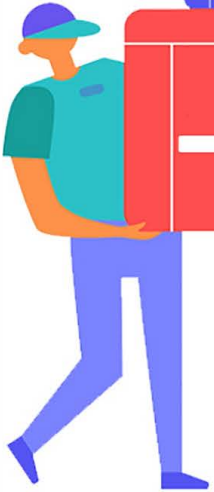


خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و ارسال رایگان

Medabook.com



مدابوک



دریافت برنامه ریزی و مشاوره

از مشاوران رتبه برتر

هوش کنکوری آیدی نوین

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۴



درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

۱ ماتریسی 2×3 مثال بنزید که درایه‌های آن اعداد صحیح باشند و هر درایه از تمام درایه‌های سمت راست و پایین خود بزرگ‌تر باشد.

پاسخ

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

۲ اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ ماتریسی 3×4 باشد به طوری که برای $i = j$ داشته باشیم $a_{ij} = 7$ و برای $i > j$ داشته باشیم $a_{ij} = i + j$ و برای $i < j$ داشته باشیم $a_{ij} = i^2$.

(تمرین صفحه ۲۰ کتاب درسی)

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1^2 & 1^2 & 1^2 \\ 2+1 & 7 & 2^2 & 2^2 \\ 3+1 & 3+2 & 7 & 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

پاسخ

۳ ماتریس‌های زیر را به فرم آرایش مستطیلی بنویسید.

الف $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$, $a_{ij} = i^2 - j$

ب $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$, $b_{ij} = i - 2ij$

الف $A = \begin{bmatrix} 1^2 - 1 & 1^2 - 2 \\ 2^2 - 1 & 2^2 - 2 \\ 3^2 - 1 & 3^2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

ب $B = \begin{bmatrix} 1 - 2 \times 1 \times 1 & 1 - 2 \times 1 \times 2 & 1 - 2 \times 1 \times 3 \\ 2 - 2 \times 2 \times 1 & 2 - 2 \times 2 \times 2 & 2 - 2 \times 2 \times 3 \\ 3 - 2 \times 3 \times 1 & 3 - 2 \times 3 \times 2 & 3 - 2 \times 3 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -2 & -6 & -10 \\ -3 & -9 & -15 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

پاسخ

پ $C = [c_{ij}]_{2 \times 2}$, $c_{ij} = 2ij$

ت $D = [d_{ij}]_{3 \times 3}$, $d_{ij} = i(i + j)j^2$

پ $C = \begin{bmatrix} 2 \times 1 \times 1 & 2 \times 1 \times 2 \\ 2 \times 2 \times 1 & 2 \times 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

ت $D = \begin{bmatrix} 1(1+1)1 & 1(1+2)4 & 1(1+3)9 \\ 2(2+1)1 & 2(2+2)4 & 2(2+3)9 \\ 3(3+1)1 & 3(3+2)4 & 3(3+3)9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 & 36 \\ 6 & 32 & 90 \\ 12 & 60 & 162 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

پاسخ

۴ ماتریس‌های زیر را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

الف $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$, $a_{ij} = \begin{cases} 2 & i < j \\ 0 & i = j \\ -2 & i > j \end{cases}$

ب $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$, $b_{ij} = \begin{cases} i^2 - j & i < j \\ j^2 & i = j \\ i^2 + j^2 & i > j \end{cases}$

پ $C = [c_{ij}]_{2 \times 2}$, $c_{ij} = \begin{cases} 2i - 3j & i \leq j \\ -4j & i > j \end{cases}$

الف $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

ب $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 10 & 13 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

پ $C = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -7 \\ -4 & -2 & -5 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

پاسخ

۵ کدامیک از جملات زیر درست و کدامیک نادرست است؟

ب هر ماتریس مربعی، یک ماتریس قطری است.

الف هر ماتریس قطری، یک ماتریس اسکالر است.

ت ماتریس صفر، یک ماتریس اسکالر، قطری و مربعی است.

پ ماتریس همانی، یک ماتریس اسکالر است.

ب نادرست؛ زیرا $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ مربعی است ولی قطری نیست.

الف نادرست، زیرا $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ قطری است ولی اسکالر نیست.

پاسخ

پ درست

ت نادرست؛ زیرا $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ یک ماتریس صفر است ولی قطری، مربعی یا اسکالر نیست.

۶ الف ماتریسی مربعی از مرتبه ۳ مثال بنزید به طوری که قطر اصلی و فرعی آن با هم برابر و بقیه درایه‌های آن صفر باشند.

قطر اصلی قطر فرعی

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

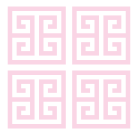
پاسخ

ب یک ماتریس قطری از مرتبه ۳ مثال بنزید.

در ماتریس‌های قطری، همه درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی برابر صفر هستند.

پاسخ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$



۷ ماتریسی اسکالر مثال بزنید که مرتبه آن ۳ و درایه سطر آخر و ستون آخر آن ۲- باشد.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

دقت کنید که در ماتریس اسکالر، درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابرند.

۸ مجموع درایه‌های ماتریس اسکالر A از مرتبه ۴ برابر ۲۴ است. این ماتریس را مشخص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} \Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

(تمرین صفحه ۲۰ کتاب درسی)

۹ اگر $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A=B$ ، در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ 2x+y=5 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow x+y+z=2+1+(-2)=1$$

۱۰ ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ab & 4 \\ 3 & a+b \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ با هم برابرند. مقادیر $a^2 + b^2$ و $a^3 + b^3$ را بیابید.

دو ماتریس هم‌مرتبه زمانی با هم برابرند که درایه‌های نظیر به نظیر آنها با هم برابر باشند، پس $ab=1$ و $a+b=4$.

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 4^2 - 2(1) = 14, \quad a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3(ab)(a+b) = 4^3 - 3(1)(4) = 64 - 12 = 52$$

۱۱ دو ماتریس مربعی از مرتبه ۲ مثال بزنید و برای آنها نشان دهید: $A+B=B+A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A+B = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+1 \\ 3+5 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \\ B+A = \begin{bmatrix} 0+1 & 1+2 \\ 5+3 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A+B=B+A$$

۱۲ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 4 & 2-y \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1-y & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ باشد. می‌دانیم درایه سطر اول و ستون اول ماتریس $A+B$ برابر ۳ و درایه سطر دوم و ستون دوم ماتریس $A-B$ برابر ۱- است. ماتریس‌های A و B را مشخص کنید.

$$A+B = \begin{bmatrix} x-y+1 & 6 \\ 9 & 1-y \end{bmatrix}, A-B = \begin{bmatrix} x+y-1 & 0 \\ -1 & 3-y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-y+1=3 \\ 3-y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

(کاردرکلاس صفحه ۱۷ کتاب درسی)

۱۳ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و دو عدد حقیقی $r=3$ و $s=-2$ مفروض‌اند.

$$\left. \begin{aligned} (r+s)A &= (3+(-2)) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ rA + sA &= 3A + (-2)A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (r+s)A = rA + sA$$

۱۴ در حالت کلی رابطه قسمت (الف) را ثابت کنید.

فرض کنیم $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $m \times n$ باشد و r و s دو عدد حقیقی دلخواه باشند، آنگاه:

$$(r+s)A = (r+s)[a_{ij}] = [(r+s)a_{ij}] = [ra_{ij} + sa_{ij}] = [ra_{ij}] + [sa_{ij}] = r[a_{ij}] + s[a_{ij}] = rA + sA$$

۱۴ اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{r \times r}$ ، $a_{ij} = i^2 - j$ و $B = [b_{ij}]_{r \times r}$ ، $b_{ij} = \begin{cases} -1 & i \leq j \\ 3 & i > j \end{cases}$ باشد، حاصل عبارات مقابل را به دست آورید. $2A - 3B$ ، $(A+B) + (A-B)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1^2-1 & 1^2-2 \\ 2^2-1 & 2^2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad 2A - 3B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, A-B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow (A+B) + (A-B) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

۱۵ برای دو ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ و عدد حقیقی r ثابت کنید: $r(A+B) = rA + rB$.

$$r(A+B) = r([a_{ij}] + [b_{ij}]) = r([a_{ij} + b_{ij}]) = [r(a_{ij} + b_{ij})] = [ra_{ij} + rb_{ij}] = [ra_{ij}] + [rb_{ij}] = rA + rB$$



۱۶ اگر A ماتریسی ۳×۵ باشد در این صورت در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید که $A \times B$ و $B \times A$ قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبه آن را بیابید.

(کاردرکلاس صفحه ۱۹ کتاب درسی)

الف $B = [b_{ij}]_{۳ \times ۲}$

تعریف نمی‌شود. $A_{۳ \times ۵} \times B_{۳ \times ۲} \Rightarrow$

تعریف نمی‌شود. $B_{۳ \times ۲} \times A_{۳ \times ۵} \Rightarrow$

ب $B = [b_{ij}]_{۳ \times ۵}$

تعریف نمی‌شود. $A_{۳ \times ۵} \times B_{۳ \times ۵} \Rightarrow$

تعریف نمی‌شود. $B_{۳ \times ۵} \times A_{۳ \times ۵} \Rightarrow$

پ $B = [b_{ij}]_{۵ \times ۳}$

تعریف می‌شود؛ مرتبه ماتریس حاصل ضرب ۳×۳ است. $A_{۳ \times ۵} \times B_{۵ \times ۳} \Rightarrow$

تعریف می‌شود و مرتبه ماتریس حاصل ضرب ۵×۵ است. $B_{۵ \times ۳} \times A_{۳ \times ۵} \Rightarrow$

ت $B = [b_{ij}]_{۵ \times ۴}$

تعریف می‌شود؛ مرتبه ماتریس حاصل ضرب ۳×۴ است. $A_{۳ \times ۵} \times B_{۵ \times ۴} \Rightarrow$

تعریف نمی‌شود. $B_{۵ \times ۴} \times A_{۳ \times ۵} \Rightarrow$

ث $B = [b_{ij}]_{۵ \times ۵}$

تعریف می‌شود و مرتبه ماتریس حاصل ضرب ۳×۵ است. $A_{۳ \times ۵} \times B_{۵ \times ۵} \Rightarrow$

تعریف نمی‌شود. $B_{۵ \times ۵} \times A_{۳ \times ۵} \Rightarrow$

۱۷ اگر $A = [a_{ij}]_{۳ \times ۲}$ و $B = [b_{ij}]_{۲ \times ۲}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه‌هایشان نوشته و سپس $A \times B$ و $B \times A$ را به دست آورید.

(تمرین صفحه ۲۱ کتاب درسی)

$$a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases}, \quad b_{ij} = \begin{cases} i^2 + 1 & i = j \\ i + j & i > j \\ i - j + 2 & i < j \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1^2 - 1 & 2 - 1 \\ 2 - 1 & 2^2 - 1 \\ 3 - 1 & 3 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1^2 + 1 & 1 - 2 + 2 & 1 - 3 + 2 \\ 2 + 1 & 2^2 + 1 & 2 - 3 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 11 & 16 & 3 \\ 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 13 & 19 \end{bmatrix}$$

۱۸ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد. در این صورت حاصل $(A \times B)$ و $(B \times A)$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

(کاردرکلاس صفحه ۱۹ کتاب درسی)

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -14 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم که $A \times B \neq B \times A$ و این یعنی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

۱۹ اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = A \times B$ باشد، آنگاه حاصل $c_{۲۳}$ کدام است؟

$$c_{۲۳} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = (5 \times 4) + (2 \times 1) = 22$$

$c_{۲۳}$ از ضرب سطر دوم ماتریس A در ستون سوم ماتریس B به دست می‌آید.

۲۰ علی ۳ کتاب داستان، ۲ کتاب تاریخی و ۵ کتاب مذهبی خرید. قیمت هر کتاب داستان ۱۵۰ ریال، هر کتاب تاریخی ۲۰۰ ریال و هر کتاب مذهبی ۱۰۰ ریال است. این اطلاعات را با ماتریس‌های سطری و ستونی A و B نشان داده و سپس ماتریس $A \times B$ را حساب و آن را تفسیر کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ماتریس مربوط به قیمت کتاب‌ها، B : ماتریس مربوط به تعداد کتاب‌ها، A :

$$A \times B = (3 \times 150) + (2 \times 200) + (5 \times 100) = 1350$$

ماتریس $A \times B$ یک ماتریس 1×1 که همان عدد است، می‌باشد و بیانگر کل مبلغی است که علی برای خرید این کتاب‌ها پرداخته است.



۲۱ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض اند، مطلوب است:

الف $2AB$

$$2AB = (2A)B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 14 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

پاسخ

ب $(A+B)(A-B)$

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A-B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} -16 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ

ج $A^T + B^T$

$$\left. \begin{aligned} A^T &= A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\ B^T &= B \times B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A^T + B^T = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

پاسخ

د $3A^T \times 2B$

$$\left. \begin{aligned} A^T &= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow 3A^T = \begin{bmatrix} 3 & 18 \\ -6 & -9 \end{bmatrix} \\ 2B &= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3A^T \times 2B = \begin{bmatrix} 3 & 18 \\ -6 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 108 & 48 \\ -54 & -42 \end{bmatrix}$$

پاسخ

ه $2AI$

$$2AI = (2A)I = 2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

پاسخ

و $(A+I)(B-I)(AB-I)$

$$A+I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B-I = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, AB-I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

پاسخ

$$(A+I)(B-I)(AB-I) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 24 \\ 32 & 34 \end{bmatrix}$$

(کاردرکلاس صفحه ۱۹ کتاب درسی)

۲۲ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ثابت کنید:

الف $A \times (B+C) = (A \times B) + (A \times C)$

$$\left. \begin{aligned} B+C &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times (B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -3 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \\ A \times B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, A \times C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -2 & -3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow (A \times B) + (A \times C) = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -3 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \times (B+C) = (A \times B) + (A \times C)$$

پاسخ

ب $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

$$\left. \begin{aligned} B \times C &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times (B \times C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ -3 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \\ A \times B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow (A \times B) \times C = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ -3 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

پاسخ



۲۳ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(A-I)^2$ را بیابید.

پاسخ

$$A-I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A-I)^2 = (A-I)(A-I) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

۲۴ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(A+3I)(A-4I)$ را به دست آورید.

پاسخ

$$\left. \begin{aligned} A+3I &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \\ A-4I &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (A+3I)(A-4I) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

۲۵ اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A+A^2+A^3+A^4$ را به دست آورید.

پاسخ

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}, A^4 = \bar{O}$$

$$\Rightarrow A+A^2+A^3+A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \bar{O} + \bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(تمرین صفحه ۲۱ کتاب درسی)

۲۶ اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A \times B$ ماتریسی قطری باشد.

پاسخ

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -8+2a=0 \Rightarrow a=4 \\ b-3=0 \Rightarrow b=3 \end{cases} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

۲۷ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس B را طوری بیابید که $AB = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

پاسخ

با توجه به اندازه ماتریس‌ها، ماتریس B باید از مرتبه 3×1 باشد، بنابراین اگر $B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه:

$$AB = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a-3b=8 \\ 5a+b=3 \\ a+0=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

۲۸ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 1 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -6 & a_{22} \end{bmatrix}$ باشد، مقدار m و ماتریس A^2 را به دست آورید.

پاسخ

$$A^2 = A \times A \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-m & -2 \\ 2m & -m+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -6 & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow 2m = -6 \Rightarrow m = -3 \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

۲۹ اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A + \beta I$ باشد، مقادیر α و β را به دست آورید.

پاسخ

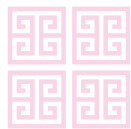
$$\left. \begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} \\ \alpha A + \beta I &= \begin{bmatrix} -2\alpha & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha + \beta & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha + \beta \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha + \beta & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha + \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta = 9 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Rightarrow \beta = 13$$

(تمرین صفحه ۲۰ کتاب درسی)

۳۰ دو ماتریس 3×3 مانند A و B مثال بزنید که $A \neq \bar{O}$ و $B \neq \bar{O}$ ولی $AB = \bar{O}$.

پاسخ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \bar{O}, B = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \bar{O} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$



(کاردرکلاس صفحه ۱۷ کتاب درسی)

۳۱ یک ماتریس سطری 1×3 مانند A و یک ماتریس ستونی 3×1 مانند B طوری تعریف کنید که: $A \times B = -7$.

$$A = [1 \ 2 \ 1], B = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = [1 \ 2 \ 1] \times \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = (1 \times (-1)) + (2 \times (-2)) + (1 \times (-2)) = -7$$

۳۲ با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلی از تساوی $AB = AC$ نمی‌توان

(تمرین صفحه ۲۰ کتاب درسی)

نتیجه گرفت $B = C$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A \times C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = A \times C$$

$$\text{اما } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ یعنی } B \neq C.$$

۳۳ اگر $AB = A$ باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت $B = I$ ؟ چرا؟

$$\text{خیر، زیرا اگر } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ باشد، آنگاه } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و این یعنی } AB = A \text{ ولی } B \neq I.$$

۳۴ ماتریس اسکالر $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را از چپ و راست در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ضرب کرده و آنها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ (کاردرکلاس صفحه ۱۹ کتاب درسی)

$$A \times I = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, I \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A \times I = I \times A = A$$

نتیجه می‌گیریم در ضرب ماتریس‌ها، ماتریس اسکالر I عضو بی‌اثر ضربی است.

۳۵ اگر $A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی 3×3 و دلخواه باشد در این صورت ماتریس $(A \times B)$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ (تمرین صفحه ۲۱ کتاب درسی)

$$A \times B = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ar_1 & br_1 & cr_1 \\ dr_2 & er_2 & fr_2 \\ gr_3 & hr_3 & kr_3 \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم اگر بخواهیم ماتریس قطری $A_{n \times n}$ را در ماتریس دلخواه $B_{n \times n}$ ضرب کنیم، کافی است به‌ازای هر i ، درایه a_{ii} از ماتریس A را در سطر i ام ماتریس B ضرب کنیم. به‌علاوه اگر بخواهیم ماتریس $B_{n \times n}$ را در $A_{n \times n}$ ضرب کنیم، کافی است به‌ازای هر j ، درایه a_{jj} از ماتریس A را در ستون j ام ماتریس B ضرب کنیم.

$$۳۶ \text{ اگر } A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ باشد، آنگاه:}$$

الف) ماتریس AB را بیابید.

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 8 & 4 & 2 \\ 6 & 12 & -18 \end{bmatrix}$$

کافی است درایه روی قطر اصلی سطر i ام ماتریس A را در تمام درایه‌های سطر i ام ماتریس B ضرب کنیم.

ب. آیا $AB = BA$ ؟

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 0 \\ 16 & 4 & -6 \\ -4 & -4 & -18 \end{bmatrix}$$

خیر، زیرا:

$$۳۷ \text{ اگر } A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ مفروض باشد، حاصل } A^3 \text{ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} (-2)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4^3 \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم هرگاه یک ماتریس قطری به توان یک عدد برسد، ماتریس حاصل یک ماتریس قطری است و درایه‌های روی قطر آن، با توان رساندن درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس اولیه به دست می‌آید.

نکته اگر $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ یک ماتریس قطری باشد، در این صورت $A^m = [a_{ij}^m]_{n \times n}$.



۳۸ اگر $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار x را به دست آورید.

پاسخ

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow (2+2x) + 3(\Delta x) = 3 \Rightarrow 17x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{17}$$

۳۹ از تساوی $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، مقدار x را پیدا کنید.

پاسخ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (1+x) + 12 + (4+2x) = 4 \Rightarrow 3x + 17 = 0 \Rightarrow x = -\frac{17}{3}$$

۴۰ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^Δ را به دست آورید.

پاسخ

$$A^\Delta = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3A$$

$$A^\Delta = A^\Delta \times A = (A^\Delta)^\Delta \times A \stackrel{A^\Delta = 3A}{=} (3A)^\Delta \times A = 9A^\Delta \times A \stackrel{A^\Delta = 3A}{=} 9(3A) \times A = 27A^\Delta \stackrel{A^\Delta = 3A}{=} 27(3A) = 81A = \begin{bmatrix} 81 & 81 & 81 \\ 81 & 81 & 81 \\ 81 & 81 & 81 \end{bmatrix}$$

۴۱ اگر $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^\Delta$ باشد، مقدار $a+b+c+d$ را به دست آورید.

پاسخ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2A \Rightarrow A^\Delta = (A^\Delta)^\Delta \stackrel{A^\Delta = 2A}{=} (2A)^\Delta = 4A^\Delta \stackrel{A^\Delta = 2A}{=} 8A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^\Delta = A^\Delta = A^\Delta \times A = (8A)A = 8A^\Delta \stackrel{A^\Delta = 2A}{=} 8(2A) = 16A = \begin{bmatrix} 16 & 16 \\ 16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{a=b=c=d=16} a+b+c+d = 64$$

(تمرین صفحه ۲۱ کتاب درسی)

۴۲ اگر A و B ماتریس‌های 3×3 و تعویض‌پذیر باشند ($A \times B = B \times A$) ثابت کنید.

الف $(A+B)^\Delta = A^\Delta + 2AB + B^\Delta$

ب $(A-B)(A+B) = A^\Delta - B^\Delta$

پاسخ

الف $(A+B)^\Delta = (A+B)(A+B) = A^\Delta + AB + \cancel{BA} + B^\Delta = A^\Delta + 2AB + B^\Delta$ ب $(A-B)(A+B) = A^\Delta + AB - \cancel{BA} - B^\Delta = A^\Delta - B^\Delta$

۴۳ برای دو ماتریس A و B داریم $A^\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B^\Delta = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ و $A+B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. حاصل $AB+BA$ را بیابید.

پاسخ

$$(A+B)^\Delta = A^\Delta + AB + BA + B^\Delta \Rightarrow AB + BA = (A+B)^\Delta - A^\Delta - B^\Delta$$

$$(A+B)^\Delta = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow AB + BA = \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

۴۴ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل عبارت $A^\Delta + AB + BA + B^\Delta$ را به دست آورید.

پاسخ

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow (A+B)^\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 10 \\ 8 & 17 & 16 \\ -2 & 12 & 19 \end{bmatrix}$$

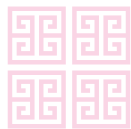
$$A^\Delta + AB + BA + B^\Delta = A(A+B) + B(A+B) = (A+B)(A+B) = (A+B)^\Delta = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 10 \\ 8 & 17 & 16 \\ -2 & 12 & 19 \end{bmatrix}$$

۴۵ اگر $(A+B)^\Delta = A^\Delta + B^\Delta$ ، نشان دهید: $A^\Delta B = BA^\Delta$

پاسخ

$$\left. \begin{aligned} (A+B)^\Delta &= (A+B)(A+B) = A^\Delta + AB + BA + B^\Delta \\ (A+B)^\Delta &= A^\Delta + B^\Delta \end{aligned} \right\} \Rightarrow A^\Delta + AB + BA + B^\Delta = A^\Delta + B^\Delta \Rightarrow AB + BA = \bar{0} \Rightarrow AB = -BA$$

$$A^\Delta B = A(AB) \stackrel{AB=-BA}{=} A(-BA) = -(AB)A \stackrel{AB=-BA}{=} -(-BA)A = B(A \times A) = BA^\Delta$$



۴۶ الف اگر $A^2 = kA$ ، نشان دهید $A^2 = k^2A$ و سپس به طور حدسی، یک رابطه در مورد A^n بنویسید.

$$A^3 = A^2 \times A = (kA)A = kA^2 = k(kA) = k^2A$$

$$\text{حدس: } A^n = k^{n-1}A$$

۴۷ ج اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل A^{10} را به دست آورید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2A \xrightarrow{\text{نتیجه الف}} A^{10} = 2^{10-1}A = 2^9 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^9 & 2^9 \\ 2^9 & 2^9 \end{bmatrix}$$

۴۷ الف اگر $A^2 = \bar{O}$ باشد، ثابت کنید به ازای $m \geq 2$ داریم: $A^m = \bar{O}$.

$$A^m = A^2 \times A^{m-2} = \bar{O} \times A^{m-2} = \bar{O}$$

۴۸ ج اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^{1397} + A^{1398}$ را پیدا کنید.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O} \Rightarrow A^{1397} + A^{1398} = \bar{O} + \bar{O} = \bar{O}$$

۴۸ الف اگر $A^2 = I$ باشد، به ازای $n \in \mathbb{N}$ ثابت کنید: زوج n $A^n = I$ فرد n $A^n = A$

فرض می‌کنیم $k \in \mathbb{N}$ باشد، در این صورت:

$$A^n = A^{2k} = (A^2)^k = I^k = I$$

اگر $n = 2k$ باشد، آنگاه:

$$A^n = A^{2k+1} = A^{2k} \times A = (A^2)^k \times A = I^k \times A = I \times A = A$$

اگر $n = 2k+1$ باشد، آنگاه:

۴۹ الف اگر $A^2 = \bar{O}$ و A از مرتبه ۲ باشد، مطلوب است ساده‌شده عبارت $A(2A - 3I)^2$.

$$A^2 = \bar{O} \Rightarrow A^3 = \bar{O} \Rightarrow A(2A - 3I)^2 = A(\cancel{2A^2} - \cancel{36A^2} + \cancel{54A} - \cancel{27I^2}) = A(54A - 27I) = \cancel{54A^2} - 27A = -27A$$

۵۰ الف اگر $A^2 = A$ باشد، ثابت کنید: $(I - A)^2 = I - A$.

$$(I - A)^2 = (I - A)(I - A) = I^2 - IA - AI + A^2 \stackrel{A^2=A}{=} I - 2A + A = I - A$$

۵۱ الف اگر $A^2 = A - I$ باشد، ثابت کنید: $A^4 + A = \bar{O}$.

$$A^2 = A - I \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (A^2)^2 = (A - I)^2 \Rightarrow A^4 = A^2 - 2A + I \stackrel{A^2=A-I}{=} (A - I) - 2A + I = -A \Rightarrow A^4 = -A \Rightarrow A^4 + A = \bar{O}$$

۵۲ الف اگر A یک ماتریس مربعی و I ماتریس اسکالر هم‌مرتبه A باشد، نشان دهید: $(A + I)^2 - (A - I)^2 = 4A$.

$$(A + I)^2 - (A - I)^2 = (A + I)(A + I) - (A - I)(A - I) = (A^2 + 2A + I) - (A^2 - 2A + I) = 4A$$

می‌دانیم $AI = IA$ ، پس:

(نهایی ۸۶)

۵۳ الف اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ، مطلوب است محاسبه A^{10} .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2I \Rightarrow A^{10} = (-2I)^{10} = (-2)^{10} I^{10} = 2^{10} \times I = \begin{bmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{bmatrix}$$

۵۴ الف اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^4 - A^2$ را بیابید.

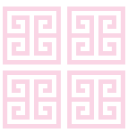
$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^4 = (A^2)^2 \times A = I^2 \times A = A, \quad A^4 = (A^2)^2 = I^2 = I \Rightarrow A^4 - A^2 = A - I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

۵۵ الف اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت حاصل $\frac{A^6}{64}$ را برحسب ماتریس اسکالر I به دست آورید.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I$$

$$A^6 = (A^2)^3 = (4I)^3 = 4^3 I^3 = 64I \Rightarrow \frac{A^6}{64} = \frac{64I}{64} = I$$



درس دوم: وارون ماتریس و دترمینان

۵۶ آیا دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند؟ چرا؟

پاسخ: خیر، زیرا:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \neq I$$

۵۷ ثابت کنید وارون هر ماتریس مربعی، منحصر به فرد است.

پاسخ: فرض کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون ماتریس A باشند. نشان می‌دهیم $B = C$ داریم:

$$B \Rightarrow AB = BA = I \quad (1) \quad , \quad C \Rightarrow AC = CA = I \quad (2)$$

$$B = IB \stackrel{(1)}{=} (CA)B = C(AB) \stackrel{(2)}{=} CI = C$$

بنابراین:

۵۸ برای دو ماتریس هم‌مرتبه و وارون‌پذیر A و B ثابت کنید: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(\underbrace{BB^{-1}}_I)A^{-1} = \underbrace{(AI)}_A A^{-1} = AA^{-1} = I$$

پاسخ: کافی است نشان دهیم $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$ داریم:

۵۹ اگر A ماتریس وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید:

الف) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ و $k \neq 0$.

$$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \left(k \times \frac{1}{k}\right)(AA^{-1}) = 1 \times I = I$$

پاسخ: کافی است نشان دهیم $(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = I$ داریم:

ب) $(A^{-1})^{-1} = A$.

پاسخ: می‌دانیم $A^{-1}A = I \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$

(نهایی ۸۶)

۶۰ اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(2AB)^{-1}$ را بیابید.

پاسخ: می‌دانیم $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ، بنابراین:

$$(2AB)^{-1} = \frac{1}{2}(AB)^{-1} = \frac{1}{2}B^{-1}A^{-1}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow (2AB)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{7}{2} \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

۶۱ اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند و $A + B = AB$ ، ثابت کنید: $A^{-1} + B^{-1} = I$.

$$A + B = AB \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1}(A + B) = A^{-1}(AB) \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_I + A^{-1}B = \underbrace{(A^{-1}A)B}_I \Rightarrow I + A^{-1}B = B$$

$$\xrightarrow{\times B^{-1}} (I + A^{-1}B)B^{-1} = \underbrace{BB^{-1}}_I \Rightarrow IB^{-1} + (A^{-1}B)B^{-1} = I \Rightarrow B^{-1} + A^{-1}(\underbrace{BB^{-1}}_I) = I \Rightarrow B^{-1} + A^{-1} = I \Rightarrow A^{-1} + B^{-1} = I$$

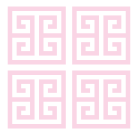
۶۲ اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|AB| + 2|A + B|$ را بیابید.

$$\left. \begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 16 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow |AB| = (-1 \times 7) - (16 \times 3) = -55 \\ A + B &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A + B| = (6 \times 5) - (4 \times 3) = 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |AB| + 2|A + B| = -55 + 2(18) = -19$$

۶۳ اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت اعداد حقیقی a, b, c, d را چنان بیابید که تساوی $|A|^2 - 5|A| + 6 = 0$ برقرار باشد. (پرسش متن صفحه ۲۹ کتاب درسی)

$$|A|^2 - 5|A| + 6 = 0 \Rightarrow (|A| - 2)(|A| - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 2 \xrightarrow{\text{مانند}} A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a = 2, b = 0, c = 0, d = 1 \\ |A| = 3 \xrightarrow{\text{مانند}} A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a = 3, b = 0, c = 0, d = 1 \end{cases}$$

دقت کنید که برای این سؤال، بی‌شمار جواب وجود دارد.



۶۳ ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $|A| \neq 0$ باشد، نشان دهید: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

پاسخ
فرض می‌کنیم $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ ، بنابراین:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \Rightarrow x = -\frac{d}{c}z \end{cases} \Rightarrow a\left(-\frac{d}{c}z\right) + bz = 1 \Rightarrow z = \frac{-c}{ad - bc}, x = \frac{d}{ad - bc}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cy + dw = 1 \\ ay + bw = 0 \Rightarrow y = -\frac{b}{a}w \end{cases} \Rightarrow c\left(-\frac{b}{a}w\right) + dw = 1 \Rightarrow w = \frac{a}{ad - bc}, y = \frac{-b}{ad - bc}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۶۵ وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

پاسخ
چون $|A| = (10 \times 1) - (2 \times 4) = 2 \neq 0$ پس A دارای وارون است و داریم:

۶۶ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ و $AB = I$ باشد، ماتریس B را بیابید.

پاسخ
چون حاصل ضرب دو ماتریس A و B برابر I شده است، بنابراین این دو ماتریس وارون یکدیگرند. پس:

$$|A| = (1 \times 7) - (2 \times 4) = -1 \Rightarrow B = A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

۶۷ اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار b را به دست آورید.

$$|A| = (-1 \times 1) - (0 \times b) = -1 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -b \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow b = 3$$

۶۸ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{-1} + A$ را به دست آورید.

$$|A| = (2 \times 3) - (5 \times 1) = 1 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} + A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} 5 + 0 + 0 + 5 = 10$$

۶۹ اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $A + 4A^{-1}$ را به دست آورید.

$$|A| = (-2 \times 3) - (-2 \times 2) = -2 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 4A^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A + 4A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 6 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$$

۷۰ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس معکوس A^2 را به دست آورید.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^2| = (9 \times 14) - (-25 \times (-5)) = 126 - 125 = 1$$

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 25 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow |(A^2)^{-1}| = (14 \times 9) - (25 \times 5) = 126 - 125 = 1$$