
خرید کتاب های کنکور
با تخفیف ویژه
و
ارسال رایگان
Medabook.com
مدابوک
دریافت برنامه ریزی و مشاوره
از مشاوران رتبه برتر
موسسه کنکوری آیدی نوین
۰۲۱ ۲۸۴۲۵۴

درسنامه ۴

محاسبهٔ توان‌های بزرگ در یک ماتریس $(n \geq ۵)$

برای یافتن توان‌های بزرگ یک ماتریس مانند A، معمولاً ماتریس $A^۲$ (در صورت لزوم $A^۳$) را می‌یابیم تا الگویی برای محاسبهٔ A^n به‌دست آید.

مثال
اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{۳۰}-A^{۲۹}$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا ماتریس $A^۲$ را می‌یابیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۲=I \begin{cases} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۱۵}} (A^۲)^{۱۵}=(I)^{۱۵} \Rightarrow A^{۳۰}=I \quad (I) \\ \xrightarrow[\text{طرفین به توان ۱۴}]{} (A^۲)^{۱۴}=(I)^{۱۴} \Rightarrow A^{۲۸}=I \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } A} A^{۲۹}=A \quad (II) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(I)\text{ ، }(II)} A^{۳۰}-A^{۲۹}=I-A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

مثال
اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ و $a_{ij}=\begin{cases} -۲ & i+j=۴ \\ ۰ & i+j\neq۴ \end{cases}$ باشند، آن‌گاه ماتریس $A^{۹۹}$ را به‌دست آورید.

پاسخ: ابتدا ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کرده و سپس $A^۲$ را می‌یابیم:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۲=۴I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۴۹}} (A^۲)^{۴۹}=(۴I)^{۴۹} \Rightarrow A^{۹۸}=۴^{۴۹}I \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } A} A^{۹۹}=۴^{۴۹}A$$

مثال
اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های $A^{۵۰}$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا ماتریس $A^۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس $A^۲$ الگویی به ما نمی‌دهد؛ پس ماتریس $A^۳$ را می‌یابیم:

$$A^۳=A\times A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۳=-I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۱۶}} (A^۳)^{۱۶}=(-I)^{۱۶} \Rightarrow A^{۴۸}=I$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A^۲} A^{۵۰}=A^۲=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های } A^{۵۰}=۰+(-۱)+۱+(-۱)=-۱$$

مثال
اگر $A^۲+A+I=\bar{O}$، آن‌گاه $A^{۳۵}$ را به‌دست آورید.

پاسخ: ابتدا $A^۲$ را می‌یابیم:

$$A^۲+A+I=\bar{O} \Rightarrow A^۲=-A-I \quad (*)$$

ماتریس $A^۲$ الگویی به ما نمی‌دهد؛ پس ماتریس $A^۳$ را می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\text{طرفین } (*) \text{ ضرب در } A} A^۳=-A^۲-A \overset{(*)}{=} -(-A-I)-A=I$$

$$\Rightarrow A^۳=I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۱۱}} A^{۳۳}=I \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A^۲} A^{۳۵}=A^۲=-A-I$$

www.gajmarket.com

درسنامه ۴

مثال اگر $A^2+2A=\bar{O}$ آن‌گاه A^9 را بیابید.

پاسخ: $A^2+2A=\bar{O} \Rightarrow A^2=(-2)^1A \quad (I)$

برای یافتن الگوی مناسب، ماتریس A^3 را نیز می‌یابیم.

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین (I) در A}} A^3=-2A^2 \overset{(I)}{=} -2(-2A)=(-2)^2A \Rightarrow A^3=(-2)^2A \quad (II)$$

$$(I),(II) \Rightarrow A^9=(-2)^8A=2^8A$$

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های A^{20} را محاسبه کنید.

پاسخ: ابتدا ماتریس A^2 را می‌یابیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&2&2\\0&0&0&0\\2&2&2&2\\0&0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow A^2=2^1A \quad (I)$$

برای یافتن الگوی مناسب، ماتریس A^3 را نیز می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\text{طرفین (I) ضرب در A}} A^3=2A^2 \overset{(I)}{=} 2(2A)=2^2A \Rightarrow A^3=2^2A \quad (II)$$

$$\Rightarrow (I),(II) \Rightarrow A^{20}=2^{19}A$$

$$\Rightarrow (A^{20}\ \text{مجموع درایه‌های}) = [(2^{19}A)\ \text{مجموع درایه‌های}] = 2^{19}\times(A\ \text{مجموع درایه‌های}) = 2^{19}\times 8 = 2^{19}\times 2^3 = 2^{22}$$

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریس A^{50} را بیابید.

پاسخ: ابتدا ماتریس A^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^{1}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix} \quad , \quad A^{2}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

برای یافتن الگوی مناسب، ماتریس A^3 را نیز می‌یابیم:

$$A^{3}=A\times A^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$$

با مقایسهٔ ماتریس‌های A^1، A^2 و A^3 نتیجه می‌گیریم که فقط درایهٔ سطر اول و ستون دوم در آن‌ها تغییر می‌کند. به این‌صورت که مقدار آن همواره با توان ماتریس برابر است. پس:

$$A^{50}=\begin{bmatrix}1&50\\0&1\end{bmatrix}$$

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه ماتریس A^{1397} را بیابید.

پاسخ: برای یافتن الگوی مناسب، ماتریس‌های A^2 و A^3 را می‌یابیم:

$$A^{1}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix} \quad , \quad A^{2}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\2&-1\end{bmatrix} \quad , \quad A^{3}=A\times A^2=\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-3\\3&-2\end{bmatrix}$$

با مقایسهٔ ماتریس‌های A^1، A^2 و A^3 نتیجه می‌گیریم که درایهٔ سطر اول و ستون اول آن‌ها یک واحد از توان بیش‌تر و درایهٔ سطر اول و ستون دوم آن‌ها قرینهٔ توان و ... می‌باشد. پس:

$$A^n=\begin{bmatrix}n+1&-n\\n&1-n\end{bmatrix} \Rightarrow A^{1397}=\begin{bmatrix}1398&-1397\\1397&-1396\end{bmatrix}$$

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های سطر اول A^{10} را به‌دست آورید.

www.gajmarket.com

درسنامه ۴

پاسخ: برای یافتن الگوی مناسب، ماتریس‌های A^2 و A^3 را می‌یابیم:

$$A=\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad A^2=\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&6&6\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad A^3=A\times A^2=\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&6&6\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&9&9\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

با مقایسهٔ سطر اول ماتریس‌های A^1، A^2 و A^3 نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}&A^1 \text{ سطر اول } =\begin{bmatrix}1&3\times1&3\times1\end{bmatrix}\\&A^2 \text{ سطر اول } =\begin{bmatrix}1&3\times2&3\times2\end{bmatrix}\\&A^3 \text{ سطر اول } =\begin{bmatrix}1&3\times3&3\times3\end{bmatrix}\\&\qquad\vdots\\&A^{10} \text{ سطر اول } =\begin{bmatrix}1&3\times10&3\times10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&30&30\end{bmatrix}\end{aligned}$$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر اول A^{10} برابر است با: $1+30+30=61$

محاسبهٔ توان n ام برخی از ماتریس های خاص

مثال ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

آ) ماتریس‌های A^2 و A^3 را بیابید.

ب) قانونی برای محاسبهٔ A^n بیان کنید.

پاسخ: آ)

$$A=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2&0&0\\0&b^2&0\\0&0&c^2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3=A\times A^2=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a^2&0&0\\0&b^2&0\\0&0&c^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^3&0&0\\0&b^3&0\\0&0&c^3\end{bmatrix}$$

ب) برای به توان رساندن یک ماتریس قطری، کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان برسانیم و بقیهٔ درایه‌ها را عیناً بنویسیم. یعنی:

$$\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a^n&0&0\\0&b^n&0\\0&0&c^n\end{bmatrix}$$

مثال ماتریس $A=\begin{bmatrix}0&0&k\\0&k&0\\k&0&0\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

آ) ماتریس‌های A^2 و A^3 را بیابید.

ب) برای محاسبهٔ A^n قانونی بیان کنید.

پاسخ: آ)

$$A=\begin{bmatrix}0&0&k\\0&k&0\\k&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}0&0&k\\0&k&0\\k&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&k\\0&k&0\\k&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k^2&0&0\\0&k^2&0\\0&0&k^2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3=A\times A^2=\begin{bmatrix}0&0&k\\0&k&0\\k&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k^2&0&0\\0&k^2&0\\0&0&k^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&k^3\\0&k^3&0\\k^3&0&0\end{bmatrix}$$

ب) برای محاسبهٔ توان nاُم داریم:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&k\\0&k&0\\k&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{cases}\begin{bmatrix}k^n&0&0\\0&k^n&0\\0&0&k^n\end{bmatrix} & n \text{ زوج}\\[2ex]\begin{bmatrix}0&0&k^n\\0&k^n&0\\k^n&0&0\end{bmatrix} & n \text{ فرد}\end{cases}$$

www.gajmarket.com

سـؤالات امتـحـانی

۴۱. اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ باشد، A^{11} را بیابید.

۴۲. اگر $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{7}-A^{4}$ را بیابید.

۴۳. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ ماتریس A^{10}

۴۴. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ باشد، در ماتریس A^{100} مجموع درایه‌ها را بیابید.

۴۵. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه A^{13} را بیابید.

۴۶. اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه A^{50} را بیابید.

۴۷. اگر $A^{2}-\frac{1}{2}A=\bar{O}$ آن‌گاه A^{8} را بیابید.

۴۸. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه ماتریس A^{13} را محاسبه کنید.

۴۹. اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه A^{9} را بیابید.

۵۰. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ و $BA^{n}=\begin{bmatrix}4 & 41\\ 3 & 32\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه n را به‌دست آورید.

۵۱. اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ و $a_{ij}=\begin{cases}1 & i\leq j\\ 0 & i>j\end{cases}$ باشد، در ماتریس A^{20} درایه‌های ستون دوم را بیابید.

۵۲. اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{10} را بیابید.

۵۳. اگر A ماتریس مربعی و $A^{2}=\bar{O}$ باشد، حاصل $(A+2I)^{3}$ را بیابید.

۵۴. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ ، ماتریس $A^{8}-A^{7}$ را بیابید.

۵۵. ماتریس $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ مفروض است.

آ) ماتریس A^{3} را به‌دست آورید.

ب) برای محاسبهٔ A^{n} قانونی بیان کنید.

۵۶. اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{10} را محاسبه کنید.

www.gajmarket.com

پاسخ‌های تشریحی

۴۱ ابتدا ماتریس A^2 را می‌یابیم.

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2=-I\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۵}}(A^2)^5=(-I)^5\Rightarrow A^{10}=-I$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } A}A^{11}=-A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

---

۴۲ ابتدا ماتریس A^2 را می‌یابیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A^2=I\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}}(A^2)^3=(I)^3\Rightarrow A^6=I\xrightarrow{\times A}A^7=A\\ A^2=I\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}(A^2)^2=(I)^2\Rightarrow A^4=I\end{cases}$$

$$A^7-A^4=A-I=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\3&-3\end{bmatrix}$$

۴۳

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-2\\-3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0\\0&-2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=-2I\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۱۰}}A^{10}=(-2I)^{10}=2^{10}I$$

---

۴۴ ابتدا ماتریس A^2 را می‌یابیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}$$

ماتریس A^2 الگویی به ما نمی‌دهد. پس ماتریس A^3 را نیز می‌یابیم:

$$A^3=A\times A^2=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3=-I\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳۳}}(A^3)^{33}=(-I)^{33}\Rightarrow A^{99}=-I$$

$$\xrightarrow{\times A}A^{100}=-A=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌ها در ماتریس A^{100} برابر است با: $-1-1+1+0=-1$

---

۴۵ ابتدا ماتریس A^2 را می‌یابیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-2\sqrt{3}\\2\sqrt{3}&-2\end{bmatrix}$$

ماتریس A^2 الگویی به ما نمی‌دهد، پس ماتریس A^3 را نیز می‌یابیم:

$$\Rightarrow A^3=A\times A^2=\begin{bmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-2\sqrt{3}\\2\sqrt{3}&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&0\\0&-8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3=-8I\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۴}}(A^3)^4=(-8I)^4$$

$$\Rightarrow A^{12}=8^4I\xrightarrow{\times A}A^{13}=8^4A$$

---

۴۶ ابتدا A^2 را می‌یابیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2=A\quad(I)$$

برای یافتن الگوی مناسب، A^3 را نیز می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\text{طرفین (I) ضرب در } A}A^3=A^2\overset{(I)}{=}A\Rightarrow A^3=A\qquad(II)$$

$$(I),(II)\Rightarrow A^{50}=A$$

۴۷

$$A^2-\frac{1}{2}A=\bar{O}\Rightarrow A^2=(\frac{1}{2})^1A\qquad(I)$$

برای یافتن الگوی مناسب، A^3 را نیز می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین (I) در } A}A^3=\frac{1}{2}A^2\overset{(I)}{=}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}A)=(\frac{1}{2})^2A$$

$$\Rightarrow A^3=(\frac{1}{2})^2A\quad(II)$$

$$(I),(II)\Rightarrow A^8=(\frac{1}{2})^7A$$

---

۴۸ ابتدا ماتریس A^2 را می‌یابیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-3&3\\-3&3&-3\\3&-3&3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2=3^1A\quad(I)$$

برای یافتن الگوی مناسب، A^3 را نیز می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین (I) در } A}A^3=3A^2\overset{(I)}{=}3(3A)=3^2A$$

$$\Rightarrow A^3=3^2A\quad(II)$$

$$(I),(II)\Rightarrow A^{13}=3^{12}A$$

---

۴۹ ابتدا ماتریس A^2 را می‌یابیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2=(-3)^1A\qquad(I)$$

برای یافتن الگوی مناسب، A^3 را نیز می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین (I) در } A}A^3=-3A^2\overset{(I)}{=}-3(-3A)=(-3)^2A$$

$$\Rightarrow A^3=(-3)^2A\qquad(II)$$

$$(I),(II)\Rightarrow A^9=(-3)^8A$$

www.gajmarket.com

۵۰ ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را می‌یابیم:

$$A^{۱}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix},\ \Rightarrow A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

برای یافتن الگوی مناسب، $A^{۳}$ را نیز می‌یابیم:

$$\Rightarrow A^{۳}=A\times A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

با مقایسهٔ ماتریس‌های A، $A^{۲}$ و $A^{۳}$ نتیجه می‌گیریم:

$$A^{n}=\begin{bmatrix}۱ & n\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

حال ماتریس BA^{n} را محاسبه می‌کنیم:

$$BA^{n}=\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & n\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۴n+۱\\ ۳ & ۳n+۲\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}}\begin{bmatrix}۴ & ۴n+۱\\ ۳ & ۳n+۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۴۱\\ ۳ & ۳۲\end{bmatrix}\Rightarrow ۴n+۱=۴۱\Rightarrow n=۱۰$$

---

۵۱ ابتدا ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}_{۳\times ۳}$$

برای یافتن الگوی مناسب باید ماتریس‌های $A^{۲}$ و $A^{۳}$ را بیابیم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۲\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=A\times A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۲\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۶\\ ۰ & ۱ & ۳\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

با مقایسهٔ ستون دوم ماتریس‌های A، $A^{۲}$ و $A^{۳}$ نتیجه می‌گیریم ستون دوم $A^{۲۰}$ به‌صورت $\begin{bmatrix}۲۰\\ ۱\\ ۰\end{bmatrix}$ می‌باشد.

---

۵۲ برای یافتن الگوی مناسب باید ماتریس‌های $A^{۲}$ و $A^{۳}$ را بیابیم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۳\\ ۰ & ۰ & ۴\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۳\\ ۰ & ۰ & ۴\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۴\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{۳}=A\times A^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۳\\ ۰ & ۰ & ۴\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۴\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{۳}=\bar{O}\xrightarrow{\times A}A^{۴}=\bar{O}\Rightarrow\ldots\Rightarrow A^{۱۰}=\bar{O}$$

۵۳

$$A^{۲}=\bar{O}\quad(I)$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین (I) در } A}A^{۳}=\bar{O}\quad(II)$$

از آن‌جا که $AI=IA$، پس برای دو ماتریس A و I اتحادهای جبری برقرار است و داریم:

$$(A+۲I)^{۳}=A^{۳}+۶A^{۲}+۱۲A+۸I$$

$$\overset{(I),(II)}{=}\bar{O}+\bar{O}+۱۲A+۸I=۱۲A+۸I$$

---

۵۴ **روش اول:** ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را می‌یابیم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

$$\begin{cases}A^{۲}=I\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۴}}(A^{۲})^{۴}=I^{۴}\Rightarrow A^{۸}=I\\ A^{۲}=I\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}}(A^{۲})^{۳}=I^{۳}\Rightarrow A^{۶}=I\xrightarrow{\times A}A^{۷}=A\end{cases}$$

$$\Rightarrow A^{۸}-A^{۷}=I-A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

روش دوم: A یک ماتریس قطری است. پس برای به توان رساندن آن کافی است درایه‌های قطر اصلی را به توان برسانیم و بقیهٔ درایه‌ها را نیز بدون تغییر بنویسیم:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}A^{۸}=\begin{bmatrix}۱^{۸} & ۰\\ ۰ & (-۱)^{۸}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\\ A^{۷}=\begin{bmatrix}۱^{۷} & ۰\\ ۰ & (-۱)^{۷}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\Rightarrow A^{۸}-A^{۷}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

---

۵۵ آ) ابتدا ماتریس $A^{۲}$ و سپس $A^{۳}$ را می‌یابیم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۹ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲^{۲} & ۰ & ۰\\ ۰ & (-۳)^{۲} & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱^{۲}\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۹ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۲۷ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲^{۳} & ۰ & ۰\\ ۰ & (-۳)^{۳} & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱^{۳}\end{bmatrix}$$

ب) برای به توان رساندن یک ماتریس قطری، کافی است درایه‌های قطر اصلی را به توان برسانیم و بقیهٔ درایه‌ها را بدون تغییر بنویسیم.

$$A=\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ ۰ & b & ۰\\ ۰ & ۰ & c\end{bmatrix}\Rightarrow A^{n}=\begin{bmatrix}a^{n} & ۰ & ۰\\ ۰ & b^{n} & ۰\\ ۰ & ۰ & c^{n}\end{bmatrix}$$

---

۵۶ **روش اول:** ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را می‌یابیم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{۲}=۴I\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۵}}(A^{۲})^{۵}=(۴I)^{۵}\Rightarrow A^{۱۰}=۴^{۵}I=۲^{۱۰}I$$

روش دوم: می‌دانیم:

$$A=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & k\\ ۰ & k & ۰\\ k & ۰ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow A^{n}=\begin{cases}\begin{bmatrix}k^{n} & ۰ & ۰\\ ۰ & k^{n} & ۰\\ ۰ & ۰ & k^{n}\end{bmatrix} & \text{زوج } n\\ \begin{bmatrix}۰ & ۰ & k^{n}\\ ۰ & k^{n} & ۰\\ k^{n} & ۰ & ۰\end{bmatrix} & \text{فرد } n\end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{زوج } n}A^{۱۰}=\begin{bmatrix}۲^{۱۰} & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲^{۱۰} & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲^{۱۰}\end{bmatrix}=۲^{۱۰}I$$

www.gajmarket.com