبیعی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیش از ۲

۳ - نامعادله‌های نمایی

برای حل نامعادله‌هایی به صورت $a^x \geq a^0$ دو حالت را در نظر می‌گیریم:

① وقتی پایه بزرگ‌تر از ۱ باشد، جهت نامساوی تغییری نمی‌کند؛ یعنی:

$$a^x \geq a^0 \xrightarrow{a > 1} x \geq 0$$

② وقتی پایه بین صفر و یک باشد، جهت نامساوی عوض می‌شود؛ یعنی:

$$a^x \geq a^0 \xrightarrow{0 < a < 1} x \leq 0$$

جواب نامعادله‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $2^{3x-2} > 2^x$ ب) $(\frac{1}{4})^{5x} < (\frac{1}{4})^{3x+4}$

الف) $2^{3x-2} > 2^x \xrightarrow{2>1} 3x-2 > x \Rightarrow 2x > 2 \Rightarrow x > 1$

ب) $(\frac{1}{4})^{5x} < (\frac{1}{4})^{3x+4} \xrightarrow{\frac{1}{4}<1} 5x > 3x+4 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2$



۴ - نامعادلات لگاریتمی

با توجه به مقدار a در تابع $y = \log_a^x$ با ۲ حالت روبه‌رو هستیم:

① یک حالت وقتی است که $a > 1$ است. در این حالت جهت نامعادله برای حل عوض نخواهد

شد. یعنی: $\log_a^M \geq \log_a^N \xrightarrow{a>1, M, N>0} M \geq N$

$\log_a^M \geq b \xrightarrow{a>1, M>0} M \geq a^b$

② حالت دیگر حالتی است که $0 < a < 1$ باشد. در این حالت برای حل نامعادله، جهت آن عوض

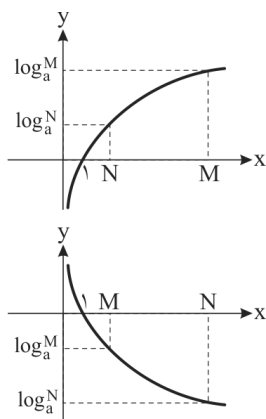
خواهد شد. یعنی: $\log_a^M \geq \log_a^N \xrightarrow{0<a<1, M, N>0} M \leq N$

$\log_a^M \geq b \xrightarrow{0<a<1, M>0} M \leq a^b$

جواب نامعادله‌ی $\log_3^{5x+12} > \log_3^{2x-9}$ را تعیین کنید.

مبنای لگاریتم بزرگ‌تر از ۱ است. پس جهت نامساوی عوض نمی‌شود:

$\log_3^{5x+12} > \log_3^{2x-9} \Rightarrow 5x+12 > 2x-9 \Rightarrow 3x > -21 \Rightarrow x > -7$



۲۹ - مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $(\frac{1}{4})^{5x-1} > 64$ کدام است؟

$x < -2$ (۱) $x < -1$ (۲) $x > -1$ (۳) $x > -2$ (۴)

۳۰ - مجموعه جواب نامعادله $\log_{\frac{x+2}{10}}^y < -1$ کدام است؟

$-2 < x < -\frac{13}{10}$ (۱) $-2 < x < \frac{13}{10}$ (۲) $\frac{13}{10} < x < 2$ (۳) $-\frac{13}{10} < x < 3$ (۴)

۳۱ - مجموعه جواب نامعادله $\log_{\frac{x+1}{9}}^3 < \log_{\frac{1}{2}}^2$ کدام است؟

$x > 1$ (۱) $-26 < x < 1$ (۲) $1 < x < 26$ (۳) $x > 26$ (۴)

۳۲ - کدام عدد می‌تواند جواب نامعادله‌ی $\sqrt[5]{2 \log x^3} > 85^{\frac{1}{5}}$ باشد؟

۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

پاسخ تست‌های پلکان آموزش

پله‌ی دوم: معادله‌ی لگاریتمی را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\log(x-1) + \log(x-2) &= \log(x-1)(x-2) = \log(x^2 - 3x + 2) \\ &= \log(x^2 + 2) \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 - x^2 + 3x = 0 \\ &\Rightarrow x(x^2 - x + 3) = 0\end{aligned}$$

عبارت درجه‌ی دوم داخل پرانتز فاقد ریشه است. (چرا؟) تنها جواب به‌دست‌آمده $x=0$ است. ولی با توجه به دامنه‌ی تعریف تعیین‌شده در پله‌ی یکم، این مقدار غیرقابل قبول است. پس **صفر** ریشه‌ی حقیقی دارد.

۵- پله‌ی یکم: معادله‌ی لگاریتمی را حل کرده و مقدار x را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$\begin{aligned}2\log(x-2) &= \log(x+10) \Rightarrow \log(x-2)^2 = \log(x+10) \\ &\Rightarrow (x-2)^2 = x+10 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x+10 \\ &\Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+1) = 0 \Rightarrow x=6, x=-1\end{aligned}$$

مقدار $x=-1$ غیرقابل قبول است. چون عبارت $x-1$ منفی می‌شود و چون این عبارت جلوی لگاریتم قرار دارد، منفی شدن آن به هیچ عنوان پذیرفته نیست! پس تنها جواب قابل قبول $x=6$ است.

پله‌ی دوم: به‌ازای $x=6$ عبارت لگاریتمی داده‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_4(x+2) = \log_4(6+2) = \log_4 8 = \log_4 2^3 = \frac{3}{2} \log_4 2 = \frac{3}{2}$$

۶- پله‌ی یکم: محاسبه‌ی مقدار x اولین گام در حل تست است:

$$\begin{aligned}\log(x-2) &= 2\log 2 - \log(x-4) = \log 2^2 - \log(x-4) \\ &= \log 4 - \log(x-4) \Rightarrow \log(x-2) = \log\left(\frac{4}{x-4}\right) \\ &\Rightarrow x-2 = \frac{4}{x-4} \Rightarrow (x-2)(x-4) = 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 4 \\ &\Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0\end{aligned}$$

مقدار Δ برای این معادله‌ی درجه‌ی ۲ برابر ۲۰ است. پس ریشه‌های معادله برابرند با:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{5} \\ x = 3 + \sqrt{5} \end{cases}$$

دلیل این‌که $x = 3 - \sqrt{5}$ غیرقابل قبول است، این است که به‌ازای آن، عبارت جلوی لگاریتم در معادله‌ی داده‌شده منفی می‌شود.

۱- پله‌ی یکم: ریشه‌های معادله‌ی نمایی را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned}16^x + 4^x - 2 &= 0 \Rightarrow (4^2)^x + 4^x - 2 = 0 \Rightarrow (4^x)^2 + 4^x - 2 = 0 \\ &\xrightarrow{4^x=a} a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow a = -2, a = 1\end{aligned}$$

پله‌ی دوم: مقدار $a=-2$ غیرقابل قبول است. چون معادله‌ی $4^x = -2$ فاقد ریشه‌ی حقیقی است. پس فقط $a=1$ قابل قبول است:

$$a=1 \Rightarrow 4^x = 1 \Rightarrow x=0$$

بنابراین معادله‌ی داده‌شده تنها **۱ ریشه‌ی حقیقی** دارد.

۲- چشم‌انداز: به $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ می‌گویند و حاصل آن برابر $ad - bc$ است.

پله‌ی یکم: حاصل دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\left| \begin{matrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{matrix} \right| &= (\log 5 \times \log 5) - (\log 2 \times \log 2) \\ &= (\log 5)^2 - (\log 2)^2 = (\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2) \\ &= \left(\log \frac{5}{2}\right)(\log 10) = \log \frac{5}{2}\end{aligned}$$

پله‌ی دوم: مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$\log(3x-2) = \log \frac{5}{2} \Rightarrow 3x-2 = \frac{5}{2} \Rightarrow 3x = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

۳- پله‌ی یکم: حاصل عبارت لگاریتمی سمت چپ تساوی را حساب می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} + \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}^{\frac{1}{2}} + \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

پله‌ی دوم: محاسبه‌ی مقدار x به‌سادگی امکان‌پذیر است:

$$\log_4 x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 4^{\frac{5}{2}} = (4^{\frac{1}{2}})^5 = 2^5 = 32$$

۴- پله‌ی یکم: دامنه‌ی تعریف عبارت‌های لگاریتمی را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$1) \ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$2) \ x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

با اشتراک‌گیری بین دو جواب به‌دست‌آمده، دامنه‌ی تعریف تابع به‌صورت $x > 2$ در می‌آید. با این دامنه‌ی تعریف تعیین‌شده عبارت $x^3 + 2$ که جلوی لگاریتم قرار دارد، عبارت لگاریتمی را تعریف‌نشده نمی‌کند. پس خیال‌مان از این بابت راحت است!

۱۱ - ۳ پلهی یکم: α را به دست می آوریم:

$$\log_7^{12} = \alpha \Rightarrow \log_7^{(2 \times 3)} = \log_7^2 + \log_7^3 = \log_7^2 + \log_7^3 = 2 + \log_7^3$$

پلهی دوم: $4^{\alpha-2}$ برابر است با:

$$4^{\alpha-2} = 4^{(2+\log_7^3-2)} = 4^{\log_7^3} = 3^{\log_7^4} = 3^2 = 9$$

۱۲ - ۳ پلهی یکم: مقدار x برابر است با:

$$\log_5^{(2x-1)} + \log_5^{(3x-5)} = \log_5^{(2x-1)(3x-5)} = 1$$

$$\Rightarrow (2x-1)(3x-5) = 5 \Rightarrow 6x^2 - 13x + 5 = 5$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 13x = 0 \Rightarrow x(6x-13) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{13}{6} \end{cases}$$

$x=0$ به این دلیل غیرقابل قبول است که عبارت جلوی لگاریتمها به یک عدد منفی تبدیل می شود.

پلهی دوم: به ازای $x = \frac{13}{6}$ مقدار عبارت لگاریتمی داده شده را حساب

$$\log_7^{(6x+3)} = \log_7^{(13+3)} = \log_7^{16} = \log_7^{2^4} = 4 \log_7^2 = 4$$
 می کنیم:

۱۳ - ۱ پلهی یکم: اولین گام برای حل تست، تعیین ریشه های معادلهی

لگاریتمی است. در نتیجه داریم:

$$(\log_7^x)^2 + 4 \log_7^x = (\log_7^x)^2 + 4 \log_7^x = (\log_7^x)^2 + 2 \log_7^x = 8$$

$$\log_7^x = A \Rightarrow A^2 + 2A = 8 \Rightarrow A^2 + 2A - 8 = 0 \Rightarrow (A+4)(A-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -4 \\ A = 2 \end{cases}$$

پلهی دوم: با توجه به مقدارهای به دست آمده برای $\log_7^x$ ، مقدار x را حساب

$$\log_7^x = -4 \Rightarrow x_1 = 7^{-4} = \frac{1}{81}$$
 می کنیم:

$$\log_7^x = 2 \Rightarrow x_2 = 7^2 = 49$$

پلهی سوم: حاصل ضرب ریشه های معادله برابر است با:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{81} \times 49 = \frac{49}{81} = \frac{1}{9}$$

۱۴ - ۱ پلهی یکم: عبارت لگاریتمی سمت راست تساوی را ساده می کنیم:

$$\log x + \log(x+1) + \log(x+3) = \log x(x+1)(x+3)$$

$$= \log x(x^2 + 4x + 3) = \log(x^3 + 4x^2 + 3x)$$

پلهی دوم: با توجه به تساوی موجود، عبارت های جلوی لگاریتمها را با هم برابر قرار می دهیم:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 4x^2 + 3x \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

پلهی سوم: توجه داشته باشید که $x = -1$ غیرقابل قبول است، چون به

غیر از $\log(x+3)$ ، عبارت جلوی بقیه ی لگاریتمها یا صفر می شود یا

برابر یک عدد منفی. پس $x = 1$ تنها جواب قابل قبول است و این معادله

۱ ریشه ی حقیقی دارد.

پلهی دوم: با تعیین شدن مقدار x حاصل عبارت لگاریتمی داده شده را محاسبه

$$\log_5^{(x-3)} = \log_5^{(3+\sqrt{5}-3)} = \log_5^{\sqrt{5}} = \log_5^{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \log_5^5 = \frac{1}{2}$$
 می کنیم:

۷ - ۱ پلهی یکم: معادله ی لگاریتمی را حل می کنیم:

$$\log \frac{y}{x} + \log(x+1) = \log\left(\frac{y}{x}\right)(x+1) = 1 \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)(x+1) = 10$$

$$\Rightarrow 2(x+1) = 10 \Rightarrow 2x+2 = 10 \Rightarrow 8x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

مقدار $x = \frac{1}{4}$ قابل قبول است. چون هیچ کدام از عبارت های لگاریتمی را تعریف نشده نمی کند.

پلهی دوم: لگاریتم x را در پایه ی ۸ حساب می کنیم:

$$\log_8^x = \log_8^{\frac{1}{4}} = \log_8^{2^{-2}} = \frac{-2}{3} \log_8^2 = -\frac{2}{3}$$

۸ - ۴ پلهی یکم: x را حساب می کنیم:

$$2 \log x = 1 + \log\left(x + \frac{12}{5}\right) \Rightarrow \log x^2 = \log 10 \left(x + \frac{12}{5}\right)$$

$$\Rightarrow x^2 = 10x + 24$$

$$x^2 - 10x - 24 = 0 \Rightarrow (x-12)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 12, x = -2$$

$x = -2$ غیر قابل قبول است. پس $x = 12$ تنها ریشه ی معادله است.

پلهی دوم: به ازای $x = 12$ مقدار عبارت لگاریتمی را حساب می کنیم:

$$\log_5^{(2x+1)} = \log_5^{(24+1)} = \log_5^{25} = \log_5^{5^2} = 2 \log_5^5 = 2$$

۹ - ۳ پلهی یکم: حل معادله ی لگاریتمی شرط اول برای رسیدن به جواب

تست است:

$$x = 8 \log_4^{\sqrt[3]{2}} = 8 \log_4^{\frac{2}{2}} = 8 \left(\frac{2}{2}\right) \log_4^2 = 8 \times \frac{3}{4} = 2 \times 3 = 6$$

پلهی دوم: مقدار لگاریتم $4(x+3)$ در پایه ی x برابر است با:

$$\log_x^{4(x+3)} = \log_x^{4(6+3)} = \log_x^{(4 \times 9)} = \log_x^{36} = \log_x^{6^2} = 2 \log_x^6 = 2$$

۱۰ - ۱ پلهی یکم: x را حساب می کنیم:

$$\log(2x-1) + \frac{1}{2} \log x^2 = \log 3 \Rightarrow \log(2x-1) + \log \sqrt{x^2}$$

$$= \log(2x-1) + \log x = \log(2x-1)x = \log 3 \Rightarrow (2x-1)x = 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x = 3 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow (2x-3)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ x=-1 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

پلهی دوم: مقدار لگاریتم $\frac{x}{3}$ در مبنای ۴ برابر است با:

$$\log_4^{\frac{x}{3}} = \log_4^{\frac{3}{2}} = \log_4^{\frac{1}{2}} = \log_4^{2^{-1}} = \frac{-1}{2} \log_4^2 = -\frac{1}{2}$$

۱۹ - **پله‌ی یکم:** مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$\log_3(x^2-1) = 1 + \log_3(x+2) \Rightarrow \log_3(x^2-1) - \log_3(x+2) = \log_3 \frac{x^2-1}{x+2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-1}{x+2} = 3 \Rightarrow x^2-1 = 3x+6 \Rightarrow x^2-3x-7=0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+2)=0 \Rightarrow x=5, x=-2$$

پله‌ی دوم: به‌ازای $x=-2$ عبارت $\log(x-3)$ تعریف نشده می‌شود. پس با $x=5$ مقدار $\log(x-3)$ در مبنای ۴ را حساب می‌کنیم:

$$\log_4(x-3) = \log_4(5-3) = \log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}$$

۲۰ - **پله‌ی یکم:** با در نظر گرفتن $5^x = A$ ، معادله را حل می‌کنیم:

$$5^{2x} - 8(5^x) + 15 = (5^x)^2 - 8(5^x) + 15 = 0$$

$$\Rightarrow A^2 - 8A + 15 = 0 \Rightarrow (A-5)(A-3) = 0 \Rightarrow A=5, A=3$$

پله‌ی دوم: حالا به‌جای A ، عبارت 5^x را جای‌گزین می‌کنیم:

$$5^x = 3 \Rightarrow x = \log_5 3$$

$$5^x = 5 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \text{در بین جواب‌ها نیست}$$

۲۱ - **پله‌ی یکم:** حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه

$$x.x' = \log a \cdot \log b = \frac{-3}{1} = -3$$

$$x + x' = \log a + \log b = \log ab = -\left(\frac{-4}{1}\right) = 4$$

$$\frac{\log ab}{\log a \cdot \log b} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

پله‌ی دوم: مقدار کسر برابر است با:

۲۲ - **پله‌ی یکم:** ابتدا از معادله‌ای که تنها مجهول آن x است، مقدار

x را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\log x = \log 5^0 - \log 5 = \log \frac{5^0}{5} = \log 1^0 \Rightarrow x=1^0$$

پله‌ی دوم: با تعیین شدن مقدار x و با استفاده از معادله‌ی اول، مقدار y را

$$\log x + \log y = 3 \xrightarrow{x=1^0} \log 1^0 + \log y = 3$$

محاسبه می‌کنیم:

$$\Rightarrow 1 + \log y = 3 \Rightarrow \log y = 2 \Rightarrow y = 100$$

۲۳ - **پله‌ی یکم:** مقدار y را حساب می‌کنیم:

$$\log(y+2) = 1 \Rightarrow y+2=10 \Rightarrow y=8$$

پله‌ی دوم: با استفاده از معادله‌ی دوم، مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$\log(y-x) + \log(4x+y) = 2 \xrightarrow{y=8} \log(8-x) + \log(4x+8)$$

$$= \log(8-x)(4x+8) = 2 \Rightarrow 4(8-x)(x+2) = 10^2 = 100$$

$$\Rightarrow (8-x)(x+2) = 25 \Rightarrow x=3$$

۲۴ - **پله‌ی یکم:** با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار

x و y را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$\log xy^2 = 2 \Rightarrow \log x + \log y^2 = 2 \Rightarrow \log x + 2 \log y = 2$$

$$\log x^2 y = 4 \Rightarrow \log x^2 + \log y = 4 \Rightarrow 2 \log x + \log y = 4$$

۱۵ - **پله‌ی یکم:** عبارت لگاریتمی را با استفاده از ویژگی

$$\log a + \log b + \log c = \log abc$$

$$\log x + \log(x+1) + \log(x+2) = \log x(x+1)(x+2)$$

$$= \log x(x^2+3x+2) = \log(x^3+3x^2+2x)$$

پله‌ی دوم: معادله‌ی لگاریتمی را حل می‌کنیم:

$$\log(x^3+3x^2+2x) = \log 6 \Rightarrow x^3+3x^2+2x = 6$$

$$\Rightarrow x^3+3x^2+2x-6=0$$

پله‌ی سوم: یکی از نکات حل معادله‌های خطی این بود که اگر مجموع

ضرایب معادله برابر صفر بود، در این صورت $x=1$ یکی از ریشه‌های

معادله خواهد بود. در این‌جا دو ریشه‌ی دیگر این معادله منفی است و

غیرقابل قبول محسوب می‌شود. پس این معادله فقط ۱ ریشه دارد.

۱۶ - **پله‌ی یکم:** توضیحات فارسی موجود در تست را به زبان ریاضی

$$\log_5^x = \log_{5^2}^{\frac{1}{x}} + 4$$

برمی‌گردانیم. داریم:

پله‌ی دوم: با حل معادله‌ی لگاریتمی مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_5^x = \log_{5^2}^{\frac{1}{x}} + 4 = \frac{-2}{2} \log_5^x + 4 \Rightarrow \log_5^x = -\log_5^x + 4$$

$$\Rightarrow 2 \log_5^x = 4 \Rightarrow \log_5^x = 2 \Rightarrow x = 5^2 = 25$$

پله‌ی سوم: لگاریتم این عدد (همان ۲۵) در پایه‌ی ۱۲۵ برابر است با:

$$\log_{125}^{25} = \log_{5^3}^{5^2} = \frac{2}{3} \log_5^5 = \frac{2}{3}$$

۱۷ - **پله‌ی یکم:** با توجه به ویژگی $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$ ، تغییراتی در عبارت

$$\frac{1}{\log_a^f} = \log_a^f$$

داده‌شده ایجاد می‌کنیم:

پله‌ی دوم: با حل معادله، مقدار a را حساب می‌کنیم:

$$\log_a^2 = \log_a^f - \frac{1}{f} = \log_a^2 - \frac{1}{f} = 2 \log_a^2 - \frac{1}{f} \Rightarrow \log_a^2 = \frac{1}{f}$$

$$\Rightarrow a^{\frac{1}{f}} = 2 \xrightarrow{\text{دو طرف به توان } f} (a^{\frac{1}{f}})^f = 2^f \Rightarrow a = 64$$

۱۸ - **پله‌ی یکم:** تغییراتی در عبارت لگاریتمی ایجاد می‌کنیم:

$$\log_9^x + \log_{x^3}^2 = \log_{3^2}^x + \log_{x^3}^2 = \frac{1}{2} \log_3^x + \frac{1}{3} \log_x^3$$

پله‌ی دوم: با توجه به این که $\log_x^x = 1$ ، مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{2} \log_3^x + \frac{1}{3 \log_x^3} = 1 \xrightarrow{\log_x^3 = A} \frac{1}{2} A + \frac{1}{3A} = 1 \Rightarrow \frac{3A^2 + 2}{6A} = 1$$

$$\Rightarrow 3A^2 - 6A + 2 = 0 \Rightarrow A = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \log_3^x = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x_1 = 3^{\frac{(3+\sqrt{3})}{3}} \\ A = \log_3^x = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x_2 = 3^{\frac{(3-\sqrt{3})}{3}} \end{cases}$$

بنابراین معادله ۲ ریشه‌ی حقیقی دارد.

تابع نمایی و لگاریتم

پلهی دوم: با توجه به رابطه $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ ، معادله را حل می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} 100 \cdot \log(x+1) &= (x+1)^{\log 100} = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = x + 7 \\ \Rightarrow x^2 + x - 6 &= 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 2 \\ x = -3 &\text{ غیرقابل قبول است. (چرا؟) پس فقط } x = 2 \text{ ریشهی معادله} \\ \text{است و معادله ۱ جواب طبیعی دارد.} \end{aligned}$$

۲۹ - پلهی یکم: عبارت $(\frac{1}{2})^{5x-1}$ را به عبارتی توان‌دار با پایه‌ی ۲ تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$(\frac{1}{2})^{5x-1} = (2^{-1})^{5x-1} = 2^{1-5x}$$

پلهی دوم: مجموعه‌ی جواب نامعادله برابر است با:

$$\begin{aligned} 2^{1-5x} > 64 &\Rightarrow 2^{1-5x} > 2^6 \\ \Rightarrow 1-5x > 6 &\Rightarrow 5x < -5 \Rightarrow x < -1 \end{aligned}$$

۳۰ - پلهی یکم: تغییراتی در نامعادله ایجاد می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \log_{10} \frac{x+2}{v} < -1 &\Rightarrow \log_{10} \frac{x+2}{v} < \log_{10} \frac{1}{10} \\ \text{پلهی دوم: چون } 10 > 1 \text{ است، با حذف لگاریتم جهت نامساوی تغییری} \\ \frac{x+2}{v} < \frac{1}{10} &\Rightarrow x+2 < \frac{v}{10} \Rightarrow x < -\frac{13}{10} \quad \text{نمی‌کند:} \\ \text{پلهی سوم: توجه کنید که } \frac{x+2}{v} &\text{ باید مثبت باشد. پس:} \\ \frac{x+2}{v} > 0 &\Rightarrow x > -2 \end{aligned}$$

پس جواب نامعادله $-2 < x < -\frac{13}{10}$ خواهد بود.

۳۱ - پلهی یکم: مقدار $\log_{\frac{1}{2}}^x$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}}^x &= \log_{\frac{1}{2}}^{x-1} = -\log_2^x = -1 \\ \text{پلهی دوم: عبارت جلوی لگاریتم همواره باید مثبت باشد. بنابراین داریم:} \\ \frac{x-1}{2} > 0 &\Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{aligned}$$

پلهی سوم: با ایجاد تغییراتی در عبارت لگاریتمی، مجموعه جواب نامعادله را تعیین می‌کنیم:

$$\log_{\frac{1}{9}}^{\frac{(x+1)}{3}} = \log_{3^{-2}}^{\frac{(x+1)}{3}} = -\frac{1}{2} \log_3^{\frac{(x+1)}{3}} < -1$$

$$\begin{aligned} \text{دو طرف } \times (-2) &\Rightarrow \log_3^{\frac{(x+1)}{3}} > 2 \Rightarrow \frac{x+1}{3} > 9 \Rightarrow x+1 > 27 \Rightarrow x > 26 \end{aligned}$$

۳۲ - پلهی یکم: طرفین نامعادله را به توان پنج می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{2 \log x^3} > \sqrt[5]{8} &\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۵}} 2 \log x^3 > 8 \\ \text{پلهی دوم: با در نظر گرفتن } 8 = 2^3, &\text{ جواب نامعادله را تعیین می‌کنیم، داریم:} \\ 2 \log x^3 > 2^3 &\Rightarrow \log x^3 > 3 \Rightarrow x^3 > 10^3 \Rightarrow x > 10 \\ \text{تنها جوابی که از بین گزینه‌ها در این مجموعه جواب صدق می‌کند،} \\ x = 11 &\text{ است.} \end{aligned}$$

پلهی دوم: با حل این دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار $\log x$ برابر ۲ و مقدار $\log y$ برابر صفر می‌شود. پس مقدار x و y برابر است با:

$$\log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100$$

$$\log y = 0 \Rightarrow y = 1$$

پلهی سوم: حاصل $\log xy^4$ برابر است با:

$$\log xy^4 = \log(100 \times 1) = \log 100 = 2$$

۲۵ - پلهی یکم: محاسبه‌ی x قدم اول است:

$$\begin{aligned} 4\sqrt{x} &= 4^x \Rightarrow 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{2x} \Rightarrow 2^{\frac{5}{2}} = 2^{2x} \Rightarrow 2x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4} \\ \text{پلهی دوم: } y &\text{ برابر است با:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + \log \sqrt{x+1} &= \log y \xrightarrow{x=\frac{5}{4}} 1 + \log \sqrt{\frac{5}{4}+1} = 1 + \log \sqrt{\frac{9}{4}} \\ &= 1 + \log \frac{3}{2} = \log y \Rightarrow \log 10 + \log \frac{3}{2} = \log y \\ \Rightarrow \log(10 \times \frac{3}{2}) &= \log 15 = \log y \Rightarrow y = 15 \end{aligned}$$

۲۶ - پلهی یکم: دو طرف تساوی را بر x^3 تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 16x^3 &= x^{\log_2^x \div x^3} \Rightarrow 16 = \frac{x^{\log_2^x}}{x^3} \Rightarrow x^{\log_2^x - 3} = 16 \\ \text{پلهی دوم: حالا از دو طرف لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_2 x^{\log_2^x - 3} &= \log_2 16 \Rightarrow (\log_2^x - 3) \log_2^x \\ &= \log_2^4 \Rightarrow (\log_2^x - 3) \log_2^x = 4 \\ \text{پلهی سوم: حالا } \log_2^x &\text{ را برابر } a \text{ فرض می‌کنیم و یک معادله‌ی درجه‌ی دوم} \\ \text{بر حسب } a \text{ حل می‌کنیم: } (a-3)a &= 4 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow (a-4)(a+1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow \log_2^x = -1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \\ a = 4 \Rightarrow \log_2^x = 4 \Rightarrow x_2 = 16 \end{cases} \\ \text{پلهی چهارم: حاصل ضرب دو ریشه برابر می‌شود با: } x_1 x_2 &= \frac{1}{2} \times 16 = 8 \end{aligned}$$

۲۷ - پلهی یکم: در معادله‌ی لگاریتمی تغییراتی ایجاد می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \log_{25}^a - \log_{25}^b &= \log_{5^2}^a - \log_{5^2}^b = \frac{1}{2} \log_5^a - \log_5^b = \log_5^{\sqrt{a}} - \log_5^b = 1 \\ \Rightarrow \log_5^{\frac{\sqrt{a}}{b}} &= 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{b} = 5 \Rightarrow \sqrt{a} = 5b \end{aligned}$$

پلهی دوم: مقدار a و b را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a + 5b &= 30 \xrightarrow{b=\frac{\sqrt{a}}{5}} a + \sqrt{a} = 30 \Rightarrow a = 25 \xrightarrow{b=\frac{\sqrt{a}}{5}} b = \frac{\sqrt{25}}{5} = \frac{5}{5} = 1 \\ \text{پلهی سوم: } a + b &\text{ را حساب کرده و مجموع ارقام آن را تعیین می‌کنیم:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b &= 25 + 1 = 26 \\ \text{بنابراین مجموع ارقام } a + b &\text{ برابر } 2 + 6 = 8 \text{ است.} \end{aligned}$$

۲۸ - پلهی یکم: عبارت لگاریتمی را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 2 \log \sqrt{x(x+1)} - 3 \log \sqrt[3]{x} &= \log(\sqrt{x(x+1)})^2 - \log(\sqrt[3]{x})^3 \\ &= \log(x(x+1)) - \log x = \log \frac{x(x+1)}{x} = \log(x+1) \end{aligned}$$

پلکان آزمون

آزمون یکم (ساده و متوسط)

۱۵ دقیقه

۱ - لگاریتم x در مبنای m برابر با لگاریتم $\sqrt[3]{x^2}$ در مبنای $\frac{1}{n}$ است. کدام یک از گزینه‌ها رابطه‌ی m و n را به درستی نشان می‌دهد؟

(۱) $m^2 n^3 = -1$ (۲) $m^2 n^3 = 1$ (۳) $m^3 n^2 = 1$ (۴) $m^2 n^2 = -1$

۲ - حاصل عبارت $\log_3 \frac{1}{4} + \log_3 \frac{2}{3} + \dots + \log_3 \frac{80}{81}$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) -۳ (۴) -۴

۳ - ضابطه‌ی تابع نمودار مقابل کدام است؟

(۱) $y = -\log |x|$

(۲) $y = \log |x|$

(۳) $y = \log x$

(۴) $y = -\log x$

۴ - حاصل $\frac{1}{100} - \log \sqrt{6}$ چه قدر است؟

(۱) ۱۰ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{5}{16}$

۵ - اگر $\alpha = \log_{96}^2$ باشد، حاصل $\log_{96}^3 + 3 \log_{96}^2$ کدام است؟

(۱) $\alpha - 1$ (۲) $2\alpha - 1$ (۳) $1 - 2\alpha$ (۴) $1 - \alpha$

۶ - معادله‌ی $1 + \log_7^{(x-3)} = \log_7^{(x+5)} + \log_7^{(x-10)}$ چند ریشه دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیش از ۲

۷ - ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله‌ی $9^x - 4 \times 3^{x+1} + 27 = 0$ ، چند واحد از ریشه‌ی کوچک‌تر این معادله بزرگ‌تر است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸ - اگر $\log_x^{x-2} \geq 0$ باشد، آن‌گاه حدود x کدام است؟

(۱) $(2, +\infty)$ (۲) $(3, +\infty)$ (۳) $[2, 3)$ (۴) $(2, 4]$

۹ - اگر $\log_3^k = k$ باشد، حاصل $\log_x^{11x}$ کدام است؟

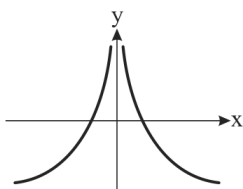
(۱) $\frac{4k}{3} + 1$ (۲) $\frac{1}{16k} + 1$ (۳) $\frac{3k}{4} + 1$ (۴) $\frac{16}{k} + 1$

۱۰ - اگر $\log 2 = 0/3$ باشد، مقدار $\log 625$ چه قدر است؟

(۱) $1/2$ (۲) $2/1$ (۳) $2/8$ (۴) $3/2$

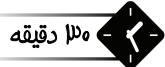
۱۱ - اگر فرض کنیم $\log 7 = 0/8$ و $\log 2 = 0/3$ است، حاصل $\log 392$ چه قدر می‌شود؟

(۱) $2/8$ (۲) $2/4$ (۳) $2/5$ (۴) $2/2$

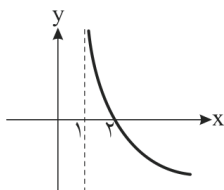


- ۱۲ - معادله $\log_4 x = 3 \log x$ چند جواب است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۱۳ - جواب معادله $\log \log_3 \log_3^{x-1} = 0$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۱۰ (۳) ۱۰۰ (۴) ۱۰۰۰
- ۱۴ - مقدار a چند باشد تا $\log_4^{196}$ یک واحد از $2 \log_4^a$ بیش تر باشد؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۷
- ۱۵ - نامعادله $\log_{\frac{1}{2}}^{2-5x} > -4$ چند جواب صحیح دارد؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیش تر از ۲
- ۱۶ - از دستگاه معادلات $\begin{cases} \log_4^a + \log_2^b = 1 \\ \log_3^{12a} - \log_3^{16b} = 1 \end{cases}$ مقدار $a^2 + b^2$ چه قدر به دست می آید؟
 (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۱۳ (۴) ۱۷
- ۱۷ - اگر $\log_4^{64} = \alpha$ باشد، حاصل $\log_4^{63}$ کدام است؟
 (۱) $\alpha + 6$ (۲) $\alpha - 6$ (۳) $2\alpha + 6$ (۴) $2\alpha - 6$
- ۱۸ - معادله $\log_x^{(x^2 + x^2 - 1)} = 4$ چند ریشه حقیقی دارد؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیش تر از ۲
- ۱۹ - مجموعه جواب نامعادله $\log_x^{(x+3)} > \log_x^{(9-x)}$ کدام است؟
 (۱) $(3, +\infty)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(3, +\infty) \cup (0, 1)$ (۴) $(0, 1) \cup (3, 9)$
- ۲۰ - اگر $2 = \log_5^{(x^2 + x + 1)} + \log_5^{(x-1)}$ باشد، حاصل $5^{3 \log_5^x}$ برابر می شود با:
 (۱) ۵ (۲) ۲۵ (۳) ۶ (۴) ۲۶

آزمون دوم (استاندارد)



- ۱ - حاصل عبارت $\log \tan 15^\circ \times \log \tan 45^\circ \times \dots \times \log \tan 75^\circ$ چه قدر است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۵
- ۲ - حاصل کسر $\frac{\log_5^3 + \log_5^{11}}{\log_9^9 + \log_9^{243}}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{5}{V} \log_V^5$ (۲) $\frac{V}{5} \log_V^5$ (۳) $\frac{5}{V} \log_V^V$ (۴) $\frac{V}{5} \log_5^V$
- ۳ - اگر $\log_x^a = 3$ و $\log_y^a = 4$ و $\log_z^a = 6$ باشد، حاصل $\log_{xyz}^a$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) ۳
- ۴ - اگر $9x^2 + 25y^2 = 19xy$ باشد، $\log \frac{3x+5y}{V}$ واسطه‌ی حسابی بین ... و ... است.
 (۱) $\log 3x$ ، $\log 5y$ (۲) $\log \frac{y}{5}$ ، $\log \frac{x}{3}$ (۳) $\log y$ ، $\log x$ (۴) $\log \sqrt{y}$ ، $\log \sqrt{x}$
- ۵ - شکل روبه‌رو نمایانگر کدام تابع است؟
 (۱) $y = 2 \log_5^x$
 (۲) $y = -\log_{5/5}^x$
 (۳) $y = \log_{5/5}^{(x-1)}$
 (۴) $y = 1 - \log_5^{(x-1)}$



۶- می‌دانیم $\log 2 = 0.3$ است. با توجه به این مطلب عدد 2^{39} چند رقمی است؟

- (۱) یازده (۲) دوازده (۳) سیزده (۴) چهارده

۷- اگر $\log_x^y = 2$ و $x = y^{\frac{1}{a}}$ باشد، حاصل $\log_0^{a^3+5a+7}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸- ریشه‌های معادله $\log(5+x) = \log(19+x) - \log(x+1)$ در کدام بازه است؟

- (۱) $(-10, -5)$ (۲) $(-5, 0)$ (۳) $(0, 5)$ (۴) $(5, 10)$

۹- اگر $(\log_3^x)^2 - (\log_3^y)^2 = 8$ باشد و $xy = 81$ ، مقدار $x+y$ برابر است با:

- (۱) ۳۰ (۲) ۳۳ (۳) ۳۶ (۴) ۳۹

۱۰- کامل‌ترین جواب نامعادله $\log_{\frac{1}{3}}^{(x+1)} + \log_{\frac{1}{3}}^{(x+3)} \geq -1$ کدام بازه است؟

- (۱) $(-4, 0)$ (۲) $(-3, 0)$ (۳) $(-1, 0)$ (۴) -2

۱۱- جواب معادله $81^x + 4 = \frac{27^{2x} - 4}{9^x - 1}$ چیست؟

- (۱) $\log_3^3$ (۲) $\log_3^2$ (۳) $\log_3^3$ (۴) $\log_3^4$

(سراسری - تجربی - ۸۹)

۱۲- از دو معادله $\log_3^x + \log_3^y = 2$ و $x^2 + y^2 = 46$ ، لگاریتم $(x+y)$ در پایه‌ی ۴ کدام است؟

- (۱) $1/5$ (۲) ۲ (۳) $2/5$ (۴) ۳

(آزاد - ریاضی - ۸۹)

۱۳- اگر $2\log(x+1) = \log(2x+10)$ ، حاصل $\log_{\frac{x}{1}}^{x\sqrt{3}}$ چه قدر است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) $-\frac{3}{2}$

(آزاد - ریاضی - ۸۹)

۱۴- اگر $\log_{\sqrt{3}}^x = a$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{3}}^{x\sqrt{3}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{a+a}{a+2}$ (۲) $\frac{a+a}{2a+4}$ (۳) $\frac{1+4a}{a+2}$ (۴) $\frac{1+8a}{4a+1}$

(آزاد - تجربی - ۸۹)

۱۵- اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، $\log 15$ کدام است؟

- (۱) $a+1-b$ (۲) $a+b+1$ (۳) $b+1-a$ (۴) $b-a-1$

(سراسری - تجربی - ۹۰)

۱۶- اگر $\log 2 = k$ باشد، حاصل $2\log(1+\sqrt{5}) + \log(6-2\sqrt{5})$ ، کدام است؟

- (۱) $2k$ (۲) $4k$ (۳) $1+k$ (۴) $2+4k$

(سراسری - ریاضی - ۹۰)

۱۷- اگر لگاریتم عدد $2^{3/5}/25$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آنگاه لگاریتم عدد $(\frac{1}{A}-1)$ در پایه ۴ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

(سراسری - تجربی - ۹۰ - خارج از کشور)

۱۸- اگر $\log 5 = 3k$ باشد، $\log \sqrt[3]{1/6}$ کدام است؟

- (۱) $1-4k$ (۲) $2-5k$ (۳) $1-2k$ (۴) $1-k$

(سراسری - ریاضی - ۹۰ - خارج از کشور)

۱۹- اگر $A = \left| \frac{\log 5}{\log 2} \right|$ آنگاه $|A|$ کدام است؟

- (۱) $2\log 1/25$ (۲) $\log 2/5$ (۳) $\log 3$ (۴) $\log 6/25$

(آزاد - تجربی - ۸۹)

۲۰- اگر $\log_0^4 = a$ باشد، حاصل $\log 25$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{a+2}$ (۲) $\frac{4}{a+4}$ (۳) $\frac{4}{a+2}$ (۴) $\frac{2}{a+4}$

پاسخ‌های پلکان آزمون

پاسخ تست‌های آزمون یکم

۱- پله‌ی یکم: گیج نشوید! گفته‌های تست را به زبان ریاضی برمی‌گردانیم:

$$\log_m^x = \log_{\frac{1}{n}}^{\sqrt[n]{x}} = \log_{\frac{1}{n}}^{\frac{x}{n}} = \frac{1}{n} \log_{\frac{1}{n}}^x$$

پله‌ی دوم: رابطه‌ی بین m و n را تعیین می‌کنیم:

$$\log_m^x = \frac{1}{n} \log_{\frac{1}{n}}^x = \log_{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}}^x \Rightarrow m = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف به توان } 2} m^2 = \frac{1}{n^3} \Rightarrow m^2 n^3 = 1$$

۲- با استفاده از ویژگی $\log_t^a + \log_t^b + \dots + \log_t^z = \log_t^{ab \dots z}$ حاصل عبارت لگاریتمی را به‌دست می‌آوریم:

$$\log_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} + \dots + \log_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{81}} = \log_{\frac{1}{3}}^{\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{1}{81}\right)} = \log_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{81}}$$

$$= \log_{\frac{1}{3}}^{3^{-4}} = -4 \log_{\frac{1}{3}}^3 = -4$$

۳- پله‌ی یکم: تابع به‌ازای تمامی مقادیر x به‌غیر از $x=0$ تعریف شده است. با توجه به این‌که عبارت جلوی لگاریتم همواره مثبت است، پس باید عبارت جلوی لگاریتم را به‌صورت $|x|$ در نظر بگیریم. (رد گزینه‌های ۳ و ۴)
پله‌ی دوم: مقدار تابع به‌ازای $x=10$ یک عدد منفی است. (رد گزینه‌ی ۲)
پس این نمودار تابع $g = -\log |x|$ را نشان می‌دهد.

۴- پله‌ی یکم: با توجه به رابطه‌ی $a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}$ عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم. داریم:

$$A = 100^{\frac{1}{2} - \log \sqrt{6}} = \frac{100^{\frac{1}{2}}}{100^{\log \sqrt{6}}}$$

پله‌ی دوم: با استفاده از رابطه‌ی $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ مقدار A را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{6} \log 100} = \frac{10}{(\sqrt{6})^2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

۵- پله‌ی یکم: $\log_{96}^3$ را برحسب α حساب می‌کنیم:

$$\log_{96}^3 = \log_{96}^{\frac{3}{96}} = \log_{96}^{\frac{1}{32}} = \log_{96}^{\frac{1}{2^5}} = 1 - \log_{96}^{2^5} = 1 - 5 \log_{96}^2 = 1 - 5\alpha$$

پله‌ی دوم: حاصل عبارت داده‌شده برابر است با:

$$\log_{96}^3 + 3 \log_{96}^2 = 1 - 5\alpha + 3\alpha = 1 - 2\alpha$$

۶- پله‌ی یکم: عبارت‌های لگاریتمی دو طرف تساوی را ساده می‌کنیم.

$$\log_p^{(x-10)} + \log_p^{(x+5)} = \log_p^{(x-3)} + \log_p^2$$

داریم:

$$\Rightarrow \log_p^{(x-10)(x+5)} = \log_p^{2(x-3)}$$

پله‌ی دوم: مبناهای عبارت‌های لگاریتمی دو طرف تساوی برابر است.

پس عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها را با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$(x-10)(x+5) = 2(x-3) \Rightarrow x^2 - 5x - 50 = 2x - 6$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x - 44 = 0 \Rightarrow (x-11)(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=11 \\ x=-4 \end{cases}$$

پله‌ی سوم: ریشه‌ی $x=-4$ قابل قبول نیست. چون عبارت‌های $x-10$ و

$x-3$ را منفی می‌کند. جلوی لگاریتم هم که باید همواره مثبت باشد.

پس $x=11$ تنها ریشه‌ی معادله است. بنابراین معادله فقط ۱ ریشه دارد.

۷- پله‌ی یکم: 3^x را برابر A در نظر می‌گیریم. معادله را به شکل

ساده‌تری تشکیل می‌دهیم:

$$9^x - 4 \times 3^{x+1} + 27 = 0 \Rightarrow (3^2)^x - 3^x (3 \times 4) + 27 = 0$$

$$\Rightarrow (3^x)^2 - 12(3^x) + 27 = 0 \xrightarrow{3^x=A} A^2 - 12A + 27 = 0$$

$$\Rightarrow (A-9)(A-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A=9 \\ A=3 \end{cases}$$

پله‌ی دوم: مقدار x_1 و x_2 را تعیین کرده و اختلاف آن دو را به‌دست

$$\begin{cases} 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x_1 = 2 \\ 3^x = 3 \Rightarrow x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_2 = 2 - 1 = 1$$

می‌آوریم. داریم:

۸- پله‌ی یکم: عبارت جلوی لگاریتم همواره مثبت است:

$$x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

شرط $x > 2$ ، تعریف‌شده‌بودن مبنا‌ی لگاریتم را هم برای ما تأمین می‌کند.

پله‌ی دوم: نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\log_x^{x-2} \geq 0 \Rightarrow \log_x^{x-2} \geq \log_x^1 \Rightarrow x-2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 3$$

بنابراین محدوده‌ی قابل قبول برای x به‌صورت $[3, +\infty)$ در می‌آید.

۱۵ - پله‌ی یکم: عبارت جلوی لگاریتم همواره مثبت است:

$$2 - 5x > 0 \Rightarrow 5x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{5}$$

پله‌ی دوم: نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\log_{\frac{1}{2}}^{2-5x} > -4 \Rightarrow -\log_2^{2-5x} > -4 \xrightarrow{\times(-1) \text{ دو طرف}} \log_2^{2-5x} < 4$$

$$\Rightarrow 2 - 5x < 2^4 \Rightarrow 2 - 5x < 16 \Rightarrow 5x > -14 \Rightarrow x > \frac{-14}{5}$$

پله‌ی سوم: x در بازه‌ی $(-\frac{14}{5}, \frac{2}{5})$ قرار دارد. این بازه شامل ۳ عدد صحیح است. بنابراین پاسخ بیش‌تر از ۲ عدد صحیح است.

۱۶ - پله‌ی یکم: تغییراتی در معادلات داده‌شده ایجاد می‌کنیم تا بتوانیم

a و b را تعیین کنیم: $\log_2^a + \log_2^b = 1 \Rightarrow \log_2^a + \log_2^b = 1$ معادله‌ی اول

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \log_2^a + \log_2^b = \log_2^{\sqrt{a}} + \log_2^b = 1$$

$$\Rightarrow \log_2^{b\sqrt{a}} = 1 \Rightarrow b\sqrt{a} = 2 \quad \text{I}$$

$$\log_2^{2a} - \log_2^{6b} = \log_2^{\frac{2a}{6b}} = \log_2^{\frac{3a}{3b}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3a}{3b} = 2 \Rightarrow a = 2b \quad \text{II}$$

پله‌ی دوم: با توجه به روابط I و II مقدار a و b را حساب می‌کنیم:

$$b\sqrt{a} = 2 \xrightarrow{a=2b} b(\sqrt{2b}) = 2 \Rightarrow b\sqrt{b} = 1 \Rightarrow b = 1 \xrightarrow{a=2b} a = 2$$

$$a^2 + b^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \quad \text{پله‌ی سوم: } a^2 + b^2 \text{ برابر است با:}$$

۱۷ - پله‌ی یکم: $63! = \frac{64!}{64}$ می‌دانیم. بنابراین حاصل $\log_2^{63!}$ برابر است با:

$$\log_2^{63!} = \log_2^{\frac{64!}{64}} = \log_2^{64!} - \log_2^{64} = 2(\frac{1}{2} \log_2^{64!}) - \log_2^{64}$$

$$= 2 \log_2^{64!} - 6 \log_2^2 = 2\alpha - 6$$

۱۸ - پله‌ی یکم: ابتدا معادله را حل می‌کنیم:

$$\log_x^{(x^2 + x^2 - 1)} = 4 \Rightarrow x^2 + x^2 - 1 = x^4 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

پله‌ی دوم: عددی که در مبنای لگاریتم قرار می‌گیرد نمی‌تواند منفی باشد. پس $x = -1$ غیرقابل قبول است. همچنین عددی که در مبنای قرار دارد باید مخالف ۱ باشد. پس $x = 1$ هم غیرقابل قبول است. بنابراین معادله صفر ریشه‌ی حقیقی دارد.

۱۹ - پله‌ی یکم: با فرض $x > 1$ ، نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\log_x^{(x+3)} > \log_x^{(9-x)} \xrightarrow{x>1} x+3 > 9-x \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3$$

پله‌ی دوم: با فرض $0 < x < 1$ بار دیگر نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\log_x^{(x+3)} > \log_x^{(9-x)} \xrightarrow{0<x<1} x+3 < 9-x$$

$$\Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3 \xrightarrow{0<x<1} 0 < x < 1$$

۹ - پله‌ی یکم: سعی می‌کنیم حاصل $\log_3^x$ را برحسب k به‌دست

$$\log_3^x = k \Rightarrow 4 \log_3^x = 4k \Rightarrow \log_3^x = \frac{4k}{4}$$

آوریم. داریم:

پله‌ی دوم: با توجه به مقدار به‌دست‌آمده برای $\log_3^x$ ، مقدار $\log_3^{41x}$ برحسب k را تعیین می‌کنیم:

$$\log_3^{41x} = \log_3^{41} + \log_3^x = \log_3^{2^2} + 1 = 4 \log_3^2 + 1 = \frac{4}{\log_3^2} + 1$$

$$= \frac{4}{\frac{1}{k}} + 1 = \frac{4k}{1} + 1$$

۱۰ - پله‌ی یکم: مقدار $\log 5$ را حساب می‌کنیم:

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0.3 = 0.7$$

پله‌ی دوم: $\log 625$ برابر است با:

$$\log 625 = \log 5^4 = 4 \log 5 = 4 \times 0.7 = 2.8$$

۱۱ - پله‌ی یکم: می‌دانیم $392 = 49 \times 8$ است. بنابراین می‌توان

$$\log 392 = \log(49 \times 8) = \log 49 + \log 8$$

نوشت:

پله‌ی دوم: با داشتن مقدار $\log 2$ و $\log 7$ ، مقدار $\log 392$ را حساب

$$\log 392 = \log 7^2 + \log 2^3 = 2 \log 7 + 3 \log 2$$

می‌کنیم:

$$= (2 \times 0.8) + (3 \times 0.3) = 1.6 + 0.9 = 2.5$$

۱۲ - پله‌ی یکم: با توجه به ویژگی‌های لگاریتم معادله را به فرمی

تبدیل می‌کنیم که حل معادله برای ما راحت باشد. داریم:

$$\log 4x = 3 \log x \Rightarrow \log 4x = \log x^3$$

پله‌ی دوم: تعداد جواب‌های معادله‌ی $x^3 = 4x$ به شرط این‌که

عبارت‌های جلوی لگاریتم همواره مثبت باشند، مدنظر ما است:

$$x^3 = 4x \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

مقادیر $x = 0$ و $x = -2$ غیرقابل قبول هستند. پس این معادله فقط ۱ جواب دارد.

۱۳ - پله‌ی یکم: با دیدن این تعداد لگاریتم هول نشوید مرحله‌به‌مرحله

$$\log \log \log \log_3^{x-1} = 0 \Rightarrow \log \log \log_3^{x-1} = 10^0 = 1$$

پیش می‌رویم. داریم:

پله‌ی دوم: حالا مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$\log \log \log_3^{x-1} = 1 \Rightarrow \log_3^{x-1} = 2 \Rightarrow x-1 = 3^2 = 9 \Rightarrow x = 10$$

۱۴ - پله‌ی یکم: حاصل $\log_7^{196}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_7^{196} = \log_7^{(49 \times 4)} = \log_7^{49} + \log_7^4 = \log_7^{7^2} + 1 = 2 \log_7^7 + 1$$

پله‌ی دوم: مقدار $\log_7^{196}$ از $2 \log_7^a$ یک واحد بیش‌تر است. بنابراین

برابر است با:

$$\log_7^{196} = 2 \log_7^a + 1 = 2 \log_7^a + 1 \Rightarrow \log_7^a = \log_7^a \Rightarrow a = 7$$

$$\log_{xyz}^a = \frac{1}{\log_a^{xyz}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$\frac{3x + 5y}{v}$ را حساب کنیم:

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 19 + x \Rightarrow x^2 + 5x - 14 = 0$$

۱۲ - **پله‌ی یکم:** تغییراتی در معادله‌ی لگاریتمی ایجاد می‌کنیم:

$$\log_3^x + \log_3^y = 2 \Rightarrow \log_3^{xy} = 2 \Rightarrow xy = 3^2 \Rightarrow xy = 9$$

پله‌ی دوم: با استفاده از اتحاد $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ، مقدار $x+y$ را حساب می‌کنیم:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (x^2 + y^2) + 2xy = 46 + (2 \times 9)$$

$$= 46 + 18 = 64 \Rightarrow x+y = 8$$

پله‌ی سوم: مقدار لگاریتم $x+y$ در پایه‌ی ۴ برابر است با:

$$\log_4^{(x+y)} = \log_4^8 = \log_{2^2}^{2^3} = \frac{3}{2} \log_2^2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

۱۳ - **پله‌ی یکم:** مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$2 \log(x+1) = \log(2x+10) \Rightarrow \log(x+1)^2 = \log(2x+10)$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 2x+10 \Rightarrow x^2 + 2x+1 = 2x+10$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 \xrightarrow{x>0} x=3$$

(اگر $x=-3$ در نظر گرفته شود مقدار $x+1$ منفی می‌شود که غیرقابل قبول است.)

پله‌ی دوم: حاصل $\log_{\frac{1}{x}}^{x\sqrt{3}}$ به ازای $x=3$ برابر است با:

$$\log_{\frac{1}{x}}^{x\sqrt{3}} = \log_{\frac{1}{3}}^{3\sqrt{3}} = \log_{3^{-1}}^{3^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{-1} \log_3^3 = -\frac{3}{2}$$

۱۴ - **پله‌ی یکم:** با توجه به این که $\log_{\sqrt{3}}^a = a$ است، داریم:

$$\log_{\sqrt{3}}^a = a \Rightarrow 4 = \sqrt{3}^a = (3^{\frac{1}{2}})^a = 3^{\frac{a}{2}} \Rightarrow 2^2 = 3^{\frac{a}{2}}$$

$$\xrightarrow{\text{از دو طرف جذر می‌گیریم}} 2 = 3^{\frac{a}{4}}$$

پله‌ی دوم: حاصل $\log_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}}$ با توجه به این که $2 = 3^{\frac{a}{4}}$ است، برابر است با:

$$\log_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} = \log_{3^{\frac{1}{2}}}^{3^{\frac{3}{2}}} = \log_{3^{\frac{1}{2}}}^{3^{1+\frac{1}{2}}} = \log_{3^{\frac{1}{2}}}^{3^{\frac{3}{2}}} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \log_{3^{\frac{1}{2}}}^3 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \log_{3^{\frac{1}{2}}}^3 = \frac{3}{1} \log_{3^{\frac{1}{2}}}^3 = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1} = 6$$

۱۵ - **پله‌ی یکم:** $\log 15$ برابر است با:

$$\log 15 = \log(5 \times 3) = \log 5 + \log 3$$

پله‌ی دوم: مقدار $\log 5$ را با استفاده از مقدار $\log 2$ حساب می‌کنیم:

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2 = 1 - a$$

پله‌ی سوم: بنابراین $\log 15$ برابر است با:

$$\log 15 = 1 - a + b = b + 1 - a$$

۱۶ - **پله‌ی یکم:** حاصل $\log(1+\sqrt{5})^2$ را به دست می‌آوریم:

$$\log(1+\sqrt{5})^2 = \log(1+2\sqrt{5}+5) = \log(6+2\sqrt{5})$$

پله‌ی دوم: ریشه‌های این معادله‌ی درجه‌ی دو را تعیین می‌کنیم:

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \Rightarrow (x+7)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-7 \end{cases}$$

پله‌ی سوم: حُب توجه کنید که $x=-7$ غیرقابل قبول است. چون عبارت جلوی لگاریتم‌ها را منفی می‌کند. پس ریشه‌ی معادله در بازه‌ی $(0,5)$ قرار دارد. (در واقع $x=2$ تنها ریشه‌ی معادله است.)

۹ - **پله‌ی یکم:** رابطه‌ی لگاریتمی داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$(\log_3^x)^2 - (\log_3^y)^2 = (\log_3^x - \log_3^y)(\log_3^x + \log_3^y) = \frac{x}{y} (\log_3^{xy}) = 8$$

پله‌ی دوم: با توجه به این که $xy=81$ است، x را بر حسب y حساب

$$\log_3^{xy} = \log_3^{81} = \log_3^{3^4} = 4 \log_3^3 = 4$$

$$4 \log_3^y = 8 \Rightarrow \log_3^y = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 3^2 = 9 \Rightarrow x = 9y$$

پله‌ی سوم: با محاسبه‌ی مقدار x و y ، مقدار $y+x$ را به دست می‌آوریم:

$$xy = 81 \xrightarrow{x=9y} 9y^2 = 81 \Rightarrow y^2 = 9 \xrightarrow{y>0} y = 3 \xrightarrow{x=9y} x = 9 \times 3 = 27$$

پله‌ی چهارم: حالا یک جمع ساده:

۱۰ - **پله‌ی یکم:** عبارت لگاریتمی را ساده می‌کنیم:

$$\log_{\frac{1}{3}}^{(x+1)} + \log_{\frac{1}{3}}^{(x+3)} = \log_{\frac{1}{3}}^{(x+1)(x+3)}$$

پله‌ی دوم: با توجه به این که مبنای لگاریتم کوچک‌تر از ۱ است، برای حل نامعادله جهت آن عوض می‌شود. بنابراین داریم:

$$\log_{\frac{1}{3}}^{(x+1)(x+3)} \geq -1 \Rightarrow (x+1)(x+3) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Rightarrow x^2 + 4x + 3 \leq 3$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x \leq 0 \Rightarrow x(x+4) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 0$$

پله‌ی سوم: دامنه‌ی عبارت موردنظر برابر $x > -1$ است. با اشتراک گرفتن بین دامنه تعریف و جواب نامعادله جواب کلی برابر $-1 < x \leq 0$ است.

۱۱ - **پله‌ی یکم:** معادله‌ی داده‌شده را به شکل ساده‌تری تبدیل می‌کنیم:

$$81^x + 4 = \frac{27^{2x} - 4}{9^x - 1} \Rightarrow (3^4)^x + 4 = \frac{(3^3)^{2x} - 4}{(3^2)^x - 1}$$

$$\Rightarrow (3^x)^4 + 4 = \frac{(3^x)^6 - 4}{(3^x)^2 - 1}$$

پله‌ی دوم: با در نظر گرفتن $A = 3^x$ ، معادله را حل می‌کنیم:

$$A^4 + 4 = \frac{A^6 - 4}{A^2 - 1} \Rightarrow (A^4 + 4)(A^2 - 1) = A^6 - 4$$

$$\Rightarrow A^6 - A^4 + 4A^2 - 4 = A^6 - 4 \Rightarrow A^6 - 4A^2 = 0$$

$$\Rightarrow A^2(A^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ A^2=4 \Rightarrow A=\pm 2 \end{cases}$$

پله‌ی سوم: مقادیر $A=0$ و $A=-2$ غیرقابل قبول هستند. (چون مقدار

3^x همواره مثبت است!) بنابراین فقط $A=2$ جواب معادله است. پس

مقدار x برابر است با:

$$A=2 \Rightarrow 3^x = 2 \Rightarrow x = \log_3^2$$

پله‌ی دوم: اگر $\log 5 = 3k$ باشد، $\log 2$ برابر $1 - 3k$ است. بنابراین داریم:

$$\log \sqrt[3]{1/6} = \frac{1}{3}(\log 1 - \log 6) = \frac{1}{3}(\log 1 - \log 2 - \log 3) = \frac{1}{3}(\log 1 - \log 2 - 3k) = \frac{1}{3}(\log 1 - \log 2 - 3k) = 1 - 4k$$

۱۹ - ۲ با استفاده از قوانین لگاریتم حاصل دترمیان را به دست می‌آوریم:

$$|A| = (\log 5 \times \log 5) - (\log 2 \times \log 2) = (\log 5)^2 - (\log 2)^2 \\ = (\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2) = (\log \frac{5}{2})(\log 10) = \log 2 / 5$$

۲۰ - ۳ با استفاده از ویژگی‌های $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$ و $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$ حاصل عبارت لگاریتمی را به دست می‌آوریم:

$$\log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5 = 2 \times \frac{\log_4^5}{\log_4^1} = 2 \times \frac{\log_4^5}{\log_4^{(2 \times 5)}} \\ = 2 \times \frac{1}{\log_4^5} = 2 \times \frac{1}{\log_4^5} = 2 \times \frac{1}{\log_4^5} = 2 \times \frac{1}{\log_4^5} = \frac{4}{a+2}$$

$$= 2 \times \frac{1}{\log_4^5} = 2 \times \frac{1}{\log_4^5} = 2 \times \frac{1}{\log_4^5} = 2 \times \frac{1}{\log_4^5} = \frac{4}{a+2}$$

پله‌ی دوم: با توجه به این که $\log 2 = k$ است، حاصل عبارت لگاریتمی

$$\log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(6 + 2\sqrt{5}) \\ = \log(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5}) = \log(36 - 20) \\ = \log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 = 4k$$

۱۷ - ۴ **پله‌ی یکم:** حاصل $\sqrt[3]{50/25}$ را به صورت عددی توان دار با

$$\sqrt[3]{50/25} = 2 \times \sqrt[3]{1/5} = 2 \sqrt[3]{2^{-2}} = 2 \times 2^{-2/3} = 2^{1/3}$$

پله‌ی دوم: با تعیین مقدار A ، حاصل $\log_4^{(1/A-1)}$ را می‌توانیم حساب کنیم:

$$A = \log_4^{\sqrt[3]{50/25}} = \log_4^{2^{1/3}} = \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \\ \log_4^{(1/A-1)} = \log_4^{(9-1)} = \log_4^8 = \log_4^{2^3} = \frac{3}{2} \log_4^2 = \frac{3}{2}$$

۱۸ - ۱ **پله‌ی یکم:** حاصل $\log \sqrt[3]{1/6}$ را بر حسب $\log 2$ به دست

$$\log \sqrt[3]{1/6} = \log(1/6)^{1/3} = \frac{1}{3} \log 1/6$$

$$= \frac{1}{3} \log \frac{1}{6} = \frac{1}{3} (\log 1/6 - \log 1/6) = \frac{1}{3} (\log 2^4 - 1) = \frac{1}{3} (4 \log 2 - 1)$$