



موسسه ایران دانش نوین

رویای خودت شود...



@IranDaneshNovies

برای دانلود بقیه ی گام به گام ها و جزوات با کلیک روی لینک  
های زیر به سایت یا کانال ما در تلگرام سر بزنید:

[www.IDNovin.com](http://www.IDNovin.com)

<https://telegram.me/irandaneshnovin>

بهترین جزوات، مشاوره با رتبه های تک رقمی: @irandaneshnovin



مشت نمونه‌ی خروار

# ریاضیات پایه

«لگاریتم»

آموزش به همراه پرسش‌های چهارگزینه‌ای

احسان موسوی

سجاد ثمودی

تهران

انتشارات علمی فار

## راهنمای کتاب



سلام! ریاضیات پایه در کنکور خیلی مهم است! خیلی! چون حدود بیست درصد تست‌ها از ریاضیات پایه است؟  
نچ! چون یادگیری این مباحث نسبت به هندسه و مباحث ریاضیات پیش‌دانشگاهی بسیار ساده‌تر است. پس حیف است که وقتی کاری این‌قد ساده است، شما از کنارش به همین سادگی بگذرید.

ما در این کتاب ۶ فصل داریم:

محاسبات جبری و معادلات

تابع

مثلثات

تابع نمایی و لگاریتم

دنباله و تصاعد

آمار و مدل‌سازی

هر فصل به دو یا چند بخش کوچک‌تر تقسیم شده است. سعی کرده‌ایم که هر بخش، استقلال معنایی داشته باشد و بتوانید آن را یک‌ضرب بخوانید. تست‌های این کتاب یا تألیفی است، که سعی شده در راستای کنکور باشد و خیلی سلیقه‌مان را درگیرش نکنیم؛ یا تست‌های سراسری و آزاد داخل یا خارج از کشور است. بدون اغراق می‌توانیم بگوییم که همه‌ی تست‌های کنکور در هفت سال اخیر را در این کتاب می‌توانید ببینید. پس با زدن این تست‌ها، می‌توانید امیدوار باشید که آن‌قدر نمونه‌های مختلف دیده‌اید که سر جلسه‌ی کنکور هم از پس حل تست‌های ریاضیات پایه برمی‌آیید.

روش خواندن کتاب چه‌طوری است؟

شما ابتدا شروع به خواندن پلکان آموزش می‌کنید. متن درس را دقیق می‌خوانید. مثال بعد از مبحث آموزش را می‌بینید. بعد می‌روید سراغ کادر تست‌هایی که در ادامه‌اش آمده است. تست‌ها را بهتر است یکی‌یکی حل کنید و پاسخ‌ش را ببینید. در این مرحله نیازی نیست زمان بگیرید. مهم این است که پله‌پله که تست‌های سخت‌تر می‌شوند، توانایی خودتان را در حل مسئله بالا ببرید.

بعد از این مرحله، در آخر هر فصل، پلکان آزمون وجود دارد. این‌جا باید خود را محک بزنید. هر فصل حداقل یک آزمون «ساده و متوسط» و حداقل یک آزمون «استاندارد» دارد. البته بعضی فصل‌ها چهار تا آزمون هم دارند. بستگی به اهمیت فصل دارد. زمان بگیرید و با آزمون «ساده و متوسط» شروع کنید. بعد به سراغ آزمون‌های «استاندارد» بروید. بعد هم با خیال راحت بروید سر جلسه‌ی کنکور!

در آخر هم بگوییم که این فصل نمونه‌ی کتاب را که خواندید، لطف می‌کنید اگر برای ما نظرتان را بفرستید:

Email: phare.math@gmail.com



### فهرست:

- بخش ۱: تابع نمایی و لگاریتم ۲  
بخش ۲: معادله‌ها و نامعادله‌های نمایی و لگاریتمی ۱۱  
پلکان آزمون ۱۹

## فصل ۲ ← لگاریتم



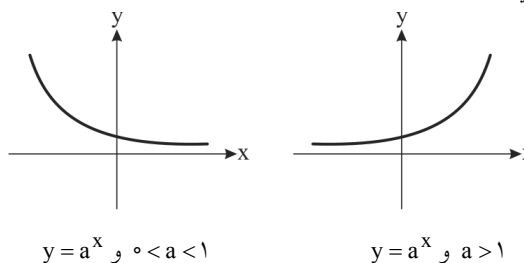
فصل لگاریتم در کتاب ریاضیات سال دوم آمده است. گرچه بچه‌های تجربی در کتاب پیش‌دانشگاهی‌شان هم یک چیزهایی از لگاریتم می‌خوانند. مبحث لگاریتم هم از مباحثی است که دانش‌آموزان به‌سرعت یاد می‌گیرند. هر سال هم که حتماً در کنکور حضور دارد. خیلی حیف است که آدم به‌راحتی از کنار یک تست ساده بگذرد!

| تعداد تست‌ها | تألیفی | سراسری | آزاد |
|--------------|--------|--------|------|
|              | ۶۰     | ۲۱     | ۲۵   |

# بخش ۱ تابع نمایی و لگاریتم پلکان آموزش

## ۱- تابع نمایی

ابتدا تعریفی از تابع نمایی داشته باشیم! تابع  $y = a^x$  که در آن  $a \in \mathbb{R}^+$  و  $a \neq 1$  و  $a > 0$  است و  $x$  یک متغیر می‌باشد، یک تابع نمایی نامیده می‌شود. حالا می‌خواهیم در مورد دامنه و برد تابع  $y = a^x$  بحث کنیم. برای این که به راحتی در مورد آن صحبت کنیم، ابتدا نمودار تابع  $y = a^x$  را در دو حالت رسم می‌کنیم. یک حالت وقتی  $0 < a < 1$  است و حالت دیگر  $a > 1$ . شکل تابع  $y = a^x$  به صورت زیر در می‌آید:



با توجه به دو نمودار سمت راست، تابع  $y = a^x$ ، به ازای  $a > 1$  صعودی اکید و به ازای  $0 < a < 1$  نزولی اکید است.

مشاهده می‌شود که دامنه‌ی تابع  $y = a^x$  برابر  $\mathbb{R}$  یا مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برد تابع برابر بازه‌ی  $(0, +\infty)$  است.

هم چنین با توجه به این که هر خطی که به موازات محور  $x$  ها رسم کنیم، نمودار تابع  $y = a^x$  را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، تابع  $y = a^x$  تابع یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است. وارون تابع نمایی، تابع لگاریتمی است که در ادامه آن را توضیح می‌دهیم.

جدول زیر را مشاهده کنید و روندی را که اعداد دارند مقایسه کنید.

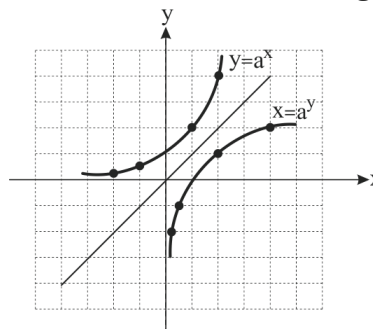
| $x$               | -۳             | -۲            | -۱            | ۰ | ۱             | ۲             | ۳              |
|-------------------|----------------|---------------|---------------|---|---------------|---------------|----------------|
| $3^x$             | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | ۱ | ۳             | ۹             | ۲۷             |
| $(\frac{1}{3})^x$ | ۲۷             | ۹             | ۳             | ۱ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{27}$ |

همان طور که مشاهده می‌کنیم در مورد تابع  $y = 3^x$  به ازای مقادیر منفی  $x$  مقدار تابع کم تر از ۱ بوده و هر چه  $x$  کوچک تر می‌شود مقدار تابع هم کوچک می‌شود. با افزایش مقدار  $x$  مقدار تابع افزایش پیدا کرده و نتیجه می‌گیریم تابع صعودی است. در مورد تابع  $y = (\frac{1}{3})^x$  به ازای  $x$  های منفی مقدار تابع بزرگ تر از یک و به ازای  $x$  های منفی مقدار تابع کوچک تر از یک است. بنابراین با افزایش مقدار  $x$  مقدار  $y$  کاهش پیدا کرده و تابع نزولی است.

## ۲- لگاریتم و تابع لگاریتمی

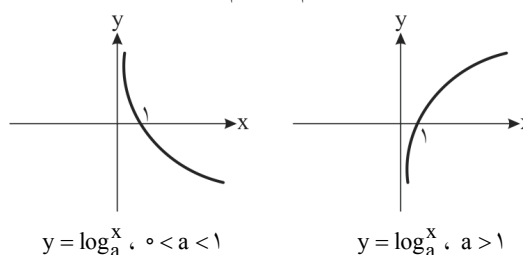
نمودار هر تابع و وارون آن، نسبت به خط  $y = x$  تقارن دارند.

گفتیم که تابع  $y = a^x$  یک تابع معکوس پذیر است. بنابراین در ابتدا نمودار تابع معکوس آن را با استفاده از قرینه کردن نمودار تابع  $y = a^x$  نسبت به خط  $y = x$  به دست می آوریم.



معکوس تابع نمایی، تابع لگاریتمی نام دارد. تابع لگاریتمی به صورت  $y = \log_a^x$  است. نمودار

تابع  $y = \log_a^x$  را به ازای  $a > 1$  و  $0 < a < 1$  رسم می کنیم. ببینید:



### ویژگی های تابع $y = \log_a^x$

- ① دامنه ی تعریف تابع  $y = \log_a^x$  در بازه ی  $(0, +\infty)$  قرار دارد و برد تابع برابر  $\mathbb{R}$  یا همان مجموعه ی اعداد حقیقی است.
- ② تابع  $y = \log_a^x$  یک به یک است. چون هر خطی که به موازات محور  $x$  ها رسم کنیم، نمودار تابع را در یک نقطه قطع خواهد کرد.
- ③ تابع  $y = \log_a^x$  وقتی  $a > 1$  است، صعودی اکید و وقتی  $0 < a < 1$  است، نزولی اکید است.
- ④ هر مقدار قابل قبولی که داشته باشد، مقدار  $y$  به ازای  $x = 1$  برابر صفر می شود.

از بخش «دامنه» در فصل «تابع» به یاد داریم که برای این که  $y = \log_a^x$  تعریف شده باشد، باید داشته باشیم:

- ①  $x > 0$
- ②  $x > 0$  ,  $x \neq 1$

## ۳- قوانین لگاریتم

### ۳-۱- ویژگی های توان و رادیکال

به احتمال زیاد، بیشتر شما با رابطه های «توان» و «رادیکال» آشنا هستید. ولی این جا برای یادآوری، بد نیست که یک مرور دیگری به این رابطه های ساده اما مهم بیاندازیم:

#### ویژگی های توان

- ①  $a^m \times b^m = (ab)^m$
- ②  $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
- ③  $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- ④  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- ⑤  $a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (a \neq 0)$
- ⑥  $(a^m)^n = a^{mn}$
- ⑦  $a^0 = 1$
- ⑧  $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$
- ⑨  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$\log_b a = c \xleftrightarrow{\text{تعريف لگاریتم}} a = b^c$$
$$X = 2^5 = 32$$

## قوانین لگاریتم

- ۱) هر عدد به توان صفر برابر ۱ است.
- ۲) هر عدد به توان ۱ برابر خودش است.
- ۳) توان به پشت لگاریتم منتقل می‌شود.
- ۴) معکوسِ توانِ پایه به پشت لگاریتم منتقل می‌شود.
- ۵) این قاعده به «تغییر مبنا» معروف است.

①  $\log_a 1 = 0$

②  $\log_a a = 1$

③  $\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b \quad (a, b, c \in \mathbb{R}^+, c \neq 1)$

$$\textcircled{7} \log_c^a = \log_c^a - \log_c^b \quad (a, b, c \in \mathbb{R}^+, c \neq 1)$$

⑤  $\log_b a^n = n \log_b a$

$$\textcircled{6} \log_{b^m}^a = \frac{1}{m} \log_b^a$$

$$\textcircled{V} \log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$$

$$\textcircled{\wedge} \log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

9  $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$



(الف  $\log_{10}^{1000}$ )

$(\log_2^9)$

$$(\mathcal{I} \wedge \log^3$$

$$\text{الف) } \log_{\frac{1}{10}} 1000 = \log_{10^{-1}} 10^3 = \frac{3}{-1} \log_{10} 10 = -3$$

ب)  $\log_{\frac{9}{27}} = \log_{\frac{3^2}{3^3}} = \frac{2}{3} \log_{\frac{3}{3}} = \frac{2}{3}$

$$c) \wedge^{\log r} = r^{\log \wedge} = r^{\log r} = r^r \log r = r^r = rv$$



۱- تابع  $y = a^x$ ، برای  $a > 3$  ..... و برای  $0 < a < \frac{1}{3}$  ..... است.

(۴) سعودی - سعودی  
(سراسری - ریاضی - ۱۵)

(۳) صعودی - نزولی

(۲) نزولی - نزولی

(۱) نزولی - صعودی

۲- شکل مقابل نمودار کدام تابع است؟

$$y = |r^x| \quad (1)$$

$$Y = Y^{|X|} \quad (Y$$

$$y = r^{-|x|} \quad (r$$

$$y = |r^{-x}| \quad (4)$$

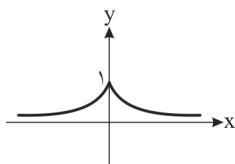
۳- اگر  $\log_4^A = \frac{3}{2}$ ، مقدار A کدام است؟

$$\frac{1}{\lambda} (1$$

$\wedge (\gamma$

$$\frac{1}{16} (3)$$

١٤ (٢)



(آزاد - تجربی - ۸۱)

(۴)  $\frac{5}{4}$

(۳)  $\frac{4}{5}$

(۲)  $-\frac{4}{5}$

(۱)  $-\frac{5}{4}$

(آزاد - ریاضی - ۸۱)

(۴)  $\frac{8}{9}$

(۳)  $\frac{5}{8}$

(۲)  $\frac{9}{8}$

(۱)  $\frac{1}{4}$

(آزاد - ریاضی - ۸۶ - خارج از کشور)

(۴)  $\frac{1}{3a}$

(۳)  $3a$

(۲)  $\frac{a}{a+3}$

(۱)  $a+3$

(آزاد - ریاضی - ۸۵)

(۴)  $\frac{1-k}{k}$

(۳)  $\frac{k-1}{k}$

(۲)  $\frac{k}{1-k}$

(۱)  $\frac{1+k}{k}$

۸ - اگر  $A = \log_2$  را در نظر بگیریم، حاصل  $\log_{\sqrt{200}}$  برابر می شود با:

(۴)  $\frac{A+2}{5}$

(۳)  $\frac{2A+2}{5}$

(۲)  $\frac{3A+2}{5}$

(۱)  $\frac{2A+1}{5}$

(سراسری - ریاضی - ۸۱)

(۴)  $\frac{4}{A}$

(۳)  $\frac{2}{A}$

(۲)  $\frac{A}{2}$

(۱)  $\frac{A}{4}$

(آزاد - ریاضی - ۸۲)

(۴)  $-\frac{1}{6}$

(۳)  $\frac{1}{6}$

(۲)  $\frac{17}{6}$

(۱)  $\frac{19}{6}$

۱۰ - حاصل عبارت  $\left| \log_{\frac{1}{2}} 8 \right| + \log_8 \frac{\sqrt{2}}{4}$  کدام است؟

(آزاد - تجربی - ۸۲)

(۴)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $2$

(۲)  $24$

(۱)  $2\sqrt{6}$

۱۱ - حاصل کسر  $\frac{\log 2 + \log 3 + \log 4}{\log 2 + \frac{1}{2} \log 6}$  کدام است؟

(آزاد - ریاضی - ۸۸ - خارج از کشور)

(۴)  $3$

(۳)  $\frac{1}{3}$

(۲)  $\frac{3}{4}$

(۱)  $2$

۱۲ - حاصل  $\log_6^{2\sqrt{3}} + \log_6^{3\sqrt{2}}$  کدام است؟

(آزاد - تجربی - ۸۳)

(۴)  $2a+1$

(۳)  $a+1$

(۲)  $a+2$

(۱)  $a$

۱۳ - اگر  $\log_{12}^2 + \log_{12}^3 + \log_{12}^4 = a$  باشد، حاصل  $\log_{12}^3 + \log_{12}^6 + \log_{12}^{16}$  کدام است؟

(آزاد - تجربی - ۸۳)

(۴)  $-3$

(۳)  $3$

(۲)  $-2$

(۱) صفر

۱۴ - حاصل  $\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{8}{9}} + \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{9}{10}} + \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{10}{11}} + \dots + \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{31}{32}}$  کدام است؟

(آزاد - تجربی - ۸۸)

(۴)  $-7$

(۳)  $-\frac{1}{7}$

(۲)  $7$

(۱)  $\frac{1}{7}$

۱۵ - حاصل عبارت  $\log_2^2 \times \log_3^3 \times \log_4^4 \times \dots \times \log_{128}^{128}$  کدام است؟

۱۶ - حاصل عبارت  $\log_a^b \cdot \log_b^a + \log_b^c \cdot \log_c^b$  برابر است با:

(۴)  $2$

(۳)  $b+c$

(۲)  $1$

(۱)  $a+b$

۱۷ - اگر  $x = y^3 = \sqrt{a}$  باشد، حاصل  $\frac{1}{3} \log_a^x + \frac{1}{4} \log_a^y$  چه قدر است؟

(۴)  $\frac{2}{3}$

(۳)  $\frac{3}{4}$

(۲)  $\frac{1}{4}$

(۱)  $\frac{4}{5}$

(سراسری - تجربی - ۸۱)

(۴)  $\frac{3}{2}$

(۳)  $2$

(۲)  $\sqrt{2}$

(۱)  $1$

۱۸ - اگر  $4^a = 2\sqrt{2}$ ، لگاریتم  $4a+1$  در پایه ۴ کدام است؟

- ۱۹ - حاصل  $a^{x \log_x b} - b^{x \log_x a}$  کدام است؟  
 (۱) صفر (۲)  $a^a - b^b$  (۳)  $a^b - b^a$  (۴)  $a - b$   
 (آزاد - تجربی - ۸۰)
- ۲۰ - اگر  $\log 2 = x$  و  $\log 3 = y$  باشد، حاصل  $\log_{18} 96$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{2y+3x}{5y+2x}$  (۲)  $\frac{y+5x}{3y+x}$  (۳)  $\frac{y+5x}{2y+x}$  (۴)  $\frac{2y+x}{5y+2x}$
- ۲۱ - حاصل  $\frac{1}{\log_{25} 5!} + \frac{1}{\log_{36} 4!} + \dots + \frac{1}{\log_{25} 5!}$  برابر است با:  
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳۵ (۴) نامعین
- ۲۲ - حاصل  $\log \tan 1^\circ + \log \tan 2^\circ + \dots + \log \tan 89^\circ$  کدام است؟  
 (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲
- ۲۳ - اگر  $a$  و  $b$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 10x + 1 = 0$  باشند، حاصل  $\log a + \log b - \log(a+b)$  کدام است؟ (سراسری - تجربی - ۸۱ - خارج از کشور)  
 (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۱
- ۲۴ - اگر  $\log_7 \sin 2^\circ = a$ ، مقدار  $\log_7 \left( \frac{\sin 1^\circ + \sin 5^\circ}{\sin 4^\circ} \right)$  کدام است؟  
 (۱)  $-1-a$  (۲)  $-1+a$  (۳)  $1-a$  (۴)  $1+a$
- ۲۵ - مقدار  $\log_{10} \frac{1}{\sqrt{10}} + \log \frac{1}{\sqrt{10}}$  چند واحد از  $\log 3$  کم تر است؟  
 (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱
- ۲۶ - مقدار  $\log_{11} \frac{1}{11}$  در کدام بازه است؟  
 (۱)  $[-5, -4]$  (۲)  $[-4, -3]$  (۳)  $[-3, -2]$  (۴)  $[-2, -1]$
- ۲۷ - اگر  $\log_5 x = \frac{4}{3}$  باشد،  $x$  در کدام بازه قرار دارد؟  
 (۱)  $(8, 9)$  (۲)  $(7, 8)$  (۳)  $(9, +\infty)$  (۴)  $(0, 7)$
- ۲۸ - کدام گزینه درست است؟  
 (۱)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{100} > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{10}$  (۲)  $\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} > \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2}$  (۳)  $\log_5 3 > \log_3 5$  (۴)  $\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} > \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2}$   
 (آزاد - ریاضی - ۸۲)
- ۲۹ - حاصل عبارت  $\left[ \log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{5} \right]$  کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)  
 (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۵ (۴) ۳
- ۳۰ - حاصل  $\left[ \log_6^2 \right] + \left[ \log_6^6 \right]$  برابر است با: ([ ] نماد جزء صحیح است.)  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر  
 (آزاد - ریاضی - ۸۱)
- ۳۱ - کدام گزینه نادرست است؟  
 (۱)  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{8}{3} > \log_{\frac{1}{3}} \frac{9}{3}$  (۲)  $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{6} > \log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{6}$  (۳)  $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} > \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}$  (۴)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$
- ۳۲ - حاصل  $A = \log_{(x-2)} (9x^2 - 36x + 38)$  به ازای  $x = 5$  در کدام فاصله است؟  
 (۱)  $2 < A < 3$  (۲)  $3 < A < 4$  (۳)  $4 < A < 5$  (۴)  $5 < A < 6$   
 (آزاد - ریاضی - ۸۴)
- ۳۳ - اگر  $\log 2 = 0/30103$  فرض شود، عدد  $2^{30}$  چند رقمی است؟  
 (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲
- ۳۴ - اگر بدانیم  $\log 2 = 0/3$  است، عدد  $2^{51}$  چند رقمی است؟  
 (۱) دوازده (۲) سیزده (۳) چهارده (۴) پانزده



**پلهی دوم:** محاسبه‌ی مقدار منخرج کسر گام بعدی است:

$$\log 2 + \frac{1}{2} \log 6 = \log 2 + \log \sqrt{6} = \log 2 + \log \sqrt{6} = \log 2\sqrt{6}$$

**پلهی سوم:** با توجه به ویژگی  $\frac{\log a}{\log b} = \log_b^a$  حاصل کسر را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\log 24}{\log 2\sqrt{6}} = \log_{2\sqrt{6}}^{24} = \log_{2\sqrt{6}}^{(2\sqrt{6})^2} = 2 \log_{2\sqrt{6}}^{2\sqrt{6}} = 2$$

**۱۲ - پ:** با توجه به ویژگی  $\log_c^a + \log_c^b = \log_c^{ab}$  حاصل عبارت لگاریتمی را تعیین می‌کنیم:

$$\log_6^{2\sqrt{3}} + \log_6^{2\sqrt{2}} = \log_6^{(2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2})} = \log_6^{4\sqrt{6}} = \log_6^{6^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3} \log_6^6 = \frac{2}{3}$$

**۱۳ - ۳:** پلهی یکم: مقدار  $a$  را به شکل ساده‌تری تعیین می‌کنیم:

$$\log_{12}^2 + \log_{12}^3 + \log_{12}^4 = \log_{12}^{(2 \times 3 \times 4)} = \log_{12}^{24} = \log_{12}^{(12 \times 2)} = \log_{12}^{12} + \log_{12}^2 = a \Rightarrow a = 1 + \log_{12}^2 \Rightarrow \log_{12}^2 = a - 1$$

**پلهی دوم:** با توجه به رابطه‌ی I حاصل عبارت لگاریتمی داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$A = \log_{12}^3 + \log_{12}^6 + \log_{12}^{12} = \log_{12}^{(3 \times 6 \times 12)} = \log_{12}^{216} = \log_{12}^{144 \times 3} = \log_{12}^{144} + \log_{12}^3 = \log_{12}^{12^2} + \log_{12}^3 = 2 \log_{12}^{12} + \log_{12}^3 = 2 + \log_{12}^3$$

$$\Rightarrow A = 2 + a - 1 = a + 1$$

**۱۴ - ۲:** با استفاده از ویژگی  $\log_t^a + \log_t^b + \dots + \log_t^z = \log_t^{ab \dots z}$  حاصل عبارت لگاریتمی داده‌شده را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\log_9^{\frac{1}{9}} + \log_9^{\frac{1}{8}} + \log_9^{\frac{1}{7}} + \dots + \log_9^{\frac{1}{2}} = \log_9^{(\frac{1}{9} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{7} \times \dots \times \frac{1}{2})} = \log_9^{\frac{1}{9!}} = \log_9^{9^{-2}} = \log_9^{9^{-2}} = -2 \log_9^9 = -2$$

**۱۵ - ۱:** پلهی یکم: اگر بخواهیم حاصل  $\log_b^a \times \log_c^b$  را حساب کنیم، چه کار می‌کنیم؟ دست به کار می‌شویم تا حاصل این عبارت را به‌دست آوریم:

$$\log_b^a \times \log_c^b = \frac{\log_b^a}{\log_b^c} = \log_c^a$$

در محاسبه‌ی حاصل این عبارت از دو ویژگی لگاریتم استفاده کردیم.

**پلهی دوم:** نتیجه‌ی به‌دست‌آمده در پلهی یکم را می‌توان به حاصل ضرب تعداد بیش‌تری از لگاریتم‌ها که عدد جلوی لگاریتم مبنای لگاریتم قبلی است، تعمیم داد. بنابراین داریم:

$$\log_2^3 \times \log_3^4 \times \log_4^5 \times \dots \times \log_{12}^{13} = \log_{12}^3 = \log_{12}^3 = \frac{1}{12} \log_{12}^{12} = \frac{1}{12}$$

**۱۶ - ۴:** تنها با دانستن این ویژگی از لگاریتم‌ها که  $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$  است،

حاصل عبارت را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_a^b \cdot \log_b^a + \log_b^c \cdot \log_c^b = \log_a^b \times \frac{1}{\log_b^a} + \log_b^c \times \frac{1}{\log_c^b} = 1 + 1 = 2$$

**۷ - ۶:** با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم، مقدار  $\log_b^a$  را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b} \Rightarrow \log_{\frac{1}{b}}^a = k \Rightarrow \frac{1}{\log_{\frac{1}{b}}^a} = k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_{\frac{1}{b}}^{a \times \frac{1}{b}}} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{b}}^a + \log_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}}} = \frac{1}{1 + \log_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}}} = k$$

$$\Rightarrow 1 + \log_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{k} \Rightarrow \log_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{k} - 1 = \frac{1-k}{k}$$

**۸ - ۶:** پلهی یکم: حاصل  $\log_{\sqrt{200}}^5$  را به ساده‌ترین شکل ممکن به‌دست

$$\log_{\sqrt{200}}^5 = \log_{(200)^{\frac{1}{2}}}^5 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_{200}^5 = \frac{1}{2} \log_{(2^3 \times 5^2)}^5 = \frac{1}{2} \log_{2^3}^5 + \frac{1}{2} \log_{5^2}^5 = \frac{3}{2} \log_{2^3}^5 + \frac{1}{2} \log_{5^2}^5$$

**پلهی دوم:**  $\log 2$  برابر  $A$  در نظر گرفته شده است. پس مقدار  $\log 5$  برابر است با:

$$\log 10 = 1 \Rightarrow \log(2 \times 5) = \log 2 + \log 5 = 1 \xrightarrow{\log 2 = A} A + \log 5 = 1$$

$$\Rightarrow \log 5 = 1 - A$$

**پلهی سوم:** حاصل  $\log_{\sqrt{200}}^5$  برابر است با:

$$\log_{\sqrt{200}}^5 = \frac{3}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 5 = \frac{3}{2} A + \frac{1}{2} (1 - A) = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} = \frac{A+1}{2}$$

**۹ - ۶:** پلهی یکم: مقدار  $\log_{\frac{1}{e}}^e$  را برحسب  $A$  حساب می‌کنیم:

$$\log_{\frac{1}{e}}^e = \log_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{e}}^e = A \Rightarrow \log_{\frac{1}{e}}^e = \frac{1}{2} A$$

**پلهی دوم:** حاصل  $\log_{\sqrt{e}}^{\frac{1}{e}}$  برابر است با:

$$\log_{\sqrt{e}}^{\frac{1}{e}} = \log_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{-1}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} \log_e^e = -2 \log_e^e = -2$$

$$\log_e^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{e}}^e} = \frac{1}{\frac{1}{2} A} = \frac{2}{A} \Rightarrow \log_{\sqrt{e}}^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{e}}^e} = \frac{1}{\frac{1}{2} A} = \frac{2}{A}$$

**۱۰ - ۲:** پلهی یکم: مقدار  $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}$  و  $\log_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$  برابر است با:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}^{-1}}^{\sqrt{2}} = \frac{1}{-1} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} = -3$$

$$\log_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \log_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \log_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3} \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{6}$$

**پلهی دوم:** حاصل عبارت داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\left| \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \right| + \log_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = |-3| - \frac{1}{6} = 3 - \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$$

**۱۱ - ۳:** پلهی یکم: با توجه به ویژگی  $\log a + \log b + \log c = \log abc$

مقدار صورت کسر را حساب می‌کنیم:

$$\log 2 + \log 3 + \log 4 = \log(2 \times 3 \times 4) = \log 24$$

۲۳ - **پلهی یکم:** اگر  $a$  و  $b$  ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم داده‌شده باشند، مجموع ریشه‌ها و حاصل ضرب ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم.

**پلهی دوم:** در معادله‌ی درجه دوم به فرم  $ax^2 + bx + c = 0$  مجموع ریشه‌ها از رابطه‌ی  $S = -\frac{b}{a}$  و حاصل ضرب ریشه‌ها از رابطه‌ی  $P = \frac{c}{a}$  محاسبه می‌شود.

$$S = a + b = -\left(-\frac{1}{1}\right) = 1 \quad \text{بنابراین داریم:}$$

$$P = a \cdot b = \frac{0}{1} = 0/1$$

**پلهی دوم:** حاصل عبارت لگاریتمی را حساب می‌کنیم:

$$\log a + \log b - \log(a+b) = \log ab - \log(a+b) = \log 0/1 - \log 1 = 0$$

$$\log 10^{-1} - \log 10 = -1 - 1 = -2$$

۲۴ - **پلهی یکم:** عبارت مثلثاتی جلوی لگاریتم را ساده می‌کنیم. البته با یادآوری زیر:

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\frac{\sin 10^\circ + \sin 50^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{2 \sin 30^\circ \cos 20^\circ}{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{1}{\sin 20^\circ}$$

**پلهی دوم:** در سوال گفته شده که  $\log_2 \sin 20^\circ = a$  است. داریم:

$$\text{عبارت} = \log_2 \frac{1}{\sin 20^\circ} = \log_2 \frac{1}{\sin 20^\circ} = \log_2 \frac{1}{\sin 20^\circ} = \log_2 \frac{1}{\sin 20^\circ}$$

$$= -\log_2 \sin 20^\circ = -a$$

۲۵ - **پلهی یکم:** مقدار  $\log_2 \frac{1}{10} + \log_{10} \frac{1}{10}$  را حساب می‌کنیم:

$$\log_2 \frac{1}{10} + \log_{10} \frac{1}{10} = \log_2 \left(\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}\right) = \log_2 \frac{1}{100} = \log_2 10^{-2}$$

$$= \log_2 10^{-2} = \log_2 10^{-2} = \log_2 10^{-2} = \log_2 10^{-2}$$

**پلهی دوم:** مقدار  $\log_2 10^{-2}$ ،  $\log_2 10^{-2}$  واحد از  $\log_2 10^{-2}$  کم‌تر است.

۲۶ - **پلهی یکم:** ابتدا باید ببینیم که ۱۰۰۰ بین چه توان‌هایی از ۲۱ قرار دارد:

$$21^2 < 1000 < 21^3 \Rightarrow \frac{1}{21^3} < \frac{1}{1000} < \frac{1}{21^2}$$

$$\Rightarrow 21^{-3} < 0/001 < 21^{-2}$$

**پلهی دوم:** حالا از دو طرف نامساوی بالا، لگاریتم در پایه‌ی ۲۱ می‌گیریم:

$$\log_{21} 21^{-3} < \log_{21} 0/001 < \log_{21} 21^{-2} \Rightarrow -3 < \log_{21} 0/001 < -2$$

یعنی این عدد در بازه‌ی  $[-3, -2]$  قرار دارد.

۲۷ - **پلهی یکم:** مقدار  $x$  را حساب می‌کنیم:

$$\log_5 x = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 5^{\frac{4}{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{625}$$

**پلهی دوم:** حالا باید ببینیم که ۶۲۵ بین کدام دو عدد مکعب کامل قرار دارد:

$$6^3 = 216, 7^3 = 343, 8^3 = 512, 9^3 = 729$$

$$8^3 < 625 < 9^3$$

پس:

**پلهی سوم:** از نامساوی بالا ریشه‌ی سوم می‌گیریم:

$$8 < \sqrt[3]{625} < 9 \Rightarrow x \in (8, 9)$$

۱۷ - **پلهی یکم:** به جای  $x$  و  $y$  مقادیر مساوی با آن برحسب  $a$  را جای‌گزین کرده و مقدار عبارت داده‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$A = \frac{1}{3} \log_a x + \frac{1}{4} \log_a y \xrightarrow{x=a^{\frac{1}{3}}, y=a^{\frac{1}{4}}} A = \frac{1}{3} \log_a a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4} \log_a a^{\frac{1}{4}} \\ = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \log_a a + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \log_a a = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{25}{144}$$

۱۸ - **پلهی یکم:** مقدار  $a$  را حساب می‌کنیم:

$$4^a = 2\sqrt{2} \Rightarrow (2^2)^a = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2^{2a} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

**پلهی دوم:** لگاریتم  $4a+1$  در پایه‌ی ۴ برابر است با:

$$\log_4 (4a+1) = \log_4 (3+1) = \log_4 4 = 1$$

۱۹ - **پلهی یکم:** عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$A = a^{x \log_x b} - b^{x \log_x a} = (a^{\log_x b})^x - (b^{\log_x a})^x$$

**پلهی دوم:** با استفاده از خاصیت  $a^{\log_x b} = b^{\log_x a}$  از خواص لگاریتم

$$A = (b^{\log_x a})^x - (b^{\log_x a})^x = 0$$

مقدار  $A$  را محاسبه می‌کنیم: در واقع پراتر اول را با استفاده از ویژگی گفته‌شده به پراتر دوم تبدیل کردیم. این دو عبارت با هم یکی بودند، فقط قیافه‌شان با هم فرق داشت!

۲۰ - **پلهی یکم:** با استفاده از قاعده‌ی تغییر مبنا تست را حل می‌کنیم:

$$\log_{18} 96 = \frac{\log 96}{\log 18} = \frac{\log 3 \times 2^5}{\log 3^2 \times 2} = \frac{\log 3 + 5 \log 2}{2 \log 3 + \log 2} \\ = \frac{y + 5x}{2y + x} = \frac{5x + y}{x + 2y}$$

۲۱ - **پلهی یکم:** با توجه به ویژگی  $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$  تغییراتی در عبارت

داده‌شده ایجاد می‌کنیم:

$$A = \frac{1}{\log_{25} 35} + \frac{1}{\log_{35} 25} + \dots + \frac{1}{\log_{25} 35} = \log_{25} 35 + \log_{35} 25 + \dots + \log_{25} 35$$

**پلهی دوم:** با استفاده از ویژگی  $\log_c a + \log_a c = \log_c a + \log_a c = \log_c a + \log_a c$  می‌توانیم حاصل نهایی

$$A = \log_{25} 35 + \log_{35} 25 + \dots + \log_{25} 35 = \log_{25} 35 + \log_{35} 25 + \dots + \log_{25} 35 = 1$$

۲۲ - **پلهی یکم:** حاصل عبارت داده‌شده را با استفاده از ویژگی

$$\log_t^a + \log_t^b + \dots + \log_t^z = \log_t^{ab \dots z}$$

$$\log \tan 10^\circ + \log \tan 20^\circ + \dots + \log \tan 80^\circ$$

$$= \log (\tan 10^\circ \times \tan 20^\circ \times \dots \times \tan 80^\circ) = A$$

**پلهی دوم:** با توجه به اتحاد مثلثاتی  $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$  عبارت جلوی

لگاریتم را ساده می‌کنیم:

$$\tan 10^\circ \times \tan 20^\circ \times \tan 30^\circ \times \dots \times \tan 60^\circ \times \tan 70^\circ \times \tan 80^\circ$$

$$= \tan 10^\circ \times \tan 20^\circ \times \tan 30^\circ \times \dots \times \cot 30^\circ \times \cot 20^\circ \times \cot 10^\circ$$

$$= (\tan 10^\circ \times \cot 10^\circ) \times (\tan 20^\circ \times \cot 20^\circ) \times \dots = 1$$

**پلهی سوم:** بنابراین حاصل لگاریتم برابر است با:

$$A = \log 1 = 0$$

۲۸ - گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ - مقدار هر یک از دو لگاریتم را بر حسب ضربی از  $\log_4^1$  حساب

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}} = \log_{4^{-1}}^{100^{-2}} = \frac{-2}{-1} \log_4^1 = 2 \log_4^1$$

می‌کنیم. داریم:

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}} = \log_{4^{-1}}^{100^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{-1} \log_4^1 = -2 \log_4^1$$

با توجه به این که  $\log_4^1 > 0$  است، داریم:

$$2 \log_4^1 > -2 \log_4^1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}} > \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}}$$

پس گزینه ۱ گزینه‌ی درست است. به جواب صحیح رسیدیم. برای کامل شدن پاسخ دیگر گزینه‌ها را هم بررسی می‌کنیم.

۲ - دو طرف را به ضربی از  $\log_3^3$  تبدیل می‌کنیم:

$$\log_{\frac{1}{2}}^3 = \log_{4^{-1}}^3 = -\log_4^3$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^3 = \frac{1}{\log_4^3}$$

$\log_4^3$  عددی مثبت و بزرگ‌تر از ۱ است. پس معکوس آن عددی مثبت و کوچک‌تر از ۱ است. پس این عدد مثبت همواره از عدد منفی  $-\log_4^3$  بزرگ‌تر است. بنابراین گزینه ۲ نادرست است.

۳ -  $\log_3^5$  یک عدد مثبت و بزرگ‌تر از ۱ است. اما  $\log_3^3$  یک عدد مثبت کوچک‌تر از ۱ می‌باشد. پس رابطه‌ی  $\log_3^3 > \log_3^5$  یک رابطه‌ی نادرست است.

$$\log_{\frac{1}{2}}^2 = \log_{4^{-1}}^2 = -\log_4^2 = -1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^3 = \log_{4^{-1}}^3 = -\log_4^3 \xrightarrow{\log_4^3 > 1} -\log_4^3 < -1 \Rightarrow -\log_4^2 > -\log_4^3 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^2 > \log_{\frac{1}{2}}^3$$

به رابطه‌ای عکس رابطه‌ی موجود در گزینه ۴ رسیدیم. پس گزینه ۴ هم نادرست است.

۲۹ - پله‌ی یکم: عبارت لگاریتمی را ساده می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt{5}} = \log_{2^{\frac{1}{3}}}^{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} \log_2^5 = \frac{3}{2} \log_2^5$$

پله‌ی دوم: مقدار  $\log_2^5$  عددی بین ۲ و  $\frac{5}{2}$  است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$2 < \log_2^5 < \frac{5}{2} \Rightarrow 3 < \frac{3}{2} \log_2^5 < \frac{15}{4} \Rightarrow 3 < \log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt{5}} < \frac{15}{4} \Rightarrow \left[ \log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt{5}} \right] = 3$$

۳۰ - پله‌ی یکم: محدوده‌ی  $\log_6^2$  و  $\log_6^3$  را تعیین می‌کنیم:

$$\log_6^1 < \log_6^2 < \log_6^3 \Rightarrow 0 < \log_6^2 < 1$$

$$\log_6^4 < \log_6^5 < \log_6^6 \Rightarrow 2 < \log_6^5 < 3$$

پله‌ی دوم: حاصل عبارت داده‌شده برابر است با:

$$[\log_6^2] + [\log_6^3] = 0 + 2 = 2$$

۳۱ - گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ - برای مقایسه‌ی دو عبارت لگاریتمی، اگر پایه‌ی لگاریتم عددی بین ۰ و ۱ بود، در این صورت هر چه قدر عدد جلوی لگاریتم کوچک‌تر باشد حاصل عبارت لگاریتمی بزرگ‌تر است. پس در این جا  $\log_{\frac{1}{3}}^8$  بزرگ‌تر

از  $\log_{\frac{1}{3}}^9$  است و این گزینه درست است.

۲ -  $\log_6^5$  عددی بزرگ‌تر از یک است، اما  $\log_6^6$  عددی کوچک‌تر از یک است. پس رابطه‌ی  $\log_6^5 > \log_6^6$  درست است.

۳ -  $\log_3^2$  عددی است کوچک‌تر از یک اما  $\log_{\frac{1}{4}}^5 = \log_{4^{-1}}^5 = -\frac{1}{2} \log_4^5$  عددی است منفی. پس رابطه‌ی  $\log_{\frac{1}{4}}^5 > \log_3^2$  نادرست است.

$$\log_4^{125} = \log_{2^2}^{5^3} = \frac{3}{2} \log_2^5$$

$$\log_2^{25} = \log_2^{5^2} = 2 \log_2^5$$

$$2 \log_2^5 > \frac{3}{2} \log_2^5 \Rightarrow \log_2^{25} > \log_4^{125}$$

۳۲ - پله‌ی یکم: مقدار A را به ازای  $x=5$  به دست می‌آوریم:

$$x=5 \Rightarrow A = \log_3^{(225-180+38)} = \log_3^{83}$$

پله‌ی دوم: باید مشخص کنیم عدد ۸۳ بین چه توان‌هایی از عدد ۳ قرار دارد.

$$\text{در مبنای ۳ لگاریتم می‌گیریم. } 83 < 3^5 < \log_3^{83} < \log_3^{3^4} < 3^3 < 83$$

$$\Rightarrow 4 < \log_3^{83} < 5 \Rightarrow 4 < A < 5$$

۳۳ - چشم‌انداز: اگر عدد x بین دو عدد  $10^n$  و  $10^{n+1}$  قرار داشته باشد،  $n+1$  رقمی محسوب می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$10^n \leq x < 10^{n+1} \Leftrightarrow \log 10^n \leq \log x < \log 10^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow n \log 10 \leq \log x < (n+1) \log 10 \Leftrightarrow n \leq \log x < n+1$$

پس اگر لگاریتم عددی بین n و n+1 باشد، عدد n+1 رقمی است.

پله‌ی یکم: مقدار  $\log_2^{30}$  را حساب می‌کنیم:

$$\log_2^{30} = 30 \log_2^2$$

پله‌ی دوم: چون  $\log_2^2 = 0.30103$  است، خواهیم داشت:

$$30 \log_2^2 = 30 \times 0.30103 \approx 9.03$$

بنابراین عدد  $2^{30}$ ، ۱۰ رقمی است.

۳۴ - پله‌ی یکم: مقدار  $\log_5$  برابر است با:

$$\log_5 = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{5}} = \log_2^{\frac{1}{5}} - \log_2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{10}$$

پله‌ی دوم: تعداد ارقام عدد  $5^{21}$  را حساب می‌کنیم:

$$\log 5^{21} = 21 \log 5 = 21 \times 0.7 = 14.7$$

بنابراین عدد  $5^{21}$ ، پانزده رقمی است.

# بخش ۲ معادله‌ها و نامعادله‌های نمایی و لگاریتمی پلکان آموزش

## ۱ - معادله‌های نمایی

هنگامی که دو عدد توان‌دار با هم برابر هستند، اگر پایه‌هایشان برابر باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم که توان‌هایشان هم برابر است:

$$a^{\circ} = a^{\circ} \Rightarrow \circ = \circ$$

۱ - معادله‌ی  $16^x + 4^x - 2 = 0$  چند ریشه حقیقی دارد؟

۴) صفر

۳) ۴

۲) ۲

۱) ۱

## ۲ - معادله‌های لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی و نمایی، ابتدا دامنه‌ی تعریف تابع را تعیین می‌کنیم. سپس با استفاده از قوانین لگاریتم‌ها که در بخش قبل آموختیم، معادله‌ی لگاریتمی را حل می‌کنیم. در نهایت که جواب‌های معادله را به دست آوریم، آن‌ها را محض اطمینان در معادله‌ی اصلی چک می‌کنیم که جواب اضافی به دست نیاورده باشیم.

منظور از  $\circ$  در این جا یک چندجمله‌ای است که متغیری که می‌خواهیم تعیین کنیم در آن قرار دارد.

یک حالت از معادلاتی که امکان دارد با آن برخورد کنیم، معادلات به فرم  $\log_{\circ} a = a$  است. با شرط این که  $\circ > 0$  و  $\circ \neq 1$  است، ابتدا دامنه‌ی تعریف تابع را تعیین می‌کنیم. سپس با استفاده از رابطه‌ی  $\circ = \circ^a$  معادله را حل می‌کنیم.

حالت دیگر معادلات لگاریتمی، تساوی دو عبارت لگاریتمی است. در صورتی که پایه‌های دو عبارت لگاریتمی برابر نباشد، ابتدا آن‌ها را با استفاده از قوانین لگاریتم یکسان می‌کنیم. سپس با مساوی قرار دادن عبارت‌های جلوی دو لگاریتم، معادله را حل می‌کنیم. به توضیح ریاضی زیر توجه کنید:

$$\log_a^{\circ} = \log_a^{\circ} \xrightarrow[\substack{\circ > 0, \circ \neq 1 \\ a > 0, a \neq 1}]{\circ > 0} \circ = \circ$$

(تمرین کتاب ریاضی عمومی رشته‌ی تجربی)

۱) معادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف)  $\log_4^{(x-1)} = 3$

ب)  $2 \log x - \log(x+1) = 1$

ج)  $\log(2x-1) + \log(x-7) = \log 7$

الف)  $\log_4^{(x-1)} = 3 \Rightarrow x-1 = 2^3 = 8 \Rightarrow 9$

ب)  $2 \log x - \log(x+1) = 1 \Rightarrow \log x^2 - \log(x+1) = 1$

$$\log \frac{x^2}{x+1} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x+1} = 10 \Rightarrow x^2 = 10x + 10 \Rightarrow x^2 - 10x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{10 + \sqrt{140}}{2} \\ x_2 = \frac{10 - \sqrt{140}}{2} \end{cases}$$

از بین این دو جواب فقط  $x_1$  قابل قبول است چون  $x_2$  عبارت جلوی لگاریتم‌ها را منفی می‌کند.

$$\text{ج) } \log(2x-1) + \log(x-7) = \log 7 \Rightarrow \log(2x-1)(x-7) = \log 7 \Rightarrow (2x-1)(x-7) = 7$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 15x + 7 = 7 \Rightarrow 2x^2 - 15x = 0 \Rightarrow x(2x-15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غلق} \\ x=\frac{15}{2} \end{cases}$$

این معادله فقط یک جواب داشته و  $x = \frac{15}{2}$  قابل قبول است.

(سراسری - تجربی - ۸۲)

$$۲ - \text{اگر } \left| \frac{\log 5}{\log 2} \right| = \frac{\log 2}{\log 5} \text{، مقدار } x \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{2} \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

(آزاد - تجربی - ۸۲)

$$۳ - \text{جواب معادله } \log_{\sqrt{3}}^x + \log_{\sqrt{3}}^3 = \log_9^x \text{ کدام است؟}$$

$$x = 3^4 \quad (۴)$$

$$x = 3^5 \quad (۳)$$

$$x = 3^2 \quad (۲)$$

$$x = 3^2 \quad (۱)$$

(آزاد - تجربی - ۸۷ - خارج از کشور)

$$۴ - \text{معادله } \log(x-1) + \log(x-2) = \log(x^2+2) \text{ چند ریشه حقیقی دارد؟}$$

$$۳ \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$۱ \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

(سراسری - ریاضی - ۸۵)

$$۵ - \text{اگر } 2\log(x-2) = \log(x+10) \text{، آنگاه } \log_4(x+2) \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

(سراسری - ریاضی - ۸۷)

$$۶ - \text{اگر } \log(x-2) = 2\log 2 - \log(x-4) \text{، حاصل } \log_9(x-3) \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$-۱ \quad (۳)$$

$$۱ \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

(سراسری - تجربی - ۸۳)

$$۷ - \text{اگر } \log_{\frac{2}{x}} + \log(x+1) = ۱ \text{ باشد، لگاریتم عدد } x \text{ در پایه } ۸ \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (۱)$$

(سراسری - ریاضی - ۸۵ - خارج از کشور)

$$۸ - \text{از معادله لگاریتمی } 2\log x = 1 + \log(x + \frac{1}{5}) \text{، مقدار } \log_9(2x+1) \text{ کدام است؟}$$

$$۲ \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$-۱ \quad (۱)$$

(سراسری - ریاضی - ۸۷ - خارج از کشور)

$$۹ - \text{اگر } x = 8\log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \text{ باشد، لگاریتم عدد } 4(x+3) \text{ در پایه } x \text{ کدام است؟}$$

$$۳ \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۱)$$

(سراسری - ریاضی - ۸۸ - خارج از کشور)

$$۱۰ - \text{از تساوی } \log(2x-1) + \frac{1}{4}\log x^2 = \log 3 \text{، مقدار لگاریتم } \frac{x}{3} \text{ در مبنای } ۴ \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{1}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۱)$$

(سراسری - تجربی - ۸۶ - خارج از کشور)

$$۱۱ - \text{اگر } \log_4^2 = \alpha^{-2} \text{ باشد، } 4^{\alpha-2} \text{ کدام است؟}$$

$$۱۸ \quad (۴)$$

$$۹ \quad (۳)$$

$$۶ \quad (۲)$$

$$\frac{9}{2} \quad (۱)$$

(سراسری - ریاضی - ۸۶)

$$۱۲ - \text{از تساوی } \log_9(2x-1) + \log_9(3x-5) = ۱ \text{، مقدار } \log_4(6x+3) \text{ کدام است؟}$$

$$۵ \quad (۴)$$

$$۴ \quad (۳)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

$$۱۳ - \text{حاصل ضرب ریشه‌های معادله } (\log_3^x)^2 + 4\log_9^x = ۸ \text{ چند است؟}$$

$$\frac{1}{25} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{16} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{12} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{9} \quad (۱)$$

(آزاد - تجربی - ۸۱)

$$۱۴ - \text{معادله } \log(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = \log x + \log(x+1) + \log(x+3) \text{ چند ریشه حقیقی دارد؟}$$

$$\text{صفر} \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

(آزاد - تجربی - ۸۵)

$$۱۵ - \text{معادله } \log x + \log(x+1) + \log(x+2) = \log 6 \text{ چند ریشه دارد؟}$$

$$۱ \quad (۴)$$

$$\text{صفر} \quad (۳)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

۱۶ - لگاریتم عددی در پایه‌ی ۵، چهار واحد از لگاریتم مجذور معکوس این عدد در پایه‌ی ۲۵ بیش‌تر است. لگاریتم این عدد در پایه‌ی ۱۲۵ برابر است با:

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{3}{5}$  (۴)  $\frac{1}{3}$  (آزاد - ریاضی - ۸۱)
- ۱۷ - اگر  $\frac{1}{6} - \frac{1}{\log_a^2} = \frac{1}{\log_a^2}$  باشد، آن‌گاه:

- (۱)  $a = 8$  (۲)  $a = \frac{1}{8}$  (۳)  $a = \frac{1}{64}$  (۴)  $a = 64$  (آزاد - ریاضی - ۸۶)
- ۱۸ - معادله  $\log_4^x + \log_x^3 = 1$  چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (سراسری - ریاضی - ۸۸)
- ۱۹ - از معادله‌ی  $\log_3^{(x^2-1)} = 1 + \log_3^{(x+3)}$ ، مقدار لگاریتم  $(x-3)$  در مبنای ۴ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{3}{2}$  (سراسری - ریاضی - ۸۸)
- ۲۰ - کدام عدد جواب معادله  $5^{2x} - 8(5^x) + 15 = 0$  است؟

- (۱)  $\log_5^3$  (۲)  $\log_3^5$  (۳)  $\log_3^4$  (۴)  $\log_4^3$  (آزاد - ریاضی - ۸۱)
- ۲۱ - اگر  $\log a$  و  $\log b$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 4mx - 3 = 0$  باشد آن‌گاه مقدار کسر  $\frac{\log ab}{\log a \cdot \log b}$  برابر است با:

- (۱)  $\frac{2m}{30}$  (۲)  $-\frac{2m}{30}$  (۳)  $\frac{2m}{15}$  (۴)  $-\frac{2m}{15}$  (سراسری - تجربی - ۸۷ - خارج از کشور)
- ۲۲ - کدام یک از مقدارهای زیر جواب دستگاه دو معادله دو مجهولی  $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x = \log 50 - \log 5 \end{cases}$  می‌باشند؟

- (۱)  $x = 100$  و  $y = 100$  (۲)  $x = 10$  و  $y = 20$  (۳)  $x = 1$  و  $y = 100$  (۴)  $x = 2$  و  $y = 10$  (سراسری - تجربی - ۸۷ - خارج از کشور)
- ۲۳ - از دو معادله‌ی  $\log(y+2) = 1$  و  $\log(y-x) + \log(4x+y) = 2$ ، مقدار  $x$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (آزاد - ریاضی - ۸۷)
- ۲۴ - اگر  $\log xy^2 = 2$  و  $\log x^2y = 4$  باشد، حاصل  $\log xy^4$  چه قدر است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۸ (۴) ۶ (سراسری - تجربی - ۸۵)
- ۲۵ - اگر  $4\sqrt{2} = 4^x = \log y$  و  $1 + \log \sqrt{x+1} = \log y$  مقدار  $y$  کدام است؟

- (۱)  $7/5$  (۲)  $12/5$  (۳) ۱۵ (۴) ۲۵
- ۲۶ - حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی  $16x^3 = x^{\log_2^x}$  برابر چند است؟

- (۱) ۸ (۲)  $\frac{1}{8}$  (۳) ۱۶ (۴)  $\frac{1}{16}$
- ۲۷ - مجموع ارقام عدد  $a+b$  از دستگاه معادلات  $\begin{cases} \log_{25}^a - \log_5^b = 1 \\ a + 5b = 30 \end{cases}$  چند است؟  $(a, b \in \mathbb{Z})$

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰
- ۲۸ - معادله‌ی  $(2\log \sqrt{x(x+1)} - 3\log \sqrt[3]{x}) = x+7$  چند جواب طبیعی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیش از ۲

### ۳ - نامعادله‌های نمایی

برای حل نامعادله‌هایی به صورت  $a^x \geq a^0$  دو حالت را در نظر می‌گیریم:

① وقتی پایه بزرگ‌تر از ۱ باشد، جهت نامساوی تغییری نمی‌کند؛ یعنی:

$$a^x \geq a^0 \xrightarrow{a > 1} x \geq 0$$

② وقتی پایه بین صفر و یک باشد، جهت نامساوی عوض می‌شود؛ یعنی:

$$a^x \geq a^0 \xrightarrow{0 < a < 1} x \leq 0$$

جواب نامعادله‌های زیر را تعیین کنید.

الف)  $2^{3x-2} > 2^x$       ب)  $(\frac{1}{4})^{5x} < (\frac{1}{4})^{3x+4}$

الف)  $2^{3x-2} > 2^x \xrightarrow{2>1} 3x-2 > x \Rightarrow 2x > 2 \Rightarrow x > 1$

ب)  $(\frac{1}{4})^{5x} < (\frac{1}{4})^{3x+4} \xrightarrow{\frac{1}{4}<1} 5x > 3x+4 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2$



## ۴ - نامعادلات لگاریتمی

با توجه به مقدار  $a$  در تابع  $y = \log_a^x$  با ۲ حالت روبه‌رو هستیم:

① یک حالت وقتی است که  $a > 1$  است. در این حالت جهت نامعادله برای حل عوض نخواهد شد. یعنی:

$$\log_a^M \geq \log_a^N \xrightarrow{a>1, M, N>0} M \geq N$$

$$\log_a^M \geq b \xrightarrow{a>1, M>0} M \geq a^b$$

② حالت دیگر حالتی است که  $0 < a < 1$  باشد. در این حالت برای حل نامعادله، جهت آن عوض خواهد شد. یعنی:

$$\log_a^M \geq \log_a^N \xrightarrow{0<a<1, M, N>0} M \leq N$$

$$\log_a^M \geq b \xrightarrow{0<a<1, M>0} M \leq a^b$$

جواب نامعادله‌ی  $\log_3^{5x+12} > \log_3^{2x-9}$  را تعیین کنید.

مبنای لگاریتم بزرگ‌تر از ۱ است. پس جهت نامساوی عوض نمی‌شود:

$$\log_3^{5x+12} > \log_3^{2x-9} \Rightarrow 5x+12 > 2x-9 \Rightarrow 3x > -21 \Rightarrow x > -7$$

۲۹ - مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی  $(\frac{1}{4})^{5x-1} > 64$  کدام است؟

(۴)  $x > -2$

(۳)  $x > -1$

(۲)  $x < -1$

(۱)  $x < -2$

۳۰ - مجموعه جواب نامعادله  $\log_{\frac{x+2}{10}}^{\frac{x+2}{10}} < -1$  کدام است؟

(۴)  $-\frac{13}{10} < x < 3$

(۳)  $\frac{13}{10} < x < 2$

(۲)  $-2 < x < \frac{13}{10}$

(۱)  $-2 < x < -\frac{13}{10}$

۳۱ - مجموعه جواب نامعادله  $\log_{\frac{x+1}{9}}^{\frac{x+1}{9}} < \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$  کدام است؟

(۴)  $x > 26$

(۳)  $1 < x < 26$

(۲)  $-26 < x < 1$

(۱)  $x > 1$

۳۲ - کدام عدد می‌تواند جواب نامعادله‌ی  $\sqrt[5]{2 \log x^3} > 85^{\frac{1}{5}}$  باشد؟

(۴) ۱۱

(۳) ۱۰

(۲) ۹

(۱) ۸

## پاسخ تست‌های پلکان آموزش

**پله‌ی دوم:** معادله‌ی لگاریتمی را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\log(x-1) + \log(x-2) &= \log(x-1)(x-2) = \log(x^2 - 3x + 2) \\ &= \log(x^2 + 2) \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 - x^2 + 3x = 0 \\ &\Rightarrow x(x^2 - x + 3) = 0\end{aligned}$$

عبارت درجه‌ی دوم داخل پرانتز فاقد ریشه است. (چرا؟) تنها جواب به‌دست‌آمده  $x=0$  است. ولی با توجه به دامنه‌ی تعریف تعیین‌شده در پله‌ی یکم، این مقدار غیرقابل قبول است. پس **صفر** ریشه‌ی حقیقی دارد.

**۵- پله‌ی یکم:** معادله‌ی لگاریتمی را حل کرده و مقدار  $x$  را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$\begin{aligned}2\log(x-2) &= \log(x+10) \Rightarrow \log(x-2)^2 = \log(x+10) \\ &\Rightarrow (x-2)^2 = x+10 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x+10 \\ &\Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+1) = 0 \Rightarrow x=6, x=-1\end{aligned}$$

مقدار  $x=-1$  غیرقابل قبول است. چون عبارت  $x-1$  منفی می‌شود و چون این عبارت جلوی لگاریتم قرار دارد، منفی شدن آن به هیچ عنوان پذیرفته نیست! پس تنها جواب قابل قبول  $x=6$  است.

**پله‌ی دوم:** به‌ازای  $x=6$  عبارت لگاریتمی داده‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_4(x+2) = \log_4(6+2) = \log_4^8 = \log_4^{2^3} = \frac{3}{4}\log_4^2 = \frac{3}{4}$$

**۶- پله‌ی یکم:** محاسبه‌ی مقدار  $x$  اولین گام در حل تست است:

$$\begin{aligned}\log(x-2) &= 2\log 2 - \log(x-4) = \log 2^2 - \log(x-4) \\ &= \log 4 - \log(x-4) \Rightarrow \log(x-2) = \log\left(\frac{4}{x-4}\right) \\ &\Rightarrow x-2 = \frac{4}{x-4} \Rightarrow (x-2)(x-4) = 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 4 \\ &\Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0\end{aligned}$$

مقدار  $\Delta$  برای این معادله‌ی درجه‌ی ۲ برابر ۲۰ است. پس ریشه‌های معادله برابرند با:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{5} \\ x = 3 + \sqrt{5} \end{cases}$$

دلیل این‌که  $x = 3 - \sqrt{5}$  غیرقابل قبول است، این است که به‌ازای آن، عبارت جلوی لگاریتم در معادله‌ی داده‌شده منفی می‌شود.

**۱- پله‌ی یکم:** ریشه‌های معادله‌ی نمایی را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned}16^x + 4^x - 2 &= 0 \Rightarrow (4^2)^x + 4^x - 2 = 0 \Rightarrow (4^x)^2 + 4^x - 2 = 0 \\ &\xrightarrow{4^x=a} a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow a = -2, a = 1\end{aligned}$$

**پله‌ی دوم:** مقدار  $a=-2$  غیرقابل قبول است. چون معادله‌ی  $4^x = -2$  فاقد ریشه‌ی حقیقی است. پس فقط  $a=1$  قابل قبول است:

$$a=1 \Rightarrow 4^x = 1 \Rightarrow x=0$$

بنابراین معادله‌ی داده‌شده تنها **۱ ریشه‌ی حقیقی** دارد.

**۲- چشم‌انداز:** به  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  دترمینان ماتریس  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  می‌گویند و حاصل آن برابر  $ad - bc$  است.

**پله‌ی یکم:** حاصل دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\left| \begin{matrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{matrix} \right| &= (\log 5 \times \log 5) - (\log 2 \times \log 2) \\ &= (\log 5)^2 - (\log 2)^2 = (\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2) \\ &= (\log \frac{5}{2})(\log 10) = \log \frac{5}{2}\end{aligned}$$

**پله‌ی دوم:** مقدار  $x$  را به‌دست می‌آوریم:

$$\log(3x-2) = \log \frac{5}{2} \Rightarrow 3x-2 = \frac{5}{2} \Rightarrow 3x = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

**۳- پله‌ی یکم:** حاصل عبارت لگاریتمی سمت چپ تساوی را حساب می‌کنیم:

$$\log \sqrt[3]{3} + \log \sqrt[3]{3} = \log \sqrt[3]{3^2} + \log \sqrt[3]{3} = \frac{1}{3}\log 3^2 + \frac{1}{3}\log 3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

**پله‌ی دوم:** محاسبه‌ی مقدار  $x$  به‌سادگی امکان‌پذیر است:

$$\log_4^x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 9^{\frac{5}{2}} = (3^2)^{\frac{5}{2}} = 3^5 \Rightarrow x = 3^5$$

**۴- پله‌ی یکم:** دامنه‌ی تعریف عبارت‌های لگاریتمی را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$1) \ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$2) \ x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

با اشتراک‌گیری بین دو جواب به‌دست‌آمده، دامنه‌ی تعریف تابع به‌صورت  $x > 2$  در می‌آید. با این دامنه‌ی تعریف تعیین‌شده عبارت  $x^3 + 2$  که جلوی لگاریتم قرار دارد، عبارت لگاریتمی را تعریف‌نشده نمی‌کند. پس خیال‌مان از این بابت راحت است!

۱۱ - **پلهی یکم:**  $\alpha$  را به دست می آوریم:

$$\log_7^{12} = \alpha \Rightarrow \log_7^{(2 \times 3)} = \log_7^2 + \log_7^3 = \log_7^2 + \log_7^3 = 2 + \log_7^3$$

**پلهی دوم:**  $4^{\alpha-2}$  برابر است با:

$$4^{\alpha-2} = 4^{(2+\log_7^3-2)} = 4^{\log_7^3} = 3^{\log_7^4} = 3^2 = 9$$

۱۲ - **پلهی یکم:** مقدار  $x$  برابر است با:

$$\log_5^{(2x-1)} + \log_5^{(3x-5)} = \log_5^{(2x-1)(3x-5)} = 1$$

$$\Rightarrow (2x-1)(3x-5) = 5 \Rightarrow 6x^2 - 13x + 5 = 5$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 13x = 0 \Rightarrow x(6x-13) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{13}{6} \end{cases}$$

$x=0$  به این دلیل غیرقابل قبول است که عبارت جلوی لگاریتمها به یک عدد منفی تبدیل می شود.

**پلهی دوم:** به ازای  $x = \frac{13}{6}$  مقدار عبارت لگاریتمی داده شده را حساب

$$\log_7^{(6x+3)} = \log_7^{(13+3)} = \log_7^{16} = \log_7^{2^4} = 4 \log_7^2 = 4 \quad \text{می کنیم:}$$

۱۳ - **پلهی یکم:** اولین گام برای حل تست، تعیین ریشه های معادله ی

لگاریتمی است. در نتیجه داریم:

$$(\log_3^x)^2 + 4 \log_3^x = (\log_3^x)^2 + 4 \log_3^x = (\log_3^x)^2 + 2 \log_3^x = 8$$

$$\log_3^x = A$$

$$\Rightarrow A^2 + 2A = 8 \Rightarrow A^2 + 2A - 8 = 0 \Rightarrow (A+4)(A-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -4 \\ A = 2 \end{cases}$$

**پلهی دوم:** با توجه به مقدارهای به دست آمده برای  $\log_3^x$ ، مقدار  $x$  را حساب

$$\log_3^x = -4 \Rightarrow x_1 = 3^{-4} = \frac{1}{81} \quad \text{می کنیم:}$$

$$\log_3^x = 2 \Rightarrow x_2 = 3^2 = 9$$

**پلهی سوم:** حاصل ضرب ریشه های معادله برابر است با:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{81} \times 9 = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$$

۱۴ - **پلهی یکم:** عبارت لگاریتمی سمت راست تساوی را ساده می کنیم:

$$\log x + \log(x+1) + \log(x+3) = \log x(x+1)(x+3)$$

$$= \log x(x^2 + 4x + 3) = \log(x^3 + 4x^2 + 3x)$$

**پلهی دوم:** با توجه به تساوی موجود، عبارت های جلوی لگاریتمها را با

هم برابر قرار می دهیم:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 4x^2 + 3x \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

**پلهی سوم:** توجه داشته باشید که  $x = -1$  غیرقابل قبول است، چون به

غیر از  $\log(x+3)$ ، عبارت جلوی بقیه ی لگاریتمها یا صفر می شود یا

برابر یک عدد منفی. پس  $x = 1$  تنها جواب قابل قبول است و این معادله

۱ ریشه ی حقیقی دارد.

**پلهی دوم:** با تعیین شدن مقدار  $x$  حاصل عبارت لگاریتمی داده شده را محاسبه

$$\log_5^{(x-3)} = \log_5^{(3+\sqrt{5}-3)} = \log_5^{\sqrt{5}} = \log_5^{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \log_5^5 = \frac{1}{2} \quad \text{می کنیم:}$$

۷ - **پلهی یکم:** معادله ی لگاریتمی را حل می کنیم:

$$\log \frac{y}{x} + \log(x+1) = \log\left(\frac{y}{x}\right)(x+1) = 1 \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)(x+1) = 1^0$$

$$\Rightarrow 2(x+1) = 1^0 x \Rightarrow 2x+2 = 1^0 x \Rightarrow 8x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

مقدار  $x = \frac{1}{4}$  قابل قبول است. چون هیچ کدام از عبارت های لگاریتمی را تعریف نشده نمی کند.

**پلهی دوم:** لگاریتم  $x$  را در پایه ی ۸ حساب می کنیم:

$$\log_8^x = \log_8^{\frac{1}{4}} = \log_8^{2^{-2}} = \frac{-2}{3} \log_8^2 = -\frac{2}{3}$$

۸ - **پلهی یکم:**  $x$  را حساب می کنیم:

$$2 \log x = 1 + \log\left(x + \frac{12}{5}\right) \Rightarrow \log x^2 = \log 1^0 \left(x + \frac{12}{5}\right)$$

$$\Rightarrow x^2 = 1^0 x + 24$$

$$x^2 - 1^0 x - 24 = 0 \Rightarrow (x-12)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 12, x = -2$$

$x = -2$  غیر قابل قبول است. پس  $x = 12$  تنها ریشه ی معادله است.

**پلهی دوم:** به ازای  $x = 12$  مقدار عبارت لگاریتمی را حساب می کنیم:

$$\log_5^{(2x+1)} = \log_5^{(24+1)} = \log_5^{25} = \log_5^{5^2} = 2 \log_5^5 = 2$$

۹ - **پلهی یکم:** حل معادله ی لگاریتمی شرط اول برای رسیدن به جواب

تست است:

$$x = 8 \log_4^{\sqrt[3]{2}} = 8 \log_4^{\frac{2}{2}} = 8 \left(\frac{2}{2}\right) \log_4^2 = 8 \times \frac{3}{4} = 2 \times 3 = 6$$

**پلهی دوم:** مقدار لگاریتم  $4(x+3)$  در پایه ی  $x$  برابر است با:

$$\log_x^{4(x+3)} = \log_x^{4(6+3)} = \log_x^{(4 \times 9)} = \log_x^{36} = \log_x^{6^2} = 2 \log_x^6 = 2$$

۱۰ - **پلهی یکم:**  $x$  را حساب می کنیم:

$$\log(2x-1) + \frac{1}{2} \log x^2 = \log 3 \Rightarrow \log(2x-1) + \log \sqrt{x^2}$$

$$= \log(2x-1) + \log x = \log(2x-1)x = \log 3 \Rightarrow (2x-1)x = 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x = 3 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow (2x-3)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ x=-1 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

**پلهی دوم:** مقدار لگاریتم  $\frac{x}{3}$  در مبنای ۴ برابر است با:

$$\log_{\frac{x}{3}}^{\frac{x}{3}} = \log_{\frac{x}{3}}^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{x}{3}}^{2^{-1}} = \frac{-1}{2} \log_{\frac{x}{3}}^2 = -\frac{1}{2}$$

۱۹ - **پله‌ی یکم:** مقدار  $x$  را حساب می‌کنیم:

$$\log_3(x^2-1) = 1 + \log_3(x+2) \Rightarrow \log_3(x^2-1) - \log_3(x+2) = \log_3 \frac{x^2-1}{x+2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-1}{x+2} = 3 \Rightarrow x^2-1 = 3x+6 \Rightarrow x^2-3x-7=0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+2)=0 \Rightarrow x=5, x=-2$$

**پله‌ی دوم:** به‌ازای  $x=-2$  عبارت  $\log(x-3)$  تعریف نشده می‌شود. پس با  $x=5$  مقدار  $\log(x-3)$  در مبنای ۴ را حساب می‌کنیم:

$$\log_4(x-3) = \log_4(5-3) = \log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}$$

۲۰ - **پله‌ی یکم:** با در نظر گرفتن  $5^x = A$ ، معادله را حل می‌کنیم:

$$5^{2x} - 8(5^x) + 15 = (5^x)^2 - 8(5^x) + 15 = 0$$

$$\Rightarrow A^2 - 8A + 15 = 0 \Rightarrow (A-5)(A-3) = 0 \Rightarrow A=5, A=3$$

**پله‌ی دوم:** حالا به‌جای  $A$ ، عبارت  $5^x$  را جای‌گزین می‌کنیم:

$$5^x = 3 \Rightarrow x = \log_5 3$$

$$5^x = 5 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \text{در بین جواب‌ها نیست}$$

۲۱ - **پله‌ی یکم:** حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه

$$x.x' = \log a \cdot \log b = \frac{-3}{1} = -3 \Rightarrow \text{دو داده‌شده را به دست می‌آوریم:}$$

$$x + x' = \log a + \log b = \log ab = -\left(\frac{-4m}{1}\right) = 4m$$

$$\frac{\log ab}{\log a \cdot \log b} = \frac{4m}{-3} = -\frac{4m}{3} \Rightarrow \text{پله‌ی دوم: مقدار کسر برابر است با:}$$

۲۲ - **پله‌ی یکم:** ابتدا از معادله‌ای که تنها مجهول آن  $x$  است، مقدار

$x$  را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\log x = \log 5^0 - \log 5 = \log \frac{5^0}{5} = \log 1^0 \Rightarrow x=1^0$$

**پله‌ی دوم:** با تعیین شدن مقدار  $x$  و با استفاده از معادله‌ی اول، مقدار  $y$  را

$$\log x + \log y = 3 \xrightarrow{x=1^0} \log 1^0 + \log y = 3 \Rightarrow \text{محاسبه می‌کنیم:}$$

$$\Rightarrow 1 + \log y = 3 \Rightarrow \log y = 2 \Rightarrow y = 10^2$$

۲۳ - **پله‌ی یکم:** مقدار  $y$  را حساب می‌کنیم:

$$\log(y+2) = 1 \Rightarrow y+2=10 \Rightarrow y=8$$

**پله‌ی دوم:** با استفاده از معادله‌ی دوم، مقدار  $x$  را به‌دست می‌آوریم:

$$\log(y-x) + \log(4x+y) = 2 \xrightarrow{y=8} \log(8-x) + \log(4x+8)$$

$$= \log(8-x)(4x+8) = 2 \Rightarrow 4(8-x)(x+2) = 10^2 = 100$$

$$\Rightarrow (8-x)(x+2) = 25 \Rightarrow x=3$$

۲۴ - **پله‌ی یکم:** با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار

$x$  و  $y$  را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$\log xy^2 = 2 \Rightarrow \log x + \log y^2 = 2 \Rightarrow \log x + 2 \log y = 2$$

$$\log x^2 y = 4 \Rightarrow \log x^2 + \log y = 4 \Rightarrow 2 \log x + \log y = 4$$

۱۵ - **پله‌ی یکم:** عبارت لگاریتمی را با استفاده از ویژگی

$$\log a + \log b + \log c = \log abc \quad \text{ساده می‌کنیم:}$$

$$\log x + \log(x+1) + \log(x+2) = \log x(x+1)(x+2)$$

$$= \log x(x^2+3x+2) = \log(x^3+3x^2+2x)$$

**پله‌ی دوم:** معادله‌ی لگاریتمی را حل می‌کنیم:

$$\log(x^3+3x^2+2x) = \log 6 \Rightarrow x^3+3x^2+2x = 6$$

$$\Rightarrow x^3+3x^2+2x-6=0$$

**پله‌ی سوم:** یکی از نکات حل معادله‌های خطی این بود که اگر مجموع

ضرایب معادله برابر صفر بود، در این صورت  $x=1$  یکی از ریشه‌های

معادله خواهد بود. در این‌جا دو ریشه‌ی دیگر این معادله منفی است و

غیرقابل قبول محسوب می‌شود. پس این معادله فقط ۱ ریشه دارد.

۱۶ - **پله‌ی یکم:** توضیحات فارسی موجود در تست را به زبان ریاضی

$$\log_5^x = \log_{5^2}^{\frac{1}{x}} + 4 \quad \text{برمی‌گردانیم. داریم:}$$

**پله‌ی دوم:** با حل معادله‌ی لگاریتمی مقدار  $x$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_5^x = \log_{5^2}^{\frac{1}{x}} + 4 = \frac{-2}{2} \log_5^x + 4 \Rightarrow \log_5^x = -\log_5^x + 4$$

$$\Rightarrow 2 \log_5^x = 4 \Rightarrow \log_5^x = 2 \Rightarrow x = 5^2 = 25$$

**پله‌ی سوم:** لگاریتم این عدد (همان ۲۵) در پایه‌ی ۱۲۵ برابر است با:

$$\log_{125}^{25} = \log_{5^3}^{5^2} = \frac{2}{3} \log_5^5 = \frac{2}{3}$$

۱۷ - **پله‌ی یکم:** با توجه به ویژگی  $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$ ، تغییراتی در عبارت

$$\frac{1}{\log_a^f} = \log_a^f \quad \text{داده‌شده ایجاد می‌کنیم:}$$

**پله‌ی دوم:** با حل معادله، مقدار  $a$  را حساب می‌کنیم:

$$\log_a^2 = \log_a^f - \frac{1}{f} = \log_a^2 - \frac{1}{f} = 2 \log_a^f - \frac{1}{f} \Rightarrow \log_a^2 = \frac{1}{f}$$

$$\Rightarrow a^{\frac{1}{f}} = 2 \xrightarrow{\text{دو طرف به توان } f} (a^{\frac{1}{f}})^f = 2^f \Rightarrow a = 6^4$$

۱۸ - **پله‌ی یکم:** تغییراتی در عبارت لگاریتمی ایجاد می‌کنیم:

$$\log_9^x + \log_{x^2}^3 = \log_{3^2}^x + \log_{x^2}^3 = \frac{1}{2} \log_3^x + \frac{1}{3} \log_x^3$$

**پله‌ی دوم:** با توجه به این که  $\log_x^x = 1$ ، مقدار  $x$  را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{2} \log_3^x + \frac{1}{3 \log_x^3} = 1 \xrightarrow{\log_x^x = A} \frac{1}{2} A + \frac{1}{3A} = 1 \Rightarrow \frac{3A^2 + 2}{6A} = 1$$

$$\Rightarrow 3A^2 - 6A + 2 = 0 \Rightarrow A = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \log_3^x = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x_1 = 3^{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)} \\ A = \log_3^x = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x_2 = 3^{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)} \end{cases}$$

بنابراین معادله ۲ ریشه‌ی حقیقی دارد.

## تابع نمایی و لگاریتم

**پلهی دوم:** با توجه به رابطه  $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ ، معادله را حل می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} 100 \cdot \log(x+1) &= (x+1)^{\log 100} = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = x + 7 \\ \Rightarrow x^2 + x - 6 &= 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -3, \quad x = 2 \\ x = -3 &\text{ غیرقابل قبول است. (چرا؟) پس فقط } x = 2 \text{ ریشهی معادله} \\ \text{است و معادله ۱ جواب طبیعی دارد.} \end{aligned}$$

**۲۹ - پلهی یکم:** عبارت  $(\frac{1}{2})^{5x-1}$  را به عبارتی توان‌دار با پایه‌ی ۲ تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$(\frac{1}{2})^{5x-1} = (2^{-1})^{5x-1} = 2^{1-5x}$$

**پلهی دوم:** مجموعه‌ی جواب نامعادله برابر است با:

$$\begin{aligned} 2^{1-5x} > 64 &\Rightarrow 2^{1-5x} > 2^6 \\ \Rightarrow 1-5x > 6 &\Rightarrow 5x < -5 \Rightarrow x < -1 \end{aligned}$$

**۳۰ - پلهی یکم:** تغییراتی در نامعادله ایجاد می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \log_{10} \frac{x+2}{v} < -1 &\Rightarrow \log_{10} \frac{x+2}{v} < \log_{10} \frac{1}{10} \\ \text{پلهی دوم: چون } 10 > 1 \text{ است، با حذف لگاریتم جهت نامساوی تغییری} \\ \frac{x+2}{v} < \frac{1}{10} &\Rightarrow x+2 < \frac{v}{10} \Rightarrow x < -\frac{13}{10} \quad \text{نمی‌کند:} \\ \text{پلهی سوم: توجه کنید که } \frac{x+2}{v} &\text{ باید مثبت باشد. پس:} \\ \frac{x+2}{v} > 0 &\Rightarrow x > -2 \end{aligned}$$

پس جواب نامعادله  $-2 < x < -\frac{13}{10}$  خواهد بود.

**۳۱ - پلهی یکم:** مقدار  $\log_{\frac{1}{2}}^2$  برابر است با:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}}^2 &= \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\log_2^2 = -1 \\ \text{پلهی دوم: عبارت جلوی لگاریتم همواره باید مثبت باشد. بنابراین داریم:} \\ \frac{x-1}{3} > 0 &\Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{aligned}$$

**پلهی سوم:** با ایجاد تغییراتی در عبارت لگاریتمی، مجموعه جواب نامعادله را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{9}}^{\frac{(x+1)}{3}} &= \log_{3^{-2}}^{\frac{(x+1)}{3}} = -\frac{1}{2} \log_3^{\frac{(x+1)}{3}} < -1 \\ \text{دو طرف } \times (-2) &\Rightarrow \log_3^{\frac{(x+1)}{3}} > 2 \Rightarrow \frac{x+1}{3} > 9 \Rightarrow x+1 > 27 \Rightarrow x > 26 \end{aligned}$$

**۳۲ - پلهی یکم:** طرفین نامعادله را به توان پنج می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{2 \log x^3} > \sqrt[5]{8} &\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۵}} 2 \log x^3 > 8 \\ \text{پلهی دوم: با در نظر گرفتن } 8 = 2^3, &\text{ جواب نامعادله را تعیین می‌کنیم، داریم:} \\ 2 \log x^3 > 2^3 &\Rightarrow \log x^3 > 3 \Rightarrow x^3 > 10^3 \Rightarrow x > 10 \\ \text{تنها جوابی که از بین گزینه‌ها در این مجموعه جواب صدق می‌کند،} \\ x = 11 &\text{ است.} \end{aligned}$$

**پلهی دوم:** با حل این دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار  $\log x$  برابر ۲ و مقدار  $\log y$  برابر صفر می‌شود. پس مقدار  $x$  و  $y$  برابر است با:

$$\log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100$$

$$\log y = 0 \Rightarrow y = 1$$

**پلهی سوم:** حاصل  $\log xy^4$  برابر است با:

$$\log xy^4 = \log(100 \times 1) = \log 100 = 2$$

**۲۵ - پلهی یکم:** محاسبه‌ی  $x$  قدم اول است:

$$\begin{aligned} 4\sqrt{x} = 4^x &\Rightarrow 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{2x} \Rightarrow 2^{\frac{5}{2}} = 2^{2x} \Rightarrow 2x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4} \\ \text{پلهی دوم: } y &\text{ برابر است با:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + \log \sqrt{x+1} &= \log y \xrightarrow{x=\frac{5}{4}} 1 + \log \sqrt{\frac{5}{4}+1} = 1 + \log \sqrt{\frac{9}{4}} \\ &= 1 + \log \frac{3}{2} = \log y \Rightarrow \log 10 + \log \frac{3}{2} = \log y \\ \Rightarrow \log(10 \times \frac{3}{2}) &= \log 15 = \log y \Rightarrow y = 15 \end{aligned}$$

**۲۶ - پلهی یکم:** دو طرف تساوی را بر  $x^3$  تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 16x^3 = x^{\log_2^x \div x^3} &\Rightarrow 16 = \frac{x^{\log_2^x}}{x^3} \Rightarrow x^{\log_2^x - 3} = 16 \\ \text{پلهی دوم: حالا از دو طرف لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_2 x^{\log_2^x - 3} &= \log_2 16 \Rightarrow (\log_2^x - 3) \log_2^x \\ &= \log_2^4 \Rightarrow (\log_2^x - 3) \log_2^x = 4 \\ \text{پلهی سوم: حالا } \log_2^x &\text{ را برابر } a \text{ فرض می‌کنیم و یک معادله‌ی درجه‌ی دوم} \\ \text{بر حسب } a \text{ حل می‌کنیم: } (a-3)a &= 4 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow (a-4)(a+1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow \log_2^x = -1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \\ a = 4 \Rightarrow \log_2^x = 4 \Rightarrow x_2 = 16 \end{cases}$$

**پلهی چهارم:** حاصل ضرب دو ریشه برابر می‌شود با:  $x_1 x_2 = \frac{1}{2} \times 16 = 8$

**۲۷ - پلهی یکم:** در معادله‌ی لگاریتمی تغییراتی ایجاد می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \log_{25}^a - \log_{\delta}^b &= \log_{\delta}^a - \log_{\delta}^b = \frac{1}{2} \log_{\delta}^a - \log_{\delta}^b = \log_{\delta}^{\sqrt{a}} - \log_{\delta}^b = 1 \\ \Rightarrow \log_{\delta}^{\frac{\sqrt{a}}{b}} &= 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{b} = \delta \Rightarrow \sqrt{a} = \delta b \end{aligned}$$

**پلهی دوم:** مقدار  $a$  و  $b$  را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a + \delta b = 30 &\xrightarrow{\delta b = \sqrt{a}} a + \sqrt{a} = 30 \Rightarrow a = 25 \xrightarrow{b = \frac{\sqrt{a}}{\delta}} b = \frac{\sqrt{25}}{5} = \frac{5}{5} = 1 \\ \text{پلهی سوم: } a + b &\text{ را حساب کرده و مجموع ارقام آن را تعیین می‌کنیم:} \end{aligned}$$

$$a + b = 25 + 1 = 26$$

بنابراین مجموع ارقام  $a + b$  برابر  $2 + 6 = 8$  است.

**۲۸ - پلهی یکم:** عبارت لگاریتمی را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 2 \log \sqrt{x(x+1)} - 3 \log \sqrt[3]{x} &= \log(\sqrt{x(x+1)})^2 - \log(\sqrt[3]{x})^3 \\ &= \log(x(x+1)) - \log x = \log \frac{x(x+1)}{x} = \log(x+1) \end{aligned}$$

## پلکان آزمون

### آزمون یکم (ساده و متوسط)

۱۵ دقیقه

۱ - لگاریتم  $x$  در مبنای  $m$  برابر با لگاریتم  $\sqrt[3]{x^2}$  در مبنای  $\frac{1}{n}$  است. کدام یک از گزینه‌ها رابطه‌ی  $m$  و  $n$  را به درستی نشان می‌دهد؟

(۱)  $m^2 n^3 = -1$  (۲)  $m^2 n^3 = 1$  (۳)  $m^3 n^2 = 1$  (۴)  $m^2 n^2 = -1$

۲ - حاصل عبارت  $\log_3 \frac{1}{4} + \log_3 \frac{2}{3} + \dots + \log_3 \frac{80}{81}$  کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) -۳ (۴) -۴

۳ - ضابطه‌ی تابع نمودار مقابل کدام است؟

(۱)  $y = -\log |x|$

(۲)  $y = \log |x|$

(۳)  $y = \log x$

(۴)  $y = -\log x$

۴ - حاصل  $\frac{1}{100} - \log \sqrt{6}$  چه قدر است؟

(۱) ۱۰ (۲)  $\frac{5}{3}$  (۳)  $\frac{5}{8}$  (۴)  $\frac{5}{16}$

۵ - اگر  $\alpha = \log_{96}^2$  باشد، حاصل  $\log_{96}^3 + 3 \log_{96}^2$  کدام است؟

(۱)  $\alpha - 1$  (۲)  $2\alpha - 1$  (۳)  $1 - 2\alpha$  (۴)  $1 - \alpha$

۶ - معادله‌ی  $1 + \log_7^{(x-3)} = \log_7^{(x+5)} + \log_7^{(x-10)}$  چند ریشه دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیش از ۲

۷ - ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله‌ی  $9^x - 4 \times 3^{x+1} + 27 = 0$ ، چند واحد از ریشه‌ی کوچک‌تر این معادله بزرگ‌تر است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸ - اگر  $\log_x^{x-2} \geq 0$  باشد، آن‌گاه حدود  $x$  کدام است؟

(۱)  $[2, +\infty)$  (۲)  $[3, +\infty)$  (۳)  $[2, 3)$  (۴)  $(2, 4]$

۹ - اگر  $\log_3^k = k$  باشد، حاصل  $\log_x^{11x}$  کدام است؟

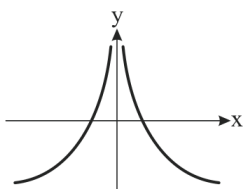
(۱)  $\frac{4k}{3} + 1$  (۲)  $\frac{1}{16k} + 1$  (۳)  $\frac{3k}{4} + 1$  (۴)  $\frac{16}{k} + 1$

۱۰ - اگر  $\log 2 = 0/3$  باشد، مقدار  $\log 625$  چه قدر است؟

(۱)  $1/2$  (۲)  $2/1$  (۳)  $2/8$  (۴)  $3/2$

۱۱ - اگر فرض کنیم  $\log 7 = 0/8$  و  $\log 2 = 0/3$  است، حاصل  $\log 392$  چه قدر می‌شود؟

(۱)  $2/8$  (۲)  $2/4$  (۳)  $2/5$  (۴)  $2/2$

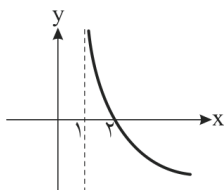


- ۱۲ - معادله  $\log_4 x = 3 \log x$  چند جواب است؟  
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۱۳ - جواب معادله  $\log \log_3 \log_3^{x-1} = 0$  کدام است؟  
 (۱) ۱ (۲) ۱۰ (۳) ۱۰۰ (۴) ۱۰۰۰
- ۱۴ - مقدار  $a$  چند باشد تا  $\log_4^{196}$  یک واحد از  $2 \log_4^a$  بیش تر باشد؟  
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۷
- ۱۵ - نامعادله  $\log_{\frac{1}{2}}^{2-5x} > -4$  چند جواب صحیح دارد؟  
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیش تر از ۲
- ۱۶ - از دستگاه معادلات  $\begin{cases} \log_4^a + \log_2^b = 1 \\ \log_3^{12a} - \log_3^{16b} = 1 \end{cases}$  مقدار  $a^2 + b^2$  چه قدر به دست می آید؟  
 (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۱۳ (۴) ۱۷
- ۱۷ - اگر  $\log_4^{64} = \alpha$  باشد، حاصل  $\log_4^{63}$  کدام است؟  
 (۱)  $\alpha + 6$  (۲)  $\alpha - 6$  (۳)  $2\alpha + 6$  (۴)  $2\alpha - 6$
- ۱۸ - معادله  $\log_x^{(x^2 + x^2 - 1)} = 4$  چند ریشه حقیقی دارد؟  
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیش تر از ۲
- ۱۹ - مجموعه جواب نامعادله  $\log_x^{(x+3)} > \log_x^{(9-x)}$  کدام است؟  
 (۱)  $(3, +\infty)$  (۲)  $(0, 1)$  (۳)  $(3, +\infty) \cup (0, 1)$  (۴)  $(0, 1) \cup (3, 9)$
- ۲۰ - اگر  $2 = \log_5^{(x^2 + x + 1)} + \log_5^{(x-1)}$  باشد، حاصل  $5^{3 \log_5^x}$  برابر می شود با:  
 (۱) ۵ (۲) ۲۵ (۳) ۶ (۴) ۲۶

## آزمون دوم (استاندارد)

۵ دقیقه

- ۱ - حاصل عبارت  $\log \tan 10^\circ \times \log \tan 10^\circ \times \dots \times \log \tan 75^\circ$  چه قدر است؟  
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۵
- ۲ - حاصل کسر  $\frac{\log_5^3 + \log_5^{11}}{\log_5^9 + \log_5^{243}}$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{5}{V} \log_V^5$  (۲)  $\frac{V}{5} \log_V^5$  (۳)  $\frac{5}{V} \log_V^V$  (۴)  $\frac{V}{5} \log_5^V$
- ۳ - اگر  $\log_x^a = 3$  و  $\log_y^a = 4$  و  $\log_z^a = 6$  باشد، حاصل  $\log_{xyz}^a$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴) ۳
- ۴ - اگر  $9x^2 + 25y^2 = 19xy$  باشد،  $\log \frac{3x+5y}{V}$  واسطه‌ی حسابی بین ... و ... است.  
 (۱)  $\log 3x$  ،  $\log 5y$  (۲)  $\log \frac{y}{5}$  ،  $\log \frac{x}{3}$  (۳)  $\log y$  ،  $\log x$  (۴)  $\log \sqrt{y}$  ،  $\log \sqrt{x}$
- ۵ - شکل روبه‌رو نمایانگر کدام تابع است؟  
 (۱)  $y = 2 \log_5^x$   
 (۲)  $y = -\log_{5/5}^x$   
 (۳)  $y = \log_{5/5}^{(x-1)}$   
 (۴)  $y = 1 - \log_5^{(x-1)}$



۶ - می‌دانیم  $\log 2 = 0.3$  است. با توجه به این مطلب عدد  $2^{39}$  چند رقمی است؟

- (۱) یازده (۲) دوازده (۳) سیزده (۴) چهارده

۷ - اگر  $\log_x^y = 2$  و  $x = y^{\frac{1}{a}}$  باشد، حاصل  $\log_0^{a^3+5a+7}$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸ - ریشه‌های معادله  $\log(5+x) = \log(19+x) - \log(x+1)$  در کدام بازه است؟

- (۱)  $(-10, -5)$  (۲)  $(-5, 0)$  (۳)  $(0, 5)$  (۴)  $(5, 10)$

۹ - اگر  $(\log_x^y)^2 - (\log_y^x)^2 = 8$  باشد و  $xy = 81$ ، مقدار  $x+y$  برابر است با:

- (۱) ۳۰ (۲) ۳۳ (۳) ۳۶ (۴) ۳۹

۱۰ - کامل‌ترین جواب نامعادله  $\log_{\frac{1}{3}}^{(x+1)} + \log_{\frac{1}{3}}^{(x+3)} \geq -1$  کدام بازه است؟

- (۱)  $(-4, 0)$  (۲)  $(-3, 0)$  (۳)  $(-1, 0)$  (۴)  $-2$

۱۱ - جواب معادله  $81^x + 4 = \frac{27^{2x} - 4}{9^x - 1}$  چیست؟

- (۱)  $\log_3^2$  (۲)  $\log_3^3$  (۳)  $\log_3^4$  (۴)  $\log_3^5$

(سراسری - تجربی - ۸۹)

۱۲ - از دو معادله  $\log_x^y + \log_y^x = 2$  و  $x^2 + y^2 = 46$ ، لگاریتم  $(x+y)$  در پایه‌ی ۴ کدام است؟

- (۱)  $1/5$  (۲) ۲ (۳)  $2/5$  (۴) ۳

(آزاد - ریاضی - ۸۹)

۱۳ - اگر  $2\log(x+1) = \log(2x+10)$ ، حاصل  $\log_{\frac{x}{1}}^{x\sqrt{3}}$  چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲) ۳ (۳)  $-3$  (۴)  $-\frac{3}{2}$

(آزاد - ریاضی - ۸۹)

۱۴ - اگر  $\log_{\sqrt{3}}^a = a$  باشد، حاصل  $\log_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{a+a}{a+2}$  (۲)  $\frac{a+a}{2a+4}$  (۳)  $\frac{1+4a}{a+2}$  (۴)  $\frac{1+8a}{4a+1}$

(آزاد - تجربی - ۸۹)

۱۵ - اگر  $\log 2 = a$  و  $\log 3 = b$  باشد،  $\log 15$  کدام است؟

- (۱)  $a+1-b$  (۲)  $a+b+1$  (۳)  $b+1-a$  (۴)  $b-a-1$

(سراسری - تجربی - ۹۰)

۱۶ - اگر  $\log 2 = k$  باشد، حاصل  $\log(1+\sqrt{5}) + 2\log(6-2\sqrt{5})$ ، کدام است؟

- (۱)  $2k$  (۲)  $4k$  (۳)  $1+k$  (۴)  $2+4k$

(سراسری - ریاضی - ۹۰)

۱۷ - اگر لگاریتم عدد  $2^{3/5}/25$  در مبنای ۸ برابر A باشد، آنگاه لگاریتم عدد  $(\frac{1}{A}-1)$  در پایه ۴ کدام است؟

- (۱)  $-3$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

(سراسری - تجربی - ۹۰ - خارج از کشور)

۱۸ - اگر  $\log 5 = 3k$  باشد،  $\log \sqrt[3]{1/6}$  کدام است؟

- (۱)  $1-4k$  (۲)  $2-5k$  (۳)  $1-2k$  (۴)  $1-k$

(سراسری - ریاضی - ۹۰ - خارج از کشور)

۱۹ - اگر  $A = \left| \frac{\log 5}{\log 2} \right|$  آنگاه  $|A|$  کدام است؟

- (۱)  $2\log 1/25$  (۲)  $\log 2/5$  (۳)  $\log 3$  (۴)  $\log 6/25$

(آزاد - تجربی - ۸۹)

۲۰ - اگر  $\log_0^4 = a$  باشد، حاصل  $\log 25$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{a+2}$  (۲)  $\frac{4}{a+4}$  (۳)  $\frac{4}{a+2}$  (۴)  $\frac{2}{a+4}$

## پاسخ‌های پلکان آزمون

### پاسخ تست‌های آزمون یکم

۱- پله‌ی یکم: گیج نشوید! گفته‌های تست را به زبان ریاضی برمی‌گردانیم:

$$\log_m^x = \log_{\frac{1}{n}}^{\sqrt[n]{x}} = \log_{\frac{1}{n}}^{\frac{x}{n}} = \frac{1}{n} \log_{\frac{1}{n}}^x$$

پله‌ی دوم: رابطه‌ی بین  $m$  و  $n$  را تعیین می‌کنیم:

$$\log_m^x = \frac{1}{n} \log_{\frac{1}{n}}^x = \log_{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}}^x \Rightarrow m = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

دو طرف به توان ۲  $\Rightarrow m^2 = \frac{1}{n^3} \Rightarrow m^2 n^3 = 1$

۲- با استفاده از ویژگی  $\log_t^a + \log_t^b + \dots + \log_t^z = \log_t^{ab \dots z}$  حاصل عبارت لگاریتمی را به‌دست می‌آوریم:

$$\log_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} + \log_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} + \dots + \log_{\frac{1}{3}}^{\frac{10}{3}} = \log_{\frac{1}{3}}^{\left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{10}{3}\right)} = \log_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3!}} = \log_{\frac{1}{3}}^{3^{-4}} = -4 \log_{\frac{1}{3}}^3 = -4$$

۳- پله‌ی یکم: تابع به‌ازای تمامی مقادیر  $x$  به‌غیر از  $x=0$  تعریف‌شده است. با توجه به این‌که عبارت جلوی لگاریتم همواره مثبت است، پس باید عبارت جلوی لگاریتم را به‌صورت  $|x|$  در نظر بگیریم. (رد گزینه‌های ۳ و ۴)  
پله‌ی دوم: مقدار تابع به‌ازای  $x=10$  یک عدد منفی است. (رد گزینه‌ی ۲)  
پس این نمودار تابع  $g = -\log |x|$  را نشان می‌دهد.

۴- پله‌ی یکم: با توجه به رابطه‌ی  $a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}$  عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم. داریم:

$$A = 100^{\frac{1}{2} - \log \sqrt{6}} = \frac{100^{\frac{1}{2}}}{100^{\log \sqrt{6}}}$$

پله‌ی دوم: با استفاده از رابطه‌ی  $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$  مقدار  $A$  را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{6} \log 100} = \frac{10}{(\sqrt{6})^2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

۵- پله‌ی یکم:  $\log_{96}^3$  را برحسب  $\alpha$  حساب می‌کنیم:

$$\log_{96}^3 = \log_{96}^{\frac{3}{96}} = \log_{96}^{\frac{1}{32}} = \log_{96}^{\frac{1}{2^5}} = 1 - \log_{96}^2 = 1 - 5 \log_{96}^2 = 1 - 5\alpha$$

پله‌ی دوم: حاصل عبارت داده‌شده برابر است با:

$$\log_{96}^3 + 3 \log_{96}^2 = 1 - 5\alpha + 3\alpha = 1 - 2\alpha$$

۶- پله‌ی یکم: عبارت‌های لگاریتمی دو طرف تساوی را ساده می‌کنیم.

$$\log_p^{(x-10)} + \log_p^{(x+5)} = \log_p^{(x-3)} + \log_p^2$$

داریم:

$$\Rightarrow \log_p^{(x-10)(x+5)} = \log_p^{2(x-3)}$$

پله‌ی دوم: مبناهای عبارت‌های لگاریتمی دو طرف تساوی برابر است.

پس عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها را با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$(x-10)(x+5) = 2(x-3) \Rightarrow x^2 - 5x - 50 = 2x - 6$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x - 44 = 0 \Rightarrow (x-11)(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=11 \\ x=-4 \end{cases}$$

پله‌ی سوم: ریشه‌ی  $x=-4$  قابل قبول نیست. چون عبارت‌های  $x-10$  و

$x-3$  را منفی می‌کند. جلوی لگاریتم هم که باید همواره مثبت باشد.

پس  $x=11$  تنها ریشه‌ی معادله است. بنابراین معادله فقط ۱ ریشه دارد.

۷- پله‌ی یکم:  $3^x$  را برابر  $A$  در نظر می‌گیریم. معادله را به شکل

ساده‌تری تشکیل می‌دهیم:

$$9^x - 4 \times 3^{x+1} + 27 = 0 \Rightarrow (3^2)^x - 3^x (3 \times 4) + 27 = 0$$

$$\Rightarrow (3^x)^2 - 12(3^x) + 27 = 0 \xrightarrow{3^x=A} A^2 - 12A + 27 = 0$$

$$\Rightarrow (A-9)(A-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A=9 \\ A=3 \end{cases}$$

پله‌ی دوم: مقدار  $x_1$  و  $x_2$  را تعیین کرده و اختلاف آن دو را به‌دست

$$\begin{cases} 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x_1 = 2 \\ 3^x = 3 \Rightarrow x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_2 = 2 - 1 = 1$$

می‌آوریم. داریم:

۸- پله‌ی یکم: عبارت جلوی لگاریتم همواره مثبت است:

$$x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

شرط  $x > 2$ ، تعریف‌شده‌بودن مبنا‌ی لگاریتم را هم برای ما تأمین می‌کند.

پله‌ی دوم: نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\log_x^{x-2} \geq 0 \Rightarrow \log_x^{x-2} \geq \log_x^1 \Rightarrow x-2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 3$$

بنابراین محدوده‌ی قابل قبول برای  $x$  به‌صورت  $[3, +\infty)$  در می‌آید.

۱۵ - پله‌ی یکم: عبارت جلوی لگاریتم همواره مثبت است:

$$2 - 5x > 0 \Rightarrow 5x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{5}$$

پله‌ی دوم: نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\log_{\frac{1}{2}}^{2-5x} > -4 \Rightarrow -\log_2^{2-5x} > -4 \xrightarrow{\times(-1) \text{ دو طرف}} \log_2^{2-5x} < 4$$

$$\Rightarrow 2 - 5x < 2^4 \Rightarrow 2 - 5x < 16 \Rightarrow 5x > -14 \Rightarrow x > \frac{-14}{5}$$

پله‌ی سوم:  $x$  در بازه‌ی  $(-\frac{14}{5}, \frac{2}{5})$  قرار دارد. این بازه شامل ۳ عدد صحیح است. بنابراین پاسخ بیش‌تر از ۲ عدد صحیح است.

۱۶ - پله‌ی یکم: تغییراتی در معادلات داده‌شده ایجاد می‌کنیم تا بتوانیم

$a$  و  $b$  را تعیین کنیم:  $\log_2^a + \log_2^b = 1 \Rightarrow \log_2^a + \log_2^b = 1$  معادله‌ی اول

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \log_2^a + \log_2^b = \log_2^{\sqrt{a}} + \log_2^b = 1$$

$$\Rightarrow \log_2^{b\sqrt{a}} = 1 \Rightarrow b\sqrt{a} = 2 \quad \text{I}$$

$$\log_2^{2a} - \log_2^{6b} = \log_2^{\frac{12a}{6b}} = \log_2^{\frac{2a}{b}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{b} = 2 \Rightarrow a = b \quad \text{II}$$

پله‌ی دوم: با توجه به روابط I و II مقدار  $a$  و  $b$  را حساب می‌کنیم:

$$b\sqrt{a} = 2 \xrightarrow{a=b} b(\sqrt{b}) = 2 \Rightarrow b\sqrt{b} = 1 \Rightarrow b = 1 \xrightarrow{a=b} a = 1$$

پله‌ی سوم:  $a^2 + b^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$  برابر است با:

۱۷ - پله‌ی یکم:  $63! = \frac{64!}{64}$  می‌دانیم. بنابراین حاصل  $\log_2^{63!}$  برابر است با:

$$\log_2^{63!} = \log_2^{\frac{64!}{64}} = \log_2^{64!} - \log_2^{64} = 2\left(\frac{1}{2} \log_2^{64!}\right) - \log_2^{64}$$

$$= 2 \log_2^{64!} - 6 \log_2^2 = 2\alpha - 6$$

۱۸ - پله‌ی یکم: ابتدا معادله را حل می‌کنیم:

$$\log_x^{(x^2 + x^2 - 1)} = 4 \Rightarrow x^2 + x^2 - 1 = x^4 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

پله‌ی دوم: عددی که در مبنای لگاریتم قرار می‌گیرد نمی‌تواند منفی باشد. پس  $x = -1$  غیرقابل قبول است. همچنین عددی که در مبنای قرار دارد باید مخالف ۱ باشد. پس  $x = 1$  هم غیرقابل قبول است. بنابراین معادله صفر ریشه‌ی حقیقی دارد.

۱۹ - پله‌ی یکم: با فرض  $x > 1$ ، نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\log_x^{(x+3)} > \log_x^{(9-x)} \xrightarrow{x>1} x+3 > 9-x \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3$$

پله‌ی دوم: با فرض  $0 < x < 1$  بار دیگر نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\log_x^{(x+3)} > \log_x^{(9-x)} \xrightarrow{0<x<1} x+3 < 9-x$$

$$\Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3 \xrightarrow{0<x<1} 0 < x < 1$$

۹ - پله‌ی یکم: سعی می‌کنیم حاصل  $\log_3^x$  را برحسب  $k$  به‌دست

$$\log_3^x = k \Rightarrow 4 \log_3^x = 4k \Rightarrow \log_3^x = \frac{4k}{4}$$

آوریم. داریم:

پله‌ی دوم: با توجه به مقدار به‌دست‌آمده برای  $\log_3^x$ ، مقدار  $\log_3^{41x}$  برحسب  $k$  را تعیین می‌کنیم:

$$\log_3^{41x} = \log_3^{41} + \log_3^x = \log_3^{2^2} + 1 = 4 \log_3^2 + 1 = \frac{4}{\log_3^2} + 1$$

$$= \frac{4}{\frac{1}{k}} + 1 = \frac{4k}{1} + 1$$

۱۰ - پله‌ی یکم: مقدار  $\log 5$  را حساب می‌کنیم:

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0.3 = 0.7$$

پله‌ی دوم:  $\log 625$  برابر است با:

$$\log 625 = \log 5^4 = 4 \log 5 = 4 \times 0.7 = 2.8$$

۱۱ - پله‌ی یکم: می‌دانیم  $392 = 49 \times 8$  است. بنابراین می‌توان

$$\log 392 = \log(49 \times 8) = \log 49 + \log 8$$

نوشت:

پله‌ی دوم: با داشتن مقدار  $\log 2$  و  $\log 7$ ، مقدار  $\log 392$  را حساب

می‌کنیم:

$$\log 392 = \log 7^3 + \log 2^3 = 3 \log 7 + 3 \log 2$$

$$= (3 \times 0.8) + (3 \times 0.3) = 2.4 + 0.9 = 3.3$$

۱۲ - پله‌ی یکم: با توجه به ویژگی‌های لگاریتم معادله را به فرمی

تبدیل می‌کنیم که حل معادله برای ما راحت باشد. داریم:

$$\log 4x = 3 \log x \Rightarrow \log 4x = \log x^3$$

پله‌ی دوم: تعداد جواب‌های معادله‌ی  $x^3 = 4x$  به شرط این‌که

عبارت‌های جلوی لگاریتم همواره مثبت باشند، مدنظر ما است:

$$x^3 = 4x \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

مقادیر  $x = 0$  و  $x = -2$  غیرقابل قبول هستند. پس این معادله فقط ۱ جواب دارد.

۱۳ - پله‌ی یکم: با دیدن این تعداد لگاریتم هول نشوید مرحله‌به‌مرحله

$$\log \log \log \log_3^{x-1} = 0 \Rightarrow \log \log \log_3^{x-1} = 10^0 = 1$$

پیش می‌رویم. داریم:

پله‌ی دوم: حالا مقدار  $x$  را به‌دست می‌آوریم:

$$\log \log \log_3^{x-1} = 1 \Rightarrow \log \log_3^{x-1} = 2 \Rightarrow x-1 = 3^2 = 9 \Rightarrow x = 10$$

۱۴ - پله‌ی یکم: حاصل  $\log_7^{196}$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_7^{196} = \log_7^{(49 \times 4)} = \log_7^{49} + \log_7^4 = \log_7^{7^2} + 1 = 2 \log_7^7 + 1$$

پله‌ی دوم: مقدار  $\log_7^{196}$  از  $2 \log_7^a$  یک واحد بیش‌تر است. بنابراین

برابر است با:

$$\log_7^{196} = 2 \log_7^a + 1 \Rightarrow \log_7^a = \log_7^a \Rightarrow a = 7$$

**پله‌ی سوم:** دامنه‌ی تعریف عبارت‌های لگاریتمی را نیز تعیین کرده و مجموعه جواب نامعادله را به دست می‌آوریم:

$$\log_{xyz}^a = \frac{1}{\log_a^{xyz}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

۴- پله‌ی یکم: با استفاده از رابط‌هی داده‌شده، سعی می‌کنیم مقدار

$\frac{3x + 5y}{v}$  را حساب کنیم:

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_x + \Delta y)^T &= \mathbf{q}_x^T + \mathbf{r}_{\circ xy} + \mathbf{r} \Delta y^T = (\mathbf{q}_x^T + \mathbf{r} \Delta y^T) + \mathbf{r}_{\circ xy} \\ \mathbf{q}_x^T + \mathbf{r} \Delta y^T &= \mathbf{q}_{xy} \\ \implies (\mathbf{r}_x + \Delta y)^T &= \mathbf{q}_{xy} + \mathbf{r}_{\circ xy} = \mathbf{r} \mathbf{q}_{xy} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r_x + \Delta y = v\sqrt{xy} \Rightarrow \frac{r_x + \Delta y}{v} = \sqrt{xy}$$

**پله‌ی دوم:** در فصل تصاعد دیدیم که «واسطه‌ی حسابی» همان میانگین خودمان است! یعنی اگر  $\log \sqrt{xy}$  بخواید واسطه‌ی حسابی دو عدد  $a, b$  باشد، باید داشته باشیم:

$$\log \sqrt{xy} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a+b = 2 \log \sqrt{xy} = \log(\sqrt{xy})^2 \Rightarrow a+b = \log xy$$

**پله‌ی سوم:** در میان گزینه‌ها، تنها گزینه‌ی ۳ است که جمع دو لگاریتم برابر  $\log xy$  می‌شود.

۵- مقدار تابع به‌ازای  $x=2$  برابر صفر می‌شود. این موضوع فقط در مورد تابع  $y = \log_{\frac{x-1}{5}}$  صدق می‌کند.

۶- پله‌ی یکم: مقدار  $\log_2 2^{39}$  را حساب می‌کنیم:

$$\log 2^{39} = 39 \log 2 = 39 \times 0.3 = 11.7$$

**پلهی دوم:** اگر  $1 \leq x \leq 10$  باشد، آنگاه  $0 \leq \log x \leq 1$  خواهد بود. هم چنین اگر  $10 \leq x \leq 100$  باشد،  $1 \leq \log x \leq 2$  است. بنابراین اگر  $10^{12} \leq x \leq 10^{11}$  باشد،  $\log x$  در بازه‌ی  $[11, 12]$  قرار دارد. پس عدد  $2^{39}$  در بازه‌ی  $[10^{11}, 10^{12}]$  قرار دارد. بنابراین عدد  $2^{39}$  دوازده رقمی است.

۷- ۳ پلہی یکم: مقدار  $a$  را حساب می کنیم:

$$\log_x y = r \Rightarrow y = x^r \quad \text{I}$$

$$x = y^{\frac{1}{a}} \Rightarrow x = (x^r)^{\frac{1}{a}} = x^{\frac{r}{a}} \Rightarrow \frac{r}{a} = 1 \Rightarrow a = r$$

**پله‌ی دوم:** حاصل عبارت لگاریتمی به‌ازای  $a = 2$  برابر است با:

$$\log_{\Delta} a^{\gamma+\Delta a+\nu} = \log_{\Delta} (\gamma^{\gamma+(\Delta \times \gamma)+\nu}) = \log_{\Delta}^{(\wedge+1 \circ +\nu)} = \log_{\Delta}^{\gamma \Delta} = \log_{\Delta}^{\Delta^{\gamma}} = \gamma$$

۸- ۳ پله‌ی یکم: معادله‌ی لگاریتمی را به یک معادله‌ی معمولی تبدیل می‌کنیم:

$$\log(\Delta + x) = \log(19 + x) - \log(x + 1) \Rightarrow \log(\Delta + x) = \log \frac{19 + x}{(x + 1)}$$

$$\Rightarrow 5 + x = \frac{19 + x}{x + 1} \Rightarrow (5 + x)(x + 1) = 19 + x$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 19 + x \Rightarrow x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} ① \quad x > 0, x \neq 1 \\ ② \quad 9 - x > 0 \Rightarrow x < 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (0, 1) \cup (3, 9)$$

۲۰- **ع** پله‌ی یکم: اول از همه معادله‌ی داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$\log_{\hat{\Delta}}^{(x^{\gamma}+x+1)} + \log_{\hat{\Delta}}^{(x-1)} = \gamma \Rightarrow \log_{\hat{\Delta}}^{(x^{\gamma}+x+1)(x-1)} = \gamma$$

$$\Rightarrow (x^2 + x + 1)(x - 1) = 5^2 = 25 \Rightarrow x^3 - 1 = 25 \Rightarrow x^3 = 26$$

**پله‌ی دوم:** حاصل عبارت لگاریتمی را حساب می‌کنیم:

$$A = \Delta^r \log_{\Delta}^x = \Delta^{\log_{\Delta}^x r} = (x^r)^{\log_{\Delta}^{\Delta}}$$

برای تغییر در عبارت لگاریتمی از رابطه‌ی  $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$  استفاده کردیم.

$$A = x^3 = 26$$

مقدار عبارت به دست آمده برابر است با:

**پاسخ تست‌های آزمون دوم**

۱- در بین این عبارتهای لگاریتمی عبارت  $\log \tan 45^\circ$  هم وجود دارد. می‌دانیم  $\tan 45^\circ = 1$  است. بنابراین  $\log \tan 45^\circ = 0$  است. پس حاصل عبارت داده‌شده برابر صفر است.

۲- ۳ پلہی یکم: حاصل صورت و مخرج کسر را تعیین می کنیم:

$$\log_{\Delta}^{\mathfrak{r}} + \log_{\Delta}^{\wedge 1} = \log_{\Delta}^{\mathfrak{r}} + \log_{\Delta}^{\mathfrak{r}^{\mathfrak{r}}} = \log_{\Delta}^{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r} \log_{\Delta}^{\mathfrak{r}} = \Delta \log_{\Delta}^{\mathfrak{r}}$$

$$\log_V^q + \log_V^{243} = \log_V^{3^2} + \log_V^{3^5} = 2\log_V^3 + 5\log_V^3 = 7\log_V^3$$

**پله‌ی دوم:** با توجه به رابطه‌ی  $\log_b^a = \frac{1}{\log_a b}$  حاصل کسر داده‌شده برابر است با:

$$A = \frac{\Delta \log_{\Delta}^r}{v \log_v^r} = \frac{\frac{\Delta}{\log_r^{\Delta}}}{\frac{v}{\log_r^v}} = \frac{\Delta \log_r^v}{v \log_r^{\Delta}}$$

**پله‌ی سوم:** حاصل نهایی با استفاده از رابطه‌ی  $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$ ، برابر است با:

$$A = \frac{\delta}{V} \log_{\delta}^V$$

۳- پله‌ی یکم: مقدار  $\log_a^x$ ،  $\log_a^y$  و  $\log_a^z$  را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\log_a^x = \frac{1}{\log_x^a} = \frac{1}{x}, \quad \log_a^y = \frac{1}{\log_y^a} = \frac{1}{y}$$

$$\log_a^z = \frac{1}{\log_z^a} = \frac{1}{c}$$

پله‌ی دوم: حاصل  $\log_a^{xyz}$  برابر است با:

$$\log_a^{xyz} = \log_a^x + \log_a^y + \log_a^z = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{4+3+2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

۱۲ - **پله‌ی یکم:** تغییراتی در معادله‌ی لگاریتمی ایجاد می‌کنیم:

$$\log_3^x + \log_3^y = 2 \Rightarrow \log_3^{xy} = 2 \Rightarrow xy = 3^2 \Rightarrow xy = 9$$

**پله‌ی دوم:** با استفاده از اتحاد  $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ، مقدار  $x+y$  را حساب می‌کنیم:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (x^2 + y^2) + 2xy = 46 + (2 \times 9)$$

$$= 46 + 18 = 64 \Rightarrow x+y = 8$$

**پله‌ی سوم:** مقدار لگاریتم  $x+y$  در پایه‌ی ۴ برابر است با:

$$\log_4^{(x+y)} = \log_4^8 = \log_{2^2}^{2^3} = \frac{3}{2} \log_2^2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

۱۳ - **پله‌ی یکم:** مقدار  $x$  را حساب می‌کنیم:

$$2 \log(x+1) = \log(2x+10) \Rightarrow \log(x+1)^2 = \log(2x+10)$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 2x+10 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x + 10$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 \xrightarrow{x>0} x = 3$$

(اگر  $x = -3$  در نظر گرفته شود مقدار  $x+1$  منفی می‌شود که غیرقابل قبول است.)

**پله‌ی دوم:** حاصل  $\log_{\frac{1}{x}}^{x\sqrt{3}}$  به ازای  $x = 3$  برابر است با:

$$\log_{\frac{1}{x}}^{x\sqrt{3}} = \log_{\frac{1}{3}}^{3\sqrt{3}} = \log_{3^{-1}}^{3^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{-1} \log_3^3 = -\frac{3}{2}$$

۱۴ - **پله‌ی یکم:** با توجه به این که  $\log_{\sqrt{3}}^a = a$  است، داریم:

$$\log_{\sqrt{3}}^a = a \Rightarrow a = \sqrt{3}^a = (3^{\frac{1}{2}})^a = 3^{\frac{a}{2}} \Rightarrow 2^2 = 3^{\frac{a}{2}}$$

$$\xrightarrow{\text{از دو طرف جذر می‌گیریم}} 2 = 3^{\frac{a}{4}}$$

**پله‌ی دوم:** حاصل  $\log_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}}$  با توجه به این که  $2 = 3^{\frac{a}{4}}$  است، برابر است با:

$$\log_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} = \log_{3^{\frac{1}{2}}}^{3^{\frac{3}{2}}} = \log_{3^{\frac{1}{2}}}^{3^{1+\frac{1}{2}}} = \log_{3^{\frac{1}{2}}}^{3^{\frac{3}{2}}} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \log_{3^{\frac{1}{2}}}^3 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \log_{3^{\frac{1}{2}}}^3 = \frac{3}{1} \log_{3^{\frac{1}{2}}}^3 = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1} = 6$$

۱۵ - **پله‌ی یکم:**  $\log 15$  برابر است با:

$$\log 15 = \log(5 \times 3) = \log 5 + \log 3$$

**پله‌ی دوم:** مقدار  $\log 5$  را با استفاده از مقدار  $\log 2$  حساب می‌کنیم:

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2 = 1 - a$$

**پله‌ی سوم:** بنابراین  $\log 15$  برابر است با:

$$\log 15 = 1 - a + b = b + 1 - a$$

۱۶ - **پله‌ی یکم:** حاصل  $\log(1+\sqrt{5})^2$  را به دست می‌آوریم:

$$\log(1+\sqrt{5})^2 = \log(1+2\sqrt{5}+5) = \log(6+2\sqrt{5})$$

**پله‌ی دوم:** ریشه‌های این معادله‌ی درجه‌ی دو را تعیین می‌کنیم:

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \Rightarrow (x+7)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -7 \end{cases}$$

**پله‌ی سوم:** حُب توجه کنید که  $x = -7$  غیرقابل قبول است. چون عبارت جلوی لگاریتم‌ها را منفی می‌کند. پس ریشه‌ی معادله در بازه‌ی  $(0,5)$  قرار دارد. (در واقع  $x = 2$  تنها ریشه‌ی معادله است.)

۹ - **پله‌ی یکم:** رابطه‌ی لگاریتمی داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$(\log_3^x)^2 - (\log_3^y)^2 = (\log_3^x - \log_3^y)(\log_3^x + \log_3^y) = \frac{x}{y} (\log_3^{xy}) = 8$$

**پله‌ی دوم:** با توجه به این که  $xy = 81$  است،  $x$  را بر حسب  $y$  حساب

$$\log_3^{xy} = \log_3^{81} = \log_3^{3^4} = 4 \log_3^3 = 4$$

$$4 \log_3^y = 8 \Rightarrow \log_3^y = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 3^2 = 9 \Rightarrow x = 9y$$

**پله‌ی سوم:** با محاسبه‌ی مقدار  $x$  و  $y$ ، مقدار  $y+x$  را به دست می‌آوریم:

$$xy = 81 \xrightarrow{x=9y} 9y^2 = 81 \Rightarrow y^2 = 9 \xrightarrow{y>0} y = 3 \xrightarrow{x=9y} x = 9 \times 3 = 27$$

**پله‌ی چهارم:** حالا یک جمع ساده:

۱۰ - **پله‌ی یکم:** عبارت لگاریتمی را ساده می‌کنیم:

$$\log_{\frac{1}{3}}^{(x+1)} + \log_{\frac{1}{3}}^{(x+3)} = \log_{\frac{1}{3}}^{(x+1)(x+3)}$$

**پله‌ی دوم:** با توجه به این که مبنای لگاریتم کوچک‌تر از ۱ است، برای حل نامعادله جهت آن عوض می‌شود. بنابراین داریم:

$$\log_{\frac{1}{3}}^{(x+1)(x+3)} \geq -1 \Rightarrow (x+1)(x+3) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Rightarrow x^2 + 4x + 3 \leq 3$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x \leq 0 \Rightarrow x(x+4) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 0$$

**پله‌ی سوم:** دامنه‌ی عبارت موردنظر برابر  $x > -1$  است. با اشتراک گرفتن بین دامنه تعریف و جواب نامعادله جواب کلی برابر  $-1 < x \leq 0$  است.

۱۱ - **پله‌ی یکم:** معادله‌ی داده‌شده را به شکل ساده‌تری تبدیل می‌کنیم:

$$81^x + 4 = \frac{27^{2x} - 4}{9^x - 1} \Rightarrow (3^4)^x + 4 = \frac{(3^3)^{2x} - 4}{(3^2)^x - 1}$$

$$\Rightarrow (3^x)^4 + 4 = \frac{(3^x)^6 - 4}{(3^x)^2 - 1}$$

**پله‌ی دوم:** با در نظر گرفتن  $A = 3^x$ ، معادله را حل می‌کنیم:

$$A^4 + 4 = \frac{A^6 - 4}{A^2 - 1} \Rightarrow (A^4 + 4)(A^2 - 1) = A^6 - 4$$

$$\Rightarrow A^6 - A^4 + 4A^2 - 4 = A^6 - 4 \Rightarrow A^6 - 4A^2 = 0$$

$$\Rightarrow A^2(A^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ A^2 = 4 \Rightarrow A = \pm 2 \end{cases}$$

**پله‌ی سوم:** مقادیر  $A = 0$  و  $A = -2$  غیرقابل قبول هستند. (چون مقدار

$3^x$  همواره مثبت است!) بنابراین فقط  $A = 2$  جواب معادله است. پس

مقدار  $x$  برابر است با:

$$A = 2 \Rightarrow 3^x = 2 \Rightarrow x = \log_3^2$$

**پله‌ی دوم:** اگر  $\log 5 = 3k$  باشد،  $\log 2$  برابر  $1 - 3k$  است. بنابراین داریم:

$$\log \sqrt[3]{1/6} = \frac{1}{3}(\log 2 - 1) = \frac{1}{3}(4 - 12k - 1) = \frac{1}{3}(3 - 12k) = 1 - 4k$$

**۱۹ - ۲** با استفاده از قوانین لگاریتم حاصل دترمیان را به دست می آوریم:

$$|A| = (\log 5 \times \log 5) - (\log 2 \times \log 2) = (\log 5)^2 - (\log 2)^2 \\ = (\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2) = (\log \frac{5}{2})(\log 10) = \log 2 / 5$$

**۲۰ - ۳** با استفاده از ویژگی های  $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$  و  $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$  حاصل عبارت لگاریتمی را به دست می آوریم:

$$\log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5 = 2 \times \frac{\log_4^5}{\log_4^1} = 2 \times \frac{\log_4^5}{\log_4^{(2 \times 5)}} \\ = 2 \times \frac{\frac{1}{\log_5^4}}{\log_4^2 + \log_4^5} = 2 \times \frac{\frac{1}{a}}{\log_4^2 + \frac{1}{\log_4^5}} = 2 \times \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{a}} = 2 \times \frac{\frac{1}{a}}{\frac{a+2}{2a}} = \frac{4}{a+2}$$

**پله‌ی دوم:** با توجه به این که  $\log 2 = k$  است، حاصل عبارت لگاریتمی بر حسب  $k$  قابل محاسبه است:

$$\log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(6 + 2\sqrt{5}) \\ = \log(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5}) = \log(36 - 20) \\ = \log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 = 4k$$

**۱۷ - ۴** **پله‌ی یکم:** حاصل  $\sqrt[3]{50/25}$  را به صورت عددی توان دار با پایه‌ی ۲ می نویسیم:

$$\sqrt[3]{50/25} = 2 \times \sqrt[3]{\frac{1}{5}} = 2 \sqrt[3]{2^{-2}} = 2 \times 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$$

**پله‌ی دوم:** با تعیین مقدار  $A$ ، حاصل  $\log_4^{(\frac{1}{A}-1)}$  را می توانیم حساب کنیم:

$$A = \log_4^{\sqrt[3]{50/25}} = \log_4^{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \\ \log_4^{(\frac{1}{A}-1)} = \log_4^{(\frac{3}{2}-1)} = \log_4^{\frac{1}{2}} = \log_4^{2^{-1}} = \frac{1}{2} \log_4^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

**۱۸ - ۱** **پله‌ی یکم:** حاصل  $\log \sqrt[3]{1/6}$  را بر حسب  $\log 2$  به دست می آوریم:

$$\log \sqrt[3]{1/6} = \log(1/6)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 1/6 \\ = \frac{1}{3} \log \frac{1}{1 \times 6} = \frac{1}{3}(\log 16 - \log 10) = \frac{1}{3}(\log 2^4 - 1) = \frac{1}{3}(4 \log 2 - 1)$$