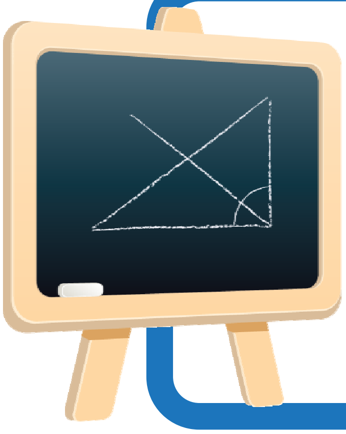


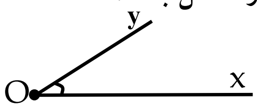
هندسه ۱

- فصل‌های ۱ و ۲

زاویه، مثلث

زاویه:

زاویه، جزئی از صفحه است که دو نیم خط با مبدأ مشترک و مجموعه‌ی نقاط محدود به دو نیم خط مزبور را شامل باشد.



هر یک از دو نیم خط Oy, Ox را یک "ضلع" و نقطه O، مبدأ مشترک آن‌ها، «رأس زاویه» نام دارد.

زاویه را با واحدهای مختلف مانند درجه، گراد و رادیان نمایش می‌دهند که رابطه‌ی زیر را با هم دارند:

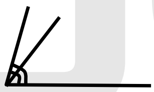
$$\frac{deg}{۱۸۰}=\frac{grad}{۲۰۰}=\frac{rad}{\pi}$$

تعاریف:

☆ دو زاویه را متمم یکدیگر گویند، هرگـاه مجموع اندازه‌های آن‌ها ۹۰° باشد.

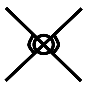
☆ دو زاویه را مکمّل یکدیگر گویند، هرگاه مجموع اندازه‌های آن‌ها ۱۸۰° باشد.

☆ دو زاویه را که در رأس و یک ضلع مشترک باشند و دو ضلع غیرمشترک آن‌ها در طرفین ضلع مشترک واقع باشد، مجاور می‌نامیم.

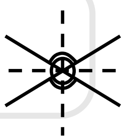


☆ خطی که از رأس زاویه گذشته و زاویه را نصف کند نیمساز زاویه نامیده می‌شود.

☆ دو زاویــه را کــه رأس مشترک داشتــه باشند و اضلاع آن‌ها دو به دو بر امتداد یکدیگر و در جهات مختلف باشند، متقابل به رأس نامند.

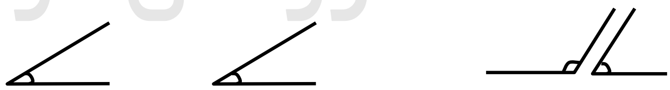


قضایا و خواص:

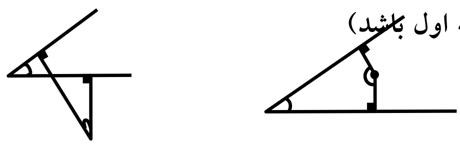


۱- دو زاویه‌ی متقابل به رأس مساویند و نیمسازهایشان بر یک خط مستقیم قرار دارند.

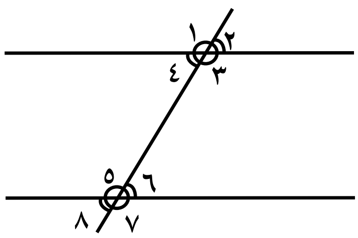
۲- اگر اضلاع دو زاویه، نظیر به نظیر با یکدیگر موازی باشند، دو زاویه یا مساوی یکدیگر هستند یا مکمل یکدیگر.



۳- اگر اضلاع دو زاویه، نظیر به نظیر بر یکدیگر عمود باشند، دو زاویه مساوی (اگر رأس زاویه‌ی دوم خارج از زاویه‌ی اول یـا روی یکی از اضلاع آن باشد) و یا مکمل هستند. (اگر رأس زاویه دوم داخل زاویه اول باشد)



۴- اگر دو خط موازی توسط یک خط مورب قطع شوند، ۸ زاویه پدید می‌آید که یا مساوی و یا مکمل یکدیگر می‌باشند.



$\hat{۱}=\hat{۳}=\hat{۵}=\hat{۷}$

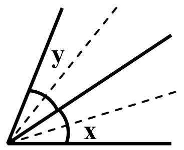
$\hat{۲}=\hat{۴}=\hat{۶}=\hat{۸}$

$\hat{۴}+\hat{۵}=۱۸۰^\circ$

$\hat{۳}+\hat{۶}=۱۸۰^\circ$

مثال: تفاضل دو زاویه مجاور ۱۰ درجه است. اگر زاویه بین نیمسازهای آن‌ها $\frac{3}{4}$ زاویه بزرگتر باشد، اندازه زاویه کوچکتر را بیابید.

حل: اگر زاویه‌ی بزرگ‌تر را x و زاویه کوچک‌تر را y فرض کنیم، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} x-y=10 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=\frac{3}{4}x \rightarrow x+y=\frac{3}{2}x \rightarrow \frac{x}{2}-y=0 \end{array}\right\} \rightarrow 2y-y=10 \rightarrow y=10$$

مثال: مجموع دو زاویه $75°$ است. مجموع مکمل‌های آن‌ها چند درجه است؟

حل:

$$\hat{\alpha}+\hat{\beta}=75°$$

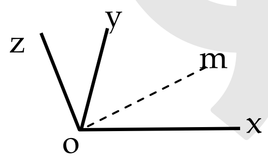
$$(180°-\hat{\alpha})+(180°-\hat{\beta})=360°-(\hat{\alpha}+\hat{\beta})=360°-75°=285°$$

مثال: دو زاویه‌ی **A** و **B** متمم یکدیگر می‌باشند. اندازه زاویه‌ی A برابر $\frac{4}{9}$ اندازه‌ی مکمل زاویه‌ی B است. اندازه زاویه‌ی A چند درجه است؟

حل:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}+\hat{B}=90° \\ \hat{A}=\frac{4}{9}(180°-\hat{B}) \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\left(180°-\frac{9}{4}\hat{A}\right)=90° \Rightarrow \frac{5}{4}\hat{A}=90° \Rightarrow \hat{A}=72°$$

مثال: زاویه xoy و نیمساز آن om را در نظر می‌گیریم، نیم خط oz را به دلخواه در خارج زاویه رسم می‌کنیم، زاویه moz برابر کدام است؟



۱) $\frac{x\hat{o}y}{2}$

۲) $\frac{x\hat{o}z+y\hat{o}z}{2}$

۳) $\frac{x\hat{o}z-y\hat{o}z}{2}$

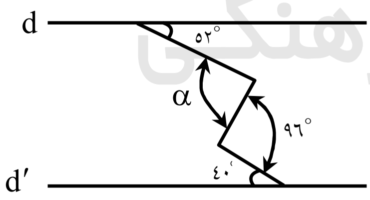
۴) $\frac{m\hat{o}z+x\hat{o}z}{2}$

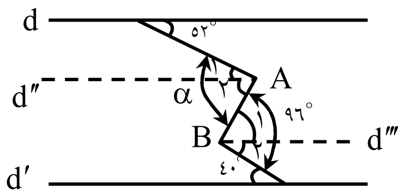
حل:

$$\left.\begin{array}{l} m\hat{o}z=x\hat{o}z-x\hat{o}m \\ m\hat{o}z=y\hat{o}z+y\hat{o}m \end{array}\right\} \xRightarrow{x\hat{o}m=y\hat{o}m} m\hat{o}z=\frac{x\hat{o}z+y\hat{o}z}{2}$$

مثال: در شکل مقابل دو خط **d** و **d′** موازیند. اندازه‌ی زاویه α را بیابید.

حل:





$$\left.\begin{array}{l} d' \parallel d''' \Rightarrow \hat{B}_2=40° \\ d'' \parallel d''' \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{B}_1=96°-40°=56° \\ d \parallel d'' \Rightarrow \hat{A}_1=52° \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}=56°+52°=108°$$

مثلث:

اگر سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط مستقیم را دو به دو با سه پاره‌خط به هم وصل کنیم، شکل حاصل را «مثلث» می‌نامند.

الف) تعاریف، قضایا و اصول کلّی، خواص اضلاع و زوایا:

۱- حالات همنهشتی (تساوی) دو مثلث:

قضیه: دو مثلث در حالت‌های زیر با هم همنهشت (مساوی)اند:

۱- تساوی دو ضلع و زاویه بین دو ضلع (ض ز ض)

۲- تساوی دو زاویه و ضلع بین دو زاویه (ز ض ز)

۳- تساوی سه ضلع (ض ض ض)

٤- تساوی دو ضلع و زاویه مقابل به ضلع بزرگتر.

حالات همنهشتی مثلثهای خاص:

الف) دو مثلث قائم‌الزاویه در حالات زیر همنهشت‌اند:

۱- تساوی وتر و یک ضلع (حالت ٤).

۲- تساوی وتر و یک زاویه حاده (حالت ۲).

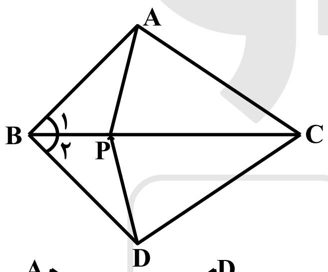
۳- تساوی دو ضلع زاویه‌ی قائمه (حالت ۱).

ب) دو مثلث متساوی‌الساقین در حالت تساوی یک ضلع و یک زاویه‌ی متناظر همنهشت‌اند.

ج) دو مثلث متساوی‌الاضلاع در حالت تساوی یک ضلع همنهشت‌اند.

☜مثال: اگر P نقطه‌ای دلخواه روی BC باشد، $AC=CD$ و $AB=BD$، ثابت کنید: $AP=PD$

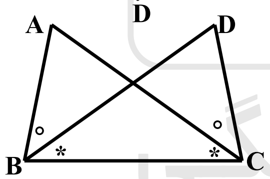
✍حل:



$$\overset{\Delta}{ABC}=\overset{\Delta}{BCD}\ \text{ض ض ض} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\hat{B}_1=\hat{B}_2\\ AB=BD\\ BP\ \text{مشترک}\end{array}\right\} \overset{\text{ض ز ض}}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{ABP}=\overset{\Delta}{BPD} \Rightarrow AP=PD$$

☜مثال: در شکل مقابل ثابت کنید: $AB=CD$

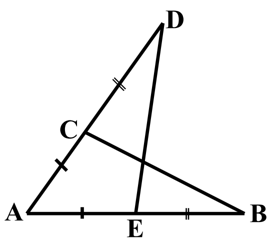
✍حل:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{C}\\ BC\ \text{مشترک}\\ \hat{B}^*=\hat{C}^*\end{array}\right\} \overset{\text{ز ض ز}}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{ABC}=\overset{\Delta}{BCD} \rightarrow AB=CD$$

☜مثال: در شکل روبه‌رو ثابت کنید: $BC=DE$

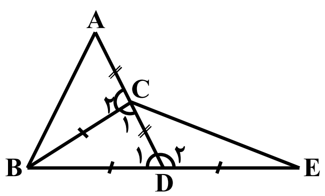
✍حل:



$$\left.\begin{array}{l}AE=AC\\ AD=AB\\ \hat{A}\ \text{مشترک}\end{array}\right\} \overset{\text{ض ز ض}}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{ABC}=\overset{\Delta}{ADE} \rightarrow DE=BC$$

☜مثال: ثابت کنید $AB=CE$ و $\hat{C}=\hat{D}$:

✍حل:

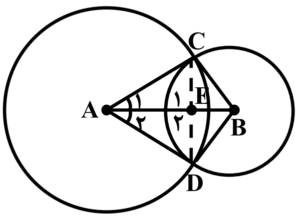


$$\left.\begin{array}{l}BD=BC \rightarrow \hat{C}_1=\hat{D}_1 \rightarrow \hat{C}_2=\hat{D}_2\\ AC=CD\\ BC=DE\end{array}\right\} \overset{\text{ض ز ض}}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{ABC}=\overset{\Delta}{CDE} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}AB=CE\\ \hat{C}=\hat{D}\end{array}\right.$$

☜مثال: دو دایره به مراکز A و B یکدیگر را در C و D قطع می‌کنند. ثابت کنید:

الف) $A\hat{C}B = A\hat{D}B$

ب) AB عمود منصف CD است.



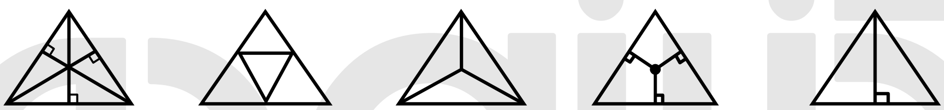
✍حل:

$$\left.\begin{array}{l} AC = AD \\ BC = BD \\ AB = AB \end{array}\right\} \overset{\text{ض ض ض}}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{ABC} = \overset{\Delta}{ADB} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AE = AE \\ AC = AD \\ A\hat{C}B = A\hat{D}B \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ACE} = \overset{\Delta}{ADE} \to CE = ED$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{E}_1 = \hat{E}_2 \\ \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 180 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{E}_2 = 90^\circ$$

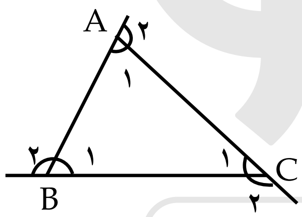
☜مثال: ناحیه درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به ۲، ۳، ٤ و ٦ قسمت همنهشت تقسیم کنید.

✍حل:



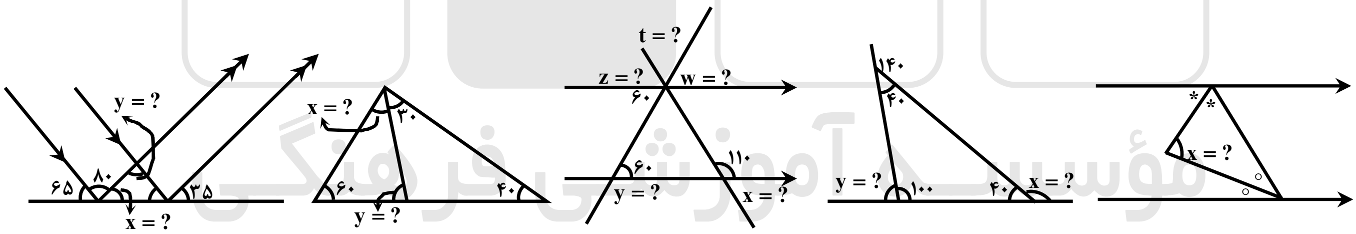
۲- روابط زوایای مثلث:

قضیه: مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° و مجموع زوایای خارجی آن 360° است و هر زاویه‌ی خارجی با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاورش برابر است.

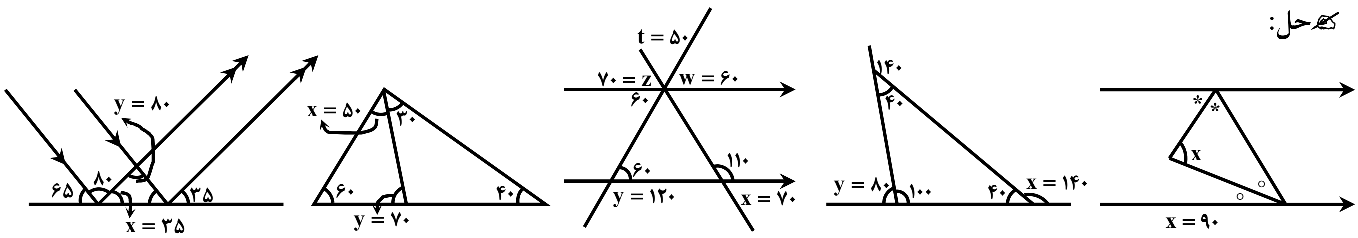


$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ$$
$$\hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 360^\circ$$
$$\hat{A}_2 = \hat{B}_1 + \hat{C}_1$$

☜ مثال: در شکل‌های زیر زوایای مجهول را به‌دست آورید.



✍حل:

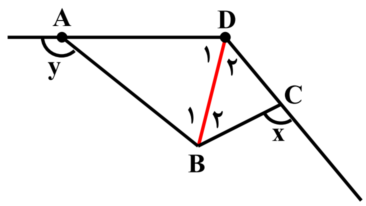


$x = 90$

$2(*+\circ) = 180$

$\Rightarrow x = 180 - (*+\circ) = 90$

☜مثال: در شکل زیر ثابت کنید: $\hat{x} + \hat{y} = \hat{B} + \hat{D}$



✍حل:

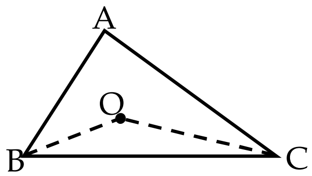
$$\left.\begin{array}{ll} y = \hat{D}_1 + \hat{B}_1 & \text{زاویه خارجی} \\ x = \hat{D}_2 + \hat{B}_2 & \text{زاویه خارجی} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{x} + \hat{y} = \hat{B} + \hat{D}$$

مثال: زاویه‌های مثلّثی متناسب با اعداد ۸، ۵ و ۲ می‌باشند.اندازه‌ی کوچکترین زاویه‌ی خارجی این مثلّث چند درجه است؟

حل: وقتی می‌گویند سه عدد با سه عدد دیگر متناسبند، یعنی نسبت تقسیم دوبه‌دوی آن‌ها مقدار یکسانی است:

$$\frac{x}{۲}=\frac{y}{۵}=\frac{z}{۸}=k \to ۲k+۵k+۸k=۱۸۰ \to k=\frac{۱۸۰}{۱۵}=۱۲ \Rightarrow \text{کوچک‌ترین زاویه خارجی}=۲k+۵k=۸۴$$

مثال: در داخل مثلث ABC نقطه‌ی دلخواه O را به دو رأس C,B وصل می‌کنیم. اگر $\hat{C}=۳۰^\circ$ و $\hat{B}=۶۰^\circ$ باشد کدام رابطه صحیح است؟



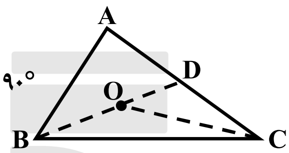
۱) $۳۰^\circ < B\hat{O}C < ۹۰^\circ$

۲) $۹۰^\circ < B\hat{O}C < ۱۵۰^\circ$

۳) $۱۲۰^\circ < B\hat{O}C < ۱۸۰^\circ$

٤) $۹۰^\circ < B\hat{O}C < ۱۸۰^\circ$

حل: همواره زاویه‌ی خارجی از هر زاویه‌ی داخلی غیرمجاور با خودش بزرگ‌تر است.

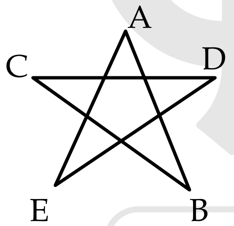


$$\left.\begin{array}{l} \hat{D}_۱ > \hat{A} \ (\text{زاویه خارجی}) \\ B\hat{O}C > \hat{D}_۱ \ (\text{زاویه خارجی}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B\hat{O}C > \hat{A} = ۹۰^\circ \\ B\hat{O}C + O\hat{B}C + O\hat{C}B = ۱۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{O}C < ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow ۱۸۰^\circ > B\hat{O}C > ۹۰^\circ$$

مثال: در شکل مقابل مجموع زوایای $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$، $\hat{D}$ و $\hat{E}$ کدام است؟

حل:

روش اول:

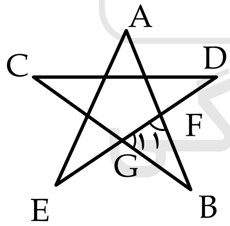


$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}+\hat{E}+\hat{F}=۱۸۰^\circ \\ \hat{C}+\hat{G}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{C}+\hat{F}+\hat{G}+\hat{E}+\hat{D}=۳۶۰^\circ$$

$$\hat{B}+۱۸۰^\circ-\hat{F}+۱۸۰^\circ-\hat{G}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=\hat{F}+\hat{G}-۱۸۰^\circ \Rightarrow$$

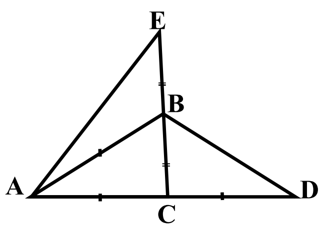
$$\hat{A}+\hat{C}+\left(\hat{B}+۱۸۰^\circ\right)+\hat{E}+\hat{D}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{E}=۱۸۰^\circ$$

روش دوم:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{F}_۱=\hat{A}+\hat{E} \\ \hat{G}_۱=\hat{C}+\hat{D} \\ \hat{F}_۱+\hat{G}_۱+\hat{B}=۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{E}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{B}=۱۸۰^\circ$$

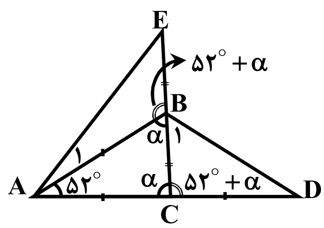
مثال: در شکل مقابل زاویه‌ی $B\hat{A}C=۵۲^\circ$، مجموع دو زاویه‌ی **D** و **E** چند درجه است؟



حل:

دو مثلث ABE و BCD طبق برابری دو ضلع و زاویه‌ی بین با هم برابرند.

پس $\hat{E}=\hat{B}_۱$ و $\hat{A}_۱=\hat{D}$ می‌باشد. حال داریم:



$$\overset{\triangle}{ABC}: \hat{A}=۵۲^\circ \Rightarrow ۲\alpha=۱۸۰^\circ-۵۲^\circ=۱۲۸^\circ \Rightarrow \alpha=۶۴^\circ$$

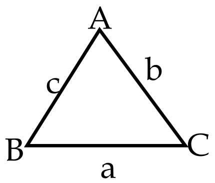
$$\Rightarrow \hat{D}+\hat{E}=\hat{D}+\hat{B}_۱=A\hat{C}B=\alpha=۶۴^\circ$$

۳- روابط طولی در مثلث:

الف) شرط وجود مثلث:

قضیه: در هر مثلث، هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر و از قدر مطلق تفاضل آن‌ها بزرگتر است.

$$|a-b|<c<a+b$$
$$|a-c|<b<c+a$$
$$|b-c|<a<b+c$$



پس شرط لازم و کافی برای آن که سه عدد مثبت a، b و c، طول اضلاع یک مثلث باشند، آن است که هر سه نامساوی $a<b+c$، $b<a+c$ و $c<a+b$ برقرار باشد. ضمن آن‌که اگر c بزرگترین ضلع مثلث باشد، شرط لازم و کافی برای وجود مثلث آن است که: $c<a+b$

☜مثال: اگر a ، b و c اضلاع مثلث ABC و $a\ge b\ge c$ باشد، آن‌گاه نشان دهید:

$\frac{1}{3}$ (محیط) $>$ کوچک‌ترین ضلع مثلث $(c)>0$ $\qquad$ $\frac{1}{2}$ (محیط) $>$ بزرگ‌ترین ضلع مثلث $(a)\ge$ $\frac{1}{3}$ (محیط)

✍حل:

a بزرگ‌ترین ضلع است: $\left.\begin{array}{l} a\ge b\\ a\ge c\end{array}\right\}\to 2a\ge b+c\to 3a\ge a+b+c=$ محیط $\to a\ge\frac{1}{3}$ (محیط)

قضیه‌ی وجود مثلث : $a<b+c\to 2a<a+b+c=$ محیط $\to a<\frac{1}{2}$ (محیط)

c کوچک‌ترین ضلع است: $\left.\begin{array}{l} 0<c\le a\\ 0<c\le b\end{array}\right\}\to 0<2c\le a+b\to 0<3c\le a+b+c\to 0<c\le\frac{1}{3}$ (محیط)

☜مثال: با کدام سه طول داده شده می‌توان مثلث ساخت؟ (a,b مثبت‌اند)

۱) $a+b+1, b, a$ $\qquad$ ۲) $a+b, b+1, a+1$

۳) $2a^2+3a+1, (a+1)^2, a^2$ $\qquad$ ۴) $3a, 2a, a-2$

✍حل: باید اعداد در شرط وجود مثلث صدق کنند.

۱) $a+b+1>a+b$ غ ق ق

۲) $a+b<a+b+2\ ,\ 2a+b+1>b+1\ ,\ 2b+a+1>a+1\Rightarrow$ شرایط وجود مثلث را دارد پس قابل قبول است

۳) $2a^2+3a+1>(a+1)^2+a^2$ غ ق ق

۴) $3a>2a+(a-2)$ غ ق ق

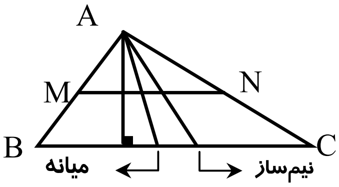
☜مثال: تعداد مثلث‌هایی که اندازه‌های اضلاع آن‌ها سه عدد طبیعی متوالی‌اند، کدام است؟

✍حل: قضیه‌ی وجود مثلث را می‌نویسیم:

$$n+2<(n+1)+n\to n>1$$

برای $n>1$ این نامساوی همواره برقرار است، در نتیجه بی‌شمار جواب داریم.

ب) قضیه پاره‌خط واصل بین وسط دو ضلع مثلث:

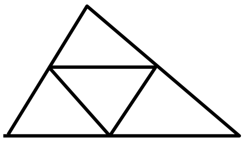


پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند، با ضلع سوم موازی و نصف آن است.

$$MN \parallel BC \quad , \quad MN = \frac{۱}{۲} BC$$

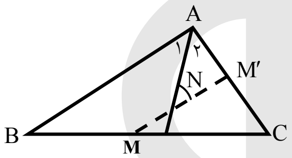
این پاره‌خط ارتفاع، میانه و نیمساز نظیر رأس A را نیز نصف می‌کند. به‌طور کلی پاره‌خط MN، مکان هندسی وسط‌های کلیه پاره‌خط‌هایی است که یک سر آن نقطه A و سر دیگر آن روی پاره‌خط BC است.

قضیه‌ی عکس: اگر از وسط ضلع مثلثی خطی موازی ضلعی دیگر رسم کنیم، ضلع سوم را نصف می‌کند و اندازه پاره‌خط حاصل نصف ضلع موازی آن خواهد بود.



نکته: با وصل کردن اوساط اضلاع هر مثلث به هم، مثلث به چهار مثلث همنهشت (و در نتیجه هم‌مساحت) افراز می‌شود.

☜مثال: در مثلث ABC اگر $AB = ۱۲$ و $AC = ۸$ و از نقطه M وسط ضلع BC خطی موازی با AB رسم کنیم تا نیمساز داخلی زاویه A را در نقطه N قطع کند اندازه MN کدام است؟

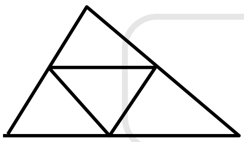


✍حل: چون M وسط BC است، پس M' نیز وسط AC می‌باشد، لذا:

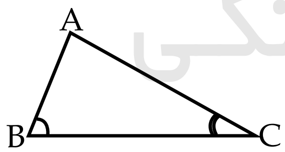
$$MM' = \frac{۱}{۲} AB = ۶$$
$$MM' \parallel AB \Rightarrow N = \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$$
$$\Rightarrow AM' = NM' = ۴ \Rightarrow MN = ۶ - ۴ = ۲$$

☜مثال: یک مثلث را به چهار مثلث همنهشت تقسیم کرده‌ایم. محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از مثلث‌های همنهشت است؟

✍حل: با توجه به این‌که اضلاع مثلث جدید نصف اضلاع مثلث اولیه‌اند، لذا: چون اضلاع نصف شده‌اند محیط اولیه ۲ برابر محیط ثانویه است.



۴- روابط بین اضلاع وزوایا:



قضیه تناظر اضلاع با زوایا: در هر مثلث، زاویه بزرگتر متناظر به ضلع بزرگتر است و بالعکس:

$$AC > AB \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

☜مثال: اگر BC بزرگترین ضلع مثلث ABC باشد، برای زاویه $\hat{A}$ کدام حکم همواره درست است؟

۱) منفرجه است. ۲) حاده است. ۳) قائمه است. ٤) بزرگتر از $۶۰°$ است.

✍حل: با استفاده از قضیه‌ی تناظر اضلاع با زوایا:

$$BC > AB \Rightarrow \hat{A} > \hat{C}$$
$$\Rightarrow ۲\hat{A} > \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰° - \hat{A} \Rightarrow ۳\hat{A} > ۱۸۰° \Rightarrow \hat{A} > ۶۰°$$
$$BC > AC \Rightarrow \hat{A} > \hat{B}$$

☜مثال: اگر یکی از زوایای مثلث با اضلاع غیر مساوی، برابر $۶۰°$ باشد ضلع مقابل به آن زاویه:

۱) کوچکترین ضلع مثلث است. ۲) بزرگترین ضلع مثلث است.

۳) ضلع متوسط مثلث است. ٤) با این اطلاعات قابل تعیین نیست.

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=۶۰^\circ\\ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=۱۲۰^\circ$$

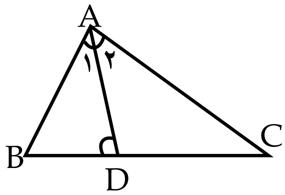
با توجه به صورت سؤال $\hat{B}\neq\hat{C}$. پس یکی از این دو زاویه بزرگتر از ۶۰° و دیگری کوچکتر از ۶۰° است.

فرض می‌کنیم $\hat{C}<۶۰^\circ,\hat{B}>۶۰^\circ$ پس $\hat{C}<\hat{A}<\hat{B}\Rightarrow c<a<b$ پس ضلع روبرو به زاویه‌ی ۶۰° ضلع متوسط این مثلث است.

مثال: در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه‌ی $\hat{A}$ ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. کدام نامساوی زیر همواره درست است؟

۱) $AB>BD$ ۲) $DA>DB$ ۳) $AB>AD$ ٤) $DB>DA$

حل: همواره زاویه‌ی خارجی از دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور بزرگ‌تر است:



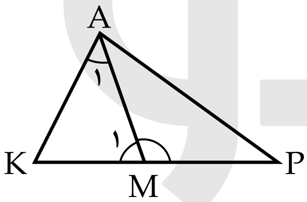
$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}=\hat{A}_۲+\hat{C}\Rightarrow\hat{D}>\hat{A}_۲\\ \hat{A}_۲=\hat{A}_۱\end{array}\right\}\Rightarrow\hat{D}>\hat{A}_۱\Rightarrow AB>BD$$

مثال: در مثلث PAK نقطه‌ی M روی ضلع PK قرار دارد. اگر $AM=AK$، کدام همواره درست است؟

۱) $AM>PM$ ۲) $AK>MK$

۳) $AP>MK$ ٤) $AP>AK$

حل: همواره زاویه‌ی خارجی از دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور بزرگ‌تر است:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}_۱>\hat{P}\ \text{زاویه خارجی}\\ AM=AK\Rightarrow\hat{M}_۱=\hat{K}\end{array}\right\}\to K>P\to AP>AK$$

ب) مساحت مثلث:

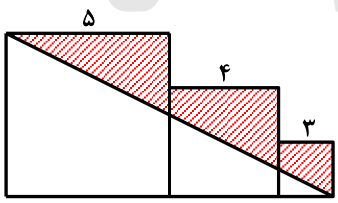
مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}ah_a=\frac{۱}{۲}bh_b=\frac{۱}{۲}ch_c\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}bc\sin A=\frac{۱}{۲}ac\sin B=\frac{۱}{۲}ab\sin C$$

نتیجه: بین مثلث‌هایی که دو ضلع ثابت دارند، مساحت مثلثی ماکزیمم است که قائم‌الزاویه باشد.

قضیه هرون: اگر p نصف محیط مثلث باشد، مساحت مثلث از رابطه روبه‌رو محاسبه می‌گردد: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

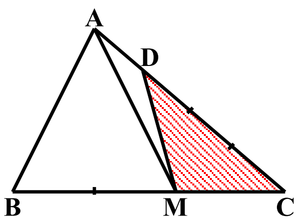
مثال: در شکل زیر ۳ مربع به اضلاع ۳، ٤ و ۵ کنار هم قرار گرفته‌اند. مساحت قسمت هاشورخورده چقدر است؟



حل:

$$S=(۲۵+۱۶+۹)-(\frac{۱۲\times۵}{۲})=۲۰$$

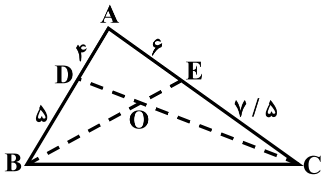
مثال: اگر $BM=۲MC$ و $DC=۳AD$ حاصل $\frac{S_{MDC}}{S_{ABC}}$ چقدر است؟



حل:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}=\frac{۱}{۳}\\ \frac{S_{MCD}}{S_{AMC}}=\frac{۳}{۴}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{S_{MCD}}{S_{ABC}}=\frac{۱}{۴}$$

مثال: در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟

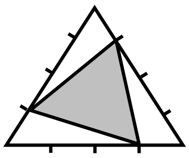


حل: بنا بر عکس قضیه‌ی تالس چون $\frac{۶}{۷/۵}=\frac{۴}{۵}$ است پس $DE \parallel BC$ است.

چون دو مثلث $\overset{\Delta}{DBC}$ و $\overset{\Delta}{BEC}$ دارای قاعده‌های برابر و ارتفاع‌های برابرند با حذف مثلث مشترک $\overset{\Delta}{BOC}$ خواهیم داشت:

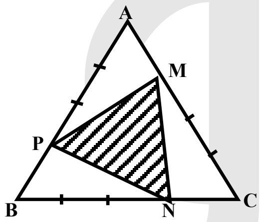
$$S_{\underset{DBC}{\Delta}} = S_{\underset{EBC}{\Delta}} \Rightarrow S_{\underset{OBD}{\Delta}} = S_{\underset{OCE}{\Delta}} \Rightarrow \frac{S_{\underset{OBD}{\Delta}}}{S_{\underset{OCE}{\Delta}}}=۱$$

مثال: هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع زیر، به نسبت‌های ۱ و ۳ تقسیم شده است. مساحت مثلث سایه‌زده چند برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است؟



حل:

چون اضلاع مثلث به نسبت‌های یکسان تقسیم شده‌اند. مثلث هاشور خورده هم متساوی الاضلاع است که البته این موضوع با توجه به قضیه‌ی کسینوس‌ها نیز قابل تحقیق است.

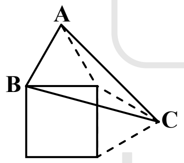


$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}a\times a\times \sin ۶۰=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{MCN}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}a\times\frac{۱}{۴}a\times \sin ۶۰=\frac{۳}{۱۶}S_{ABC}$$

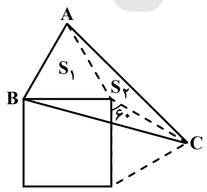
$$\to S_{MNP}=S_{ABC}-۳S_{MCN}=(۱-۳\times\frac{۳}{۱۶})S_{ABC}=\frac{۷}{۱۶}S_{ABC}$$

مثال: در خارج یک مربع به ضلع ۲ واحد بر روی هر دو ضلع مجاور آن، مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است، مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) $۱+\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۲+\sqrt{۳}$ ٤) ٤

حل:



$$S_۱=\frac{۲^۲\sqrt{۳}}{۴}=\sqrt{۳} \qquad S_۲=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲\times \text{Sin}\,۱۵۰^\circ=۱$$

$$S_{ABC}=S_۱+۲S_۲=\sqrt{۳}+۲$$

مثال: در مثلثی به اضلاع ۵، ٦ و ۷، طول ارتفاع وارد بر ضلع به طول ٦ کدام است؟

حل:

$$۲p=۱۸\Rightarrow p=۹$$

با استفاده از فرمول هرون:

$$s=\sqrt{۹(۹-۵)(۹-۶)(۹-۷)}=\sqrt{۹\times۴\times۳\times۲}=۶\sqrt{۶}$$

$$\frac{۱}{۲}\times۶\times h=۶\sqrt{۶}\Rightarrow h=۲\sqrt{۶}$$

☜مثال: اگر یک راس مثلثی مرکز دایره‌ای به شعاع ٦ و دو راس دیگرش روی این دایره باشند، بیشترین مساحت این مثلث کدام است؟

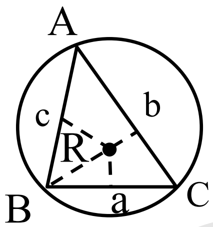
✍حل:

$$S=\frac{1}{2}R\times R\sin\theta=\frac{1}{2}6\times 6\sin\theta=18\sin\theta$$

ماکزیمم مساحت هنگامی است که $\sin\theta=1$ باشد پس $S_{max}=18$

ج) قضیه‌ی سینوس‌ها و کسینوس‌ها:

دو رابطه بسیار مهم زیر در مثلث برقرارند:



رابطه سینوس‌ها   شعاع دایره محیطی: R

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$$

رابطه کسینوس‌ها

$$\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}\\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}\end{cases}$$

☜مثال: در مثلثی داریم $a\neq b=c$ و $a=6$. اگر شعاع دایره‌ی محیطی این مثلث $2\sqrt{3}$ باشد، اندازه‌ی b کدام است؟

✍حل: با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها:

$$\frac{a}{\sin A}=2R=4\sqrt{3}\Rightarrow\frac{6}{\sin A}=4\sqrt{3}\Rightarrow\sin A=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\hat{A}=60^\circ\Rightarrow$ چون $a=b$ می‌شود غیر قابل قبول است

یا

$$\hat{A}=120^\circ\Rightarrow\hat{B}=\hat{C}=30^\circ\Rightarrow\frac{b}{\sin B}=2R\ \Rightarrow\ b=4\sqrt{3}\sin 30^\circ=2\sqrt{3}$$

☜مثال: اگر در مثلثی رابطه‌ی $b^3+c^3=a^2(b+c)$ برقرار باشد، مقدار زاویه‌ی $\hat{A}$ کدام است؟

✍حل:

$$b^3+c^3=a^2(b+c)\Rightarrow a^2=\frac{(b^2+c^2-bc)(b+c)}{(b+c)}=b^2+c^2-bc$$

با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها و مقایسه‌ی آن با رابطه‌ی گفته شده:

$$\left.\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-bc\\ a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\end{aligned}\right\}\Rightarrow 2\cos A=1\Rightarrow\cos A=\frac{1}{2}\Rightarrow\hat{A}=60^\circ$$

د) قضیه‌ی فیثاغورس:

در هر مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:

قضیه فیثاغورس:

$$\hat{A} > 90 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$$
$$\hat{A} = 90 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$
$$\hat{A} < 90 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

که مورد اول و سوم هم بر اساس قضیه‌ی کسینوس‌ها و هم بر اساس قضیه‌ی لولا قابل اثبات است .

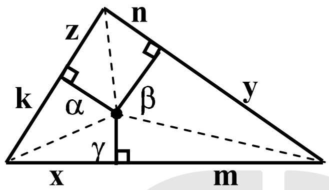
نکته: اعداد فیثاغورسی معروف عبارتند از:

$$(3,4,5)-(5,12,13)-(7,24,25)-(8,15,17)-(9,40,41)-(12,35,37)-(20,21,29)$$

مثال: اگر از یک نقطه‌ی دلخواه داخل مثلث، سه عمود بر اضلاع رسم کنیم.

نشان دهید بین قطعات حاصل رابطه زیر برقرار است:

$$x^2 + y^2 + z^2 = m^2 + n^2 + k^2$$



حل: با نوشتن قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که وترشان مشترک است، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2 + z^2 = \beta^2 + n^2 \\ \alpha^2 + k^2 = x^2 + \gamma^2 \\ \beta^2 + y^2 = \gamma^2 + m^2 \end{array}\right\} \to m^2 + n^2 + k^2 + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = x^2 + y^2 + z^2 + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$\to x^2 + y^2 + z^2 = m^2 + n^2 + k^2$$

مثال: در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ اگر $b = 5$، $c = 12$ و $\hat{A} < 90°$ باشد، برای ضلع a کدام گزاره درست است؟

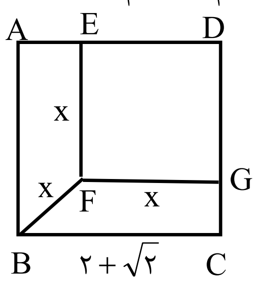
۱) $13 < a < 17$ ۲) $7 < a < 13$ ۳) $7 < a < 17$ ۴) $a < 13$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} A < 90 \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 < 169 \Rightarrow a < 13 \\ |b - c| < a < b + c \Rightarrow 7 < a < 17 \end{array}\right\} \Rightarrow 7 < a < 13$$

مثال: در شکل زیر ABCD و EFGD مربع هستند. مساحت مربع EFGD را بیابید.

حل: اگر قطر مربع ABCD را یک‌بار بر اساس قطر مربع EDGF و بار دیگر با توجه به ضلع بنویسیم، خواهیم داشت:



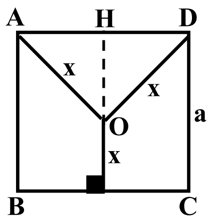
$$x + x\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 2$$

$$x(1 + \sqrt{2}) = 2(\sqrt{2} + 1) \to x = 2$$

$$\to S_{EFDG} = x^2 = 4$$

نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به ساق a، وتر $a\sqrt{2}$ است.

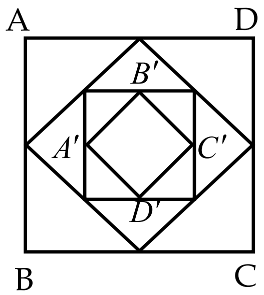
مثال: در شکل مقابل **ABCD** مربع به ضلع **a** است. $\frac{x}{a}$ را بیابید.



حل: با نوشتن قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث AOH، داریم:

$$(a - x)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = x^2 \to x^2 + a^2 - 2ax + \frac{a^2}{4} = x^2 \to 2ax = \frac{5a^2}{4} \to x = \frac{5a}{8} \to \frac{x}{a} = \frac{5}{8}$$

☜مثال: در شکل زیر رأس‌های هر مربع اوساط اضلاع مربع دیگر است. اگر طول ضلع مربع **ABCD** برابر با ۸ باشد، طول ضلع مربع $A'B'C'D'$ را بیابید.



✍حل: چون وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی به ساق a، $a\sqrt{۲}$ است، لذا چون ضلع نصف می‌شود ضلع مربع جدید $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ برابر ضلع مربع قبلی است.

$$\rightarrow ۸\times(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۳} = ۸(\frac{۲\sqrt{۲}}{۸}) = ۲\sqrt{۲}$$

☜مثال: اگر در مثلثی رابطه $a^n = b^n + c^n$ برقرار باشد، $(n > ۲)$ آن‌گاه کدام صحیح است؟

۱) $\hat{A} > ۹۰^\circ$ ۲) $۶۰^\circ < \hat{A} < ۹۰^\circ$ ۳) $\hat{A} < ۶۰^\circ$ ۴) $\hat{A} < ۴۵^\circ$

✍حل:

$$a^n = b^n + c^n \rightarrow a^n > b^n \rightarrow a > b \rightarrow \frac{b}{a} < ۱$$

$$a^n > c^n \rightarrow a > c \rightarrow \frac{c}{a} < ۱$$

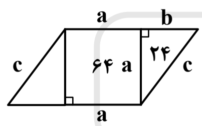
چون a بزرگ‌ترین ضلع است وقبلاً گفتیم، زاویه‌ی مقابل به بزرگ‌ترین ضلع مثلث‌حتماً بزرگ‌تر از ۶۰° است، پس $\hat{A} > ۶۰^\circ$

$$a^۲a^{n-۲} = b^۲b^{n-۲} + c^۲c^{n-۲} \rightarrow a^۲ = b^۲(\frac{b}{a})^{n-۲} + c^۲(\frac{c}{a})^{n-۲} < b^۲ + c^۲ \rightarrow \hat{A} < ۹۰^\circ$$

☜مثال: یک متوازی‌الاضلاع از یک مربع و دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی مساوی هم تشکیل شده است. اگر مساحت مربع و یک مثلث قائم‌الزاویه به‌ترتیب ۶۴ و ۲۴ واحد مربع باشند، محیط متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

✍حل:



$$a^۲ = ۶۴ \Rightarrow a = ۸$$

$$\frac{ba}{۲} = ۲۴ \Rightarrow ab = ۴۸ \Rightarrow b = ۶$$

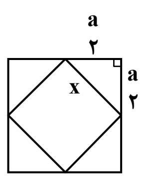
$$c = \sqrt{a^۲ + b^۲} = ۱۰$$

$$\Rightarrow \text{محیط} = ۲(a+b+c) = ۲(۱۰+۶+۸) = ۴۸$$

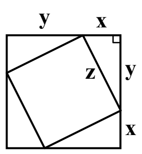
☜مثال: در مربعی به ضلع a، کوچک‌ترین مربع ممکن را به طریقی محاط می‌کنیم که هر رأس مربع بر روی ضلع مربع اصلی قرار گیرد. نسبت ضلع این مربع به ضلع مربع اصلی کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

✍حل:



برای آن‌که ضلع مربع کوچک‌ترین مقدار ممکن باشد، باید رأس مربع کوچک‌تر وسط ضلع مربع بزرگ‌تر قرار گیرد که در این صورت: $x = \frac{a}{۲}\sqrt{۲} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$



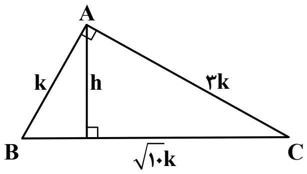
اثبات:
$$\begin{cases} z^۲ = x^۲ + y^۲ = (x+y)^۲ - ۲xy = a^۲ - ۲xy \\ x + y = a \end{cases}$$

چون جمع دو متغیر مقدار ثابتی است، ضرب آن‌ها زمانی ماکسیمم است که با هم برابر باشند (که در این صورت z مینیمم می‌شود). $\Rightarrow x = y = \frac{a}{۲}$

☜مثال: در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت ۱ و ۳ و مساحت ۶۰ واحد مربع است. ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

۱) ۵ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) ۶ ۴) ۸

✍حل:



$$S_{ABC}=\frac{k\times 3k}{2}=60 \Rightarrow k^2=40 \Rightarrow k=2\sqrt{10}$$

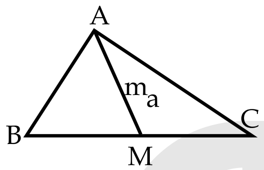
$$h\times\sqrt{10}k=k\times 3k \Rightarrow h=\frac{3}{\sqrt{10}}k=\frac{3}{\sqrt{10}}\times 2\sqrt{10}=6$$

۵) اجزای دیگر مثلث:

۱) میانه:

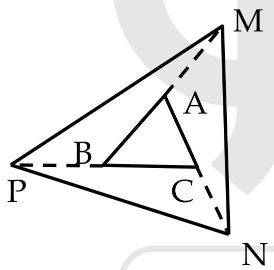
پاره‌خطی که یک سر آن رأس مثلث و سر دیگرش وسط ضلع مقابل آن رأس باشد، میانه‌ی نظیر آن رأس از مثلث نامیده می‌شود.

نکات:



۱- هر میانه‌ی مثلث مساحت آن را نصف می‌کند.یا به تعبیر دیگر، میانه مثلث را به دو مثلث معادل تقسیم می‌کند.

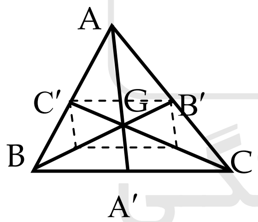
☜مثال: هر یک از اضلاع مثلث ABC را به اندازه‌ی خودش در یک جهت امتداد می‌دهیم تا مثلث MNP حاصل شود. مساحت مثلث MNP چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



✍حل: اگر از C به M و از B به N و از A به P وصل کنیم، این خطوط در مثلث‌هایی که قرار دارند میانه‌اند، لذا مساحت را نصف می‌کنند، پس داریم:

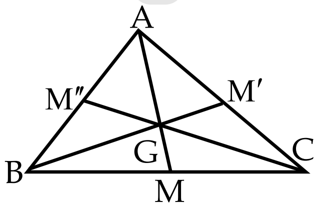
$$\begin{cases} S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ACM}=S_{\Delta MCN} \\ S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABP}=S_{\Delta MAP} \\ S_{\Delta ABC}=S_{\Delta BCN}=S_{\Delta PBN} \end{cases} \Rightarrow S_{\Delta MNP}=7S_{\Delta ABC}$$

۲- سه میانه‌ی مثلث از یک نقطه می‌گذرند (همرسند) و در آن نقطه یکدیگر را به نسبت یک به دو تقسیم می‌کنند. این نقطه مرکز ثقل مثلث نیز می‌باشد.



$$\boxed{\frac{GA'}{GA}=\frac{GB'}{GB}=\frac{GC'}{GC}=\frac{1}{2}}$$

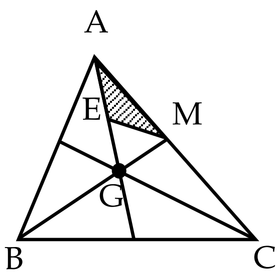
۳- سه میانه‌ی هر مثلث، آن مثلث را به شش مثلث هم‌مساحت (معادل) تقسیم می‌کنند.



$$S_{\Delta GBC}=S_{\Delta GAC}=S_{\Delta AGB}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$$

$$S_{\Delta AGM'}=S_{\Delta GM'C}=S_{\Delta GCM}=S_{\Delta MGB}=S_{\Delta BGM''}=S_{\Delta M''GA}=\frac{1}{6}S_{\Delta ABC}$$

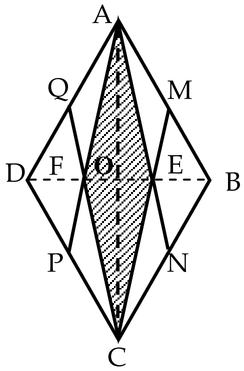
☜مثال: در مثلث ABC نقطه G مرکز ثقل و نقطه E وسط AG می‌باشد. مساحت مثلث AME چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



✍حل: در مثلث AGM، EM میانه است. لذا:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\Delta AME}=\frac{1}{2}S_{\Delta AGM} \\ \text{G مرکز ثقل مثلث ABC} \Rightarrow S_{\Delta AGM}=\frac{1}{6}S_{\Delta ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\Delta AME}=\frac{1}{12}S_{\Delta ABC}$$

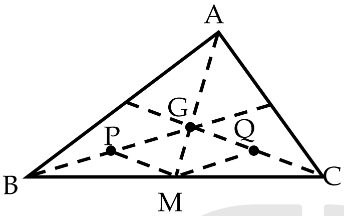
☜مثال: در چهار ضلعی ABCD، M، N، P و Q وسطهای اضلاع می باشند. مساحت چهارضلعی AFCE چه کسری از مساحت چهارضلعی ABCD است؟



✍حل: اگر قطر AC را رسم کنیم، دو مثلث تشکیل می‌شود که AP و CQ، AN، CM میانه‌های آن هستند، لذا با توجه به خاصیت گفته شده داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\Delta AEC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ACB} \\ S_{\Delta AFC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ADC}\end{array}\right\} \Rightarrow S_{AFCE}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$$

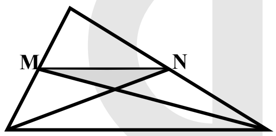
☜مثال: در شکل مقابل G مرکز مثلث، P وسط BG و Q وسط CG است. مساحت چهارضلعی MPGQ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



✍حل:

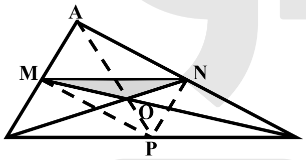
$$S_{PGQM}=S_{PGM}+S_{GQM}=\frac{S}{12}+\frac{S}{12}=\frac{S}{6}$$

☜مثال: در شکل مقابل نقاط M و N وسط دو ضلع هستند. مساحت بزرگ‌ترین مثلث، چند برابر مساحت مثلث سایه‌زده است؟



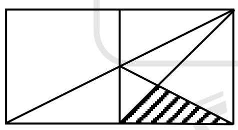
✍حل:

می‌دانیم در هر مثلث با رسم سه میانه، ٦ مثلث هم‌مساحت ایجاد می‌شود.
هم‌چنین در هر مثلث با وصل کردن وسط اضلاع، ٤ مثلث هم‌نهشت و در نتیجه هم مساحت ایجاد می‌شود.



$$S_{\Delta MNP}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}\ ,\ S_{\Delta MNO}=\frac{2}{6}S_{\Delta MNP}=\frac{1}{12}S_{\Delta ABC}$$

☜مثال: در شکل مقابل، دو مربع مساوی کنار هم قرار دارند. مساحت ناحیه‌ی سایه‌زده چند برابر مساحت یک مربع است؟

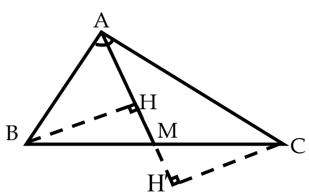


۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{9}$

۳) $\frac{2}{9}$ ٤) $\frac{\sqrt{2}}{9}$

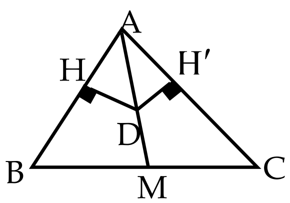
✍حل:

چون دو خط رسم شده برای مثلث حاصل میانه‌اند، لذا مساحت قسمت هاشور خورده $\frac{1}{6}$ مساحت مثلث است. مساحت مثلث نصف مجموع مساحت‌های دو مربع است، یعنی با مساحت یکی از مربع‌ها مساوی است. پس مساحت قسمت هاشور خورده $\frac{1}{6}$ مساحت یک مربع است.



٤- دو رأس هر مثلث، از میانه‌ی نظیر رأس سوم به یک فاصله‌اند و به‌عکس اگر دو رأس مثلث از خطی که از رأس سوم می‌گذرد به یک فاصله باشند، آن خط میانه است. (آن خط نباید با ضلع سوم موازی باشد.)

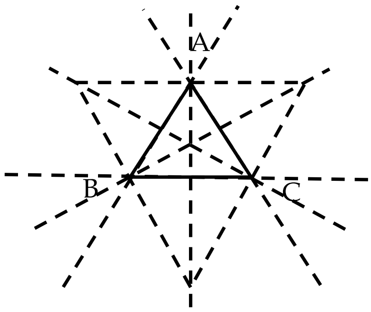
$$AM \Leftrightarrow BH=CH'$$ میانه



٥- نسبت فاصله‌های هر نقطه‌ی میانه از دو ضلع مجاور آن، برابر است با عکس نسبت آن دو ضلع:

$$\frac{DH}{DH'}=\frac{AC}{AB}$$

۲) نیمساز:



پاره‌خطی که به یک رأس از مثلث و ضلع مقابل آن محدود است و زاویه‌ی آن رأس را نصف می‌کند، نیمساز مثلث نامیده می‌شود. هر مثلث دارای سه نیمساز داخلی و سه نیمساز خارجی است. سه نیمساز داخلی از یک نقطه می‌گذرند.

نیمسازهای خارجی دو زاویه و نیمساز داخلی زاویه‌ی سوم نیز از یک نقطه می‌گذرند که آن نقطه نیز از سه ضلع مثلث به یک فاصله است و لذا می‌توان دایره‌ای بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس کرد که آن نقطه (محل تلاقی نیمسازهای خارجی دو زاویه و نیمساز داخلی زاویه‌ی سوم) مرکز آن دایره می‌باشد. این دایره، دایره‌ی محاطی خارجی مثلث نام دارد. هر مثلث سه دایره‌ی محاطی خارجی دارد.

مثال: سه خط دوبه‌دو متقاطع در یک صفحه مفروضند. چند نقطه در این صفحه می‌توان یافت که از هر سه خط مزبور به یک فاصله باشد؟

حل:

سه خط یک مثلث می‌سازند و سه مرکز دایره‌ی محاطی خارجی و یک مرکز دایره محاطی داخلی از سه ضلع به یک فاصله‌اند، پس ٤ نقطه با این خاصیت وجود دارد.

مثال: محل تلاقی کدام دسته خط از دسته خط‌های زیر همواره داخل مثلث است؟

۱) میانه‌ها و نیمسازهای داخلی　　۲) ارتفاع‌ها و میانه‌ها

۳) ارتفاع‌ها و عمودمنصف‌ها　　٤) عمودمنصف‌ها و نیمسازها

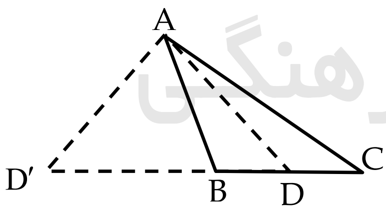
حل: تنها میانه‌ها و نیمسازهای داخلی تمام نقاطشان داخل مثلث می‌باشد، لذا محل تلاقیشان نیز داخل مثلث می‌باشد.

نکات:

۱- نیمساز زاویه‌ی داخلی هر رأس مثلث بر نیمساز زاویه‌ی خارجی همان رأس عمود است.

مثال: در مثلث ABC، اگر طول نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی A برابر باشند، $|\hat{B}-\hat{C}|$ کدام است؟

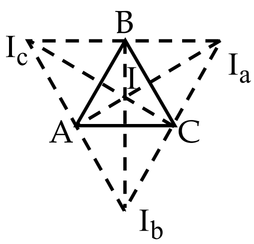
حل:



با توجه به نکته‌ی فوق $A=۹۰^\circ$ و داریم $AD'=AD$ در نتیجه $\hat{D'}=\hat{D}=۴۵^\circ$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=۱۸۰^\circ-۴۵^\circ-\dfrac{\hat{A}}{۲}\\[2mm]\hat{C}=۴۵^\circ-\dfrac{\hat{A}}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow |\hat{B}-\hat{C}|=۹۰^\circ$$

مثال: هرگاه I مرکز دایره‌ی محاطی داخلی و I_c، I_b و I_a مراکز دوایر محاطی خارجی مثلث ABC باشند، در مثلثی که رئوسش I_c، I_b و I_a می‌باشد، I کدام است؟

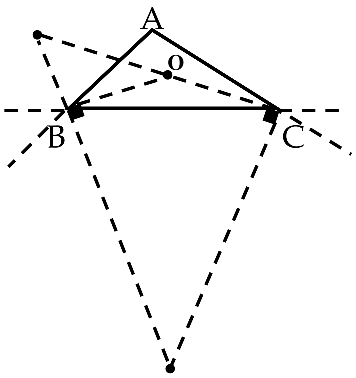


۱) مرکز ثقل　　۲) مرکز دایره‌ی محاطی داخلی

۳) محل تلاقی سه ارتفاع　　٤) مرکز دایره‌ی محیطی

حل:

چون IC نیمساز داخلی و I_bI_a نیمساز خارجی رأس C است، لذا بر هم عمودند و به دلیل مشابه I_aA و I_bB نیز ارتفاعند و I محل تلاقی ارتفاع‌ها است.

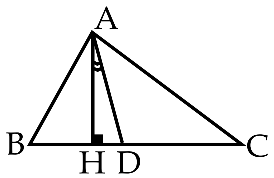


۲- زاویه‌ی بین دو نیمساز داخلی زوایای C,B در مثلث ABC مساوی $90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ است.

۳- زاویه‌ی بین دو نیمساز خارجی زوایای C,B در مثلث ABC مساوی $90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$ است.

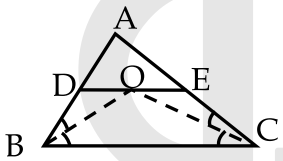
٤- زاویه‌ی بین نیمساز داخلی زاویه‌ی C و نیمساز خارجی زاویه‌ی B در مثلث ABC مساوی $\frac{\hat{A}}{2}$ است.

۵- در هر مثلث زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز هر رأس برابر است با نصف قدر مطلق تفاضل زاویه‌های دو رأس دیگر.



$$\boxed{H\hat{A}D = \frac{1}{2}\left|\hat{B} - \hat{C}\right|}$$

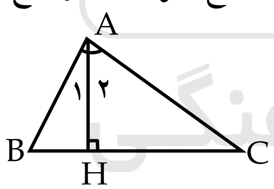
٦- هر گاه از نقطه‌ی تلاقی نیمسازهای داخلی دو رأس یک مثلث، خطی موازی با ضلع واقع بین آن دو رأس رسم کنیم تا دو ضلع دیگر مثلث را قطع کند پاره‌خط پدید آمده برابر است با مجموع بخش‌های ایجاد شده روی دو ضلع مثلث که مجاور با دو رأس اولیه هستند.



$$\boxed{DE = DB + EC}$$

۳) ارتفاع:

پاره‌خطی که یک سر آن بر رأس مثلث و سر دیگرش روی ضلع مقابل (یا امتداد آن) قرار دارد و بر آن ضلع عمود است، ارتفاع نظیر آن رأس مثلث نامیده می‌شود.



نکات:

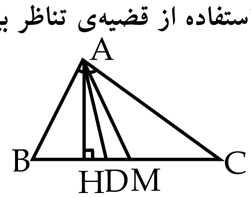
۱- ارتفاع نظیر هر رأس در مثلث با ضلع کوچکتر، زاویه کمتری می‌سازد.

$$AB < AC \Rightarrow \hat{A}_1 < \hat{A}_2$$

☜مثال: در مثلث ABC، $AC > AB$، AM میانه، AD نیمساز و AH ارتفاع می‌باشد. کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱) AM بین AD و AH قرار دارد.
۲) AD بین AM و AH قرار دارد.
۳) AH بین AD و AM قرار دارد.
٤) بسته به شکل مثلث هر سه حالت ممکن است.

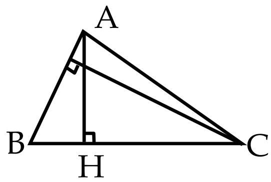
✍حل: با استفاده از قضیه‌ی تناظر بین اضلاع و زوایا داریم:



$AC > AB \Rightarrow M\hat{A}C < M\hat{A}B \Rightarrow$ است MAB نیمساز درون زاویه $\Rightarrow AD < AM$

$AC > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{C} \Rightarrow B\hat{A}H < H\hat{A}C \Rightarrow AH < AD$

۲- در هر مثلث، نسبت اندازه‌ی هر دو ضلع برابر است با نسبت عکس ارتفاع‌های نظیر آن دو ضلع.

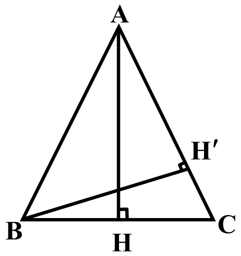


$$\frac{a}{c}=\frac{h_c}{h_a}$$

نتیجه: کلیه‌ی روابطی که در مورد اضلاع مثلث برقرار است، در مورد عکس ارتفاع‌های مثلث نیز بر قرار است. مثلاً:

$$|b-c|<a<b+c \Rightarrow \left|\frac{۱}{h_b}-\frac{۱}{h_c}\right|<\frac{۱}{h_a}<\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}$$

مثال: اگر طول اضلاع مثلثی ۲، ۳ و ۳ سانتی‌متر باشد طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث چقدر است؟



حل: با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس:

$$AH=\sqrt{۳^۲-\left(\frac{۲}{۲}\right)^۲}=۲\sqrt{۲}$$

با استفاده از تساوی مساحت‌ها از دو رابطه:

$$AH\times BC=BH'\times AC \Rightarrow BH'=\frac{۲\sqrt{۲}\times ۲}{۳}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$$

مثال: اگر در مثلث ABC داشته باشیم: $\frac{a}{b}=\frac{h_a}{h_b}$ آن‌گاه مثلث ABC چگونه مثلثی است؟

۱) قائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الاضلاع ۳) متساوی‌الساقین ٤) نامشخص

حل: با توجه به تساوی مساحت‌ها:

$$ah_a=bh_b \rightarrow \frac{b}{a}=\frac{h_a}{h_b}=\frac{a}{b}\rightarrow a=b$$

۲- اگر همه‌ی زوایای مثلثی حاد باشند، کلیه‌ی ارتفاع‌های مثلث داخل آن قرار می‌گیرند. امّا اگر مثلثی یک زاویه‌ی منفرجه داشته باشد، ارتفاع‌های نظیر اضلاع آن زاویه بر امتداد اضلاع وارد می‌شوند. در مثلث قائم‌الزاویه هم ۲ تا از ارتفاع‌ها بر اضلاع منطبقند.

مثال: اگر در مثلث ABC زاویه‌ی $A=۹۲^\circ$ باشد، کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

۱) نقطه‌ی تلاقی سه میانه خارج مثلث است. ۲) نقطه‌ی تلاقی سه نیمساز خارج مثلث است.

۳) نقطه‌ی تلاقی سه ارتفاع خارج مثلث است. ٤) نقطه‌ی تلاقی سه ارتفاع روی ضلع BC می‌باشد.

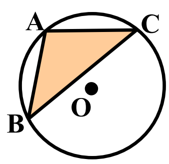
حل:اگر در مثلثی یک زاویه منفرجه باشد، ارتفاع‌های نظیر اضلاع زاویه منفرجه در خارج مثلث بر امتداد آن اضلاع وارد می‌شوند.

۳- سه ارتفاع مثلث همرسند.

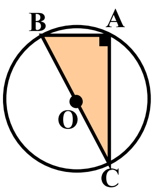
۴) عمود منصف‌های مثلث:

خطی که در وسط هر ضلع مثلث بر آن عمود است، عمودمنصف مثلث نامیده می‌شود. مثلث دارای سه عمودمنصف است که از یک نقطه می‌گذرند که از سه رأس مثلث به یک فاصله است. لذا می‌توان از این سه نقطه یک دایره عبور داد که مرکز آن محلّ تلاقی سه عمودمنصف مثلث می‌باشد. این نقطه مرکز دایره‌ی محیطی مثلث است.

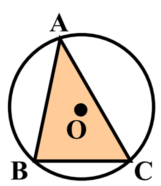
نکته: در مثلث حاده‌الزاویه سه عمود منصف در درون مثلث همرسند. در مثلث قائم‌الزاویه سه عمودمنصف در روی وتر همرسند و در مثلث منفرجه‌الزاویه سه عمودمنصف بیرون مثلث همرسند.



ABC منفرجه‌الزاویه



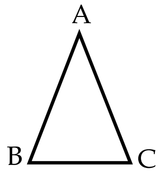
ABC قائم‌الزاویه



ABC حاده‌الزاویه

و) خواص مثلث‌های خاص:

۱) مثلث متساوی‌الساقین:

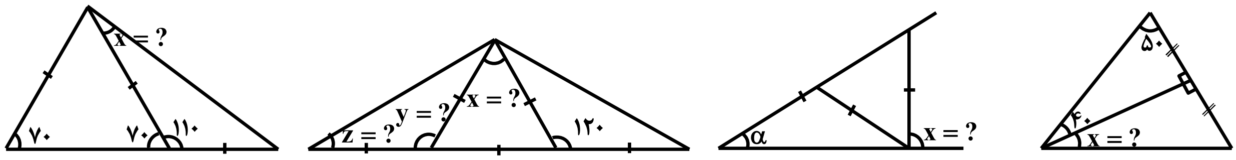


مثلثی که دو ضلع برابر دارد متساوی‌الساقین نامیده می‌شود.

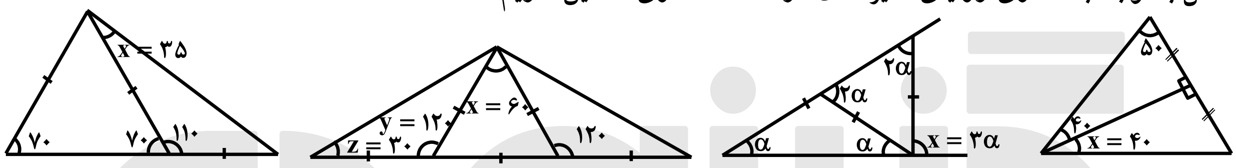
نکات:

۱- در هر مثلث متساوی‌الساقین دو زاویه مجاور به قاعده با هم مساویند و به عکس اگر دو زاویه‌ی مثلثی مساوی باشند آن مثلث متساوی‌الساقین است.

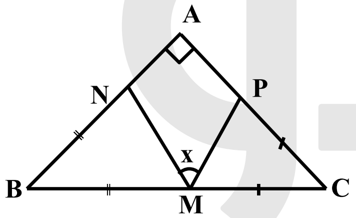
مثال: در شکل‌های زیر متغیرها را بیابید.



حل: با توجه به تساوی زوایای نظیر ساق در مثلث متساوی‌الساقین داریم:

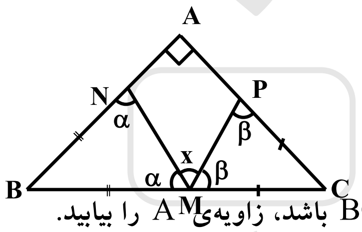


مثال: در این شکل x کدام است؟



حل:

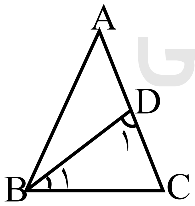
با توجه به تساوی زوایای نظیر ساق در مثلث متساوی‌الساقین داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=x+90^\circ\\ \alpha+\beta+x=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow x+90^\circ+x=180^\circ \rightarrow x=45^\circ$$

مثال: اگر در مثلث متساوی‌الساقین ABC طول نیمساز داخلی $\hat{B}$ برابر طول قاعده‌ی BC باشد، زاویه‌ی A را بیابید.

حل: با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین داریم:

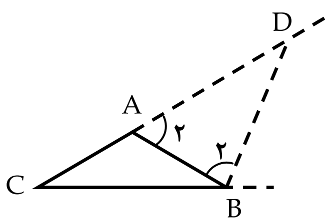


$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=180^\circ-2\hat{C}\\ BD=BC\Rightarrow \hat{C}=\hat{D}_1\Rightarrow \hat{B}_1=180^\circ-2\hat{C}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}=\hat{B}_1$$

$$\hat{A}+2\hat{B}=180^\circ\Rightarrow \hat{A}+4\hat{B}_1=180^\circ\Rightarrow \hat{A}+4\hat{A}=180^\circ\Rightarrow 5\hat{A}=180^\circ\Rightarrow \hat{A}=36^\circ$$

مثال: یکی از زاویه‌های مثلث متساوی‌الساقین برابر 100° است. نیمساز خارجی یکی از زوایا ضلع مقابل را با کدام زاویه قطع می‌کند؟

حل: با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین داریم:

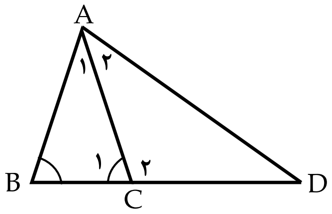


$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}+\hat{C}=180^\circ-100^\circ=80^\circ\\ \hat{B}=\hat{C}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=40^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_2=180^\circ-100^\circ=80^\circ\\ \hat{B}_2=\frac{1}{2}\left(180^\circ-40^\circ\right)=70^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}_2+\hat{A}_2=70^\circ+80^\circ=150^\circ$$

$$\hat{D}=180^\circ-\left(\hat{B}_2+\hat{A}_2\right)=180^\circ-150^\circ=30^\circ$$

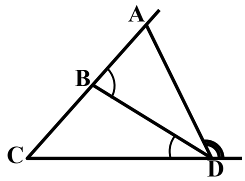
مثال: در مثلّث متساوی‌الساقین ABC ($\hat{A}=۳۲^\circ$,AB=AC) قاعده‌ی BC را به اندازه‌ی ساق تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم. زاویه‌ی ADC چقدر است؟



حل: با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین داریم:

$$B=C_۱=۷۴\Rightarrow C_۲=۱۸۰-۷۴=۱۰۶\Rightarrow A\hat{D}C=\frac{۱۸۰-۱۰۶}{۲}=۳۷$$

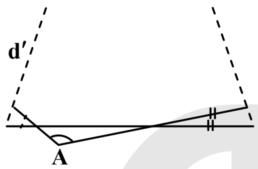
مثال: اگر در شکل زیر $BC=BD=AD$ و $\hat{C}=۲۰^\circ$ باشد، زاویه‌ی $\hat{D}$ چند درجه است؟



حل: همان‌طور که در یکی از مسائل قبل در حالت کلی نیز اثبات شد، داریم:

$$\hat{D}_۱=\hat{C}=۲۰\rightarrow\hat{B}_۱=۴۰\rightarrow\hat{A}=۴۰\rightarrow\hat{D}=\hat{A}+\hat{C}=۶۰$$

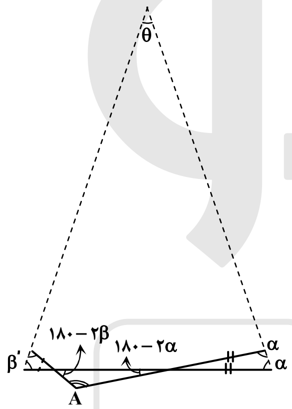
مثال: در شکل مقابل دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند و زاویه $\hat{A}=۱۰۰^\circ$ ، دو خط d و d' با زاویه چند درجه متقاطع‌اند؟



۱) ۲۰ ۲) ۵۰

۳) ۴۵ ۴) ۴۰

حل:



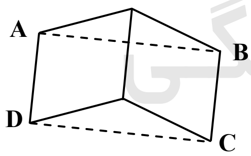
$$۱۸۰-۲\beta+۱۸۰-۲\alpha+A=۱۸۰$$

$$\Rightarrow ۲(\alpha+\beta)-A=۱۸۰$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۱۸۰+۱۰۰}{۲}=۱۴۰$$

$$\theta=۱۸۰-(\alpha+\beta)=۴۰$$

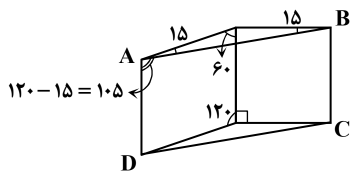
مثال: در شکل مقابل، یک مربع و یک لوزی با زاویه ۶۰ درجه، در یک ضلع مشترک‌اند. بزرگترین زاویه متوازی‌الاضلاع ABCD چند درجه است؟



۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۵

۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵

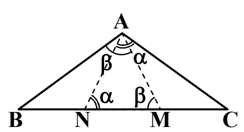
حل:



مثال: در مثلث ABC بر روی ضلع BC پاره خط‌های BM=BA و CN=CA را جدا می‌کنیم، اگر زاویه $\hat{A}=۷۲^\circ$ باشد، زاویه MAN چند درجه است؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۲ ۳) ۴۸ ۴) ۴۲

حل:



$$M\hat{A}N=۱۸۰-(\alpha+\beta)$$

$$\hat{B}+\hat{C}=۱۰۸=۱۸۰-۲\alpha+۱۸۰-۲\beta=۳۶۰-۲(\alpha+\beta)$$

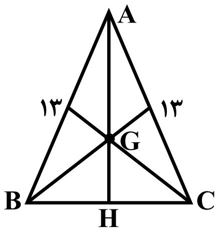
$$\Rightarrow ۱۸۰-(\alpha+\beta)=۵۴=M\hat{A}N$$

۲- در هر مثلث متساوی‌الساقین میانه‌های وارد بر ساق‌ها با هم و ارتفاعات وارد بر ساق‌ها با هم مساوی هستند و نیمسازهای زوایای مقابل به ساق‌ها نیز با هم مساوی هستند، عکس این مطالب نیز درست است.

۳- در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویه‌ی رأس، ارتفاع، میانه و عمودمنصف وارد بر قاعده بر هم منطبق هستند و بالعکس.

☜مثال: در مثلثی به طول اضلاع ۱۳، ۱۳ و ۱۰ واحد، فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی میانه‌ها از دورترین رأس آن کدام است؟

✍حل:



در مثلث متساوی‌الاضلاع، محل تقاطع میانه‌ها روی ارتفاع وارد بر قاعده قرار دارد.

$$AH = \sqrt{۱۳^۲ - ۵^۲} = ۱۲$$

چون میانه‌ها همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کنند داریم:

$$AG = \frac{۲}{۳} AH = ۸$$

$$GH = \frac{۱}{۳} AH = ۴$$

لذا بر اساس رابطه‌ی فیثاغورث داریم:

$$GH^۲ + HC^۲ = GC^۲ \to ۴^۲ + ۵^۲ = GC^۲ \Rightarrow GC = \sqrt{۴۱}$$

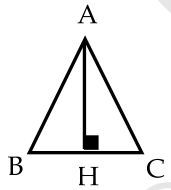
که چون $۷ > \sqrt{۴۱} > ۶$ است پس A دورترین رأس محسوب می‌شود:

$$AG = ۸$$

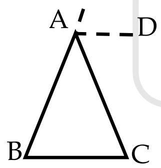
البته می‌دانیم میانه‌ی وارد بر کوچک‌ترین ضلع، بزرگ‌ترین میانه است.

٤- مساحت مثلث متساوی‌الساقین با قاعده‌ی a و ساق b مساوی است با:

$$\boxed{\frac{۱}{۲} a \sqrt{b^۲ - \frac{a^۲}{٤}}}$$



۵- هر گاه در مثلث ABC نیمساز خارجی رأس A با ضلع BC موازی باشد، $AB = AC$ است و بالعکس.



$$AD \parallel BC \Leftrightarrow AB = AC$$

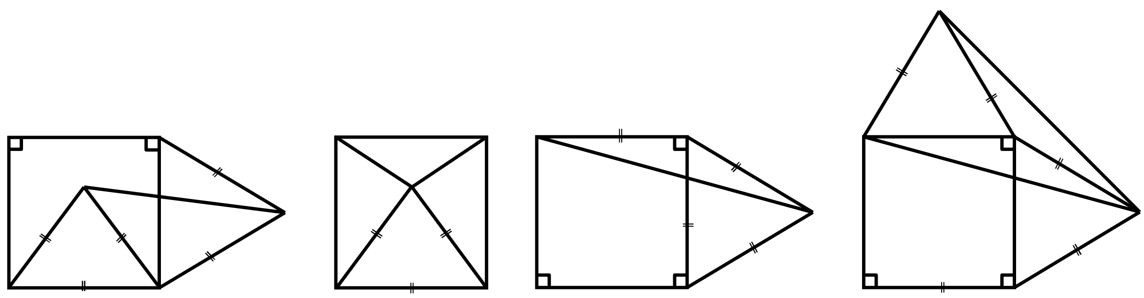
۲) مثلث متساوی‌الاضلاع:

مثلثی که ۳ ضلع برابر داشته باشد ، متساوی‌الاضلاع نام دارد.

نکات:

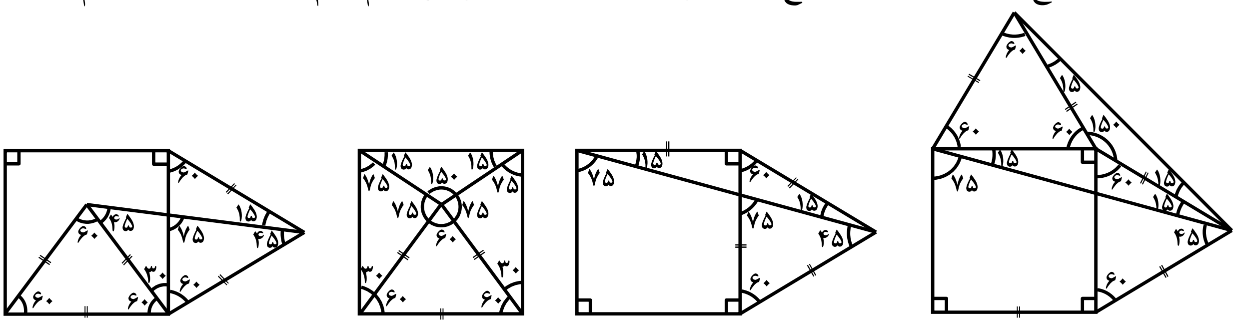
۱- تمام زوایای مثلث متساوی‌الاضلاع ۶۰° است . لذا تمام ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین درباره‌ی مثلث متساوی‌الاضلاع برقرار است. به اضافه آن‌که در مثلث متساوی‌الاضلاع، محل برخورد ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و عمودمنصف‌ها بر هم منطبق‌اند.

☜مثال: در شکل‌های زیر یک ضلع مثلث‌های متساوی‌الاضلاع بر یک ضلع مربع منطبق است. کلیه زوایا را به‌دست آورید.



✍حل:

با توجه به زوایای مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع و خواص مثلث متساوی‌الساقین می‌توانیم تمام زوایا را به‌دست آوریم .



۲- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، اگر طول هر ضلع برابر با a باشد انـدازه ارتفاع نظیر هر رأس برابر است با $\boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$ و مساحت مثلث $\boxed{S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$ می‌باشد.

۳) مثلث قائم‌الزاویه:

مثلثی که یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد، قائم‌الزاویه نام دارد.

نکات:

۱- در هر مثلث قائم‌الزاویه میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است و برعکس اگر در مثلثی میانه‌ی وارد بـر یـک ضـلع، نصـف آن ضلع باشد، آن مثلث در رأس روبه‌رو به آن ضلع قائم‌الزاویه است.

☜مثال: در مثلثی یکی از زوایا °۳۰ و تفاضل دو زاویه‌ی دیگر نیز °۳۰ می‌باشد. در صورتی که طـول بزرگتـرین ضـلع ایـن مثلث ۸ باشد، طول میانه‌ی وارد بر این ضلع کدام است؟

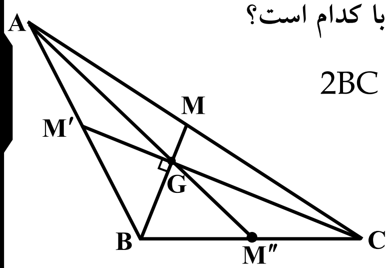
✍حل:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} = 30^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = 150^\circ \\ \hat{A} - \hat{C} = 30^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

لذا مثلث ABC قائم الزاویه است و بزرگترین ضلع آن وتر آن است و می‌دانیم میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است، لذا:

$$AM = \frac{BC}{2} = 4$$

☜مثال: اگر در مثلث **ABC** میانه‌های اضلاع **AB** و **AC** بر هم عمود باشند، میانه‌ی **BC** برابر با کدام است؟

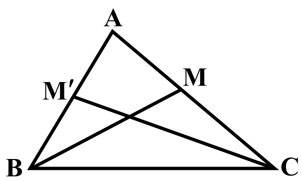


۱) $\frac{2}{3}BC$ ۲) $\frac{3}{2}BC$ ۳) BC ۴) 2BC

✍حل:

$$GM'' = \frac{1}{2}BC \rightarrow AM'' = \frac{3}{2}BC$$

در مثلث قائم‌الزاویه $(A = 90^\circ)$:

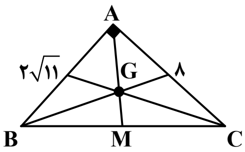


$$m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2 = \frac{5}{4}a^2$$

مثال: اندازه‌ی دو ضلع قائم از مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۸ و $۲\sqrt{۱۱}$ واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی میانه‌ها از وسط وتر این مثلث کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

حل:

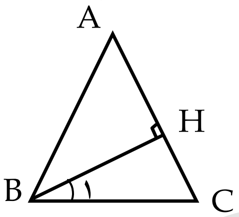


$$BC=\sqrt{۴\times۱۱+۶۴}=\sqrt{۱۰۸}=\sqrt{۴\times۲۷}=۶\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow AM=\frac{BC}{۲}=۳\sqrt{۳}\Rightarrow GM=\frac{۱}{۳}AM=\sqrt{۳}$$

۲- در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است و بالعکس.

مثال: در یک مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر یک ساق نصف آن ساق است. زاویه‌ی بین این ارتفاع و ضلع BC کدام است؟

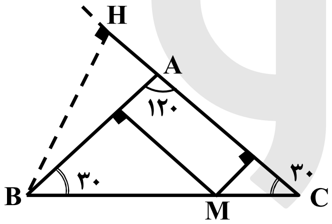
حل:



$$BH=\frac{۱}{۲}AC=\frac{۱}{۲}AB\Rightarrow\hat{A}=۳۰^\circ\Rightarrow\hat{B}=\hat{C}=۷۵^\circ\Rightarrow\hat{B}_۱+\hat{C}=۹۰^\circ\Rightarrow\hat{B}_۱=۹۰^\circ-۷۵^\circ=۱۵^\circ$$

مثال: در مثلث متساوی‌الساقین ABC، زاویه‌ی رأس ۱۲۰° و قاعده‌ی آن ۱۲ سانتی‌متر است. مجموع فواصل یک نقطه روی قاعده‌ی مثلث از دو ساق آن چقدر است؟

حل:



مجموع فواصل یک نقطه روی قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق برابر است با ارتفاع وارد بر ساق:

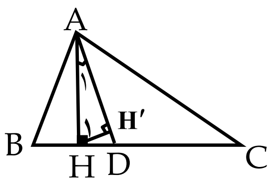
$$BH=\frac{۱}{۲}BC=۶$$

۴- اگر در مثلث قائم‌الزاویه یک زاویه ۱۵° باشد، ارتفاع وارد بر وتر ربع وتر است.

مثال: در مثلث ABC می‌دانیم: $\hat{B}-\hat{C}=۳۰^\circ$ می‌باشد، در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی H، پای ارتفاع AH، از نیمساز AD کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}AH$ ۲) $\frac{۱}{۴}AD$ ۳) $\frac{۱}{۳}AD$ ۴) $\frac{۱}{۸}BC$

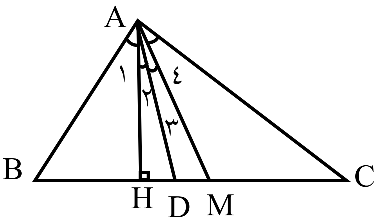
حل: زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه برابر است با:



$$H\hat{A}D=\frac{۱}{۲}\left|\hat{B}-\hat{C}\right|=\frac{۱}{۲}\times۳۰^\circ=۱۵^\circ\quad\Rightarrow HH'=\frac{۱}{۴}AD$$

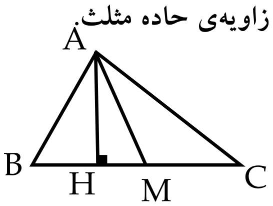
فاصله‌ی H از نیمساز AD (ارتفاع مثلث AHD) $\frac{۱}{۴}$ وتر مثلث (AD) است.

۵- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، پاره‌خط‌های AH، AD و AM به‌ترتیب ارتفاع، نیمساز و میانه‌ی وارد بر وتر BC هستند، در این‌صورت روابط زیر برقرارند:



$$\hat{A}_۱=\hat{A}_۴=\hat{C}$$
$$\hat{A}_۲=\hat{A}_۳$$
$$\hat{A}_۲+\hat{A}_۳+\hat{A}_۴=\hat{B}$$

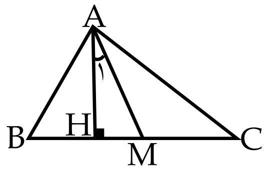
۶- در هر مثلث قائم‌الزاویه، زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر برابر است با قدر مطلق تفاضل دو زاویه‌ی حاده مثلث.



$$H\hat{A}M=\left|\hat{B}-\hat{C}\right|$$

☜مثال: در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر ۲۶° است. کوچکترین زاویه‌ی مثلث چند درجه است؟

✍حل: طبق نکته‌ی فوق:

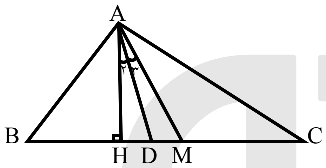


$$\left|\hat{B}-\hat{C}\right|=۲۶^\circ \overset{\hat{B}>\hat{C}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l}\hat{B}-\hat{C}=۲۶^\circ\\ \hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow ۲\hat{C}=۹۰^\circ-۲۶^\circ\Rightarrow \hat{C}=۳۲^\circ$$

☜مثال: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $\left(\hat{A}=۹۰^\circ\right)$، اندازه‌ی زاویه‌ی بین نیمساز و میانه‌ی نظیر رأس A کدام است؟

۱) $\left|\hat{B}-\hat{C}\right|$　　۲) $\frac{۱}{۲}\left|\hat{B}-\hat{C}\right|$　　۳) $\frac{۱}{۲}\left|\hat{B}-۲\hat{C}\right|$　　۴) $\frac{۱}{۴}\left|\hat{B}-\hat{C}\right|$

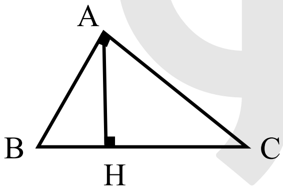
✍حل: زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه برابر است با:



$$H\hat{A}D=\frac{۱}{۲}\left|\hat{B}-\hat{C}\right|$$

در مثلث قائم‌الزاویه $\hat{A}_۲=\hat{A}_۳$ لذا $D\hat{A}M=\frac{۱}{۲}\left|\hat{B}-\hat{C}\right|$

۷- اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه ،ارتفاع نظیر وتر رسم شود، سه مثلث متشابه به‌وجود می‌آید:



$$ABH\sim ACH\sim ABC$$

لذا در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

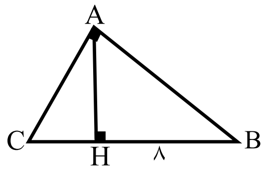
$$\boxed{\begin{array}{l}AB^۲=BH\times BC\\ AC^۲=CH\times BC\\ AH^۲=BH\times CH\end{array}}$$

یعنی هر ضلع واسط هندسی بین طول تصور آن ضلع بر وتر و طول وتر مثلث می‌باشد. همچنین ارتفاع وارد بـر وتـر، میـانگین هندسی دو قطعه‌ای است که آن ارتفاع بر روی وتر جدا می‌کند. (طریقه‌ی رسم میانگین هندسی)

تذکر: این روابط معکوس‌پذیر نمی‌باشند یعنی از برقرار بودن هیچ‌یک از روابط فوق در یک مثلث نمی‌توان نتیجه گرفت مثلث قائم‌الزاویه است.

☜مثال: مطابق شکل مقابل طول پاره‌خط BH برابر ۸ می‌باشد. در صورتی که وتر BC برابر ۱۰ باشد، ارتفـاع وارد بـر وتـر BC و طول ضلع AB را بیابید.

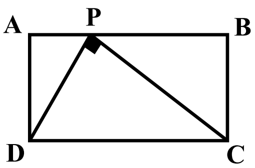
✍حل: با توجه به روابط گفته شده:



$$\left.\begin{array}{l}BC=۱۰\\ BH=۸\end{array}\right\}\Rightarrow CH=۲\qquad AH^۲=BH\times CH=۸\times۲=۱۶\Rightarrow AH=۴$$

$$AB^۲=BH\times BC\Rightarrow AB^۲=۸\times۱۰=۸۰\Rightarrow AB=\sqrt{۵\times۱۶}\Rightarrow AB=۴\sqrt{۵}$$

☜مثال:در مستطیل شکل مقابل $\hat{P}=۹۰^\circ$ و $۳AP=BP=۹$، طول DP کدام است؟

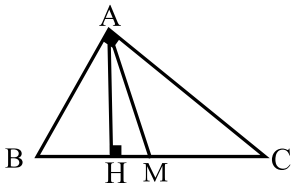


✍حل: اگر از P به CD عمود کنیم، قطعاتی که ارتفاع روی CD ایجاد مـی‌کنـد بـا AP و PB برابر است. لذا:

$$DP^۲=AP\times AB=۳\times۱۲=۳۶\rightarrow DP=۶$$

مثال: در مثلث ABC ($\hat{A}=90^\circ$) ارتفاع AH ومیانه‌ی AM را رسم می‌کنیم. اگر HB و HC به‌ترتیب ٤ و ٩ واحد باشند، مساحت مثلّث AMH کدام است؟

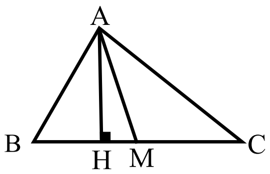
حل: با توجه به روابط گفته شده:



$$\left.\begin{array}{l} AH^2 = BH\times CH = 4\times 9 \to AH = 6 \\ \left.\begin{array}{l} BM = \frac{13}{2} = 6/5 \\ BH = 4 \end{array}\right\} \to HM = 2/5 \end{array}\right\} \to S = \frac{2/5\times 6}{2} = 7/5$$

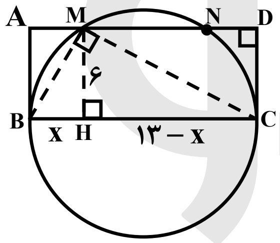
مثال: در یک مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌های میانه و ارتفاع وارد بر وتر به‌ترتیب ۳ و $2\sqrt{2}$ است. اندازه‌ی ضلع متوسط این مثلث کدام است؟

حل: با توجه به روابط گفته شده:



$$AM = 3 \to BC = 6$$
$$HM = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{9-8} = 1 \to BH = 2, CH = 4$$
$$\to AC^2 = CH\times BC = 4\times 6 \to AC = 2\sqrt{6}$$

مثال: در یک مستطیل به طول ۱۳ و عرض ٦ واحد، دایره‌ای به قطر طول مستطیل، ضلع مقابل آن را در دو نقطه‌ی M و N قطع می‌کند. فاصله‌ی این دو نقطه چند واحد است؟



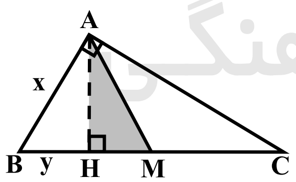
حل: مثلث MBC در رأس M قائمه است (چون BC قطر دایره است و زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر، 90° است.) حال در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه‌ی ایجاد شده بر وتر است. بنابراین:

$$6^2 = x(13-x) \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 9 \end{cases}$$

بنابراین قطعه‌ی کوچکتر یعنی $BH = 4$ می‌باشد و در نتیجه $AM = 4$ و به همین ترتیب $ND = 4$. در نتیجه $MN = 13 - (4+4) = 5$.

مثال: در مثلث ABC، $AC = \frac{\sqrt{5}}{2}AB$، $\hat{A} = 90^\circ$ و ارتفاع AH و میانه‌ی AM رسم شده‌اند. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AMH است؟

حل: ارتفاع AH در هر دو مثلث ABC و AHM مشترک است، بنابراین کافیست نسبت قاعده‌ها را حساب کنیم:



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{AHM}}} = \frac{BC}{MH} \quad (*)$$

با فرض $AB = x$ و $BH = y$ داریم:

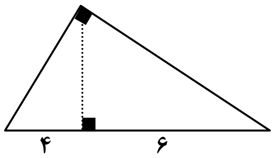
$$AB = x\ ,\ AC = \frac{\sqrt{5}}{2}x \xrightarrow[\text{مثلث } ABC]{\text{قضیه فیثاغورس در}} BC^2 = AB^2 + AC^2 = x^2 + (\frac{\sqrt{5}}{2}x)^2 = \frac{9}{4}x^2$$

$$\Rightarrow BC = \frac{3}{2}\times x \xrightarrow[\text{مثلث } ABC]{AM \text{ میانه}} BM = \frac{3}{4}x$$

می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه، هر ضلع زاویه‌ی قائمه، واسطه‌ی هندسی بین وتر و تصویر همان ضلع روی وتر است، پس:

$$AB^2 = BC.BH \Rightarrow x^2 = y\times\frac{3}{2}x \Rightarrow y = \frac{2}{3}x \Rightarrow MH = \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}x = \frac{1}{12}x \Rightarrow \frac{BC}{MH} = \frac{\frac{3}{2}x}{\frac{1}{12}x} = 18$$

براساس رابطه‌ی (*)، می‌توان گفت که مساحت مثلث ABC، ۱۸ برابر مساحت مثلث AMH است.



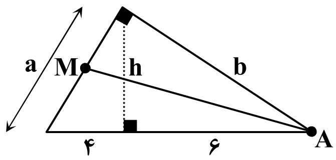
مثال: در بزرگ‌ترین مثلث قائم‌الزاویه مقابل، اندازه بزرگ‌ترین میانه کدام است؟

۱) $\sqrt{۵۰}$ ۲) $\sqrt{۶۵}$

۳) $\sqrt{۷۰}$ ۴) $\sqrt{۷۵}$

حل:

بزرگ‌ترین میانه نظیر کوچک‌ترین ضلع است.



$$h^۲ = ۴\times۶ \Rightarrow h = ۲\sqrt{۶}$$

$$a = \sqrt{h^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۲۴+۱۶} = \sqrt{۴۰} = ۲\sqrt{۱۰}$$

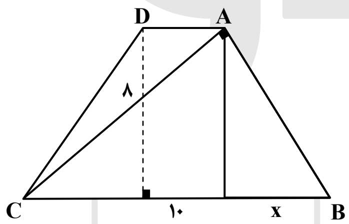
$$b = \sqrt{h^۲ + ۶^۲} = \sqrt{۲۴+۳۶} = \sqrt{۶۰} = ۲\sqrt{۱۵}$$

$$AM = \sqrt{b^۲ + (\frac{a}{۲})^۲} = \sqrt{۶۰+۱۰} = \sqrt{۷۰}$$

مثال: در یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، قطر عمود بر ساق است. اگر اندازه‌ی قاعده‌ی بزرگ‌تر و قطر آن به‌ترتیب ۱۰ و ۸ واحد باشند، اندازه‌ی قاعده‌ی کوچک‌تر چند واحد است؟

۱) ۲/۸ ۲) ۳/۲ ۳) ۳/٦ ٤) ٤/۲

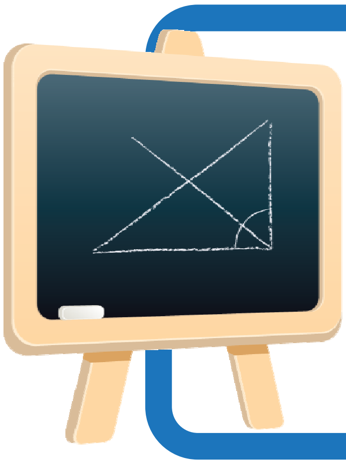
حل:



$$AB = \sqrt{۱۰^۲ - ۸^۲} = ۶$$

$$AB^۲ = x\times۱۰ \Rightarrow x = \frac{۳۶}{۱۰} = ۳/۶$$

$$AD = ۱۰ - ۲x = ۱۰ - ۷/۲ = ۲/۸$$



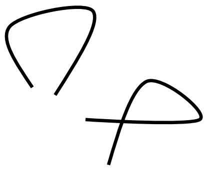
هندسه ۱

- ادامه فصل ۲ و فصل ۳

چندضلعی‌ها:

تعاریف:

خم مسطح:



خم مسطح مجموعه‌ای از نقطه‌ها است که بتوانیم آن را بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ رسم کنیم.

خط‌ها، نیم‌خط‌ها، پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها، همگی خم‌های مسطح هستند.

خم ساده:

یک خم ساده، یک خم مسطح است که هیچ‌یک از نقطه‌های خود را قطع نکند مگر در حالتی که نقطه‌های انتهایی به هم می‌رسند. به عبارت دیگر خم ساده، خمی است که از هر نقطه روی آن حداکثر ۲ مسیر حرکت داشته باشیم.

خم بسته:

اگر نقطه‌های انتهایی یک خم بر هم منطبق باشند، آن خم بسته نامیده می‌شود. به عبارت دیگر خم بسته خمی است که از هر نقطه روی آن حداقل ۲ مسیر حرکت داشته باشیم.

خم ساده بسته:

اگر نقطه‌های انتهایی یک خم ساده بر هم منطبق باشند، آن خم، خم ساده بسته نامیده می‌شود به عبارت دیگ خم ساده بسته، خمی است که از هر نقطه روی آن دقیقاً ۲ مسیر حرکت داشته باشیم.

جمع بندی:

- خم مسطح
  - ساده
    - بسته: دایره، مربع، لوزی...
    - باز: زاویه، پاره‌خط، نیم‌خط...
  - غیر ساده
    - بسته: علامت‌هایی مانند ∞,...
    - باز: علامت‌هایی مانند α,...

قضیه خم جردن:

هر خم ساده‌ی بسته C، صفحه را به سه زیرمجموعه‌ی جدا از هم، درون، بیرون و روی خم تقسیم می‌کند.

ناحیه‌ی محدب و غیر محدب:

اجتماع یک خم ساده بسته با درون آن یک ناحیه نامیده می‌شود. ناحیه‌های یک صفحه به دو دسته محدب و غیرمحدب طبقه‌بندی می‌شود. یک ناحیه‌ی محدب (یا مجموعه‌ای از نقطه‌ها) محدب است، اگر پاره‌خطی که هر دو نقطه‌ی دلخواه آن را به هم وصل می‌کند، کاملاً درون ناحیه قرار گیرد.

در غیر این صورت اگر حداقل دو نقطه در ناحیه وجود داشته باشند به‌طوری‌که پاره‌خطی که آن‌ها را به هم وصل می‌کند، کاملاً درون ناحیه قرار نگیرد، آن ناحیه غیرمحدب خوانده می‌شود.

چند ضلعی:

چندضلعی یک خم ساده بسته است که از اجتماع حداقل ۳ پاره‌خط تشکیل شده است، به‌طوری‌که پاره‌خط‌ها هم‌صفحه باشند و هیچ سه رأس متوالی آن روی یک خط قرار نگرفته باشند.

چندضلعی محدب:

هرگاه مجموعه نقاط درونی یک چندضلعی یک مجموعه محدب باشد، چندضلعی را محدب گوییم.

شرط لازم و کافی برای آن که یک چندضلعی، محدب باشد آن است که تمام زاویه‌هایش از ۱۸۰° کمتر باشد.

☜مثال: ناحیه‌ی محدود به یک چندضلعی در کدام حالت ممکن است، یک مجموعه‌ی محدب نباشد؟

۱) تمام نقاط پاره‌خطی که دو نقطه‌ی دلخواه آن را به هم وصل کند، عضو آن مجموعه باشد.

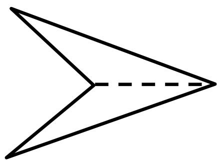
۲) هر زاویه‌ی داخلی آن کمتر از ۱۸۰° باشد.

۳) سایر رأس‌ها در یک طرف هر خطی قرار دارند که بر ضلع آن منطبق است.

٤) یک قطر آن را به دو مجموعه‌ی محدب تقسیم کند.

✍حل: گزینه ٤ پاسخ است.

مثال نقض برای این موضوع شکل مقابل است:



چندضلعی:

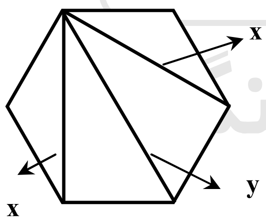
یک چندضلعی منتظم است هرگاه همه‌ی اضلاع آن با هم و همه‌ی زاویه‌هایش نیز با هم مساوی باشند. یک چندضلعی منتظم، محدب نیز هست.

مساحت n ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با: $\frac{n}{۲}\times a\times OH$

حالت خاص مهم: مساحت ٦ ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با: $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}$ (هر زاویه‌ی ٦ ضلعی منتظم برابر ۱۲۰° است.)

☜مثال: در شش‌ضلعی منتظم به ضلع a، طول اقطار را به‌دست آورید.

✍حل:



قطر کوچک را با قضیه کسینوس‌ها و قطر بزرگ را با قضیه فیثاغورث به‌دست می‌آوریم.

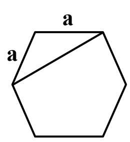
$$x^{۲}=a^{۲}+a^{۲}-۲a^{۲}\cos ۱۲۰=۳a^{۲}\Rightarrow x=\sqrt{۳}a$$

$$y^{۲}=x^{۲}+a^{۲}=۳a^{۲}+a^{۲}=۴a^{۲}\Rightarrow y=۲a$$

☜مثال: قطر کوچک یک شش‌ضلعی منتظم، ضلع یک شش‌ضلعی منتظم جدید است. مساحت شش‌ضلعی جدید چند برابر مساحت شش‌ضلعی اولیه است؟

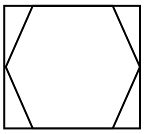
✍حل:

در شش‌ضلعی قطر کوچک برابر $a\sqrt{۳}$ است. لذا:

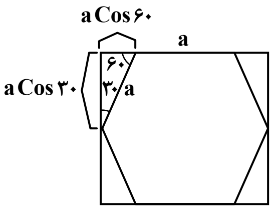


$$\frac{S_{\text{جدید}}}{S_{\text{قدیم}}}=\frac{\frac{۶(a\sqrt{۳})^{۲}\sqrt{۳}}{۴}}{\frac{۶a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}}=\frac{۳a^{۲}}{a^{۲}}=۳$$

مثال: در شکل مقابل، مساحت شش‌ضلعی منتظم چند برابر مساحت مستطیل محیط بر آن است؟

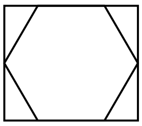


حل:



$$\frac{\text{مساحت شش‌ضلعی}}{\text{مساحت مستطیل}}=\frac{\frac{۶a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}}{(۲a)(a\sqrt{۳})}=\frac{۳}{۴}$$

مثال: در شکل مقابل محیط شش‌ضلعی منتظم، چند برابر محیط مستطیل محیط بر آن است؟

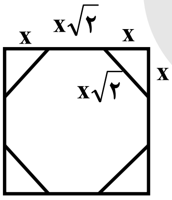


حل:

$$\frac{\text{محیط شش‌ضلعی}}{\text{محیط مستطیل}}=\frac{۶a}{(۲a+a\sqrt{۳})\times ۲}=\frac{۳}{(۲+\sqrt{۳})}=\frac{۳(۲-\sqrt{۳})}{۱}$$

مثال: در شکل مقابل مساحت مربع ۲ واحد مربع است.مساحت هشت‌ضلعی منتظم کدام است؟

حل:

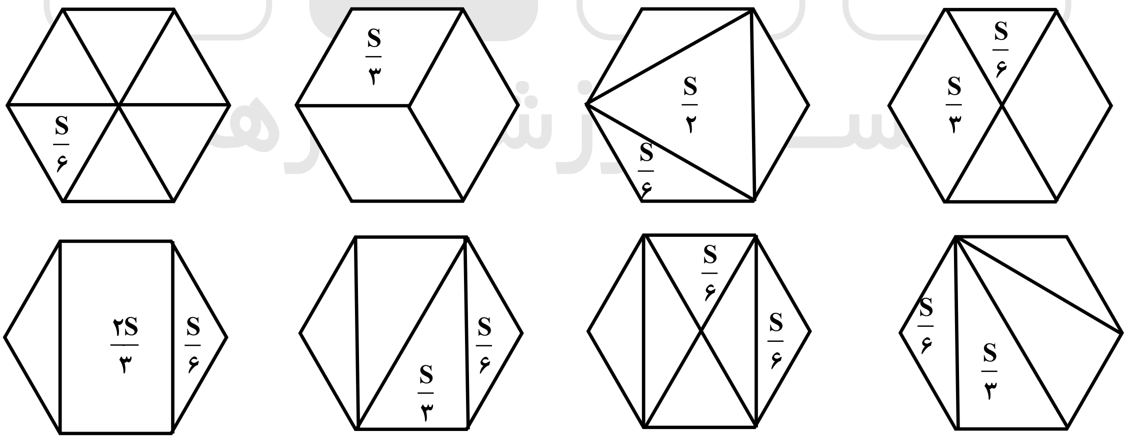


$$S=۲\rightarrow ۲x+x\sqrt{۲}=\sqrt{۲}\rightarrow x=\frac{\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}(۲-\sqrt{۲})}{۴-۲}=\sqrt{۲}-۱$$

$$S_{۸}=۸\times(\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times x\sqrt{۲})=۴x=۴(\sqrt{۲}-۱)$$

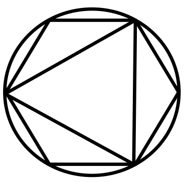
مثال: مساحت هر یک از نواحی به‌وجود آمده به‌وسیله‌ی اقطار را در شش‌ضلعی‌های زیر برحسب S بیابید.

حل:



مثال: اگر در یک دایره مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی برابر با ۱۲ باشد، مساحت شش‌ضلعی منتظم محاط در آن کدام است؟

حل:



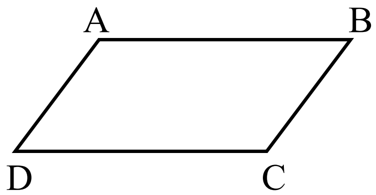
همان‌گونه که در مثال فوق معلوم شد مساحت شش‌ضلعی دو برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است. پس مساحت شش ضلعی برابر ۲٤ است.

چهارضلعی‌ها:

پس از مثلث، چهارضلعی، ساده‌ترین نوع چندضلعی‌ها می‌باشد. برخی از چهارضلعی‌ها به سبب روابطی که بین اجزای آن‌ها وجود دارد، اهمیت بیشتری دارند. در این قسمت انواع و خواص آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

انواع چهارضلعی:

متوازی‌الاضلاع:



تعریف: متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی‌ای است که اضلاع آن دوبه‌دو موازی یکدیگرند. مانند متوازی‌الاضلاع $ABCD$ در شکل که در آن $AB||CD$ و $AD||BC$ است.

متوازی‌الاضلاع علاوه بر خواص عمومی چهارضلعی‌ها دارای خواصی است که با قضایای زیر بیان می‌شوند:

۱- در هر متوازی‌الاضلاع، اضلاع مقابل مساوی یکدیگرند.

۲- در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مقابل، متساوی و زاویه‌های مجاور مکمل یکدیگرند.

۳- در هر متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

قضایای عکس:

۱- اگر در یک چهارضلعی اضلاع مقابل دوبه‌دو متساوی باشند چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۲- اگر در یک چهارضلعی زاویه‌های مقابل دوبه‌دو متساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۳- اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویه مجاور به یک ضلع مکمل یکدیگر باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

٤- اگر در یک چهارضلعی قطرها منصف یکدیگر باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۵- اگر در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل متوازی و متساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

☜مثال: کدام‌یک از چهارضلعی‌های زیر یک متوازی‌الاضلاع را مشخص نمی‌کند؟

۱) چهارضلعی‌ای که دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی داشته باشد.

۲) چهارضلعی‌ای که قطرهایش منصف یکدیگر باشند.

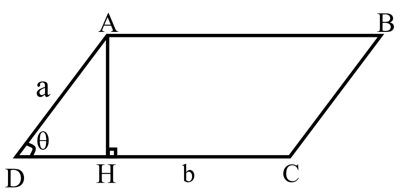
۳) چهارضلعی‌ای که دو ضلع مساوی و موازی داشته باشد.

٤) چهارضلعی‌ای که زوایای روبه‌رویش مساوی باشند.

✍حل: گزینه ۱ پاسخ است.

ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین نیز دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی دارد. بقیه‌ی گزینه‌ها خصوصیات متوازی‌الاضلاع را بیان می‌کنند.

نکات:



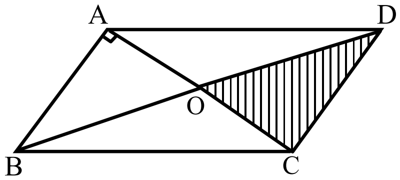
۱- مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب ارتفاع نظیر یک ضلع در آن ضلع همچنین اگر طول و عرض متوازی‌الاضلاعی a و b و زاویه‌ی بین آن‌ها θ باشد، داریم:

$$S = ab\sin\theta$$

۲- قطر هر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌کند.

مثال: در متوازی‌الاضلاع مقابل قط AC عمود بر ساق AB، $AC=۶$ و $AB=۵$ است. مساحت قسمت هاشور زده در شکل چقدر است؟

حل:



قطر هر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌کند، لذا:

$$\Delta ABC = \Delta ADC, \Delta ABD = \Delta BCD \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD}$$

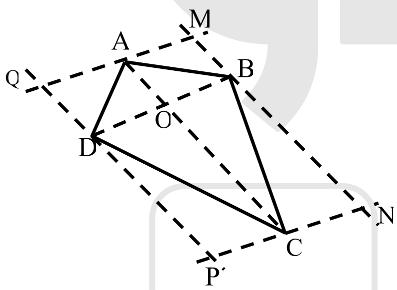
اقطار متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند، لذا:

$DO = OB \Rightarrow$ میانه مثلث ΔBCD است $CO \Rightarrow S_{\Delta BOC} = S_{\Delta COD}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow S_{\Delta COD} = \frac{۱}{۲} S_{\Delta BCD} = \frac{۱}{۴} S_{ABCD} \\ S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۶ = ۱۵ \Rightarrow S_{ABCD} = ۳۰ \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\Delta COD} = \frac{۱}{۴} \times ۳۰ = ۷/۵$$

مثال: از چهار رأس یک چهارضلعی، خط‌هایی موازی قطرها رسم می‌کنیم. از تلاقی این خطوط، یک چهارضلعی حاصل می‌شود. نسبت مساحت چهارضلعی اول به مساحت چهارضلعی حاصل شده، چقدر است؟

حل: هر چهارضلعی که اضلاع روبه‌رویش دوبه‌دو موازی باشند، متوازی‌الاضلاع می‌باشد. قطر هر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌کند. لذا:



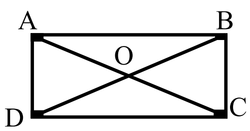
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AO \parallel MB \\ BO \parallel AM \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AOB = \Delta AMB \\ \left.\begin{array}{l} BN \parallel OC \\ BO \parallel NC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BOC = \Delta BNC \\ \left.\begin{array}{l} AO \parallel QD \\ AQ \parallel OD \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AOD = \Delta AQD \\ \left.\begin{array}{l} OC \parallel DP \\ CP \parallel OD \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta OCD = \Delta CDP \end{array}\right\} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} S_{MNPQ}$$

مستطیل:

تعریف: مستطیل، چهارضلعی‌ای است که زاویه‌های آن قائمه‌اند. اگر زاویه‌های چهارضلعی قائمه باشند، اضلاع آن دوبه‌دو موازی یکدیگرند. پس مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است که زاویه‌هایش قائمه‌اند. اگر یک زاویه از متوازی‌الاضلاعی قائمه باشد، سه زاویه‌ی دیگر آن نیز قائمه‌اند. پس می‌توان گفت: مستطیل متوازی‌الاضلاعی است که یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد.

مستطیل همه‌ی خواص یک متوازی‌الاضلاع را دارد، ضمناً داری خاصیت مهمی است که با قضیه‌ی زیر بیان می‌شود:

در هر مستطیل قطرها مساوی یکدیگرند.



قضیه عکس:

متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن متساوی باشند، مستطیل است.

مثال: تساوی قطرهای یک چهارضلعی برای مستطیل بودن آن چه شرطی است؟

۱) شرط لازم　　۲) شرط کافی　　۳) شرط لازم و کافی　　۴) نه شرط لازم و نه شرط کافی

حل: اگر چهارضلعی مستطیل باشد، قطرهای آن مساویند، پس تساوی قطرها شرط لازم است.

لوزی:

تعریف: لوزی، چهارضلعی‌ای است که چهار ضلع آن مساوی یکدیگرند. می‌توان ثابت کرد که اضلاع لوزی دوبه‌دو متوازیند. بنابراین لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع مجاور آن مساوی یکدیگ است.

لوزی همه‌ی خواص متوازی‌الاضلاع را دارد و علاوه بر آن‌ها دارای خاصیت دیگری است که با قضیه‌ی زیر بیان می‌شود:

در لوزی قطرها بر هم عمودند و زاویه‌ها را نصف می‌کنند.

قضایای عکس:

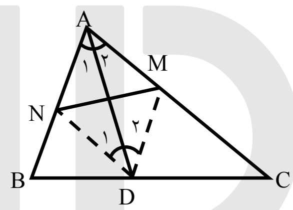
۱- متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش بر هم عمود باشد، لوزی است.

۲- متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش نیمساز زاویه‌ها باشد، لوزی است.

☜ مثال: در مثلث ΔABC از نقطه‌ی D محل تلاقی نیمساز داخلی زاویه‌ی $\hat{A}$ با ضلع BC خطوطی موازی دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم تا آن دو را در نقاط N,M قطع کند. MN و AD نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) فقط عمود بر هم ۲) فقط منصف هم ۳) زاویه بین آن‌ها مکمل A ۴) عمودمنصف هم

✍ حل: گزینه ٤ صحیح است.



$$ND \| AM \Rightarrow \left.\begin{matrix}\hat{D}_1 \overset{\text{موازی- مورب}}{=} \hat{A}_2 \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{A}_1 \Rightarrow AN = ND$$

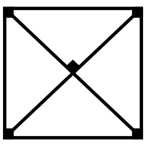
$$MD \| AN \Rightarrow \left.\begin{matrix}\hat{D}_2 = \hat{A}_1 \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{D}_2 = \hat{A}_2 \Rightarrow AM = MD$$

چون اضلاع چهارضلعی $ANDM$ دوبه‌دو موازیند، لذا چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، و چون اضلاع مجاور مساویند، پس چهارضلعی لوزی است. در لوزی اقطار عمود بر هم و منصف هم هستند لذا خطوط AD و NM عمودمنصف هم هستند.

به‌طور کلی هر متوازی‌الاضلاع که قطرهایش نیمساز باشند، لوزی خواهد بود.

مربع:

تعریف: مربع، چهارضلعی‌ای است که زاویه‌هایش قائمه و چهار ضلع آن مساوی یکدیگرند. با توجه به آن‌چه ذکر شد از قائمه بودن زاویه‌ها می‌توان نتیجه گرفت که مربع نوع خاصی مستطیل و نوع خاصی متوازی‌الاضلاع است و از تساوی چهار ضلع نیز نتیجه می‌گیریم که مربع نوعی لوزی است. بنابراین مربع همه خواص متوازی‌الاضلاع، مستطیل و لوزی را دارد و با توجه به قضایای عکس می‌توان گفت:



۱- مستطیلی که قطرهای آن عمود بر یکدیگر باشد، مربع است.

۲- مستطیلی که قطرهای آن زاویه‌هایش را نصف کند، مربع است.

۳- لوزی که زاویه‌های آن متساوی باشد، مربع است.

٤- لوزی که قطرهای آن متساوی باشد، مربع است.

☜ مثال: کدام گزینه یک مربع را مشخص می‌کند؟

۱) لوزی‌ای که یک قطرش با ضلع آن برابر باشد. ۲) مستطیلی که قطرهایش بر هم عمود باشد.

۳) متوازی‌الاضلاعی که دو قطرش مساوی باشد. ٤) ذوزنقه‌ای که دو زاویه‌ی قائمه داشته باشد.

✍ حل:

اگر دو قطر یک مستطیل بر هم عمود باشند، اضلاع مجاورش نیز با هم مساویند، لذا مربع است. اما مثال نقض برای گزینه‌ی (۱) لوزی‌ای است که یک زاویه‌ی 60° داشته باشد، برای گزینه‌ی (۳)، مستطیل و برای گزینه‌ی (٤) ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه است.

☜مثال: کدام گزینه صحیح است؟

۱) مربع لوزی‌ای است، که اقطارش مساویند.

۲) هر چهارضلعی که اقطارش بر هم عمود باشد، مربع است.

۳) هر متوازی‌الاضلاع که اقطارش بر هم عمود باشد، مربع است.

٤) هر ذوزنقه که یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد، مربع است.

✍حل:

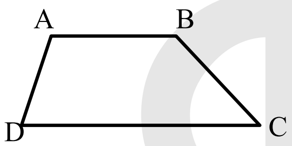
اگر اقطار یک لوزی با هم مساوی باشند، اضلاعش نیز بر هم عمودند. برای گزینه های (۲) و (۳)، مثال نقض لوزی و برای گزینه (٤)، مثال نقض ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه است.

☜مثال: در مربعی مجموع یک ضلع و قطر برابر با $۲+\sqrt{۸}$ می‌باشد. مساحت مربع چقدر است؟

✍حل:

$$a+a\sqrt{۲}=۲+\sqrt{۸}=۲+۲\sqrt{۲} \Rightarrow a=۲ \Rightarrow S=a^{۲}=۴$$

ذوزنقه:



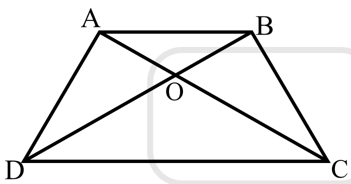
تعریف: ذوزنقـه چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن موازی یکدیگرند.

در ذوزنقه هر یک از دو ضلع متوازی را یک قاعده و هر یک از دو ضلع ناموازی را یک ساق می‌گوییم.

در ذوزنقه دو زاویه‌ی مجاور به هر ساق مکمل یکدیگرند.

ذوزنقه انواع گوناگون دارد که هر یک از آن‌ها برحسب وضع ساق‌ها نسبت به دو قاعده یا وضع خود دو ساق مشخص می‌شود.

ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین:



ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین آن است که دو ساق آن متساوی باشند.

قضیه: در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین:

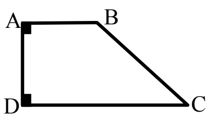
۱- دو زاویه‌ی مجاور به هر قاعده با یکدیگر متساویند.

۲- دو قط با یکدیگ متساویند.

قضیه عکس:

هر ذوزنقه که دو زاویه‌ی مجاور به یک قاعده آن، یا دو قطر آن، متساوی باشند، متساوی‌الساقین است.

ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه:



ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه آن است که یکی از ساق‌های آن بر دو قاعده عمود باشد در شکل مقابل ذوزنقه‌ی ABCD قائم‌الزاویه است که در آن CD و AB بر AD عمودند.

☜مثال: کدام گزینه درست نیست؟

۱) متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش بر هم عمود باشند، لوزی است.

۲) ذوزنقه‌ای که دو قطرش برابر باشند، متساوی‌الساقین است.

۳) مستطیلی که قطرهایش بر هم عمود باشند، مربع است.

٤) هر چهارضلعی که دو ضلعش برابر باشند، ذوزنقه است.

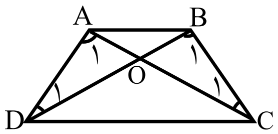
✍حل: مثال نقض گزینه (٤)، متوازی‌الاضلاع است.

☜مثال: در یک چهارضلعی دو قطر برابر و دو ضلع روبه‌رو مساویند. الزاماً کدام گزاره در مورد این چهارضلعی درست است؟

۱) دو قطر عمود بر یکدیگر می‌باشند. ۲) دو قطر با یک نسبت متقاطعند.

۳) دو زاویه‌ی مقابل مساویند. ٤) تفاضل دو زاویه‌ی مقابل، °۹۰ است.

✍حل:



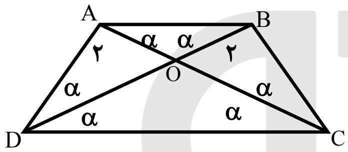
$$\left.\begin{array}{l} AD = BC : \text{ذوزنقه متساوی‌الساقین} \\ BD = AC : \text{ذوزنقه متساوی‌الساقین} \\ DC = DC : \text{مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADC = \Delta BCD \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ \\ \hat{C}_۱ = \hat{D}_۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ \\ \hat{D}_۱ = \hat{C}_۱ \\ AD = BC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADO = \Delta BOC \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

دلیلی برای اثبات گزینه‌های دیگر در دسترس نیست.

☜مثال: در یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، ساق‌ها با قاعده‌ی کوچک و قطرها با قاعده‌ی بزرگ مساویند. یکی از زاویه‌های این ذوزنقه برابر با کدام است؟

۱) °۶۰ ۲) °۷۲

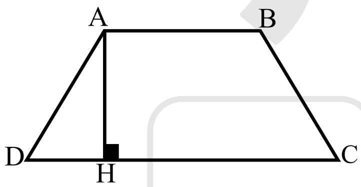
۳) °۸۰ ٤) °۴۵



✍حل:

$$\hat{\alpha} + ۲\hat{\alpha} + ۲\hat{\alpha} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{\alpha} = ۳۶^\circ \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = ۱۰۸^\circ \ , \ \hat{C} = \hat{D} = ۷۲^\circ$$

نکات:

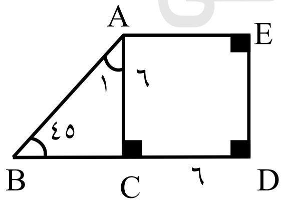


۱- مساحت ذوزنقه برابر است با حاصل‌ضرب نصف ارتفاع در مجموع دو قاعده:

$$S = \frac{۱}{۲} AH \times (AB + CD)$$

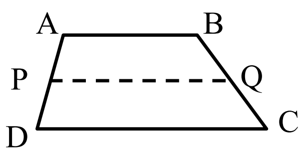
☜مثال: یک زاویه‌ی ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه‌ای °٤٥ است. اگر ارتفاع و قاعده‌ی کوچک ذوزنقه هر دو ٦cm باشند، مساحت ذوزنقه چند سانتی‌متر مربع است؟

✍حل:



$$\hat{C} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B} = ۴۵^\circ \Rightarrow AC = BC \Rightarrow BC = ۶$$

$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲}(۶ + ۱۲) \times ۶ = ۵۴$$



۲- پاره‌خطی که وسط‌های ساق‌های یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، موازی با دو قاعده‌ی آن و برابر با نصف مجموع دو قاعده است.

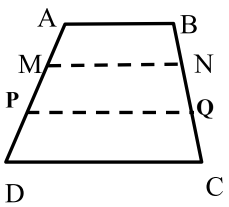
$$PQ \parallel AB \parallel CD$$

$$PQ = \frac{AB + CD}{۲}$$

در حالت کلی اگر $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC} = \frac{m}{n}$ خواهیم داشت: $PQ = \frac{nAB + mCD}{n + m}$

☜مثال: در ذوزنقه‌ی ABCD اگر $AB=4$، $CD=8$ و $\frac{AM}{AD}=\frac{BN}{BC}=\frac{1}{3}$ باشد، آن‌گاه MN را بیابید.

✍حل:

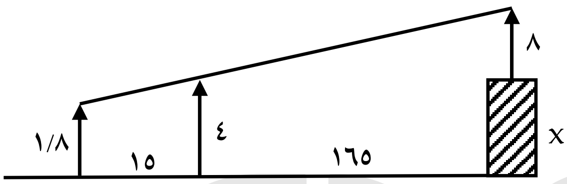


$$\left.\begin{aligned} MN&=\frac{AB+PQ}{2}\\ PQ&=\frac{MN+DC}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow MN=\frac{AB+\frac{MN+DC}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow MN=\frac{2AB+MN+DC}{4}\Rightarrow\frac{3MN}{4}=\frac{2AB+CD}{4}\Rightarrow MN=\frac{2AB+CD}{3}=\frac{8+8}{3}=\frac{16}{3}$$

☜مثال: در شکل مقابل دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشمی ناظر به ارتفاع ۱/۸ متر، از ارتفاع دکل و تیرک ٤ متری در یک راستا است. بلندی برج چند متر است؟

✍حل:



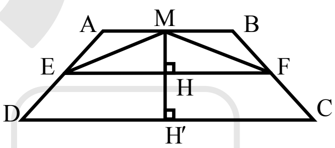
طبق رابطه در حالت کلی داریم:

$$4=\frac{165\times1/8+15\times(8+x)}{15+165}$$

پس $x=20/2$

☜مثال: در ذوزنقه‌ی ABCD نقطه‌ی M وسط AB، E وسط AD و F وسط BC است. مساحت ذوزنقه، چند برابر مساحت مثلث MEF است؟

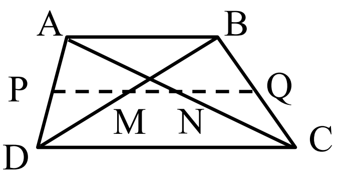
✍حل:



$$EF=\frac{AB+CD}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &S_{\Delta MEF}=\frac{1}{2}MH\times EF=\frac{1}{2}MH\times\left(\frac{AB+CD}{2}\right)\\ &\left.\begin{aligned} &S_{ABCD}=MH'\times\left(\frac{AB+CD}{2}\right)\\ &MH'=2MH\end{aligned}\right\}\Rightarrow S_{ABCD}=MH\times(AB+CD)\end{aligned}\right\}\Rightarrow S_{ABCD}=4S_{\Delta MEF}$$

۳- اگر در ذوزنقه‌ی ABCD، P وسط AD و Q وسط BC باشد و نیز قطرهای AC و BD را رسم کرده باشیم، آن‌گاه:



$$PM=QN$$

$$MN=\frac{CD-AB}{2}$$

قضیه‌ی تالس، تشابه:

نسبت و تناسب

خواص نسبت‌های مساوی:

ترکیب و تفضیل در مخرج: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b\pm a}=\frac{c}{d\pm c}$

ترکیب و تفضیل در صورت: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}=k$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{\alpha a\pm\beta c}{\alpha b\pm\beta d}$$

مثال: اگر $\frac{a}{b}=\frac{۲}{۳}$ باشد، مقدار عبارت $\frac{۲a+۲b}{a+۲b}$ کدام است؟

حل:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow\frac{a+b}{a+۲b}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow\frac{۲a+۲b}{a+۲b}=\frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴}$$

مثال: اگر داشته باشیم $\frac{a}{۳}=\frac{b}{۵}=\frac{c}{۷}$، به‌جای x و y چه اعدادی می‌توان نوشت تا تناسب $\frac{a+b+c}{x}=\frac{a}{y}$ برقرار باشد؟

۱) $x=۳, y=۱۵$ ۲) $x=۳, y=۳$ ۳) $x=۷, y=۳$ ٤) $x=۱۵, y=۳$

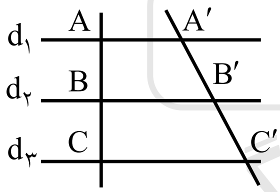
حل:

$$\frac{a+b+c}{۳+۵+۷}=\frac{a}{۳}=\frac{b}{۵}=\frac{c}{۷}\Rightarrow\frac{a+b+c}{۱۵}=\frac{a}{۳}$$

قضیه‌ی تالس و نتایج آن

قضیه‌ی دسته خطوط موازی با فواصل مساوی:

قضیه: اگر چند خط موازی یک خط را قطع کنند و بر آن پاره‌خط‌های متساوی پدید آورند، بر هر خط دیگری که آن‌ها را قطع کند، پاره‌خط‌های متساوی پدید خواهند آورد.



$$\left.\begin{matrix}d_1\parallel d_2\parallel d_3\\ AB=BC=\cdots\end{matrix}\right\}\Rightarrow A'B'=B'C'=\cdots$$

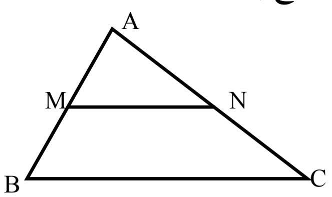
نتیجه ۱: در هر صفحه خط‌های موازی که بر یک خط، پاره‌خط‌های متساوی پدید می‌آورند دوبه‌دو به‌طور متوالی متساوی‌الفاصله‌اند.

نتیجه ۲: در هر صفحه خط‌های موازی که دوبه‌دو و به‌طور متوالی به یک فاصله باشند، بر هر خط که آن‌ها را قطع کند پاره‌خط‌های متساوی پدید خواهند آورد.

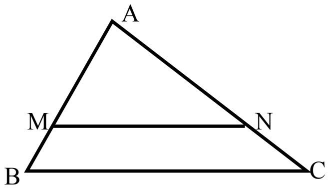
تذکر: عکس قضیه فوق لزوماً برقرار نیست یعنی اگر چند خط روی دو خط، پاره‌خط‌های متناسب پدید آورند، لزوماً موازی نیستند.

قضیه‌ی تالس و عکس آن:

قضیه: خطی که موازی یک ضلع مثلث رسم شود بر دو ضلع دیگر یا بر امتداد آن‌ها، پاره‌خط‌های متناظر پدید می‌آورد که با اضلاع متناظر از آن مثلث متناسبند. بـ عکس اگر خطی دو ضلع مثلث یا امتداد آن‌ها را قطع کند و بر آن دو ضلع پاره‌خط‌های متناسب با دو ضلع مزبور پدید آورد، با ضلع سوم مثلث موازی خواهد.

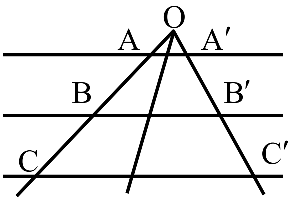


$$MN\parallel BC\Leftrightarrow\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$



نتیجه ۱: خطی که موازی یک ضلع مثلثی رسم شود، با دو ضلع دیگر یا با امتدادهای آن‌ها مثلثی پدید می‌آورد که ضلع‌های آن نظیر به نظیر با اضلاع مثلث مزبور متناسبند.

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$



نتیجه ۲: پاره‌خط‌هایی که چند خط متوازی بر دو خط هم‌رأس پدید می‌آورند، نظیر به نظیر متناسبند و در هر صفحه خط‌های نامتوازی که چند خط متوازی را قطع کنند و توسط

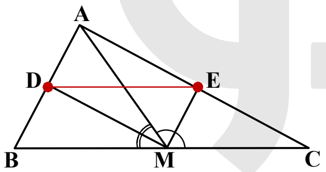
$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}=\ldots \Rightarrow \text{همرسند}$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\cdots \ \text{همرسند} \Rightarrow AC\ ,A'C'$$

☜مثال: در مثلث **ABC**، میانه **AM** و نیمسازهای دو زاویه **AMB** و **AMC** را رسم می‌کنیم، تا دو ضلع **AB** و **AC** را به‌ترتیب در **D** و **E** قطع کند. نسبت $\frac{DE}{BC}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{AD}{AB}$　۲) $\frac{ME}{MC}$　۳) $\frac{ME}{CE}$　۴) $\frac{AM}{BC}$

✍حل: گزینه ۳ پاسخ است.



خواص نیمساز:

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AM}{MC}$$

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AM}{BM}$$

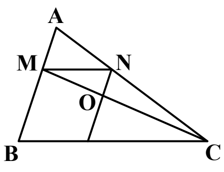
چون $BM=MC$، پس:

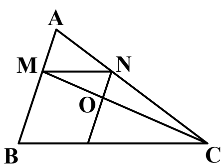
$$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$$

از عکس تالس داریم:

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$$

☜مثال: در شکل مقابل $\frac{MA}{MB}=\frac{3}{7}$ و چهارضلعی **MNPB** متوازی‌الاضلاع است. مساحت مثلث **OMN** چند درصد مساحت مثلث **AMN** است؟





✍حل:

$$\frac{S_{AMN}}{S_{MNC}}=\frac{AN}{NC}=\frac{AM}{MB}=\frac{3}{7} \Rightarrow S_{AMN}=\frac{3}{7}S_{MNC}$$

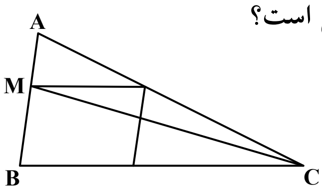
$$\text{تالس}\ \frac{PC}{BP}=\frac{NC}{AN}=\frac{MB}{MA}=\frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{PC}{BP}=\frac{OC}{MO}=\frac{7}{3}=\frac{S_{ONC}}{S_{OMN}} \Rightarrow \frac{S_{ONC}+S_{OMN}}{S_{OMN}}=\frac{10}{3}$$

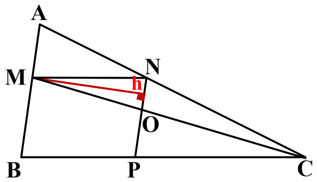
$$\Rightarrow S_{OMN}=\frac{3}{10}S_{MNC}$$

$$\frac{S_{OMN}}{S_{AMN}}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{10}$$

☜مثال: در شکل مقابل $\frac{MA}{MB}=\frac{۲}{۳}$، مساحت مثلث سایه‌زده چند درصد مساحت متوازی‌الاضلاع است؟



✍حل:

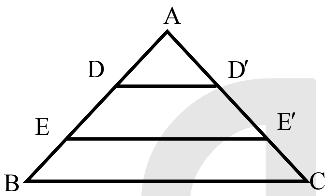


$$\frac{NO}{AM}=\frac{OP}{MB}=\frac{CO}{CM}\Rightarrow\frac{NO}{OP}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{NO}{NP}=\frac{۲}{۵}$$

$$\frac{S_{MNO}}{S_{MNPB}}=\frac{\frac{۱}{۲}h\cdot ON}{h\cdot NP}=\frac{۱}{۲}\frac{ON}{NP}=\frac{۱}{۵}$$

☜مثال: در شکل روبه‌رو $BC=۸$، $AD=DE=EB$ و $DD'\parallel EE'\parallel BC$ می‌باشد. $DD'+EE'$ کدام است؟

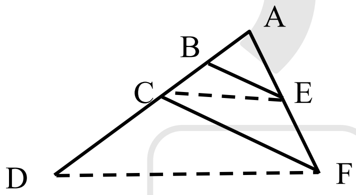
✍حل:



$$\left.\begin{array}{l}DD'\parallel BC\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{DD'}{BC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow DD'=\frac{۸}{۳}\\ EE'\parallel BC\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{EE'}{BC}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow EE'=\frac{۱۶}{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow DD'+EE'=۸$$

☜مثال: در شکل مقابل **BE||CF**، **CE||DF**، $AB=۵$ و $BC=۳$، آنگاه اندازه CD کدام است؟

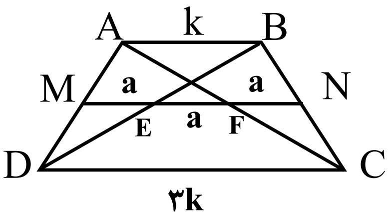
✍حل:



$$\left.\begin{array}{l}BE\parallel CF\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AE}{EF}\\ CE\parallel DF\Rightarrow\frac{AE}{EF}=\frac{AC}{CD}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{CD}\Rightarrow\frac{۵}{۳}=\frac{۵+۳}{CD}\Rightarrow CD=۴/۸$$

☜مثال: در یک ذوزنقه، قاعده‌ی بزرگ سه برابر قاعده کوچک است. پاره‌خطی موازی با قاعده و محدود به ساق‌ها توسط قطرها به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. این پاره‌خط ساق‌ها را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

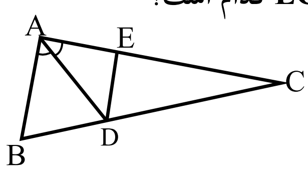
✍حل:



$$\left.\begin{array}{l}\triangle ADC: MF\parallel DC\Rightarrow\frac{AM}{AD}=\frac{MF}{DC}=\frac{۲a}{۳k}\\ \triangle ADB: ME\parallel AB\Rightarrow\frac{DM}{AD}=\frac{ME}{AB}=\frac{a}{k}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AM}{DM}=\frac{۲}{۳}$$

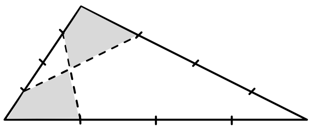
☜مثال: در شکل مقابل، $۵AB=۳AC=۶۰$، **AD** نیمساز زاویه‌ی **A** و **DE||AB** است. اندازه‌ی **EC** کدام است؟

✍حل:



$$ED\parallel AB\to\frac{EC}{AE}=\frac{DC}{BD}=\frac{AC}{AB}=\frac{۲۰}{۱۲}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow\frac{EC}{۲۰-EC}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow EC=۱۲/۵$$

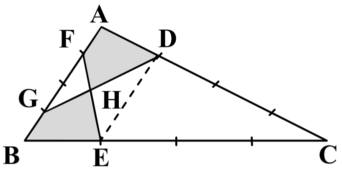
مثال: در شکل مقابل هر ضلع مثلث به ٤ قسمت مساوی تقسیم شده است. دو چهارضلعی سایه‌زده نسبت به هم کدام وضع را دارند؟



۱) هم‌مساحت ۲) هم‌محیط

۳) همنهشت ٤) متشابه

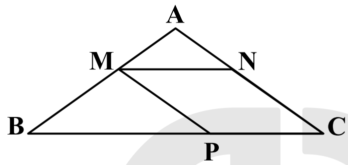
حل: گزینه ۱ پاسخ است.

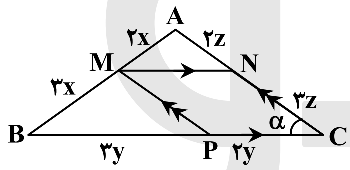


با توجه به این‌که $\frac{1}{4}=\frac{BE}{BC}=\frac{AD}{AC}$، نتیجه می‌گیریم که DE موازی AB می‌باشد. بنـابراین نقاط E و D از خط AB به یک فاصـله‌انـد و چـون $BF=AG=\frac{3}{4}AB$، در نتیجـه دو مثلث ADG و FEB هم‌مساحت هستند؛ زیرا قاعده و ارتفاع مساوی دارنـد. حـال اگـر از هر دو مثلث مساحت GFH را کم کنیم، نتیجه می‌شود: $S_{BGHE}=S_{AFHD}$

مثال: در شکل مقابل، $AM=\frac{2}{3}MB$ و چهارضلعی **MNCP** متوازی‌الاضلاع است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند درصد مساحت مثلث **ABC** است؟

حل:





$$AM=\frac{2}{3}MB \Rightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{2}{3}$$

$$MP \parallel AC \xrightarrow{\text{طبق قضیه تالس}} \frac{BM}{MA}=\frac{BP}{PC}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{S_{MNCP}}{S_{ABC}}=\frac{2y\times 3z\times \sin\alpha}{\frac{1}{2}\times 5y\times 5z\times \sin\alpha}=\frac{6}{\frac{25}{2}}=\frac{12}{25}=\frac{48}{100}$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع ٤٨ درصد مساحت مثلث ABC است.

راه حل دوم:

$$\left.\begin{aligned} &MN \parallel BC \Rightarrow AMN \simeq ABC \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^2=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}\\ &MP \parallel AC \Rightarrow BMP \simeq ABC \Rightarrow \frac{S_{BMP}}{S_{ABC}}=\left(\frac{BM}{AB}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow S_{MNCP}=S_{ABC}-\frac{4}{25}S_{ABC}-\frac{9}{25}S_{ABC}=\frac{12}{25}S_{ABC}=\%48 S_{ABC}$$

شکل‌های متشابه:

در هندسه منحصراً وقتی از وجود تشابه بین دو شکل سخن می‌گوییم که از حیث ساختمان و همچنین از لحاظ اندازه‌ها بین اجـزای دو شکل نسبت‌های معین وجود داشته باشد. به عبارت دیگر یکی از شکل‌ها بزرگ و یا کوچک شده دیگری باشد. تسـاوی حالـت خاصی از تشابه می‌باشد.

شکل‌های متشابه دارای ویژگی‌های یکسانی هستند. مثلاً دو چندضلعی در صورتی متشابه هستند کـه بـین اجـزای آن‌هـا از لحـاظ ساختمان و توالی اضلاع تناظر یک به یک وجود داشته باشد و زاویه‌های متناظ آن‌ها متساوی و پاره‌خط‌های متناظر به یـک نسـبت باشند. مثلاً دو مربع همواره متشابهند.

تعریف: دو n ضلعی متشابهند هرگاه زوایای متناظر آن‌ها متساوی و اضلاع متناظ آن‌ها متناسب باشند.

مثال: کدام دو چهارضلعی متشابهند؟

۱) دو مستطیل ۲) دو متوازی‌الاضلاع که زوایای مساوی داشته باشند.

۳) دو لوزی که یک زاویه‌ی مساوی داشته باشند. ٤) دو ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین که زوایای مساوی داشته باشند.

حل: اگر یک زاویه‌ی دو لوزی مساوی باشد، کلیه زوایای آن‌ها مساوی است و اضلاع آن‌ها نیز متناسبند.

مثال: در کدام حالت دو مستطیل متشابهند؟

۱) طول دو مستطیل برابر باشد.
۲) زاویه‌ی بین دو قطر برابر باشد.
۳) قطر دو مستطیل برابر باشد.
٤) همواره متشابهند.

حل: اگر دو مستطیل بخواهند متشابه باشند، باید نسبت طول به عرض در آن‌ها مقدار ثابتی باشد. اگر زاویه‌ی بین دو قطر دو مستطیل با هم برابر باشد، می‌توان ثابت کرد که نسبت طول به عرض در این دو مستطیل با هم برابر است. اما از برابری طول یا قطر دو مستطیل نمی‌توان نتیجه گرفت که نسبت طول به عرض در آن‌ها مقدار ثابتی است.

حالات تشابه دو مثلث:

از آن‌چه از تعریف تشابه دو چندضلعی ذکر شد، می‌توان نتیجه گرفت که: دو مثلث وقتی متشابهند که زاویه‌های آن‌ها دوبه‌دو متساوی و ضلع‌های روبه‌روی زاویه‌های متساوی متناسب باشند.

اما به سبب بعضی ویژگی‌های مثلث، پاره‌ای از شرایط تشابه، از شرایط دیگ قابل نتیجه‌گیری می‌باشد. بنابراین تشابه دو مثلث را با شرایط کمتری می‌توان بررسی نمود.

قضیه: اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر متساوی باشند، آن دو مثلث متشابهند.

قضیه: اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویه‌های بین آن اضلاع با یکدیگ متساوی باشند، آن دو مثلث متشابهند.

قضیه: اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشد، آن دو مثلث متشابهند.

نکته: دو مثلث قائم الزاویه در حالات زیر نیز متشابهند:

۱- اگر دو مثلث قائم‌الزاویه، یک زاویه‌ی حاده برابر داشته باشند، متشابهند.

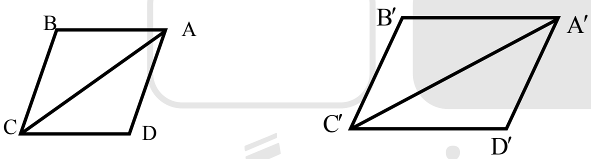
۲- اگر وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابهند.

۳- اگر وتر و ارتفاع‌های نظیر، نظیر به نظیر متناسب باشند، دو مثلث متشابهند.

تشابه در چندضلعی‌ها:

برای اثبات گزاره‌های مربوط به تشابه چندضلعی‌ها، آن‌ها را با رسم قطرهای متناظر به چند مثلث تجزیه کرده و ویژگی‌های چندضلعی‌ها را از گزاره‌های مربوط به تشابه مثلث‌ها نتیجه می‌گیریم.

قضیه: در دو چندضلعی محدب متشابه قطرهایی که از رأس‌های متناظر دو چندضلعی رسم می‌شوند، چندضلعی‌ها را به مثلث‌های متناظری که دوبه‌دو متشابه هستند تجزیه می‌کنند.



تناسب اجزا و مساحت‌های شکل‌های متشابه:

در دو شکل متشابه نسبت هر دو جزء طولی متناظر، مقداری ثابت است که آن را نسبت تشابه آن دو شکل می‌نامند.

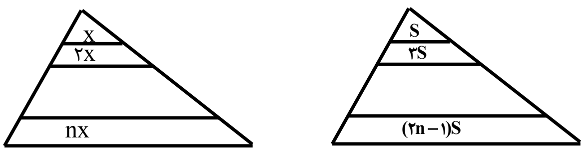
در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ همواره داریم:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{h_a}{h_{a'}}=\frac{h_b}{h_{b'}}=\frac{h_c}{h_{c'}}=\frac{m_a}{m_{a'}}=\frac{m_b}{m_{b'}}=\frac{m_c}{m_{c'}}=\frac{d_a}{d_{a'}}=\frac{d_b}{d_{b'}}=\frac{d_c}{d_{c'}}=\frac{R}{R'}=\frac{r}{r'}=\frac{۲p}{۲p'}=k$$

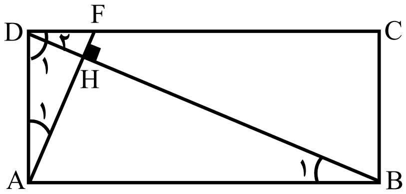
$$\frac{S}{S'}=k^۲$$

نسبت تشابه: k شعاع دایره‌ی محاطی: r شعاع دایره‌ی محیطی: R ارتفاع: h نیمساز: d میانه: m

نکته: اگر پاره‌خط‌های موازی هم، دو ضلع مثلث را به n قسمت مساوی تقسیم کنند، طول پاره‌خط‌های موازی تصاعد عددی با قدر نسبت x و مساحت ناحیه‌های افراز شده تصاعد عددی با قدر نسبت ۲ می‌سازند.



☜مثال: در شکل زیر، چهارضلعی ABCD یک مستطیل است. F نقطه‌ای است روی ضلع DC به‌طوری‌که $AF \perp BD$. اگر $AB = 3AD$ باشد، DC چند برابر DF است؟



✍حل:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ \left.\begin{array}{l}\hat{B}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABH \sim \Delta ADH \Rightarrow \frac{AH}{DH} = \frac{AB}{AD} = \frac{BH}{AH} = 3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}AH = 3DH \\ BH = 3AH\end{array}\right\} \Rightarrow BH = 9DH$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}_3 = \hat{H}_2 \\ AB \parallel DC \Rightarrow \hat{D}_2 = \hat{B}_1\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABH \sim \Delta DHF \Rightarrow \frac{BH}{DH} = \frac{AH}{FH} = \frac{AB}{DF} = 9 \Rightarrow AB = 9DF \xrightarrow{AB=CD} CD = 9DF$$

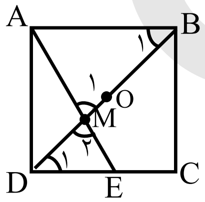
☜مثال: مثلثی به اضلاع ۳، ۵ و ۷ با مثلثی به اضلاع ۵، x و y متشابه است. اگر $x > 5$ و $y > 5$ باشد، $x + y$ کدام است؟

✍حل:

چون $x > 5$ و $y > 5$ است، لذا ۵ کوچکترین ضلع مثلث است. لذا داریم:

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{5} = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{25}{3}, x = \frac{35}{3} \Rightarrow x + y = \frac{60}{3} = 20$$

☜مثال: در یک مربع به ضلع $4\sqrt{2}$ پاره‌خطی که رأس **A** را به نقطه‌ی **E**، وسط ضلع **CD**، متصل می‌کند، قطر مربع را در M قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی M از وسط مربع کدام است؟

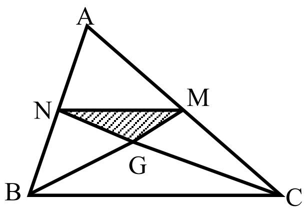


✍حل:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ AB \parallel CD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta DME \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{DE}{AB} = \frac{MD}{MB} = \frac{1}{2} \\ DB = 4\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 8\end{array}\right\} \Rightarrow MD = \frac{1}{3}DB = \frac{8}{3} \Rightarrow MO = DO - MD = \frac{8}{2} - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

☜مثال: در مثلث ABC، نسبت مساحت مثلثی که یک رأس آن مرکز ثقل و دو رأس دیگرش وسط اضلاع AB و AC باشند به مساحت مثلث ABC کدام است؟

✍حل:



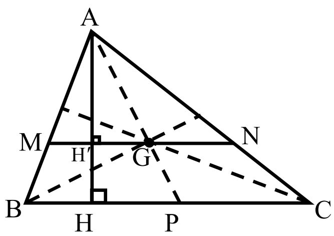
$$\Delta GMN \sim \Delta GBC \Rightarrow \frac{S_{\Delta GMN}}{S_{\Delta GBC}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$S_{\Delta GBC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta GMN} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{12}S_{\Delta ABC}$$

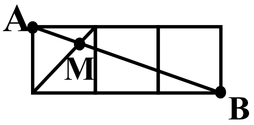
☜مثال: از نقطه‌ی G محل تلاقی سه میانه‌ی مثلث ABC خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا دو ضلع دیگر را در نقاط M و N قطع کند، نسبت مساحت مثلث AMN به مساحت مثلث ABC چقدر است؟

✍حل:



$$\frac{MN}{BC} = \frac{AH'}{AH} = \frac{AG}{AP} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

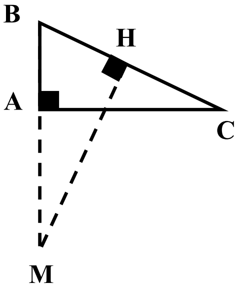
مثال:در شکل مقابل، سه مربع به اضلاع واحد کنار هم قرار دارند، فاصله‌ی **MA** چند برابر $\sqrt{۱۰}$ است؟



حل:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{۱}{۳}\rightarrow\frac{AM}{AM+MB}=\frac{۱}{۴}\rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{۱}{۴}\rightarrow AM=\frac{۱}{۴}AB=\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰}$$

مثال: اندازه‌ی دو ضلع قائم از مثلث قائم‌الزاویه ای ۲ , ۶ واحد است.عمودمنصف وتر امتداد ضلع کوچکتر را در **M** قطع می‌کند. فاصله‌ی **M** از نزدیکترین رأس این مثلث چند واحد است؟

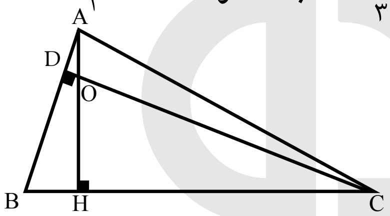


حل:

$$\left.\begin{matrix}\hat{B}=\hat{B}\\ \hat{A}=\hat{H}=۹۰^\circ\end{matrix}\right\}\rightarrow ABC\approx BMH\rightarrow\frac{AB}{BH}=\frac{BC}{BM}$$

$$\rightarrow\frac{۲}{\frac{\sqrt{۴۰}}{۲}}=\frac{\sqrt{۴۰}}{۲+AM}\rightarrow ۲+AM=۱۰\rightarrow AM=۸$$

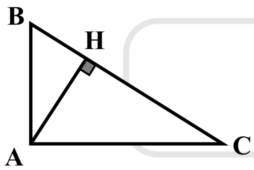
مثال: در شکل مقابل **AH** و **CD** دو ارتفاع مثلث **ABC** هستند. اگر $۱۲=\frac{۱}{۳}OH=AD=۵DO$ باشد، طول **HC** کدام است؟



حل:

$$ADO\approx OHC\rightarrow\frac{DO}{OH}=\frac{AD}{HC}\rightarrow\frac{\frac{۱۲}{۵}}{۳۶}=\frac{۱۲}{HC}\rightarrow HC=۱۸۰$$

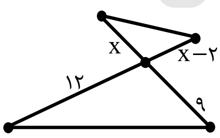
مثال: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی **ABC** ($\hat{A}=۹۰^\circ$)، $AC=۲AB$ و ارتفاع AH رسم شده است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث ABH است؟



حل:

$$ABH\approx AHC\rightarrow\frac{S_{ABH}}{S_{ACH}}=\left(\frac{BH}{CH}\right)^۲=\left(\frac{AB}{AC}\right)^۲=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{۴}\rightarrow S_{ABC}=۵S_{ABH}$$

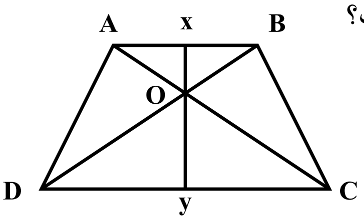
مثال: در شکل مقابل، دو مثلث متشابهند. نسبت مساحت آن دو مثلث را بیابید.



حل: چون در شکل دو ضلع غیرموازی کشیده شده پس: $\frac{x-۲}{۹}=\frac{x}{۱۲}\rightarrow x=۸$

لذا: $\frac{S}{S'}=\left(\frac{x-۲}{۹}\right)^۲=\frac{۴}{۹}$

مثال: اندازه‌ی دو قاعده‌ی یک ذوزنقه ۶ و ۹ واحد و طول پاره‌خطی که دو نقطه‌ی وسط قاعده ها را به‌هم متصل می‌کند، برابر ۱۲ واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو قطر این ذوزنقه از وسط قاعده‌ی کوچکتر چقدر است؟

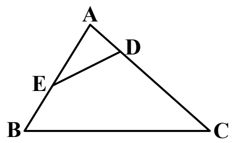


حل: خط واصل بین وسط دو قاعده حتماً از وسط دو قطر می‌گذرد.

مثلث OxA با OyC متشابه است پس $\frac{Ax}{yC}=\frac{Ox}{Oy}$

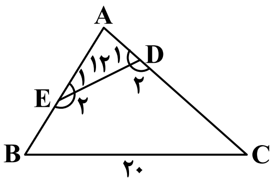
$$\Rightarrow\frac{۳}{۴/۵}=\frac{Ox}{Oy}=\frac{Ox}{۱۲-Ox}\Rightarrow Ox=۴/۸$$

مثال: در چهارضلعی BCDE، زاویه‌های روبه‌رو مکمل هم‌اند. اگر $BC=۲۰$ و $DE=۱۲$، آن‌گاه مساحت چهارضلعی BCDE چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



حل: دو مثلث $\overset{\Delta}{AED}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ متشابه‌اند زیرا:

$$\begin{cases}\hat{C}+\hat{E}_۲=۱۸۰ & \text{فرض}\\ \hat{E}_۱+\hat{E}_۲=۱۸۰ & \text{از طرفی}\end{cases}\Rightarrow \hat{C}=\hat{E}_۱$$



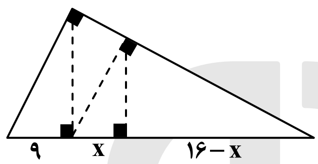
و

$$\begin{cases}\hat{B}+\hat{D}_۲=۱۸۰ & \text{فرض}\\ \hat{D}_۱+\hat{D}_۲=۱۸۰ & \text{از طرفی}\end{cases}\Rightarrow \hat{B}=\hat{D}_۱$$

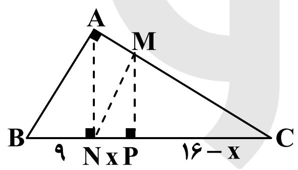
پس دو مثلث به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر $k=\frac{۱۲}{۲۰}=\frac{۳}{۵}$ است پس:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AED}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}-S_{\overset{\Delta}{AED}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{۲۵-۹}{۲۵}\Rightarrow\frac{S_{EDCB}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{۱۶}{۲۵}=۰/۶۴$$

مثال: در شکل مقابل ارتفاع هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه‌ی x چقدر است؟



حل: از آن‌جا که MN و AB موازی هم و MP و AN نیز موازی هم می‌باشند، با توجه به قضیه‌ی تالس داریم:



$$\overset{\Delta}{ABC}:MN\parallel AB\xrightarrow{\text{طبق قضیه ی تالس}}\frac{CM}{MA}=\frac{CN}{NB}=\frac{۱۶}{۹}$$

$$\overset{\Delta}{ACN}:MP\parallel AN\xrightarrow{\text{طبق قضیه ی تالس}}\frac{CM}{MA}=\frac{CP}{PN}=\frac{۱۶-x}{x}$$

چون نسبت $\frac{CM}{MA}$ در هر دو تناسب وجود دارد به‌راحتی نتیجه می‌گیریم که $\frac{CN}{NB}=\frac{CP}{PN}$ است، یعنی:

$$\frac{۱۶}{۹}=\frac{۱۶-x}{x}\Rightarrow ۱۶x=۱۴۴-۹x\Rightarrow ۲۵x=۱۴۴\Rightarrow x=\frac{۱۴۴}{۲۵}=\frac{۵۷۶}{۱۰۰}=۵/۷۶$$

مثال: در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها $\frac{۲}{۳}$ نسبت اضلاع است. مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

حل: می‌دانیم در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر با مجذور نسبت تشابه این دو مثلث است. اگر نسبت تشابه دو مثلث را K در نظر بگیریم، چون نسبت مساحت‌ها $\frac{۲}{۳}$ نسبت اضلاع (یا همان نسبت تشابه) است، داریم:

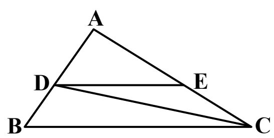
$$\text{نسبت مساحت‌ها}=\frac{۲}{۳}\times\text{نسبت اضلاع}\Rightarrow k^۲=\frac{۲}{۳}k\xrightarrow[(k\neq۰)]{\div k}k=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\text{نسبت تشابه مثلث بزرگ‌تر به کوچک‌تر } k'=\frac{۱}{k}=\frac{۳}{۲}$$

حال با داشتن نسبت تشابه دو مثلث (یعنی $k'=\frac{۳}{۲}$)، نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ}}{\text{مساحت مثلث کوچک}}=k'^۲=(\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$

مثال: در شکل مقابل، مساحت مثلث DEC شصت درصد مساحت مثلث ADE است. مساحت ذوزنقه چند برابر مساحت مثلث ADE است؟

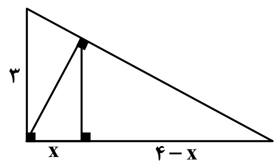
حل:



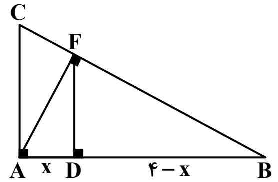
$$\frac{S_{DEC}}{S_{ADE}}=\frac{\frac{۱}{۲}h\cdot EC}{\frac{۱}{۲}h\cdot AE}=\frac{EC}{AE}=\frac{۶۰}{۱۰۰}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{AE}{EC}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow\frac{AE}{AC}=\frac{۵}{۸}$$

$$S_{ADE}=(\frac{۵}{۸})^۲S_{ABC}=\frac{۲۵}{۶۴}S_{ABC}\Rightarrow S_{DECB}=S_{ABC}-\frac{۲۵}{۶۴}S_{ABC}=\frac{۳۹}{۶۴}S_{ABC}\Rightarrow\frac{S_{DECB}}{S_{ADE}}=\frac{۳۹}{۲۵}=\frac{۱۵۶}{۱۰۰}=۱/۵۶$$

☜مثال: در شکل مقابل، ارتفاع هر دو مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه x کدام است؟



✍ حل:



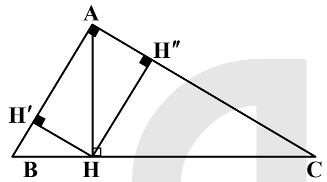
$$FD^2 = x(4-x)$$

$$\text{تشابه}\quad \frac{4-x}{4} = \frac{\sqrt{x(4-x)}}{3}$$

$$3\sqrt{4-x} = 4\sqrt{x} \Rightarrow 9(4-x) = 16(x) \Rightarrow 25x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{25} = 1/44$$

☜مثال: در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر $\frac{1}{5}$ مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم آن کدام است؟

✍ حل:



$$S_{ABC} = 5S_{ABH} \Rightarrow S_{ACH} = 4S_{ABH}$$

چون دو مثلث ABH و ACH متشابهند و نسبت مساحت‌هایشان ٤ است، پس نسبت تشابهشان ۲ است. چون دو مثلث متشابهند، نسبت هر دو جزء طولیشان نسبت تشابه است.

$$\frac{HH'}{HH''} = \frac{1}{2}$$

☜مثال: مثلثی به طول اضلاع b و a و ۳ با مثلثی به طول اضلاع ۵ و ٤ و ۳ متشابه است و دو مثلث قابل انطباق نیستند. بیش‌ترین محیط از مثلث اول کدام است؟

✍ حل: اگر دو مثلث متشابه غیرمنطبق باشند، برای آن‌که بیش ترین محیط را به‌دست آوریم، ۳ را متناظر با دومین ضلع مثلث دوم در نظر می‌گیریم.

از طرفی نسبت محیط‌ها برابر نسبت تشابه است.

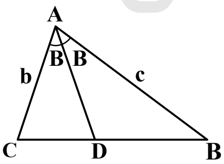
$$\frac{\text{محیط}1}{\text{محیط}2} = \frac{\text{محیط}1}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{محیط}1 = 12\times\frac{3}{4} = 9$$

☜مثال: در مثلث ABC زاویه $\hat{A} = 2\hat{B}$، کدام رابطه بین سه ضلع این مثلث برقرار است؟ (ضلع b مقابل زاویه B است).

۱) $a^2 = b^2$ ۲) $b^2 = ac$ ۳) $a^2 - b^2 = bc$ ٤) $a^2 - c^2 = bc$

✍ حل: گزینه ۳ پاسخ است.

نیمساز A را رسم می‌کنیم:



$$ACD \sim ABC \Rightarrow \frac{CD}{b} = \frac{AD}{c} = \frac{b}{a} \Rightarrow CD = \frac{b^2}{a}$$

$$\frac{CD}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{CD}{BD+DC} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow CD = \frac{ab}{b+c} = \frac{b^2}{a}$$

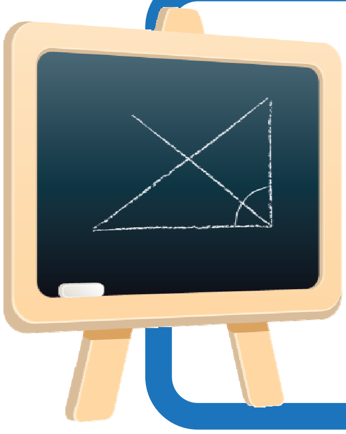
$$\Rightarrow a^2 = b(b+c) \Rightarrow a^2 - b^2 = bc$$

☜مثال: در مثلث ABC داریم $\hat{A} = 70^\circ$ و $\hat{B} = 50^\circ$ و ضلع $Ab = 18$ ، در مثلث MNP داریم $\hat{N} = 60^\circ$ و $\hat{M} = 70$، اگر مساحت مثلث ABC، برابر $\frac{9}{4}$ مساحت مثلث MNP باشد، ضلع MP چقدر است؟

✍ حل:

$$\left.\begin{array}{l} A = 70^\circ \ ,\ B = 50^\circ \Rightarrow C = 60^\circ \\ \hat{N} = 60^\circ \ ,\ \hat{M} = 70^\circ \Rightarrow \hat{P} = 50^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \simeq \overset{\triangle}{MNP}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{AB}{MP} = \frac{3}{2}$$



هندسه ۱

فصل ۴

شکل‌های فضایی:

چندوجهی:

بخشی از فضا که از همه طرف به صفحه محدود است، شکلی پدید می‌آورد که به آن چندوجهی می‌گویند. بخش‌هایی از صفحه‌ها که چندوجهی را پدید می‌آورند، سطح‌هایی با محیط چندضلعی ایجاد می‌کنند. هر کدام از این چندضلعی‌ها یک وجه، ضلع‌های این وجه‌ها، یال‌ها و رأس‌های این وجه‌ها، رأس‌های چندوجهی نامیده می‌شود.

چندوجهی‌های منتظم:

بخشی از فضا که از همه طرف به چند ضلعی‌های منتظم متساوی که هر یک از آن‌ها در هر ضلع با یکی از اضلاع چند ضلعی دیگری از همین نوع مشترک است، چندوجهی منتظم نامیده می‌شود.

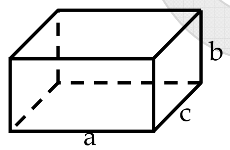
مکعب مستطیل:

مکعب مستطیل، یک شش‌وجهی است که همه وجه‌های آن مستطیل هستند. وجه‌های روبه‌رو در مکعب مستطیل موازی و همنهشت هستند. وجه‌های مجاور یک مکعب مستطیل صفحه‌های عمود بر هم و یال‌های آن بر وجه‌ها عمود هستند. مکعب‌مستطیل ۸ رأس و ۱۲ یال دارد. در مکعب‌مستطیل به دو رأس که در یک وجه قرار ندارند رأس‌های متقابل گفته می‌شود. در هر مکعب مستطیل، پاره‌خطی که دو رأس متقابل را به‌هم وصل می‌کند، قطر مکعب مستطیل نامیده می‌شود و پاره‌خطی که دو رأس غیرمجاور در یک وجه را به‌هم وصل می‌کند، قطر وجه نامیده می‌شود.

نکات:

۱) اگر طول اضلاع یک مکعب مستطیل **a**، **b** و **c** باشند، طول قطر مکعب از رابطه‌ی $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ به‌دست می‌آید.

۲) مکعب مستطیل دارای ٤ قطر متساوی است که در یک نقطه همرسند و این نقطه از همه‌ی رئوس به یک فاصله است (اقطار منصف همدیگرند) و لذا مکعب مستطیل قابل محاط شدن در یک کره است.



۳) حجم مکعب مستطیلی به ارتفاع a، طول b و عرض c، برابر abc

و مساحت جانبی آن $2a(b+c)$ و مساحت کل آن $2(ab+ac+bc)$ است.

٤) با وصل کردن همه‌ی رأس‌های مکعب مستطیل به یکدیگر $28=\binom{8}{2}$ پاره‌خط حاصل می‌شود، که شامل ۱۲ یال، ۱۲ قطر وجه جانبی و ٤ قطر است.

٥) هر یال مکعب مستطیل با ٤ یال موازی، و بر ۸ یال دیگر عمود است. (٤ یال متقاطع و ٤ یال متنافر)

مکعب:

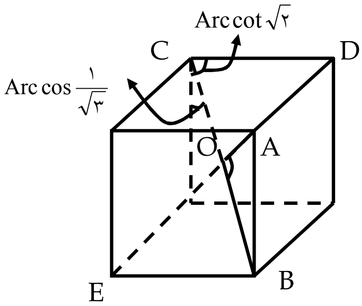
مکعب مستطیلی که طول یال‌های آن با هم برابر باشند، مکعب نامیده می‌شود یا شش‌وجهی منتظمی که همه‌ی وجوه آن مربع‌های متساوی باشند، مکعب نامیده می‌شود.

نکات:

۱) حجم مکعبی که طول یال آن **a** باشد برابر a^3 و مساحت جانبی آن $4a^2$ و مساحت کل آن $6a^2$ است.

۲) مکعب دارای ٤ قطر متساوی به اندازه‌ی $a\sqrt{۳}$ است که در یک نقطه همرسند. فاصله‌ی این نقطه از همه‌ی رئوس (شعاع کـره‌ی محیطی مکعب) $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و فاصله‌ی آن از همه‌ی وجوه $\frac{a}{۲}$ (شعاع کره‌ی محاطی مکعب) است.

۳) زاویه‌ی بین دو قطر مکعب $\mathrm{Cos}^{-1}\frac{۱}{۳}$ (یا $\tan^{-1}۲\sqrt{۲}$) است.



زیرا:

$$AB^۲ = OA^۲ + OB^۲ - ۲OA \cdot OB\,\mathrm{Cos}\,\theta$$

$$\Rightarrow a^۲ = (\frac{a\sqrt{۳}}{۲})^۲ + (\frac{a\sqrt{۳}}{۲})^۲ - ۲(\frac{a\sqrt{۳}}{۲})^۲\,\mathrm{Cos}\,\theta$$

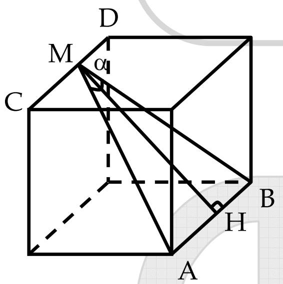
$$\Rightarrow \mathrm{Cos}\,\theta = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \theta = \mathrm{Cos}^{-1}\frac{۱}{۳}$$

٤) هر قطر وجه جانبی در مکعب $a\sqrt{۲}$ است و لذا مساحت صفحه‌ی قطری مکعب (صفحه‌ی شامل دو قطر مکعب) $a^۲\sqrt{۲}$ است.

۵) هر مکعب ۹ صفحه‌ی تقارن و ۱۳ محور تقارن دارد.

مثال: در مکعب شکل مقابل، M وسط یال CD است. زاویه‌ی $A\hat{M}B$ کدام است؟

حل:



$$\tan\frac{\alpha}{۲} = \frac{\frac{a}{۲}}{a\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

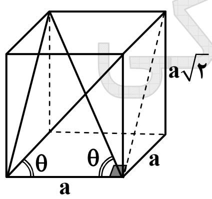
$$\tan\alpha = \frac{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱-\tan^۲\frac{\alpha}{۲}} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱-\frac{۲}{۱۶}} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۷} \Rightarrow \alpha = \mathrm{Arc}\tan\frac{۴\sqrt{۲}}{۷}$$

مثال: قاعده یک مکعب مستطیل، به شکل مربع است و ارتفاع آن برابر قطر این مربع است. زاویه قطـر مکعـب مسـتطیل بـا یـال کوچک‌تر آن چند درجه است؟

حل:

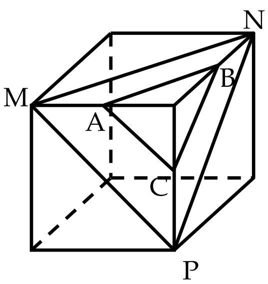
$$\sqrt{a^۲ + (a\sqrt{۲})^۲ + a^۲} = ۲a \Rightarrow \mathrm{Cos}\,\theta = \frac{a}{۲a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = ۶۰^\circ$$

مثال: در مکعب شکل مقابل، زاویه صفحه قطری سایه زده با صفحه وجه ABCD ، چند درجه است؟



حل: چون یال مکعب بر وجه ABCD عمود است و اگر یک خط از صفحه‌ای بر صفحه‌ای عمود باشد، آن صفحه بر صفحه‌ی مذکور عمود است.

مثال: اگر بر وسط‌های سه یال گذرا از یک رأس مکعب، یک صفحه بگذرانیم، مقطع حاصل به چه شکل خواهد بود؟



۱) مثلث قائم‌الزاویه

۲) مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه

۳) مثلث متساوی‌الساقین

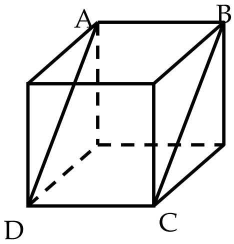
٤) مثلث متساوی‌الاضلاع

✍حل: گزینه ٤ صحیح است.

اگر ضلع مکعب را a بگیریم داریم $MN = MP = PN = a\sqrt{۲}$ و بر اساس قضیه‌ی خط واصل بین اوساط اضلاع مثلث داریم:

$$AB = \frac{MN}{۲} = BC = AC$$

☜مثال: در مکعب شکل مقابل، مساحت چهارضلعی $ABCD$ برابر $۳\sqrt{۲}$ است. سطح کل مکعب چند سانتی‌متر مربع است؟



✍حل:

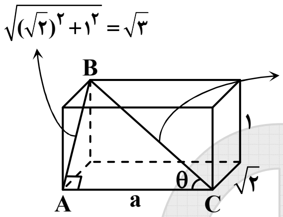
$$a^۲\sqrt{۲} = ۳\sqrt{۲} \Rightarrow a^۲ = ۳ \Rightarrow S = ۶a^۲ = ۱۸$$

☜مثال: کره‌ای به شعاع ۳ در مکعبی محاط شده است. قطر مکعب کدام است؟

✍حل: چون کره در مکعب محاط شده است، لذا $R = \frac{a}{۲}$ و از آن‌جا $a = ۲R$، لذا: $a = ۲R = ۲\times۳ = ۶ \Rightarrow d = a\sqrt{۳} = ۶\sqrt{۳}$

☜مثال: می‌خواهیم مکعب مستطیلی به ابعاد a، $\sqrt{۲}$ و ۱ را چنان بسازیم که زاویه‌ی قطر مکعب مستطیل با یال به طول a واحد، برابر ۳۰ درجه باشد. a برابر کدام عدد انتخاب شود؟

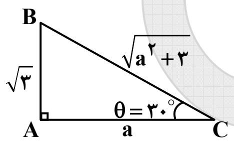
✍حل:



$$L = \sqrt{a^۲ + \sqrt{۲}^۲ + ۱^۲} = \sqrt{a^۲ + ۲ + ۱} = \sqrt{a^۲ + ۳}$$ قطر مکعب مستطیل

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، می‌دانیم زاویه‌ی بین قطر مکعب مستطیل و یال a، برابر °۳۰ است.

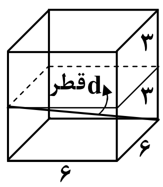
پس داریم:



$$\tan\theta = \tan ۳۰° = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{۳}}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow a = ۳$$

☜مثال: دو مکعب مستطیل یکسان به‌طور کامل در یک مکعب به طول یال ٦ واحد جای گرفته‌اند. طول قطر هر یک از این دو مکعب مستطیل کدام است؟

✍حل: مکعبی به طول یال ٦ واحد را در نظر می‌گیریم. برای این که در داخل این مکعب، دو مکعب مستطیل یکسان به‌طور کامل جا بگیرد، می‌توانیم صفحه‌ای را دقیقاً از وسط ارتفاع این مکعب عبور دهیم. با انجام این کار، مکعب به دو مکعب مستطیل یکسان تقسیم می‌شود که قاعده‌ی این دو مکعب مستطیل با قاعده‌ی مکعب یکسان بوده و تنها ارتفاع آن دو، نصف ارتفاع مکعب است. بنابراین ابعاد این دو مکعب مستطیل یکسان برابر ۳ و ٦ و ٦ واحد می‌باشد.



از طرفی می‌دانیم اگر اندازه‌ی یال‌های مکعب مستطیل a، b و c باشند، قطر این مکعب مستطیل برابر با $\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}$ خواهد بود. بنابراین:

$$d = \sqrt{a^۲+b^۲+c^۲} = \sqrt{۶^۲+۶^۲+۳^۲} = \sqrt{۸۱} = ۹$$

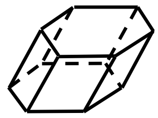
منشور:

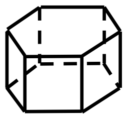
منشور یک چندوجهی است که دو وجه آن همنهشت بوده و در دو صفحه‌ی موازی قرار می‌گیرند و وجه‌های دیگر آن متوازی‌الاضلاع هستند.

دو وجه همنهشت منشور که در دو صفحه‌ی موازی قرار می‌گیرند، قاعده‌های منشور نام دارند. وجه‌های دیگر که متوازی‌الاضلاع هستند، وجه‌های جانبی و یال‌هایی از منشور که محل تلاقی وجه‌های جانبی منشور هستند یال‌های جانبی نامیده می‌شوند که همگی با هم موازیند.

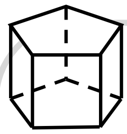
ارتفاع منشور پاره‌خطی است که صفحه‌های دو قاعده را به‌هم وصل می‌کند و بر هر دو قاعده عمود است.

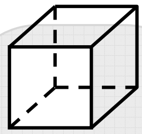
اگر یال‌های جانبی بر قاعده‌های منشور عمود باشند، آن را یک منشور قائم و اگر یال‌های جانبی بر قاعده‌ها عمود نباشند، آن را منشور مایل می‌نامند.

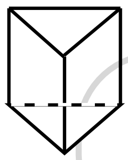
منشور مایل


منشور قائم


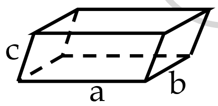
منشور را بر اساس شکل چندضلعی‌های قاعده‌های آن نامگذاری می‌کنند، مثلاً اگر قاعده‌های یک منشور مثلث باشند، آن را منشور مثلثی می‌نامند. به این ترتیب مکعب مستطیل یک منشور چهارضلعی قائم است.

منشور پنج‌ضلعی


منشور چهارضلعی


منشور مثلثی


اگر قاعده‌های یک منشور دو متوازی‌الاضلاع همنهشت باشند، به آن متوازی‌السطوح گفته می‌شود.



مجموع مساحت‌های وجه‌های جانبی یک منشور را مساحت جانبی (مساحت رویه‌ای که اطراف منشور را تشکیل می‌دهد) و مجموع مساحت‌های جانبی و مساحت دو قاعده‌ی منشور را مساحت کل آن می‌نامند.

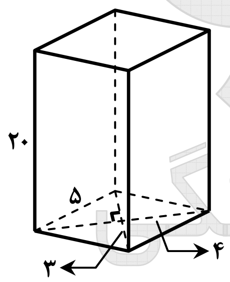
قضیه: مساحت جانبی منشور قائم برابر است با محیط قاعده ضرب در طول یال جانبی منشور.

نکته: حجم منشوری با ارتفاع h و مساحت قاعده‌ی s برابر است با: $V = sh$

مثال: سطح کل منشور قائم که قاعده‌اش لوزی به اقطار ۶ و ۸ و ارتفاعش مساوی محیط قاعده آن باشد، چقدر است؟

حل: چون قاعده لوزی است و اقطار لوزی بر هم عمودند، لذا ضلع قاعده برابر است با: $\sqrt{\left(\frac{۸}{۲}\right)^۲+\left(\frac{۶}{۲}\right)^۲} = ۵$ و لذا محیط قاعده برابر است با: $۴\times۵ = ۲۰$

لذا سطح کل این منشور برابر است با: $S = ۲\left(\frac{۶\times۸}{۲}\right)+۴(۵\times۲۰) = ۴۴۸$

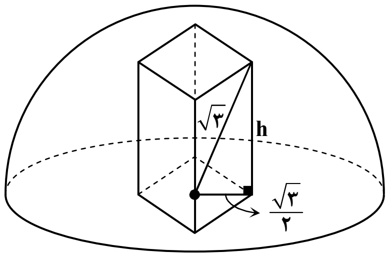


مثال: در داخل نیمکره به قطر $۲\sqrt{۳}$ بزرگترین منشور قایم با قاعده مربع طوری ساخته شده است که قطر مربع برابر $\sqrt{۳}$ است، حجم منشور کدام است؟

حل:

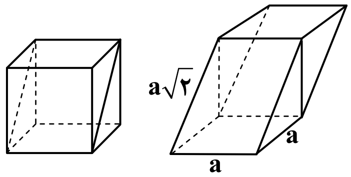
$$h = \sqrt{۳-\frac{۳}{۴}} = \frac{۳}{۲}$$

$$V = Sh = \frac{(\sqrt{۳})^۲}{۲}\times\frac{۳}{۲} = \frac{۹}{۴}$$



مثال: در یک مکعب به طول یال a، صفحه‌ی قطری، آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. این دو قسمت را در وجه مربع به هم می‌چسبانیم. سطح کل منشور حاصل، چند برابر $a^۲$ است؟

حل:

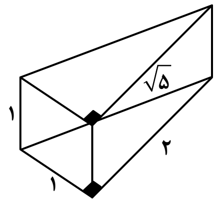


سطح دو قاعده‌ی بالا و پایین و دو قاعده‌ی کناری تغییر نکرده است. فقط دو مربع جلو و عقب به مستطیل تبدیل شده‌اند.

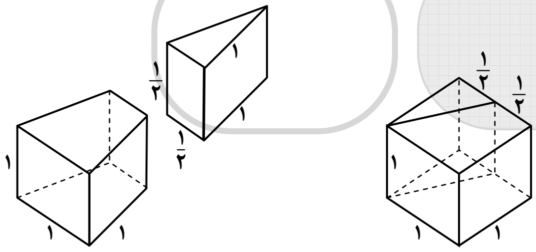
$$S_{\text{کل}} = 4a^2 + 2(a) + (a\sqrt{2}) = (2\sqrt{2} + 4)a^2$$

مثال: قاعده‌ی یک منشور، مثلثی به اضلاع $\sqrt{5}$، ۲ و ۱ واحد و ارتفاع منشور ۱ واحد است. این منشور را به دو جزء چنان تقسیم می‌کنیم که از کنار هم قرار دادن این دو جزء یک مکعب حاصل شود. قطر مکعب کدام است؟

حل:



برای آن‌که مکعب بسازیم اگر از وسط یال دو صفحه‌ای موازی وجه مربع شکل بگذاریم، دو جزء حاصل تشکیل مکعب می‌دهند.



قطر مکعب $a\sqrt{3} = \sqrt{3}$

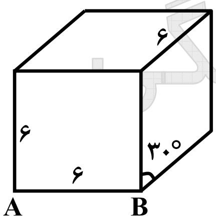
راه حل دوم: چون از این تغییر، حجم تغییر نمی‌کند، پس:

$$a^3 = \left(\frac{1 \times 2}{2}\right) \times 1 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \text{قطر} = a\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

منشور منتظم:

منشور قائمی که قاعده‌های آن دو چندضلعی منتظم باشند، منشور منتظم نامیده می‌شود.

مثال: قاعده‌ی یک منشور مربعی به ضلع ۶ و یک وجه جانبی آن نیز مربع است. اگر یکی از وجوه جانبی دیگر لوزی به زاویه 30° باشد، حجم این منشور کدام است؟



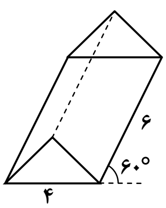
حل:

یال AB بر وجه لوزی شکل عمود است، می‌توان AB را ارتفاع و لوزی را قاعده‌ی منشور اختیار کرد.

$$V = \text{مساحت لوزی} \times AB \ \text{طول} = (6 \times 6 \sin 30^\circ) \times 6 = 108$$

مثال: قاعده‌ی یک منشور مایل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ٤ واحد است. طول یال‌های جانبی منشور ٦ واحد و زاویه‌ی یال‌ها با صفحه‌ی قاعده ٦٠ درجه است. حجم این منشور کدام است؟

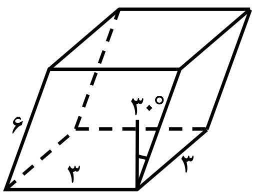
حل:



$$V = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \times 6 \sin 60 = 4\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 36$$

☜مثال: حجم منشور مربع‌القاعده‌ی مایلی که طول ضلع قاعده‌ی آن ۳ و طول یال مایل آن ٦ باشد و همچنین زاویه‌ای که وجه مایل با خط عمودی می‌سازد ۳۰° باشد، چقدر است؟

✍حل:

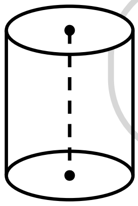


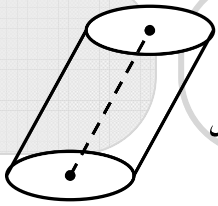
$$V = (۳)^۲ \times ۶\cos ۳۰^\circ = ۲۷\sqrt{۳}$$

استوانه:

استوانه شکلی فضایی شبیه منشور است که قاعده‌های آن به جای چندضلعی، دو دایره‌ی همنهشت هستند. از نظر مفهومی وقتی تعداد اضلاع قاعده‌ی یک منشور منتظم به سمت بی‌نهایت میل کند، منشور به استوانه تبدیل می‌شود.

اگر محور استوانه یعنی پاره‌خطی که مرکزهای دو قاعده را به‌هم وصل می‌کند، بر قاعده عمود باشد، استوانه را قائم و در غیر این‌صورت آن را مایل می‌نامند.


استوانه قائم


استوانه مایل

از دوران یک مستطیل حول یکی از اضلاعش، یک استوانه‌ی قائم پدید می‌آید.

تذکر: در استوانه‌ی قائم، محور استوانه همان ارتفاع استوانه است.

همانند منشور، مساحت رویه‌ای (سطحی) که اطراف استوانه را تشکیل می‌دهد، مساحت جانبی و مجموع مساحت جانبی و مساحت‌های دو قاعده، مساحت کل نامیده می‌شود.

نکته: مساحت جانبی استوانه‌ی قائمی به شعاع قاعده‌ی R و ارتفاع h برابر است با: $۲\pi Rh$ و مساحت کل آن برابر است با: $۲\pi R^۲ + ۲\pi Rh$

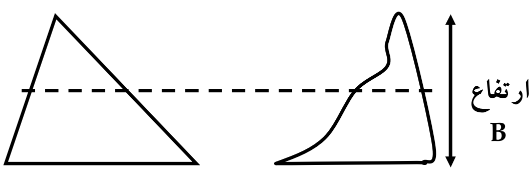
☜مثال: حجم استوانه‌ی دواری به ارتفاع ۳ برابر با: ۱۲π است. مساحت سطح جانبی آن کدام است؟

✍حل:

$$V = \pi r^۲ h = \pi r^۲ \times ۳ = ۱۲\pi \Rightarrow r^۲ = ۴ \Rightarrow r = ۲ \Rightarrow \text{سطح جانبی} = ۲\pi rh = ۲\pi \times ۲ \times ۳ = ۱۲\pi$$

اصل کاوالیری درباره‌ی مساحت‌ها:

فرض کنید قاعده‌های دو شکل بر روی یک خط قرار گرفته باشند، اگر هر خطی موازی قاعده‌های دو شکل در آن‌ها قطعه‌هایی با طول‌های مساوی ایجاد کند، مساحت‌های آن دو شکل برابر است.

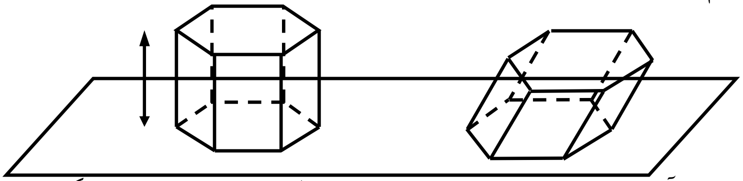


تذکر: از اصل کاوالیری برابر بودن قاعده‌ها و ارتفاع‌ها نیز نتیجه می‌شود.

اصل کاوالیری درباره حجم‌ها:

دو شکل فضایی و صفحه‌ای که قاعده‌های دو شکل در آن قرار گرفته باشند را در نظر بگیرید. اگر هر صفحه‌ای موازی با این صفحه که یکی از این دو شکل را قطع می‌کند، دیگری را نیز قطع کند و سطح مقطع‌های حاصل دارای مساحت‌های برابر باشند، آن‌گاه حجم این دو شکل برابر است.

مثلاً اگر قاعده‌های دو منشور در یک صفحه قرار گرفته و مساحت سطح مقطع‌هایی که از برخورد هر صفحه‌ای موازی با این صفحه حاصل می‌شود، برابر باشند، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم، حجم این دو منشور برابر است. لذا طبق اصل کاوالیری، اگر مساحت قاعده‌های دو منشور هم ارتفاع برابر باشند، حجم آن‌ها برابر خواهد بود.



$V = V'$

مثال: حجم استوانه‌ای که قطر قاعده‌ی آن ٤ سانتی‌متر است، با منشور مربع‌القاعده‌ای برابر است. اگر ارتفاع هر دو ٦ سانتی‌متر باشد، مساحت مربع چقدر است؟ $(\pi = ۳/۱٤)$

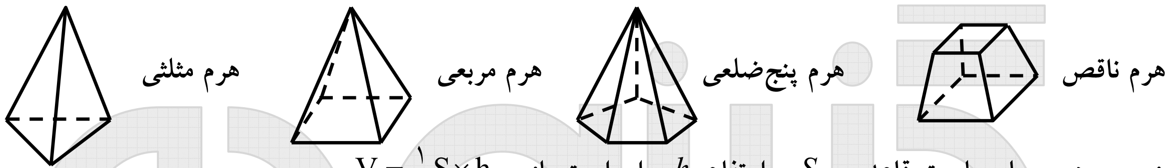
حل: طبق اصل کاوالیری، چون حجم و ارتفاع هر دو با هم برابر است لذا باید مساحت قاعده‌هایشان نیز با هم برابر باشد.

مساحت مربع = مساحت دایره $= \pi(۲)^۲ = ۴\pi = ۱۲/۵۶$

هرم:

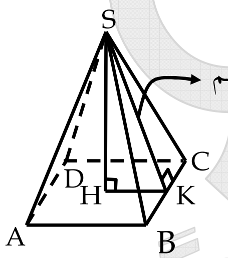
هرم یک چندوجهی است که همه‌ی وجوه آن به‌جز یکی در یک رأس مشترکند.

وجهی از هرم که رأس هرم در آن قرار ندارد، قاعده‌ی هرم و وجه‌های دیگر، وجه‌های جانبی نامیده می‌شوند. وجه‌های جانبی همواره به شکل مثلث هستند. ارتفاع هرم پاره‌خطی است که از رأس هرم بر قاعده‌ی آن عمود می‌شود.



نکته: حجم هرمی با مساحت قاعده‌ی S و ارتفاع h برابر است با: $V = \frac{۱}{۳}S \times h$

هرم منتظم:

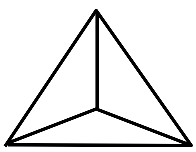


اگر قاعده‌ی یک هرم چندضلعی منتظم باشد و پای ارتفاع آن بر مرکز قاعده منطبق باشد، هرم را منتظم می‌نامند. وجوه جانبی هرم منتظم، مثلث‌های متساوی‌الساقین متساوی هستند. ارتفاع یکی از این مثلث‌ها را سهم سهم هرم منتظم می‌نامند. (برای هرم غیرمنتظم سهم تعریف نمی‌شود.)

$$\text{سهم} = \sqrt{SH^۲ + HK^۲} = \sqrt{SB^۲ - BK^۲}$$

نکاتی در مورد چهاروجهی منتظم (هرم مثلث‌القاعده‌ی منتظم):

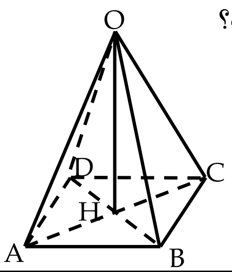
همه‌ی وجه‌های چهاروجهی منتظم، مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. اگر اندازه‌ی هر یال چهاروجهی منتظم a باشد، احکام زیر در مورد آن صحیح است.



۱) چهاروجهی دارای چهار ارتفاع مساوی به اندازه‌ی $\frac{a\sqrt{٦}}{۳}$ است، که از یک نقطه می‌گذرند.

۲) حجم این چهاروجهی $\frac{a^۳\sqrt{۲}}{۱۲}$، مساحت جانبی آن $\frac{۳\sqrt{۳}a^۲}{٤}$ و مساحت کل آن $a^۲\sqrt{۳}$ است.

مثال: حجم هرم منتظم مربع‌القاعده‌ای که ضلع قاعده‌ی آن $۳\sqrt{۲}$ و طول هر یال جانبی آن ٥ است، کدام است؟

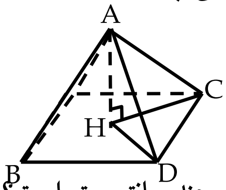


حل:

$$BD = ۳\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} \quad , \quad HB = \frac{۳\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}}{۲} = ۳$$

$$OH^۲ = OB^۲ - HB^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow OH = ۴ \Rightarrow V = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{۳}(۳\sqrt{۲})^۲ \times ۴ = ۲۴$$

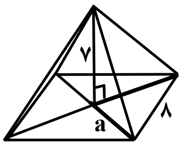
مثال: در یک هرم منتظم مربع‌القاعده، طول ارتفاع برابر نصف قطر قاعده‌ی آن است. زاویه‌ی رأس مثلث‌های جانبی چند درجه است؟



حل:

$$AH = HC = HD \Rightarrow AC = CD = AD \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ$$

مثال: ارتفـاع هرم مربع‌القاعده‌ی منتظمـی ۷ سانتـی‌متر و یک ضلـع قاعده‌اش ۸ سانتـی‌متر است. یال هرم چند سانتـی‌متر است؟



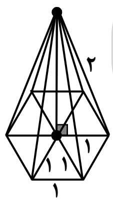
حل:

$$a\sqrt{۲} = ۸ \Rightarrow a = \frac{۸}{\sqrt{۲}} = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow \text{یال} = \sqrt{۷^۲ + (۴\sqrt{۲})^۲} = \sqrt{۴۹ + ۳۲} = \sqrt{۸۱} = ۹\,cm$$

مثال: قاعده‌ی یک هرم منتظم، شش‌ضلعی منتظمی است به ضلع ۱ واحد و طول یال جانبی آن برابر ۲ واحد است. حجم این هرم چند واحد مکعب است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

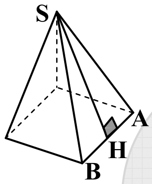
حل:



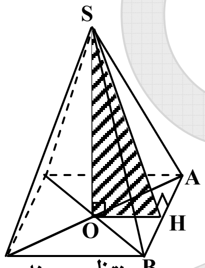
$$h = \sqrt{۲^۲ - ۱^۲} = \sqrt{۳}$$

$$V = \frac{۱}{۳}(۶\frac{(۱)^۲\sqrt{۳}}{۴}) \times \sqrt{۳} = \frac{۳}{۲}$$

مثال: در هرم مربعی منتظم زیر، $SA = \sqrt{۳۴}$ و $SH = ۵$. حجم این هرم کدام است؟



حل:



$SA = \sqrt{۳۴}$, $SH = ۵$

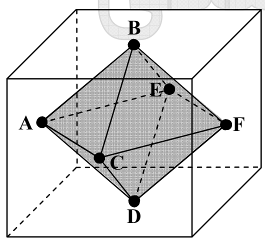
$\overset{\Delta}{SAH}: AH^۲ = SA^۲ - SH^۲ = ۳۴ - ۲۵ = ۹ \Rightarrow AH = ۳$

$\Rightarrow OH = ۳, AB = ۶$

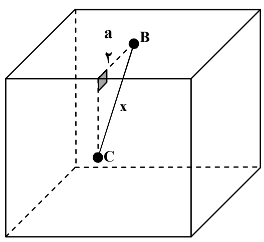
$\overset{\Delta}{SOH}: SO^۲ = SH^۲ - OH^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow SO = ۴$

$\text{حجم هرم}\ V = \frac{۱}{۳}(\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}) = \frac{۱}{۳}(۶)^۲ \times ۴ = ۴۸$

مثال: در یک مکعب، مرکز تقارن هر وجه جانبی، رأس‌های یک هشت‌وجهی منتظم‌اند. حجم این هشت‌وجهی منتظم، چند برابر حجم مکعب است؟ (هشت‌وجهی منتظم: دو هرم چهاروجهی منتظم در قاعده مشترک)



حل: همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌کنید، دو هرم ABCDE و FBCDE از قاعده به هم چسبیده‌اند و یک ۸ وجهی منتظم را به‌وجود آورده‌اند که اندازه‌ی ارتفاع وارد بر قاعده‌ی BCDE در هر کدام از این هرم‌ها نصف طول ضلع مکعب یعنی $\frac{a}{۲}$ است. اما برای پیدا کردن حجم هرم باید مساحت قاعده را نیز پیدا کنیم که با توجه به شکل زیر، هر یک از اضلاع مربع قاعده با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس به‌دست می‌آید:



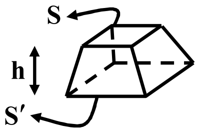
$$x^۲ = \frac{a^۲}{۴} + \frac{a^۲}{۴} \Rightarrow x^۲ = \frac{a^۲}{۲}$$

و چون هشت‌وجهی ایجاد شده منتظم است. پس همه‌ی یال‌های آن با هم برابرند، در نتیجه:

$$V_{\text{هشت‌وجهی}} = ۲V_{ABCDE} = ۲(\frac{۱}{۳}Sh) = \frac{۲}{۳}(x^۲)(\frac{a}{۲}) = \frac{۲}{۳}(\frac{a^۲}{۲})(\frac{a}{۲}) = \frac{a^۳}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{\text{هشت‌وجهی}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{۱}{۶}$$

هرم ناقص منتظم:



چند وجهی‌ای که دو قاعده‌اش دو چندضلعی منتظم و پاره‌خط واصل بین مراکز دو قاعده، ارتفاع آن باشد، هرم ناقص منتظم نامیده می‌شود. وجوه جانبی هرم ناقص منتظم، ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین متساوی هستند و ارتفاع یکی از این ذوزنقه‌ها، سهم هرم ناقص منتظم نامیده می‌شود.

اگر V حجم و S,S' مساحت دو قاعده و h ارتفاع یک هرم ناقص باشد، همواره برای هر نوع هرم ناقص داریم:

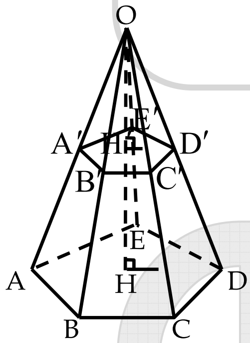
$$V=\frac{۱}{۳}h\left(S+S'+\sqrt{SS'}\right)$$

چند نکته در مورد هرم:

۱) قضیه: مقطع هرم با هر صفحه‌ی موازی با قاعده، یک چندضلعی است که با قاعده متشابه است.

$$A'B'C'D'E' \sim ABCDE$$

۲) قضیه: نسبت مساحت مقطع موازی با قاعده‌ی هرم به مساحت قاعده‌ی هرم برابر است با مربع نسبت فواصل رأس هرم از آن مقطع و قاعده.



اگر هرم با حجم V و سطح قاعده‌ی S را با صفحه‌ای به موازات قاعده قطع کنیم و سطح مقطع به‌دست آمده S' و حجم متناظر با آن V' باشد داریم:

$$\frac{S'}{S}=\left(\frac{OH'}{OH}\right)^{۲}$$

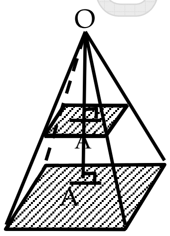
$$\frac{V'}{V}=\left(\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}}\right)^{۳}=\left(\frac{OH'}{OH}\right)^{۳}$$

مثال: هرمی با حجم V را با صفحه‌ای موازی قاعده که از وسط ارتفاع نظیر قاعده‌ی هرم می‌گذرد، قطع می‌دهیم. حجم هرم ناقص چقدر است؟

حل:

$$\frac{V'}{V}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}\Rightarrow V'=\frac{۱}{۸}V\Rightarrow \text{حجم هرم ناقص}=V-V'=\frac{۷}{۸}V$$

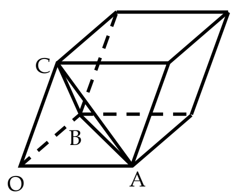
مثال: اگر دو سطح قاعده‌ی یک هرم ناقص به‌ترتیب ۲۷ و ۱۸ سانتی‌متر مربع و ارتفاع هرم اصلی، ۱۲ سانتی‌متر باشد، فاصله‌ی قاعده‌ی کوچکتر از رأس هرم چند سانتی‌متر است؟



حل:

$$\frac{OA'}{۱۲}=\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}}=\frac{\sqrt{۱۸}}{\sqrt{۲۷}}\Rightarrow OA'=۴\sqrt{۶}$$

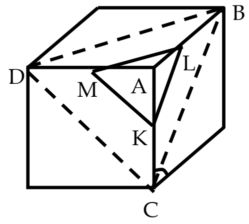
۳) حجم هرمی که طول سه یال همرس آن a، b و c باشد، $\frac{۱}{۶}$ حجم متوازی‌السطوحی است که سه یال همرس آن a، b و c باشد.



$$V_{OABC}=\frac{۱}{۶}\ \text{حجم متوازی‌السطوح}$$

☜مثال: در مکعب شکل مقابل M, L, K وسط‌های سه یال هستند. حجم هرم $AMLK$ چه کسری از حجم کل است؟

✍حل:



$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times S_{ABD} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} S_{\text{مربع}} \times h = \frac{1}{6} \text{ حجم کل}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{V_{AMLK}}{V_{ABCD}} = \left(\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}}\right)^3 \\ ML = \frac{1}{2} BD \Rightarrow S_{\Delta MLK} = \frac{1}{4} S_{\Delta BCD} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{V_{AMLK}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{8}$$

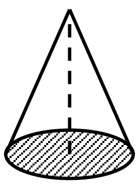
$$\Rightarrow V_{AMLK} = \frac{1}{8} V_{ABCD} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6} \text{ حجم کل}\right) = \frac{1}{48} \text{ حجم کل}$$

مخروط:

مخروط شکلی فضایی شبیه هرم است که قاعده‌ی آن به‌جای چندضلعی، دایره است. از نظر مفهومی اگر تعداد اضلاع قاعده‌ی یک هرم منتظم به سمت بی‌نهایت میل کند، هرم به مخروط تبدیل می‌شود.

پاره‌خطی که رأس مخروط را به مرکز دایره‌ی قاعده وصل می‌کند، محور قاعده نام دارد. اگر محور بر قاعده عمود باشد، مخروط قائم و در غیر این صورت مایل نامیده می‌شود.

از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع قائمش یک مخروط قائم پدید می‌آید. وتر مثلث اصطلاحاً مولد این مخروط قائم نامیده می‌شود.

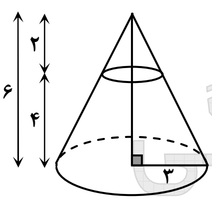


نکته: حجم مخروطی با شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

و مساحت جانبی مخروط قائم با مولدی به طول L برابر است با: $S = \frac{1}{2}$ محیط قاعده × مولد $= \pi r L$

☜ مثال: مخروطی به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ٦ واحد را با صفحه‌ای موازی صفحه قاعده و به فاصله ٤ واحد از آن، قطع می‌دهیم. حجم مخروط جدا شده کدام است؟

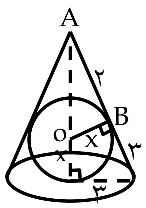
✍ حل:



$$\frac{V}{V_{\text{کل}}} = \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow V = \frac{1}{27} V_{\text{کل}} = \frac{1}{27} \times \frac{1}{3} \pi (3)^2 \times 6 = \frac{2\pi}{3}$$

☜ مثال: در مخروط دواری که شعاع قاعده‌اش ۳ و ارتفاعش ٤ است، کره‌ای محاط کرده‌ایم. شعاع این کره کدام است؟

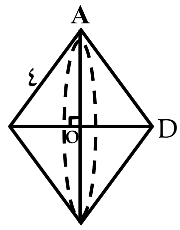
✍ حل:



$$\Delta OAB \text{ در مثلث قائم الزاویه } : OA^2 = OB^2 + AB^2 \Rightarrow (4 - x)^2 = x^2 + 4 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

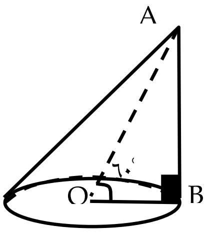
☜ مثال: مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ٤ را حول یکی از ضلع‌هایش دوران می‌دهیم. حجم حاصل چقدر است؟

✍ حل: می‌توان فرض کرد دو مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از ضلع‌هایشان (ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع) دوران کرده و دو مخروط به‌وجود آورده‌اند.



$$a = 4 \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} = AO, DO = \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow V = 2 \times \frac{1}{3} \pi (2\sqrt{3})^2 \times 2 = 16\pi$$

مثال: در شکل مقابل $A\hat{O}B = ۶۰^\circ$ است. اگر $OA = ۴\sqrt{۳}$ باشد، حجم مخروط کدام است؟



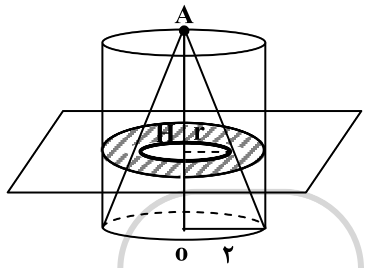
حل:

$$OA = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow h = AB = OA\sin ۶۰^\circ = ۴\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶ \quad , \quad r = OB = OA\cos ۶۰^\circ = ۲\sqrt{۳}$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi\left(۲\sqrt{۳}\right)^۳ \times ۶ = ۲۴\pi$$

مثال: از داخل یک استوانه‌ی قائم به ارتفاع ۵ و شعاع قاعده‌ی ۲ واحد، بزرگ‌ترین مخروط ممکن را خارج کرده‌اند. شکلی که از استوانه باقی‌مانده را با صفحه‌ای موازی قاعده‌ی مخروط به فاصله‌ی ۱ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل کدام است؟

حل:



$$\frac{AH}{AO} = \frac{r}{۲} \Rightarrow \frac{۴}{۵} = \frac{r}{۲} \Rightarrow r = \frac{۸}{۵}$$

$$S_{\text{مقطع}} = \pi(۲)^۲ - \pi(\frac{۸}{۵})^۲ = ۴\pi - \frac{۶۴}{۲۵}\pi = \frac{۳۶\pi}{۲۵} = ۱/۴۴\pi$$

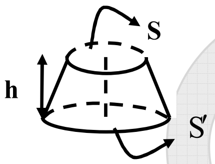
مخروط ناقص قائم:

از دوران ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه حول ساق قائمش، مخروط ناقص قائم پدید می‌آید، ساق مایل ذوزنقه، مولد، ساق قائم، ارتفاع و قاعده‌های ذوزنقه شعاع‌های قاعده‌های مخروط ناقص قائم می‌باشند.

نکته: حجم هر نوع مخروط ناقص قائم با سطح قاعده‌های S', S و ارتفاع h برابر است با: $V = \frac{۱}{۳}h(S + S' + \sqrt{SS'})$

مثال: در مخروط ناقص قائمی، هرم ناقص شش‌پهلویی محاط می‌کنیم. نسبت حجم‌های آن‌ها کدام است؟

حل:



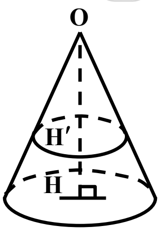
اگر شعاع‌های قاعده‌های مخروط ناقص را R', R و ارتفاع آن را h بگیریم:

مساحت شش‌ضلعی محاط در دایره‌ای به شعاع R $= ۶R \times \frac{R\cos ۳۰^\circ}{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}R^۲$

$V' =$ حجم هرم ناقص و $V =$ حجم مخروط ناقص

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{۱}{۳}h(S + S' + \sqrt{SS'})}{\frac{۱}{۳}h(S_۱ + S_۱' + \sqrt{S_۱S_۱'})} = \frac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}R^۲ + \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}R'^۲ + \frac{۳\sqrt{۳}RR'}{۲}}{\pi R^۲ + \pi R'^۲ + \pi RR'} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲\pi}$$

نکته: نسبت مساحت هر مقطع موازی با قاعده‌ی مخروط به مساحت قاعده‌ی آن برابر است با مربع نسبت فاصله‌های رأس مخروط از آن مقطع و قاعده‌ی مخروط.

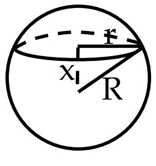


اگر مخروط با حجم V و سطح قاعده‌ی S را با صفحه‌ای به موازات قاعده قطع کنیم، به طوری‌که سطح مقطع به‌دست آمده S' باشد، داریم:

$$\frac{S'}{S} = (\frac{OH'}{OH})^۲ \qquad \frac{V'}{V} = (\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}})^۳ = (\frac{OH'}{OH})^۳$$

کره:

کره مکان هندسی نقاطی از فضا است که از یک نقطه ثابت به نام مرکز به یک فاصله باشند. این فاصله‌ی ثابت را شعاع کره می‌نامند.



هر پاره‌خطی که دو سر آن روی کره باشد را وتر کره می نامند و وتری که از مرکز کره بگذرد را قطر کره می‌نامند. کره یک سطح دوار است که از دوران یک نیم دایره حول قطرش پدید می‌آید. مقطع هر صفحه با کره یک دایره است. اگر فاصله‌ی مرکز کره از صفحه x، و شعاع کره R باشد، شعاع دایره مقطع برابر است با:

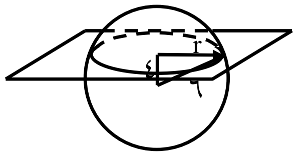
$$r = \sqrt{R^۲ - x^۲}$$

نکته ۱: مکان هندسی نقاطی از فضا که از هر یک از آن‌ها پاره‌خط ثابت AB به زاویه قائمه دیده شود، کره‌ای به قطر AB است.

نکته ۲: حجم کره‌ای به شعاع R برابر است با: $V = \frac{٤}{٣}\pi R^{٣}$

و مساحت آن برابر است با: $S = ٤\pi R^{٢}$

مثال: کره‌ای به شعاع ٦ واحد بر صفحه‌ای مماس است. مساحت مقطع آن با صفحه‌ای به فاصله ۲ واحد از صفحه مماس چقدر است؟



حل:

$$S = \pi r^{۲} = \pi(۶^{۲} - ۴^{۲}) = ۲۰\pi$$

مثال: حجم بزرگ‌ترین مکعب درون یک کره چه نسبتی از حجم آن کره است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲\pi}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳\pi}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴\pi}$ ٤) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳\pi}$

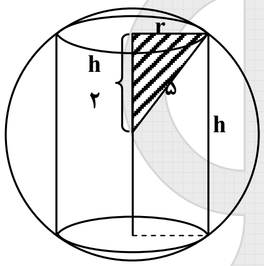
حل:

$$a\sqrt{۳} = ۲R$$

$$\frac{V_{\text{مکعب}}}{V_{\text{کره}}} = \frac{\left(\frac{۲R}{\sqrt{۳}}\right)^{۳}}{\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}} = \frac{\frac{۸}{\cancel{۳}\sqrt{۳}}}{\frac{۴\pi}{\cancel{۳}}} = \frac{۲}{\sqrt{۳}\pi}$$

مثال: در داخل یک کره به شعاع ۵ واحد، استوانه‌ای قائم با سطح جانبی ۴۸π محاط شده است. بیشینه حجم این استوانه چه‌قدر است؟

حل:



شعاع کره $R = ۵$

سطح جانبی استوانه $S = ۲\pi r \times h = ۴۸\pi \Rightarrow rh = ۲۴ \Rightarrow h = \frac{۲۴}{r}$

در مثلث هاشور خورده: $۲۵ = \frac{h^{۲}}{۴} + r^{۲}$

$$\xrightarrow[۲۵=\frac{h^{۲}}{۴}+r^{۲}]{h=\frac{۲۴}{r}} ۲۵ = \frac{(\frac{۲۴}{r})^{۲}}{۴} + r^{۲} \Rightarrow ۲۵ = \frac{(۲۴)^{۲}}{۴r^{۲}} + r^{۲}$$

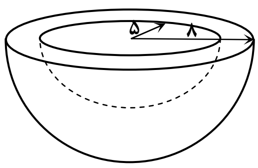
$$\Rightarrow ۲۵ = \frac{۱۴۴}{r^{۲}} + r^{۲} \Rightarrow ۲۵r^{۲} = ۱۴۴ + r^{۴} \Rightarrow (r^{۲})^{۲} - ۲۵r^{۲} + ۱۴۴ = ۰ \Rightarrow r^{۲} = t$$

$$t^{۲} - ۲۵t + ۱۴۴ = ۰ \left\langle \begin{array}{l} t = ۹ \\ t = ۱۶ \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} r^{۲} = ۹, h = ۸ \Rightarrow V = \pi r^{۲}h = \pi \times ۹ \times ۸ = ۷۲\pi \\ r^{۲} = ۱۶, h = ۶ \Rightarrow V = \pi r^{۲}h = \pi \times ۱۶ \times ۶ = ۹۶\pi \end{cases}$$

مثال: ظرفی است به شکل نیم‌کره، به ضخامت یکنواخت ۳ واحد که قطر خارجی دهانه‌ی آن ۱٦ واحد است. سطح کل این ظرف چند برابر π است؟

۱) ۲۰۸ ۲) ۲۱۲ ۳) ۲۱۵ ٤) ۲۱۷

حل:



$$S_{\text{کل}} = \frac{۱}{۲}(۴\pi(۸)^{۲} + ۴\pi(۵)^{۲}) + \pi(۸^{۲} - ۵^{۲}) = ۱۲۸\pi + ۵۰\pi + ۳۹\pi = ۲۱۷\pi$$