

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و
ارسال رایگان

Medabook.com



مدابوک



دریافت برنامه ریزی و مشاوره

از مشاوران رتبه برتر

هوا کنکوری آیدی نوین

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۴



“من به کارهای بسیاری که انجام نداده‌ام هم افتخار می‌کنم،
راز موفقیت اپل هم همین است،
ما وقت خود را در کارهایی که نباید انجام دهیم تلف نکردیم.”

استیو جابز - بنیان‌گذار اپل

از آنجا که این کتاب برای دوران **جمع‌بندی** شما تهیه شده‌است بنابراین باید بتواند بسیار موجز و مختصر و تأثیرگذار باشد، چنان‌که از یک کتاب جمع‌بندی انتظار می‌رود. بنابراین ما در انتخاب تست‌های این کتاب درنگ کردیم و به تست‌های بسیاری که در این کتاب نیاوردیم افتخار می‌کنیم و همچنین افتخار می‌کنیم که چارچوب تست‌های کنکور و استانداردهای کتاب درسی را خوب می‌شناسیم و این توانایی و اشراف را داریم که در چیزی حدود ۶۰۰ تست تمامی تیپ‌های مورد سؤال در کنکور و تمامی زوایای کتاب درسی را پوشش دهیم و در عین حال به معنای واقعی به کلمه **استاندارد** وفادار بمانیم.



Peter Scholze

پتر شولتسه
متولد ۱۹۸۷

Set, Pattern & Sequence

آزمون ۱. مجموعه
آزمون ۲. الگو و دنباله
آزمون ۳. مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

1 CHAPTER

مجموعه

آزمون اول



صفحه ۲ تا ۱۳

ریاضی ۱۰

۱ کدام گزینه صحیح است؟

$$\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R} \quad (۲)$$

$$\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}' = \mathbb{N} \quad (۱)$$

$$(\mathbb{R} - \mathbb{Q}') \subseteq \mathbb{W} \quad (۴)$$

$$(\mathbb{Z} - \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{N} \quad (۳)$$

۲ اگر $A = (-۳, ۶]$, $B = (۰, ۸]$, $C = (-\infty, ۳]$, $D = (۲, +\infty)$ باشد، حاصل $(A \cup C) - (B \cap D)$ برابر با کدام بازه است؟

$$(-\infty, ۲] \quad (۲)$$

$$(-۳, ۲] \quad (۱)$$

$$(۰, \infty) \quad (۴)$$

$$(-\infty, ۲) \quad (۳)$$

۳ کدام مجموعه متناهی است؟

(۲) مثلث‌هایی با مساحت ۶

(۱) اعداد صحیح کمتر از ۲۵

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{x} \in \mathbb{N}\} \quad (۴)$$

(۳) اعداد گویای موجود در بازه $(۱, ۳)$

۴ اگر A مجموعه اعداد طبیعی فرد و B مجموعه اعداد اول باشند، کدام مجموعه متناهی و غیر تهی است؟

$$B - A \quad (۲)$$

$$A - B \quad (۱)$$

$$A - (A \cup B) \quad (۴)$$

$$A \cap B \quad (۳)$$

۵ کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر مجموعه $A \cup B$ نامتناهی و مجموعه B نیز نامتناهی باشد، مجموعه A متناهی است.

(۲) اگر مجموعه‌های A و B نامتناهی باشند، مجموعه $A \cap B$ هم نامتناهی است.

(۳) اگر $\mathbb{N}$ مجموعه مرجع و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، مجموعه A' متناهی است.

(۴) اگر مجموعه A متناهی و مجموعه B نامتناهی باشد، مجموعه $B - A$ نامتناهی است.

۶ اگر مجموعه مرجع، مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی باشد و $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $B = \{۴, ۵, ۶, ۷\}$ باشند، متمم مجموعه $B' - A$ چند عضو دارد؟

$$۵ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

$$۸ \quad (۴)$$

$$۷ \quad (۳)$$

۷ اگر $A = (-۲, ۳]$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > ۱\}$ باشد، مجموعه $A' \cup B'$ کدام است؟

$$(-\infty, ۱] \cup (۳, +\infty) \quad (۲)$$

$$(۱, ۳] \quad (۱)$$

$$(-\infty, ۱) \cup (۳, +\infty) \quad (۴)$$

$$\mathbb{R} - (۱, ۳) \quad (۳)$$

۸ اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، ساده شده مجموعه $(A - B) - (B \cap A')$ برابر کدام است؟

$$\emptyset \quad (۲)$$

$$B' \quad (۱)$$

$$A - B \quad (۴)$$

$$A \cap B \quad (۳)$$

NOTE



10

خرید آنلاین در gajmarket.com

وبسایت جامع کنکور

PLUS AZMOON

حسابان جامع کنکور | فصل ۱. مجموعه، الگو و دنباله

9 اگر $n(A) = 4$ ، $n(B) = 7$ ، $n(A - B) = 3$ ، مجموعه $A \cup B$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۱۱
(۳) ۱۲
(۴) ۱۳

10 اگر مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای ۵ و ۷ عضو باشند، در کدام حالت زیر تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ حداکثر خواهد بود؟

- (۱) A زیرمجموعه B باشد.
(۲) B زیرمجموعه A باشد.
(۳) A و B جدا از هم باشند.
(۴) بستگی به مجموعه مرجع دارد.

11 فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از مجموعه مرجع U باشند و $n(U) = 80$ ، $n(A) = 20$ ، $n(B') = 55$ ، $n(A \cup B) = 37$ ، تعداد اعضایی که فقط در مجموعه B قرار دارند کدام است؟

- (۱) ۱۴
(۲) ۱۵
(۳) ۱۶
(۴) ۱۷

12 در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزشی هستند. چند نفر از آنان عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟

(داخل - ۹۸)

- (۱) ۱۵
(۲) ۱۶
(۳) ۱۷
(۴) ۱۸

13 در یک کلاس ۲۰ نفره، ۸ نفر عینکی و ۴ نفر چپ دست هستند و ۱۰ نفر نه چپ دست هستند و نه عینکی، تعداد دانش آموزانی که هم عینک زده‌اند و هم چپ دست هستند کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۸
(۴) ۶

14 اجتماع دو مجموعه A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $(A - B)$ و $(B - A)$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B ، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه جدید کدام است؟

- (۱) ۲۲
(۲) ۲۳
(۳) ۲۴
(۴) ۲۶

الگو و دنباله

آزمون دوم



صفحه ۱۴ تا ۲۷

ریاضی ۱۰

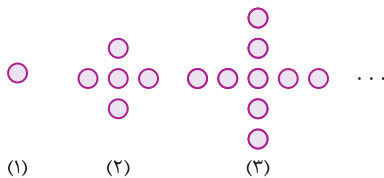
15 در الگوی مقابل، تعداد پاره خط‌ها در شکل دوازدهم کدام است؟

- (۱) ۵۳
(۲) ۴۹
(۳) ۴۵
(۴) ۴۴



16 با توجه به الگوی مقابل تعداد دایره‌ها در شکل پنجم برابر ۲۹ است؟

- (۱) هفتم
(۲) هشتم
(۳) نهم
(۴) دهم



(۱) (۲) (۳)

TEST



11



استانیسلاف اسمیرنوف
متولد ۱۹۷۰

Stanislav Smirnov

آزمون ۵. قدر مطلق و جزء صحیح

آزمون ۶. معادلات گویا و رادیکالی، نامعادله

آزمون ۷. معادلات و نامعادلات قدر مطلق

3

CHAPTER

آزمون پنجم



ریاضی ۱۰ + حسابان ۱

قدر مطلق و جزء صحیح

80 اگر $0 < x < y$ و $\sqrt{x^2 + 2xy + y^2} - |x - y| + \frac{y}{\sqrt{y^2}} - \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 8$ باشد، مقدار y کدام است؟

(۱) -۱
(۲) -۲
(۳) -۳
(۴) -۴

81 شکل روبه‌رو نمودار کدام تابع است؟

(۱) $y = x - |x|$
(۲) $y = x + |x|$

(۳) $y = |x - 1| - 1$
(۴) $y = 1 - |x - 1|$

82 مساحت ناحیه محدود به نمودار $f(x) = |2x - 1|$ و محور x ها و دو خط $x = 1$ و $x = -1$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$
(۲) ۲

(۳) $\frac{5}{2}$
(۴) ۳

83 مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ کدام است؟

(۱) ۲
(۲) $\frac{7}{3}$

(۳) $\frac{8}{3}$
(۴) ۳

84 حاصل عبارت $[\sqrt{10}] + [\sqrt{11}] + [\sqrt{12}] + \dots + [\sqrt{24}]$ کدام است؟

(۱) ۴۵
(۲) ۴۸

(۳) ۵۰
(۴) ۵۴

85 به‌ازای چه مقادیری از x رابطه $[x - 2] + [x + 1] = 3$ برقرار است؟

(۱) $[2, 3]$
(۲) $[1, 2]$

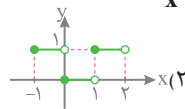
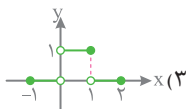
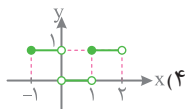
(۳) $(0, 3]$
(۴) $[2, 4]$

86 مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $y = [\frac{x}{3}] + 1$ و محور x ها در بازه $[0, 6]$ کدام است؟

(۱) ۴
(۲) ۶

(۳) ۹
(۴) ۱۱

87 نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{|x|}{x} [x]$ کدام است؟



NOTE



19

فهرست آزمون در
gajmarket.com
وب‌سایت جامع کنکور

PLUS
AZMOON

حسابان جامع کنکور | فصل ۳. معادله و نامعادله



ولادیمیر وایودسکی
متولد ۱۹۶۶

Vladimir Voevodsky

آزمون ۴. توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

Rational Exponents & Algebraic Expressions

2

CHAPTER

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

آزمون چهارم



صفحه ۴۸ تا ۶۸

ریاضی ۱۰

62 ساده شده عبارت $6^4 \times (\frac{3}{4})^{-3} \times (\frac{0}{25})^4$ کدام است؟

۶ (۱) ۸ (۲)

۱۲ (۳) ۱۸ (۴)

63 اگر $A = \frac{2}{3}\sqrt{18} + 2\sqrt{27} - \sqrt{108} + 0/3\sqrt{200}$ باشد، A^2 برابر کدام است؟

۳۲ (۱) ۴۵ (۲)

۴۸ (۳) ۵۰ (۴)

64 حاصل عبارت $\sqrt[6]{12} \times \sqrt[4]{54} \times \sqrt[3]{2\sqrt[4]{6}}$ کدام است؟

۶ (۱) $6\sqrt[6]{2}$ (۲)

۳ (۳) $2\sqrt[3]{9}$ (۴)

65 اگر $A = \sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}} \times (\frac{1}{3})^{-\frac{4}{3}}$ باشد، حاصل $A^{-\frac{1}{3}}$ کدام است؟

۰/۲۵ (۱) ۰/۵ (۲)

۰/۷۵ (۳) ۱ (۴)

66 اگر $xy^2 = \frac{4}{3}$ باشد، حاصل $(x+3y^2)^2 - (x-3y^2)^2$ کدام است؟

۸ (۱) ۱۲ (۲)

۱۶ (۳) ۱۸ (۴)

67 اگر $2x + \frac{5}{x} = 9$ باشد، حاصل $4x^2 + \frac{25}{x^2}$ کدام است؟

۴۳ (۱) ۵۱ (۲)

۵۷ (۳) ۶۱ (۴)

68 اگر $A = (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)(\frac{x}{x^2 - 4x + 4} - \frac{1}{x-2})$ باشد، حاصل $\frac{x-2}{A}$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲)

۱ (۳) -۲ (۴)

69 در تجزیه عبارت $x^4 - 3x^3 + 8x - 24$ کدام عامل ضرب وجود دارد؟

x-۴ (۱) x-۲ (۲)

x+۲ (۳) x+۳ (۴)

NOTE



(خارج - ۹۵)

17

(داخل - ۹۸)

خرید آنلاین در
gajmarket.com
وبه جمع بندی سریع

PLUS
AZMOON

حسابان جامع کنکور | فصل ۰۲. توان‌های گویا و عبارت‌های جبری



Pierre Deligne

پی‌یر دلین
متولد ۱۹۴۴

آزمون ۸. معادله درجه دوم

آزمون ۹. نمودار تابع درجه دوم (سه‌می)

Quadratic

4

CHAPTER

معادله درجه دوم

آزمون هشتم I gaj

ریاضی ۱۰: صفحه ۷۰ تا ۷۷ - حسابان ۱: صفحه ۷ تا ۹

ریاضی ۱۰ + حسابان ۱

(خارج - ۸۹)

125 به ازای کدام مجموعه مقادیر m معادله درجه دوم $\frac{1}{4}m + 2 = 0$ و $x^2 + (m+1)x + 2x^2$ فاقد ریشه حقیقی است؟

$$-3 < m < 4 \quad (2) \quad -3 < m < 5 \quad (1)$$

$$-1 < m < 5 \quad (4) \quad -2 < m < 4 \quad (3)$$

126 به ازای کدام مجموعه مقادیر m معادله درجه دوم $\frac{3}{4}m - 2 = 0$ و $x^2 + mx + m - 2x^2$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟

$$m < 3 \text{ یا } m > 4 \quad (2) \quad m < 2 \text{ یا } m > 6 \quad (1)$$

$$3 < m < 4 \quad (4) \quad 2 < m < 6 \quad (3)$$

127 اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، کدام گزینه درست است؟

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{5} \quad (2) \quad \alpha^2\beta + \beta^2\alpha = 7 \quad (1)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{21}{2} \quad (4) \quad \alpha^3 + \beta^3 = 125 \quad (3)$$

128 اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ کدام است؟

$$2 \quad (2) \quad 4 \quad (1)$$

$$4\sqrt{2} \quad (4) \quad 2\sqrt{2} \quad (3)$$

129 اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + x - 3 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{1+\alpha} + \frac{\beta}{3}$ کدام است؟

$$\sqrt{2} \quad (2) \quad -\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$-1 \quad (4) \quad 2\sqrt{5} \quad (3)$$

130 به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$ معکوس یکدیگرند؟

$$-1 \quad (2) \quad -2 \quad (1)$$

$$1 \quad (4) \quad 2 \quad (3)$$

131 به ازای کدام مقدار m مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $\frac{1}{8}x + (m+1)x - 2x^2 = 0$ برابر ۲ می‌باشد؟

$$4 \quad (2) \quad 3 \quad (1)$$

$$6 \quad (4) \quad 5 \quad (3)$$

132 به ازای کدام مقدار m مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ می‌باشد؟

$$1 \quad (2) \quad -\frac{9}{5} \quad (1)$$

$$-1 \text{ و } \frac{9}{5} \quad (4) \quad -\frac{9}{5} \text{ و } 1 \quad (3)$$

(داخل - ۹۶)

(داخل - ۹۳)

NOTE



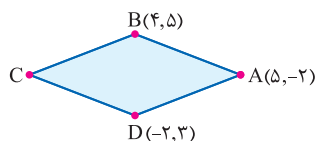
24

خرید آنلاین در gajmarket.com

ویژه جمع‌بندی سریع

PLUS AZMOON

حسابان جامع کنکور | فصل ۴. معادله درجه ۲



159 در لوزی شکل مقابل مختصات رأس C کدام است؟

(۱) $(-4, 6)$

(۲) $(-3, 6)$

(۳) $(-4, 2)$

(۴) $(-3, 10)$

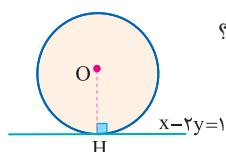
160 نقطه $A(7, 6)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

(۱) $(1, 5)$

(۲) $(3, 4)$

(۳) $(3, 5)$

(۴) $(4, 3)$



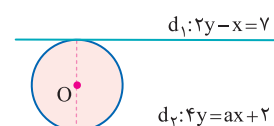
161 در شکل مقابل، مرکز دایره روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد. اگر شعاع دایره برابر $\sqrt{5}$ باشد، طول مرکز دایره کدام می‌تواند باشد؟

(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) -۱

(۴) -۳



162 در شکل مقابل، دو خط موازی d_1 و d_2 بر دایره مماس‌اند. مساحت دایره کدام است؟

(۱) π

(۲) $1/5\pi$

(۳) $1/8\pi$

(۴) $2/2\pi$

163 نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع، کدام است؟

(۱) ۴۰

(۲) ۴۵

(۳) ۷۵

(۴) ۸۰

164 دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ و یک رأس آن نقطه $A(8, 5)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟

(۱) $7/2$

(۲) $9/6$

(۳) $11/4$

(۴) $12/8$

165 اگر $A(1, 0)$ ، نقطه B واقع بر نیمساز ربع دوم و طول پاره خط AB برابر $\sqrt{5}$ باشد، مختصات نقطه B کدام است؟

(۱) $(-2, 2)$

(۲) $(-1, 1)$

(۳) $(1, -1)$

(۴) $(2, -2)$

166 نقاط $A(3, 3)$ و $B(-6, -2)$ دو سرپاره خط AB هستند. معادله عمود منصف پاره خط AB کدام است؟

(۱) $3x - 5y = 7$

(۲) $3x - 5y = 11$

(۳) $2x + 3y = 7$

(۴) $2x + 3y = 11$

167 کدام یک از خط‌های زیر یکی از زاویه‌های حاصل از تقاطع دو خط $2x + 3y = 2$ و $3x + 2y = 8$ را نصف می‌کند؟

(۱) $x + y = 2$

(۲) $x + y = 1$

(۳) $x - y = 3$

(۴) $x - y = 1$

NOTE

خرید کتاب‌های کنکور
با تخفیف ویژه
از سال رایگان
Medabook.com





Artur Avila

آرتور آویلا
متولد ۱۹۷۹

آزمون ۱۱. مفهوم تابع، دامنه و برد، تساوی دو تابع
آزمون ۱۲. انتقال، توابع صعودی و نزولی
آزمون ۱۳. اعمال جبری روی توابع، ترکیب توابع
آزمون ۱۴. تابع یک به یک و تابع وارون
آزمون ۱۵. تقسیم و بخش پذیری

Exponential functions & Logarithms

6

CHAPTER

مفهوم تابع، دامنه و برد، تساوی دو تابع

آزمون یازدهم I gaj

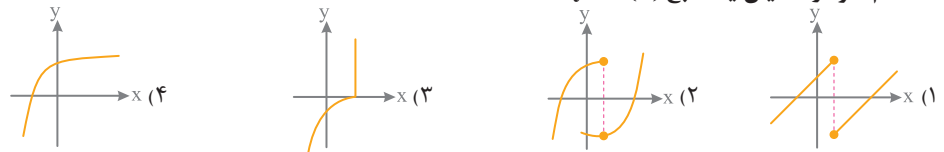
ریاضی ۱۰ + حسابان ۱

ریاضی ۱۰: صفحه ۹۵ تا ۱۱۳ - حسابان ۱: صفحه ۳۸ تا ۵۳

168 اگر رابطه $f = \{(3, a+2b), (5, 4), (7, 2), (3, 7), (5, 2a-b)\}$ یک تابع باشد، $a^2 - b^2$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

169 کدام نمودار، نمایش یک تابع $y = f(x)$ است؟



170 اگر رابطه $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & ; x \leq 2 \\ ax - 2 & ; x \geq 2 \end{cases}$ یک تابع باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۱۲
(۳) ۱۴
(۴) ۱۶

171 کدام رابطه نشان دهنده یک تابع است؟

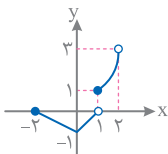
- (۱) $|x| + |y| = 4$
(۲) $y = \sqrt{x^2 - 1}$
(۳) $y^2 = 5x - 1$
(۴) $y(x-2) = 0$

172 اگر $f = \{(1, m+n), (2^0, n^2+n), (n^2-3n, 4)\}$ یک تابع همانی باشد، m کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) -۳
(۳) -۲
(۴) ۶

173 شکل مقابل، نمودار تابع $f: [-2, 2) \rightarrow B$ است. مجموعه B کدام یک از مجموعه های زیر می تواند باشد؟

- (۱) $[-1, 1]$
(۲) $[-1, 0) \cup (1, 3]$
(۳) $[-1, 5]$
(۴) $[-1, 3) - (0, 1]$



174 دامنه تابع $f(x) = \frac{x+5}{x^2+ax+b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{3\}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) -۳
(۲) ۳
(۳) ۶
(۴) -۶

175 اگر $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ دامنه تابع $f(3-x)$ ، کدام است؟

- (۱) $[0, 2]$
(۲) $[0, 3]$
(۳) $[1, 3]$
(۴) $[1, 2]$

176 اگر $f(x) = \sqrt{x+|x+2|}$ دامنه تابع $f(-x)$ کدام است؟

- (۱) $x \leq -1$
(۲) $x \geq -1$
(۳) $x \leq 1$
(۴) $x \geq 1$

E
T
O
N



29

خرید آنلاین در
gajmarket.com
و به جمع بندی سریع

PLUS
AZMOON

حسابان جامع کنکور | فصل ۶. تابع

(داخل - ۹۲)

187. قرینه نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می دهیم. نمودار حاصل نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می کند؟

(خارج - ۹۷)

- (۱) ۲-
(۲) ۵/۰
(۳) ۱
(۴) ۵/۱

188. به ترتیب با کدام انتقال ها نمودار $y = x^2 + 6x + 4$ به روی نمودار $y = x^2 - 4x + 3$ منطبق می شود؟

- (۱) ۵ واحد به سمت راست و ۴ واحد به سمت بالا
(۲) ۵ واحد به سمت چپ و ۴ واحد به سمت بالا
(۳) ۵ واحد به سمت راست و ۴ واحد به سمت پایین
(۴) ۵ واحد به سمت چپ و ۴ واحد به سمت پایین

189. نمودار تابع $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیر منفی باشد؟

(خارج - ۹۳)

- (۱) ۱
(۲) ۵/۱
(۳) ۲
(۴) ۳

190. نمودار تابع $y = x^2 - x - 3$ را ۲ واحد به طرف x های منفی، آنگاه ۹ واحد به طرف y های منفی انتقال می دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه زیر محور x ها است؟

(خارج - ۹۸)

- (۱) $(-5, 2)$
(۲) $(-5, 3)$
(۳) $(-2, 3)$
(۴) $(-2, 5)$

191. نمودار تابع $y = |\frac{1}{2}x| - 2$ را ۴ واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع اند؟

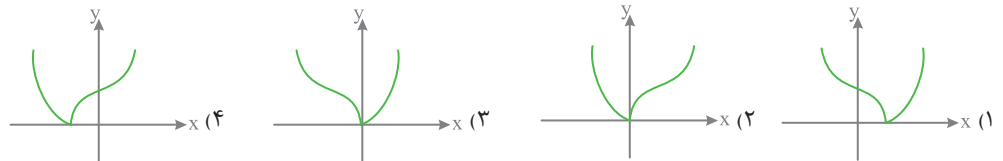
(داخل - ۹۳)

- (۱) ۳/۵-
(۲) ۳-
(۳) ۲/۵-
(۴) ۲-

192. نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ از کدام ناحیه مختصات نمی گذرد؟

- (۱) اول
(۲) دوم
(۳) سوم
(۴) چهارم

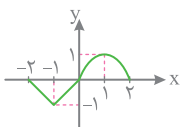
193. نمودار تابع $f(x) = |(x+1)^3 - 1|$ به کدام صورت است؟



194. نمودار تابع $y = \frac{x-2}{x-3}$ از کدام ناحیه نمی گذرد؟

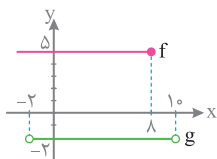
- (۱) اول
(۲) دوم
(۳) سوم
(۴) چهارم

195. نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = -f(\frac{1}{2}x - 1)$ کدام است؟

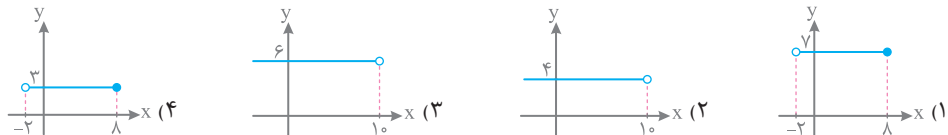


206 اگر $f = \{(2, 5), (3, 4), (4, 6), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 4), (2, 6), (5, 2), (4, 5)\}$ دو تابع باشند، بُرد تابع $f - g$ کدام است؟

- (1) $\{-1, -3, -4\}$
(2) $\{1, 2, -4\}$
(3) $\{-3, -4\}$
(4) $\{-1, -4\}$

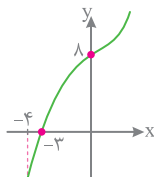


207 طبق شکل مقابل، نمودار تابع $f - g$ کدام است؟



208 نمودار تابع $f + g$ به صورت مقابل است. اگر $f(x) = 2x + \sqrt{x+4}$ باشد، حاصل $\frac{g(0)}{g(-3)}$ کدام است؟

- (1) $1/2$
(2) $1/5$
(3) $2/25$
(4) $0/75$



(خارج - 90)

209 در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2|x|$ مقدار $f(-\frac{1}{\sqrt{3}} f(\sqrt{3}))$ کدام است؟

- (1) 3
(2) $\frac{7}{4}$
(3) 4
(4) $\frac{9}{4}$

210 اگر $f(x) = 2 - |x - 2|$ ، ضابطه تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟

- (1) x
(2) $4 - x$
(3) $f(x)$
(4) $2 - f(x)$

211 اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$ و $g(f(a)) = 5$ باشد عدد a کدام است؟

- (1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) 4

212 توابع $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$ مفروض اند. اگر $(4, 2) \in \text{fog}$ و $(4, 1) \in \text{gof}$ ، آنگاه دو تایی (a, b) کدام است؟

- (1) $(3, 4)$
(2) $(4, 5)$
(3) $(4, 3)$
(4) $(5, 4)$

213 اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، آنگاه ضابطه تابع gof کدام است؟

- (1) $x-1$
(2) $x+1$
(3) x
(4) $2x$

214 اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^2 x$ باشند، ضابطه تابع fog کدام است؟

- (1) $-\frac{1}{4} \sin^2 2x$
(2) $-\frac{1}{4} \sin^2 x$
(3) $\frac{1}{4} \cos^2 2x$
(4) $\frac{1}{4} \cos^2 x$

215 اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(\text{fog})(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟

- (1) $2x^2 + 3x + 1$
(2) $2x^2 - 2x + 3$
(3) $2x^2 - x + 4$
(4) $2x^2 + x + 3$



33

(داخل - 91)

(خارج - 92)

(خارج - 95)



Timothy Gowers

تیموئی گاورز
متولد ۱۹۶۳

آزمون ۱۶. توابع نمایی

آزمون ۱۷. لگاریتم

7

CHAPTER

Trigonometric Functions

نسبت‌های مثلثاتی، روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

آزمون چهاردهم

حسابان ۱

صفحه ۷۲ تا ۷۹

276 اگر $f(x) = \left(\frac{3}{a+2}\right)^x$ ضابطه یک تابع نمایی باشد، مجموعه مقادیر a کدام است؟

(۲) $(-2, +\infty)$

(۱) $(-2, 1) \cup (1, +\infty)$

(۴) $\mathbb{R} - (-2, 1)$

(۳) $[-2, 2]$

277 در تابع با ضابطه $f(x) = a \cdot b^x$; $b > 0$ داریم $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{22}$ مقدار $f\left(\frac{3}{2}\right)$ کدام است؟

(۲) ۸

(۱) ۶

(۴) ۲۴

(۳) ۱۲

278 اگر $2^A = \left(\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}}\right)^2$ باشد، مقدار A کدام است؟

(۲) $2\sqrt{2}$

(۱) $\sqrt{2}$

(۴) $12\sqrt{2}$

(۳) $6\sqrt{2}$

279 از معادله $3^x = \frac{8\sqrt{2}}{32}$ مقدار x کدام است؟

(۲) $\frac{2}{5}$

(۱) $-\frac{1}{2}$

(۴) $-\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{2}{4}$

280 دو تابع $f(x) = 3^{ax+b}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند. اگر $f(2) = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $f^{-1}(27)$ کدام است؟

(۲) -۲

(۱) -۳

(۴) ۳

(۳) ۱

281 نمودار یک تابع به صورت $f(x) = -2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{Ax+B}$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. $f(3)$ کدام است؟

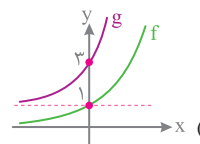
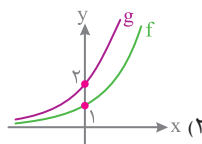
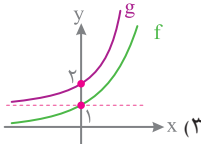
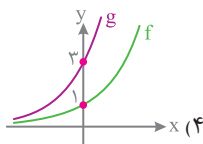
(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۶

(۳) ۵

282 در کدام گزینه نمودارهای دو تابع $f(x) = 3^x$ و $g(x) = 3^{x+1}$ به درستی رسم شده است؟



NOTE



40

فهرست آملین در
gajmarket.com

وبسایت جامع کنکور

PLUS
AZMOON

حسابان جامع کنکور | فصل ۷. لگاریتم و توابع نمایی

319 در مثلث مقابل، طول ضلع BC کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
 (۲) $2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
 (۳) $\sqrt{2} + \sqrt{6}$
 (۴) $2(\sqrt{2} + \sqrt{6})$

320 در دایره مثلثاتی مقابل مقدار $\tan \theta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$
 (۲) $-\frac{3}{4}$
 (۳) $\frac{4}{3}$
 (۴) $-\frac{4}{3}$

321 کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $\sin 14^\circ > \cos 14^\circ$
 (۲) $\sin 55^\circ < \tan 55^\circ$
 (۳) $\cot 30^\circ > \tan 30^\circ$
 (۴) $\cot 15^\circ < \cos 15^\circ$

322 اگر $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$ و $\cos 2x = \frac{m+1}{2}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

- (۱) $(\sqrt{2}-1, 1]$
 (۲) $(0, 1]$
 (۳) $[-1, 0)$
 (۴) $[-\sqrt{2}, 1)$

323 نمودار خط d به معادله $3x + 2y = 4$ به صورت مقابل است. حاصل $\tan(\frac{3\pi}{4} + \theta)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$
 (۲) $\frac{2}{3}$
 (۳) $-\frac{3}{2}$
 (۴) $\frac{3}{2}$

324 اگر $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} (\frac{1}{\sin x} - \sin x)$ کدام است؟

- (۱) $-\cos^2 x$
 (۲) $-\cos x$
 (۳) $\cos^2 x$
 (۴) $\cos x$

325 اگر $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ باشد، حاصل $\sqrt{1+\tan^2 x} (2\sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x)$ کدام است؟

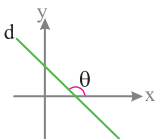
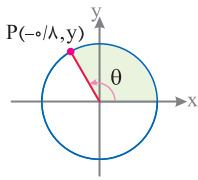
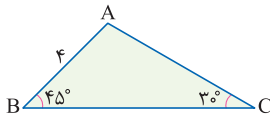
- (۱) $\sin x$
 (۲) $\cos x$
 (۳) $-\sin x$
 (۴) $-\cos x$

326 حاصل عبارت $\sin(\frac{17\pi}{3}) \cos(\frac{-17\pi}{6}) + \tan(\frac{19\pi}{4}) \sin(\frac{-11\pi}{6})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$
 (۲) $-\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{1}{4}$
 (۴) $\frac{1}{2}$

327 اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت مقابل کدام است؟

- (۱) $-1/22$
 (۲) $-5/22$
 (۳) $5/27$
 (۴) $5/48$



(خارج - ۹۸)

(داخل - ۹۸)

(داخل - ۹۸)

$$\sin(\frac{9\pi}{2} + \alpha) \cos(\frac{7\pi}{2} - \alpha) - \tan(\alpha - \frac{3\pi}{2})$$

(خارج - ۹۸)



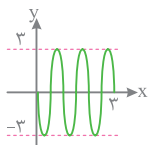
45

فهرست آنتن در
gajmarket.com
وبه جمع بندی سریع

PLUS
AZMOON

حسابان جامع کنکور | فصل ۸. مثلثات

E
T
O
N



362 شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a \cos \pi \left(\frac{1}{4} - bx \right)$ است. a, b کدام است؟

- (۱) -6 (۲) -3 (۳) $4/5$ (۴) 6

I gaj **آزمون بیست و یکم** معادلات مثلثاتی

صفحه ۳۵ تا ۴۴

حسابان ۲

363 معادله مثلثاتی $3 \cos x - 2 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

(خارج - ۹۴ و ۹۸)

364 جواب کلی معادله $\cos 3x + \cos x = 0$ با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

(خارج - ۹۶)

365 مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{14\pi}{3}$ (۲) 4π (۳) $\frac{9\pi}{2}$ (۴) 5π

366 معادله $\sin 3x + \cos 2x = 0$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(داخل - ۹۵)

367 جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ کدام است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ (۴) $2k\pi - \frac{\pi}{3}$

(داخل - ۹۶)

368 جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(داخل - ۹۸)

369 مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $4 \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{2}$ (۲) 3π (۳) 4π (۴) 5π

(داخل - ۹۴)

370 جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

N O T E



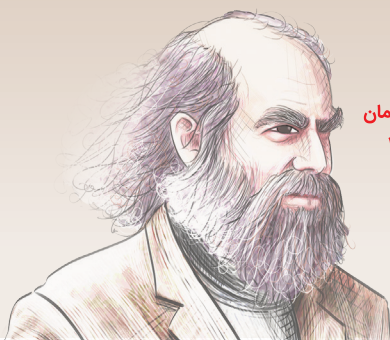
50

خرید آنلاین در gajmarket.com

وب‌سایت جامع کنکور

PLUS AZMOON

حسابان جامع کنکور | فصل ۸. مثلثات



گریگوری پرلمان
متولد ۱۹۶۶

آزمون ۲۲. همسایگی، فرایندهای حدی و محاسبه حد
آزمون ۲۳. رفع ابهام
آزمون ۲۴. پیوستگی
آزمون ۲۵. حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت
آزمون ۲۶. مجانب

Differentiation

Grigori Perelman

9

CHAPTER

همسایگی، فرایندهای حدی و محاسبه حد

آزمون بیست و دوم

صفحه ۱۱۴ تا ۱۴۰

حسابان ۱

(داخل - ۹۸)

386 به ازای کدام مجموعه مقادیر x ، بازه $(x-1, x+1)$ یک همسایگی عدد ۳ می باشد؟

(۱) $\emptyset$ (۲) $\{2\}$

(۳) $2 < x < 2/5$ (۴) $1/5 < x < 2$

387 دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

(۱) صفر (۲) ۱

(۳) -۱ (۴) ۲

388 نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل کدام یک از حدهای زیر موجود است؟

(۱) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ (۲) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(۳) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (۴) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

389 کدام تابع زیر در $x=0$ حد ندارد؟

(۱) $y = x|x|$ (۲) $y = x + |x|$

(۳) $y = x - |x|$ (۴) $y = \frac{x}{|x|}$

390 تابع باضابطه $f(x) = [2x]$ در نقطه $x = \frac{1}{4}$ چه وضعیتی دارد؟

(۱) حد دارد. (۲) فقط حد راست دارد.

(۳) فقط حد چپ دارد. (۴) حد چپ و راست نابرابر دارد.

391 نمودار تابع f به صورت مقابل است. کدام گزینه درست است؟

(۱) $\lim_{x \rightarrow 1^+} [x]f(x) = 1$ (۲) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1)f(x) = 3$

(۳) $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x)-1)^2 = 4$ (۴) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x-1) = -1$

392 اگر تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & ; x < 1 \\ x^2 - 1 & ; 1 \leq x < 3 \\ 2x - 5 & ; x \geq 3 \end{cases}$ باشد، کدام گزینه صحیح نیست؟

(۱) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 6$ (۲) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

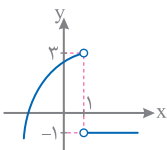
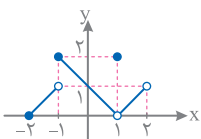
(۳) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$ (۴) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$

NOTE



53

خرید آنلاین در
gajmarket.com
وبه جمع بندی سریع



حسابان جامع کنکور | فصل ۹. حد و پیوستگی

PLUS
AZMOON



412 اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

413 اگر $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} \frac{[4 \cos^2 \pi x] - 12x}{ax+b} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $a+b$ کدام است؟

- (۱) -۲۰ (۲) -۱۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

414 حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} (\frac{6}{x^2-2x} - \frac{x+1}{x-2})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

415 حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} ([2x] + [-2x]) \frac{\cos^2 x - 1}{\sin^2 x}$ کدام است؟ (نماد $[]$ جزء صحیح است.)

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

416 حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\cos^2 x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۱ (۴) صفر

417 حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) π (۴) 2π

418 حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 - \tan^2 x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$ کدام است؟

- (۱) $-2\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{2}$

419 حد عبارت $[\frac{\sin x}{x}] + 2[\frac{x}{\sin x}]$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) حد ندارد.

420 حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin x}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

421 حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin^2 x}{x}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۱

(خارج - ۹۵)

(خارج - ۹۳)

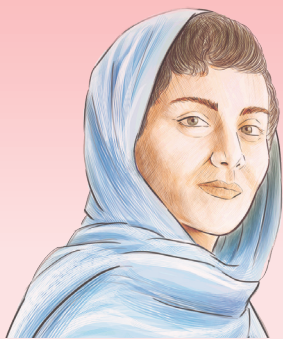
(داخل - ۹۶)

(خارج - ۹۸)

(داخل - ۹۷)

(خارج - ۹۳)

(خارج - ۹۰)



Maryam Mirzakhani

مریم میرزاخانی
۱۳۵۶-۱۳۹۶

آزمون ۲۷. قواعد محاسبه مشتق، خط مماس

آزمون ۲۸. مشتق تابع مرکب، معادله خط مماس

آزمون ۲۹. مشتق پذیری، مشتق چپ و راست و آهنگ تغییر

Applications of Derivatives

10

CHAPTER

قواعد محاسبه مشتق، خط مماس

صفحات ۷۲ تا ۸۳ و ۹۰ تا ۱۰۱

حسابان ۲



آزمون بیست و هفتم

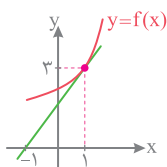
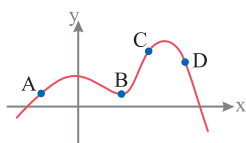
476 با توجه به نمودار تابع f ، کدام رابطه میان شیب خط مماس در نقاط مشخص شده برقرار است؟

$$m_B < m_A < m_C < m_D \quad (۱)$$

$$m_A < m_B < m_D < m_C \quad (۲)$$

$$m_A < m_C < m_B < m_D \quad (۳)$$

$$m_D < m_B < m_A < m_C \quad (۴)$$



477 در شکل مقابل حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

$$۳ \quad (۱)$$

$$\frac{۲}{۳} \quad (۲)$$

$$\frac{۳}{۲} \quad (۳)$$

$$\frac{۲}{۳} \quad (۴)$$

478 اگر $f'(4) = \frac{۳}{۲}$ باشد، حاصل حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+3h) - f(4-h)}{h}$ کدام است؟

$$۴ \quad (۲)$$

$$۳ \quad (۱)$$

$$۱۲ \quad (۴)$$

$$۶ \quad (۳)$$

479 حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a \cos x + \cos a \sin x - \sin a}{x}$ کدام است؟

$$-\cos a \quad (۲)$$

$$-\sin a \quad (۱)$$

$$\sin a \quad (۴)$$

$$\cos a \quad (۳)$$

480 نمودار تابع f به صورت مقابل است. مشتق تابع $y = xf(x)$ در $x = 0$ کدام است؟

$$-۱ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

$$(۴) \text{ تعریف نشده}$$

$$۳ \quad (۳)$$

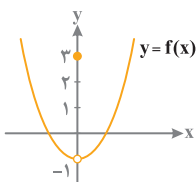
481 با توجه به نمودار توابع f و g حاصل $(3f + 2g)'(1)$ کدام است؟

$$۱ \quad (۱)$$

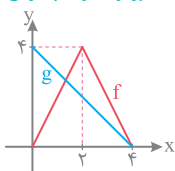
$$۲ \quad (۲)$$

$$۳ \quad (۳)$$

$$۴ \quad (۴)$$



(برگرفته از کتاب درسی)



NOTE



64

خرید آنلاین در gajmarket.com

وبسایت جامع کنکور

PLUS AZMOON

حسابان جامع کنکور | فصل ۱۰ مشتق



Manjul Bhargava

مانجول بارگاو
متولد ۱۹۷۴

آزمون ۳۰. اکستریم‌های تابع و توابع صعودی و نزولی
آزمون ۳۱. جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن
آزمون ۳۲. نمودارشناسی

11

CHAPTER

اکستریم‌های تابع و توابع صعودی و نزولی

آزمون سی‌ام



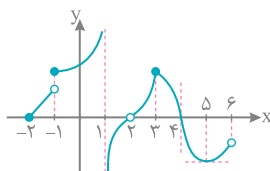
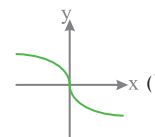
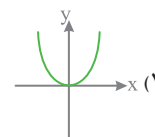
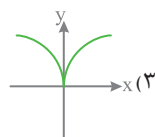
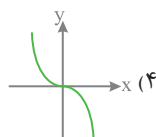
حسابان ۲

صفحه ۱۱۲ تا ۱۲۶



(داخل - ۹۱)

73



551 تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ در کدام بازه صعودی است؟

(۱) $(-2, 0)$ (۲) $(-\infty, -2)$

(۳) $(0, 2)$ (۴) $\mathbb{R}$

552 تابع با ضابطه $f(x) = mx^3 + 2x^2 + \frac{m}{3}x - 1$ همواره صعودی است. حدود m کدام است؟

(۱) $[-2, 2]$ (۲) $(-\infty, -2]$

(۳) $[-2, 0)$ (۴) $[2, +\infty)$

553 نمودار تابع $y = x^{\frac{1}{5}} - 4x^{\frac{2}{5}}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟

554 نمودار تابع f به صورت مقابل است، مجموعه طول نقاط بحرانی تابع f کدام است؟

(۱) $\{-1, 1, 4\}$ (۲) $\{-2, -1, 2, 3, 4\}$

(۳) $\{-1, 3, 4\}$ (۴) $\{-2, -1, 3, 4, 5\}$

555 نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = |x^2 - 2x|$ رؤس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱

(۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

556 مجموعه طول نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = (x^2 - 28) \times \sqrt[3]{x}$ کدام است؟

(۱) $\{-2, 2\}$ (۲) $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$

(۳) $\{-2, 0, 2\}$ (۴) $\{-7, 0, 1\}$

557 تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ در بازه $[-2, 1)$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱

(۳) ۲ (۴) بی‌شمار

558 تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x) = |\sin x|$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳

(۳) ۴ (۴) ۵

NOTE



559 تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = [x] \sin \pi x$ روی بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) بی‌شمار

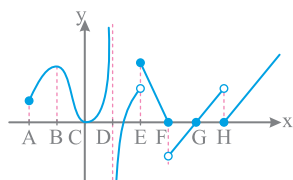
560 تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $y = |x^3 - x|$ روی بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

561 مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع $f(x) = |x - 2| \sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

- (۱) $\{0, \frac{4}{5}, 2\}$
(۲) $\{0, \frac{2}{3}, 2\}$
(۳) $\{0, 1\}$
(۴) $\{\frac{2}{3}, 2\}$

562 نمودار تابع f به شکل مقابل است. کدام گزینه نادرست است؟



- (۱) مجموعه نقاط ماکزیمم نسبی تابع $\{B, E\}$ است.
(۲) نقطه G اکسترمم نسبی نیست.
(۳) نقطه‌ای به طول A اکسترمم نسبی نیست.
(۴) مجموعه نقاط مینیمم نسبی تابع $\{C, E, H\}$ است.

563 تابع f روی بازه (a, b) تعریف شده است. در این صورت کدام عبارت در مورد تابع f درست است؟

- (۱) هر نقطه اکسترمم نسبی، یک نقطه بحرانی است.
(۲) هر نقطه بحرانی، یک نقطه اکسترمم نسبی است.
(۳) در هر نقطه بحرانی، تابع مشتق پذیر است.
(۴) در هر نقطه اکسترمم نسبی، تابع مشتق پذیر است.

564 در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{x}$ فاصله دو نقطه ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$
(۲) $2\sqrt{5}$
(۳) $\sqrt{2}$
(۴) $5\sqrt{2}$

565 طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$ کدامند و از چه نوع هستند؟

- (۱) $x = -1$ طول ماکزیمم و $x = 2$ طول مینیمم
(۲) $x = 1$ طول ماکزیمم و $x = -2$ طول مینیمم
(۳) $x = -1$ طول مینیمم و $x = 2$ طول ماکزیمم
(۴) $x = 1$ طول مینیمم و $x = -2$ طول ماکزیمم

566 تابع با ضابطه $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 8x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

- (۱) مینیمم نسبی
(۲) ماکزیمم نسبی
(۳) مینیمم و ماکزیمم نسبی
(۴) فاقد اکسترمم نسبی

567 فاصله نقطه ماکسیمم نسبی تابع $f(x) = \frac{2x - x^2}{(x+1)^2}$ از خط مجانب افقی آن کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
(۲) ۱
(۳) $\frac{4}{3}$
(۴) $\frac{3}{2}$

568 کدام تابع اکسترمم نسبی دارد؟

- (۱) $y = x|x|$
(۲) $y = \frac{1}{x}$
(۳) $y = \begin{cases} x^2 & ; x > 0 \\ x+1 & ; x \leq 0 \end{cases}$
(۴) $y = \sqrt[3]{x}$

569 در تابع با ضابطه $f(x) = x|x| - 2x$ فاصله دو نقطه ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$
(۲) ۳
(۳) $3\sqrt{2}$
(۴) ۴

(داخل - ۹۰)

(خارج - ۹۸)

(خارج - ۹۸)



1 بررسی گزینه‌ها:

1 هیچ عددی وجود ندارد که هم طبیعی باشد و هم گنگ، پس: $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$

2 از آن جایی که $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ، در نتیجه: $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$

3 چون $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ پس $\mathbb{Z} - \mathbb{Q} = \emptyset$ در نتیجه: $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$

4 می‌دانیم $\mathbb{Q} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$ ولی $\mathbb{Q}$ زیرمجموعه $\mathbb{W}$ نیست، بلکه $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q}$

2 با استفاده از نمایش هندسی، مجموعه‌های $A \cup C$ و $B \cap D$ را روی

محور مشخص می‌کنیم:



حال مجموعه $(A \cup C) - (B \cap D)$ را مشخص می‌کنیم:



3 بررسی گزینه‌ها:

1 این مجموعه به صورت $\{23, 24, 25, \dots\}$ است که نامتناهی است.

2 با تغییر مقدار ارتفاع و قاعده، بی‌شمار مثلث با مساحت 6 می‌توان ساخت.

3 در بازه $(1, 3)$ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

4 مجموعه اعداد طبیعی که عدد 10 بر آن‌ها بخش پذیر باشد، به صورت زیر است. پس این مجموعه، متناهی است.

$$A = \{1, 2, 5, 10\}$$

4 ابتدا مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}, B = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

1 $A - B = \{1, 9, 15, 21, \dots\}$ نامتناهی و غیر تهی

2 $B - A = \{2\}$ متناهی و غیر تهی

3 $A \cap B = \{3, 5, 7, 11, \dots\}$ نامتناهی و غیر تهی

4 $A - (A \cup B) = \emptyset$ تهی

5 بررسی گزینه‌ها:

1 در این حالت مجموعه A می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$$A \cup B = \{0, 1, 2, \dots\}, B = \{1, 2, 3, \dots\} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \{0, 2, 4, \dots\} \\ A_2 = \{0\} \end{cases}$$

2 در این حالت مجموعه $A \cap B$ می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$$A_1 = \{0, 1, 2, \dots\}, B_1 = \{1, 2, 3, \dots\} \Rightarrow A_1 \cap B_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$A_2 = \{0, 1, 2, \dots\}, B_2 = \{\dots, -2, -1, 0\} \Rightarrow A_2 \cap B_2 = \{0\}$$

3 اگر A نامتناهی باشد، A' می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$$A_1 = \{1, 3, 5, \dots\} \Rightarrow A'_1 = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$A_2 = \{2, 3, 4, \dots\} \Rightarrow A'_2 = \{1\}$$

4 اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، مجموعه $B - A$ نامتناهی است.

6 مجموعه مرجع به صورت $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ است، پس:

$$B' = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 8, 9\}$$

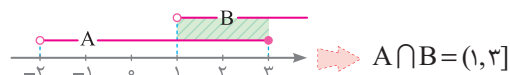
بنابراین مجموعه $B' - A$ برابر است با:

$$B' - A = \{1, 2, 3, 8, 9\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{8, 9\}$$

پس متمم مجموعه $B' - A$ به صورت $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ است که 7 عضودارد.

7 نمایش بازه‌ای مجموعه B به صورت $B = (1, +\infty)$ است. چون می‌دانیم

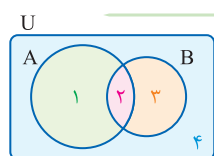
پس ابتدا مجموعه $A \cap B$ را مشخص می‌کنیم:



متمم مجموعه $A \cap B$ به صورت $(-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$ است، پس:

$$A' \cup B' = (A \cap B)' = (-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$$

8 نمودارون را برای دو مجموعه A و B رسم می‌کنیم و ناحیه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم:



$$(A - B) - (B \cap A') = (\{1, 2\} - \{2, 3\}) - (\{2, 3\} \cap \{3, 4\}) = \{1\}$$

با توجه به نمودار، ناحیه $\{1\}$ مجموعه $A - B$ را نشان می‌دهد.

9 برای به دست آوردن تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه A و B، به

تعداد اعضای اشتراک آن‌ها نیاز داریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \Rightarrow 3 = 4 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 1$$

بنابراین $n(A \cup B)$ برابر است با:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 7 - 1 = 10$$

10 می‌دانیم $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ است، بنابراین

هنگامی $n(A \cup B)$ ماکسیمم می‌شود که $n(A \cap B) = 0$ باشد، یعنی دو مجموعه جدا از هم باشند.

11 ابتدا تعداد عضوهای مجموعه B را به دست می‌آوریم:

$$n(B) = n(U) - n(B') \Rightarrow n(B) = 80 - 55 = 25$$

از طرفی $n(A \cup B) = 37$ است، حال اگر فرض

کنیم $n(A \cap B) = x$ خواهیم داشت:

$$(20 - x) + x + (25 - x) = 37 \Rightarrow x = 8$$

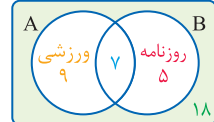
بنابراین تعداد اعضایی که فقط در مجموعه B هستند، برابر است با:

$$25 - x = 25 - 8 = 17$$

12 مطابق نمودارون روبه‌رو تعداد افرادی که عضو هیچ‌یک از گروه‌های

روزنامه دیواری و ورزشی نیستند برابر است با:

$$n(U) = 39 \Rightarrow 39 - (9 + 7 + 5) = 18$$





67 Δ طرفین تساوی داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2x + \frac{\Delta}{x} = 9 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (2x + \frac{\Delta}{x})^2 = 81 \Rightarrow 4x^2 + \frac{\Delta^2}{x^2} + 2(2x)(\frac{\Delta}{x}) = 81$$

$$\Rightarrow 4x^2 + \frac{\Delta^2}{x^2} + 4\Delta = 81 \Rightarrow 4x^2 + \frac{\Delta^2}{x^2} = 81 - 4\Delta$$

68 Δ با استفاده از اتحادهای مربع و مکعب دو جمله‌ای داریم:

$$\begin{aligned} A &= (x^2 - 6x^2 + 12x - 8) \left(\frac{x}{x^2 - 4x + 4} - \frac{1}{x-2} \right) \\ &= (x-2)^2 \left(\frac{x}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2} \right) = x(x-2) - (x-2)^2 \\ &= (x-2)(x - (x-2)) = (x-2) \times 2 \Rightarrow \frac{x-2}{A} = \frac{x-2}{2(x-2)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

اتحاد مکعب مجموع و تفاضل دو جمله‌ای به صورت زیر است:

$$1 \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$2 \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

69 Δ در جمله‌های x^4 و $8x$ از x و در جمله‌های $-3x^3$ و -24 از -3 فاکتور

می‌گیریم:

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^3 + 8x - 24 &= x(x^3 + 8) - 3(x^3 + 8) \\ &= (x-3)(x^3 + 8) = (x-3)(x+2)(x^2 - 2x + 4) \end{aligned}$$

اتحادهای زیر به اتحاد چاق و لاغر معروف هستند:

$$1 \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$2 \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

70 Δ در هریک از پرانتزها مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\left(x + \frac{2}{x-3}\right) \left(1 - \frac{1}{x-2}\right) = \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x-3}\right) \left(\frac{x-2}{x-2}\right) = \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = x-1$$

71 Δ کافیسست مخرج مشترک بگیریم و صورت کسر را ساده کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1} + \frac{x-1}{2x+1} - \frac{2x+1}{2x-1} &= \frac{2x^2 - x + (x-1)(2x-1) - (2x+1)(2x+1)}{4x^2 - 1} \\ &= \frac{2x^2 - x + 2x^2 - 3x + 1 - 4x^2 - 4x - 1}{4x^2 - 1} = \frac{-8x}{4x^2 - 1} \Rightarrow P(x) = -8x \end{aligned}$$

72 Δ می‌دانیم $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt{2}$ است، پس اگر عبارت داده شده را

A فرض کنیم با مربع کردن آن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \times \sqrt{2} \Rightarrow A^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \times 2 \\ &\Rightarrow A^2 = (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}) \times 2 \\ &\Rightarrow A^2 = (4 + 2\sqrt{4-3}) \times 2 = (4+2) \times 2 = 12 \Rightarrow A = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

73 Δ با استفاده از اتحاد مزدوج، عبارت خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta) &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2 \\ &= \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha^4 + \beta^4 + \alpha^2\beta^2 \\ &= \underbrace{(3\sqrt{2} - 4) + (3\sqrt{2} + 4)}_{6\sqrt{2}} + \underbrace{\sqrt{(3\sqrt{2} - 4)(3\sqrt{2} + 4)}}_{(3\sqrt{2})^2 - 4^2 = 2} = 7\sqrt{2} \end{aligned}$$

74 Δ می‌دانیم $2\sqrt{3 \times 5^2} = 2\sqrt{75} = 10\sqrt{3}$ ، پس داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{28+10\sqrt{3}} + \sqrt{28-10\sqrt{3}} &= \sqrt{28+2\sqrt{75}} + \sqrt{28-2\sqrt{75}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{25} + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{25} - \sqrt{3})^2} = |\sqrt{25} + \sqrt{3}| + |\sqrt{25} - \sqrt{3}| \\ &= 5 + \sqrt{3} + 5 - \sqrt{3} = 10 \end{aligned}$$

75 Δ مخرج کسر را گویا می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{2}{2+\sqrt{6}} \times \frac{2-\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}} + (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \\ = \frac{2(2-\sqrt{6})}{4-6} + 6 - \sqrt{6} - 6 = \frac{2(2-\sqrt{6})}{-2} - \sqrt{6} = \sqrt{6} - 2 - \sqrt{6} = -2 \end{aligned}$$

76 Δ مخرج کسرها را گویا می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3-\sqrt{7}} \times \frac{3+\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}} + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2} - \sqrt{4 \times 7} + \frac{\sqrt{4 \times 2}}{\sqrt{2}} \\ = \frac{2(3+\sqrt{7})}{9-7} + |2-\sqrt{7}| - 2\sqrt{7} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ = 3 + \sqrt{7} + \sqrt{7} - 2 - 2\sqrt{7} + 2 = 3 \end{aligned}$$

77 Δ اعداد زیر رادیکال‌ها را تجزیه و مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{3 \times 8} \times \sqrt[3]{9} + \frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \times \frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} - \sqrt{16 \times 5} \\ = \sqrt[3]{27 \times 8} + \frac{(2-\sqrt{5})^2}{4-5} - 4\sqrt{5} \\ = 3 \times 2 + \frac{4+5-4\sqrt{5}}{-1} - 4\sqrt{5} = 6-9+4\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = -3 \end{aligned}$$

78 Δ چون مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$ به صورت $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ است، پس باید

$$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = (a-b)$$

برای گویا کردن مخرج استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3 \times 2} + \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3 \times 2} + \sqrt[3]{2^2}} &= \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{2})^3} \\ &= \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{3-2} = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

79 Δ با قرار دادن $5 + \sqrt{17}$ به جای x خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x-1}{16} + \frac{1}{2x}} &= \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}-1}{16} + \frac{1}{2(5+\sqrt{17})}} \\ &= \sqrt{\frac{4+\sqrt{17}}{16} + \frac{1}{2(5+\sqrt{17})} \times \frac{5-\sqrt{17}}{5-\sqrt{17}}} \\ &= \sqrt{\frac{4+\sqrt{17}}{16} + \frac{5-\sqrt{17}}{2(25-17)}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{17}}{16} + \frac{5-\sqrt{17}}{16}} = \frac{3}{4} = 0.75 \end{aligned}$$



93 در سمت اول معادله مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x} \Rightarrow \frac{2x+2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2-x}{x(x-1)}$$

با شرط $x \neq 1$ عبارت $(x-1)$ را از مخرج کسرها حذف می‌کنیم:

$$\frac{4x-2}{x+1} = \frac{2-x}{x} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} 4x^2-2x = -x^2+x+2 \Rightarrow 5x^2-3x-2=0$$

با توجه به اینکه مجموع ضرایب در این معادله صفر است، یکی از ریشه‌ها ۱ و

$$x=1, x=-\frac{2}{5}$$

دیگری $\frac{c}{a}$ است. یعنی:

در معادله درجه دوم: $ax^2+bx+c=0$:

1 اگر $a+b+c=0$ باشد، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها برابر ۱ و ریشه دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

2 اگر $b=a+c$ باشد، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها برابر ۱ و ریشه دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

94 چون $x=3$ جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$\frac{x-2}{ax-5} = \frac{a+2}{x-1} \xrightarrow{x=3} \frac{1}{3a-5} = \frac{a+2}{2} \Rightarrow \frac{1}{3a-5} = \frac{a}{2}$$

$$2a^2-5a=2 \Rightarrow 2a^2-5a-2=0$$

برای راحت‌تر تجزیه کردن عبارت $2a^2-5a-2=0$ عدد ۲ را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2a^2-5a-2=0 \Rightarrow a^2-5a-6=0 \Rightarrow (a+1)(a-6)=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{3}, 6$$

95 با فرض $t = \frac{3x}{x-1}$ معادله به صورت $2t + \frac{1}{t} = 3$ در می‌آید:

$$2t + \frac{1}{t} = 3 \Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}} t=1, t=\frac{1}{2}$$

$$1 \quad \frac{3x}{x-1} = 1 \Rightarrow 3x = x-1 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ریشه بزرگ‌تر $= -\frac{1}{5}$

$$2 \quad \frac{3x}{x-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 6x = x-1 \Rightarrow 5x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$$

96 اگر بهروز کل کار را در x ساعت انجام دهد، پس در هر ساعت $\frac{1}{x}$ کار

را انجام می‌دهد. حال چون بهروز کار را ۹ ساعت زودتر از فرهاد انجام می‌دهد،

پس فرهاد کل کار را در $x+9$ ساعت انجام می‌دهد، پس در هر ساعت $\frac{1}{x+9}$

کار را انجام می‌دهد. از طرفی اگر هر دو با هم کار کنند، این کار در ۲۰ ساعت

انجام می‌شود، پس:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{(x+9)+x}{x(x+9)} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2x+9}{x^2+9x} = \frac{1}{20}$$

$$20x^2+9x = x^2+9x \Rightarrow 19x^2 = 0 \Rightarrow x=0, x=20$$

97 اگر سرعت آب برابر ۷ باشد، هنگامی که قایق در جهت آب حرکت می‌کند

سرعت آن برابر $100+7$ و هنگامی که در خلاف جهت آب حرکت می‌کند، سرعتش برابر

$100-7$ می‌شود. حال از آن جایی که اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است، پس:

$$\frac{1200}{100-7} - \frac{1200}{100+7} = 5 \xrightarrow{+5} \frac{2400}{100-7} - \frac{2400}{100+7} = 25 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{2400}{100-7} - \frac{2400}{100+7} = 25 \Rightarrow v=20$$

سرعت متوسط برابر است با جابه‌جایی تقسیم بر زمان سپری شده یعنی:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_{av}} \quad v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

98 وزن خالص ماده حل شده در هر حالت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{وزن ماده حل شده}}{11} = \frac{40}{100} \Rightarrow \text{وزن ماده حل شده} = 44$$

$$\frac{\text{وزن ماده حل شده}}{4} = \frac{70}{100} \Rightarrow \text{وزن ماده حل شده} = 28$$

حال با مخلوط کردن رنگ‌ها، $44+28=72$ کیلوگرم رنگ ایجاد می‌شود.

می‌خواهیم غلظت محلول را به ۵۰ درصد برسانیم. اگر فرض کنیم x کیلوگرم

از محلول تبخیر می‌شود؛ پس خواهیم داشت:

$$\frac{\text{وزن ماده حل شده}}{\text{وزن کل}} = \frac{50}{100} \Rightarrow \frac{72}{72-x} = \frac{50}{100} \Rightarrow \frac{72}{72-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 144 = 72-x \Rightarrow x=72$$

$$144-x=72 \Rightarrow x=72$$

99 اگر طول زمین x و عرض آن y باشد، با توجه به این که محیط زمین

$$2x+2y=20 \Rightarrow x+y=10 \Rightarrow y=10-x$$

برابر ۲۰ است؛ پس:

می‌دانیم به عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ عدد طلایی می‌گویند. بنابراین:

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{x}{10-x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2x = (1+\sqrt{5})(10-x) \Rightarrow 2x = 10 + 10\sqrt{5} - x - x\sqrt{5}$$

$$(3+\sqrt{5})x = 10(1+\sqrt{5}) \Rightarrow x = \frac{10(1+\sqrt{5})}{3+\sqrt{5}} = \frac{10(1+\sqrt{5})}{3+\sqrt{5}} \times \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{10(3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5)}{9-5} = \frac{10(2\sqrt{5}-2)}{4} = 5(\sqrt{5}-1) = 5\sqrt{5}-5$$

$$= \frac{10(3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5)}{9-5} = \frac{10(2\sqrt{5}-2)}{4} = 5(\sqrt{5}-1) = 5\sqrt{5}-5$$

100 طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2x+1 = \sqrt{11x-2} \Rightarrow (2x+1)^2 = 11x-2 \Rightarrow 4x^2+4x+1 = 11x-2 \Rightarrow 4x^2-7x+3=0$$

$$4x^2-7x+3=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=\frac{3}{4} \Rightarrow |x_1-x_2| = |1-\frac{3}{4}| = \frac{1}{4}$$

مجموع ضرایب = ۰

101 رادیکال را تنها کرده و سپس طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{2a^2+4a} = 2-3a \Rightarrow 2a^2+4a = 4-12a+9a^2 \Rightarrow 7a^2-16a+4=0$$

برای راحت‌تر تجزیه کردن عبارت $7a^2-16a+4=0$ ، عدد ۷ را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$7a^2-16a+4=0 \Rightarrow a^2-16a+28=0 \Rightarrow (a-14)(a-2)=0$$

ریشه‌های معادله $a=2$ و $a=14$ می‌آید، اما چون $a=2$ طرف

سمت راست معادله اولیه را منفی می‌کند، قابل قبول نیست و فقط $a=14$

قابل قبول است، بنابراین:

$$\frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{14} = \frac{15}{14}$$

102 معادله را به صورت $\sqrt{4x-3} = 2-3x$ می‌نویسیم و دامنه رادیکال

$$4x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{4}$$

را به دست می‌آوریم:

به ازای $x \geq \frac{3}{4}$ طرف دوم تساوی، یعنی $2-3x$ عددی منفی است:

$$x \geq \frac{3}{4} \xrightarrow{x=\frac{3}{4}} -3x \leq -\frac{9}{4} \Rightarrow 2-3x \leq 2-\frac{9}{4} \Rightarrow 2-3x \leq -\frac{1}{4}$$

بنابراین معادله داده شده جواب ندارد.

131 در معادله $x^2 - (m+1)x + \frac{1}{16} = 0$ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها

برابر است با: $S = -\frac{-(m+1)}{1} = \frac{m+1}{1}$, $P = \frac{\frac{1}{16}}{1} = \frac{1}{16}$

مجموع جذر هر دو ریشه معادله برابر ۲ است، پس:

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2 \Rightarrow \sqrt{S+2\sqrt{P}} = 2 \Rightarrow S+2\sqrt{P} = 4$$

$$\frac{m+1}{1} + 2\sqrt{\frac{1}{16}} = 4 \Rightarrow \frac{m+1}{1} + \frac{1}{2} = 4$$

$$\frac{m+2}{1} = 4 \Rightarrow m+2 = 4 \Rightarrow m = 2$$

132 در معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ مجموع و حاصل ضرب

ریشه‌ها برابر است با: $S = -\frac{-(m+3)}{m} = \frac{m+3}{m}$, $P = \frac{5}{m}$

اگر ریشه‌های معادله α و β باشند، با توجه به صورت تست داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 6 \Rightarrow S^2 - 2P = 6$$

حال به جای S و P در رابطه $S^2 - 2P = 6$ جایگذاری می‌کنیم:

$$S^2 - 2P = 6 \Rightarrow \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6 \Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9 - 10m}{m^2} = 6$$

$$m^2 - 4m + 9 = 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-\frac{9}{5} \end{cases}$$

حال به ازای هر کدام از m ‌های به دست آمده شرط حقیقی بودن ریشه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$m=1: x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4 < 0$$

$$m=-\frac{9}{5}: -\frac{9}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = \left(-\frac{6}{5}\right)^2 - 4\left(-\frac{9}{5}\right)(5) = \frac{36}{25} + 36 > 0$$

بنابراین تنها جواب قابل قبول $m = -\frac{9}{5}$ است. [البته در این حالت نیازی به چک کردن Δ نبود، چون a و c مختلف‌العلامه بودند معادله قطعاً دو ریشه داشت]

133 اگر ریشه‌های معادله را α, β فرض کنیم طبق فرض مسئله رابطه

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta} + 5$$

مجموع ریشه‌ها برابر است با $\alpha + \beta = -\frac{-1}{1} = 1$ بنابراین:

$$\frac{\beta}{\beta} + 5 + \beta = 1 \Rightarrow \frac{\beta}{\beta} = 1 - 5 - \beta \Rightarrow \frac{\beta}{\beta} = -4 - \beta \Rightarrow \beta = -2$$

چون $\beta = -2$ یکی از ریشه‌های معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$2^2 - 8 \times 2 + m = 0 \Rightarrow m = 12$$

134 به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

1 ریشه‌های معادله $3x^2 - 4x - 1 = 0$ را α و β در نظر می‌گیریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3}, P = \alpha\beta = -\frac{1}{3}$$

2 ریشه‌های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ برابر $\alpha+1$ و $\beta+1$ است. حاصل ضرب

این ریشه‌ها برابر است با:

$$P_{\text{new}} = \frac{b}{3} \Rightarrow (\alpha+1)(\beta+1) = \frac{b}{3} \Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = \frac{b}{3}$$

$$-\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{b}{3} = 2 \Rightarrow b = 6$$

125 برای این که معادله درجه دوم $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{4}m + 2 = 0$

فاقد ریشه حقیقی باشد، باید $\Delta < 0$ باشد:

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4\left(\frac{1}{4}m + 2\right) < 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - 4m - 8 < 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 7 < 0$$

$$(m-5)(m+3) < 0 \Rightarrow -3 < m < 5$$

126 برای این که معادله درجه دوم $2x^2 + mx + m - \frac{3}{4} = 0$ دو ریشه

حقیقی متمایز داشته باشد، باید $\Delta > 0$ باشد:

$$\Delta = m^2 - 4\left(\frac{3}{4}\right)(m - \frac{3}{4}) > 0 \Rightarrow m^2 - 3m + \frac{9}{4} > 0 \Rightarrow (m - \frac{3}{2})^2 > 0 \Rightarrow m < \frac{3}{2} \text{ یا } m > \frac{3}{2}$$

127 از آن جایی که α و β ریشه‌های معادله هستند، پس:

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = 5, P = \alpha\beta = 2$$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

1 $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha + \beta) = 2 \times 5 = 10$

2 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{5}{2}$

3 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 5^2 - 2 \times 2 = 25 - 4 = 21$

4 $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{21}{2}$

128 x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند؛ پس:

$$4x^2 - 12x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{12}{4} = 3, x_1x_2 = \frac{1}{4}$$

حال با فرض $A = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ داریم:

$$A = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \Rightarrow A^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2}$$

$$A^2 = 3 + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 3 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + 1 = 4 \Rightarrow A = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

چون A مجموع دو عدد مثبت است، پس $A = 2$ جواب است.

129 چون α یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + x - 3 = 0$ است، پس در

آن صدق می‌کند: $\alpha^2 + \alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha + 1) = 3 \Rightarrow \frac{1}{\alpha+1} = \frac{\alpha}{3}$

$$\frac{1}{\alpha+1} + \frac{\beta}{3} = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} = \frac{\alpha+\beta}{3}$$

$$\frac{\alpha+\beta}{3} = -\frac{1}{3} \text{ پس: } \alpha + \beta = -1$$

130 ریشه‌های معادله $mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$ معکوس یکدیگرند؛ پس:

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1x_2 = 1 \Rightarrow P = \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{m^2 - 2}{m} = 1 \Rightarrow m^2 - 2 = m$$

$$m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = -1, m = 2$$

به ازای $m = 2$ معادله فاقد ریشه حقیقی است، زیرا:

$$m = 2: 2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2)(2) = -7 < 0$$

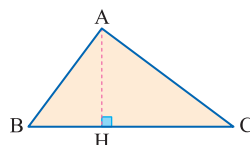




154 ۲ ابتدا نقطه A یعنی محل برخورد ضلع های AB و AC را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} 2y - x = 3 \\ y - 2x = 5 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{y}{3}, y = \frac{1}{3} \Rightarrow A(-\frac{y}{3}, \frac{1}{3})$$

حال شیب خط BC را قرینه و عکس می کنیم تا شیب AH به دست آید:



$$m_{BC} = -\frac{2}{3} \Rightarrow m_{AH} = \frac{3}{2}$$

بنابراین معادله AH برابر است با:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - \frac{1}{3} = \frac{3}{2}(x + \frac{y}{3}) \xrightarrow{\times 6} 6y - 2 = 9x + 2y \Rightarrow 4y - 9x = 2$$

155 ۳ اگر سه نقطه روی یک خط راست باشند، شیب خطی که از هر دو

نقطه دلخواه می گذرد باهم برابر است. پس:

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{5-4}{a-2} = \frac{1}{a-2} \\ m_{AC} = \frac{1-4}{(2-a)-2} = \frac{-3}{-a} = \frac{3}{a} \end{cases}$$

$$m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow \frac{1}{a-2} = \frac{3}{a} \Rightarrow 3a - 6 = a \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

156 ۴ فاصله دو نقطه A(2, 4) و B(-1, 8) برابر طول ضلع مربع است:

$$AB = \sqrt{(-1-2)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با: $S = 5^2 = 25$

157 ۴ ابتدا طول اضلاع را به دست می آوریم:

$$AB = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$AC = \sqrt{(-1-4)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

$$BC = \sqrt{(4-2)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{4+81} = \sqrt{85}$$

چون طول اضلاع AB و AC برابر است، مثلث متساوی الساقین است. همچنین رابطه فیثاغورس میان اضلاع آن برقرار است، پس مثلث قائم الزاویه نیز هست:

158 ۴ محل برخورد دو به دو خطها را می یابیم تا مختصات رئوس مثلث

به دست آید:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y=x+1 \end{cases} \Rightarrow A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad \begin{cases} y=x+1 \\ y=-2x+2 \end{cases} \Rightarrow C(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y=-2x+2 \end{cases} \Rightarrow B(2, -2)$$

حال مساحت مثلث را به دست می آوریم:

$$S = \frac{1}{2} |(-\frac{1}{2})(-\frac{4}{3}) + 2(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - (-2))|$$

$$= \frac{1}{2} |\frac{2}{3} + \frac{10}{3} + \frac{5}{6}| = \frac{1}{2} \times \frac{25}{2} = \frac{25}{4}$$

در هر مثلث دلخواه، با داشتن مختصات رأس های A, B, C می توانیم مساحت را از رابطه زیر به دست آوریم:

$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

159 ۴ رأس C قرینه نقطه A نسبت به O است. می دانیم که قطرها ی لوزی یکدیگر را نصف می کنند پس نقطه O وسط رأس های B و D قرار دارد. بنابراین:

$$O = \frac{B+D}{2} \Rightarrow O = (\frac{4+(-2)}{2}, \frac{5+3}{2}) = (1, 4)$$

$$O = \frac{A+C}{2} \Rightarrow C = 2O - A \Rightarrow C = (2, 8) - (5, -2) = (-3, 10)$$

160 ۳ ابتدا محل برخورد دو ضلع را می یابیم:

$$\begin{cases} 3y + 4x = 8 \\ 2y - 3x = 11 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 4 \Rightarrow B(-1, 4)$$

از آن جایی که مختصات رأس A(7, 6) در هیچ کدام از خطها صدق می کند، پس نقطه A روی این دو خط قرار ندارد. در نتیجه نقطه B روبه روی A قرار دارد. پس نقطه وسط آن ها محل برخورد قطرها است:

$$M(\frac{7-1}{2}, \frac{6+4}{2}) \Rightarrow M(3, 5)$$

161 ۱ می دانیم که فاصله مرکز دایره از خط مماس برابر با اندازه شعاع دایره

است یعنی فاصله نقطه O از خط $x - 2y - 1 = 0$ برابر $\sqrt{5}$ است. نقطه O روی نیمساز ربع اول و سوم و در نتیجه مختصات آن به صورت (α, α) است، بنابراین:

$$r = OH = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{|\alpha - 2\alpha - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{|1 + \alpha|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow |1 + \alpha| = 5 \Rightarrow 1 + \alpha = \pm 5 \Rightarrow \alpha = 4, \alpha = -6$$

با توجه به گزینه ها $\alpha = 4$ جواب صحیح است.

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط d به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

162 ۳ اولاً چون دو خط موازی اند، پس شیب های برابر دارند:

$$\begin{cases} d_1: 2y - x = 7 \\ d_2: 4y - ax = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرب در دو معادله}} \begin{cases} 4y - 2x = 14 \\ 4y - ax = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2$$

سپس فاصله دو خط را، که همان قطر دایره است، به دست می آوریم:

$$2r = \frac{|14 - 2|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{12}{\sqrt{20}} = \frac{12}{2\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \Rightarrow r = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$S = \pi r^2 = \pi (\frac{3}{\sqrt{5}})^2 = \pi (\frac{9}{5}) = 1.8\pi$$

فاصله دو خط موازی $ax + by = c$ و $ax + by = c'$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

163 ۴ فاصله نقطه A از ضلع برابر نصف طول ضلع است:

$$AH = \frac{|3 - 2(-1) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{a}{2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow a = 4\sqrt{5} \Rightarrow S = a^2 = (4\sqrt{5})^2 = 80$$

1 عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد:

$$x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x-3) > 0 \Rightarrow x < 0 \cup x > 3$$

2 عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد:

$$0 \leq 1 - \log(x^2 - 3x) \Rightarrow \log(x^2 - 3x) \leq 1 \Rightarrow x^2 - 3x \leq 10$$

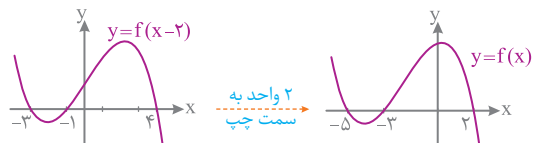
$$x^2 - 3x - 10 \leq 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 5$$

از اشتراک 1 و 2 دامنه تابع به صورت $[-2, 0) \cup (3, 5]$ به دست می آید.

• $x = 0$ جلوی لگاریتم را صفر می کند، پس 1 حذف می شوند. با قرار دادن

$x = 6$ عبارت زیر رادیکال منفی می شود، پس 2 نیز حذف می شود.

178 ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را مشخص می کنیم:



حال برای تعیین دامنه $y = \sqrt{xf(x)}$ باید $xf(x) \geq 0$ باشد:

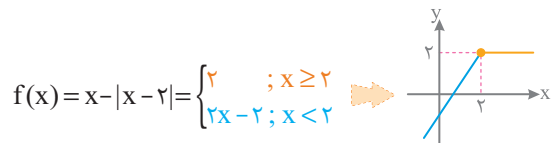


بنابراین دامنه تابع به صورت بازه $[-5, -3] \cup [0, 2]$ است.

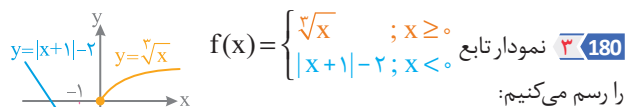
با جای گذاری $x = -1$ در تابع به عبارت $\sqrt{-f(-1)}$ می رسمیم. از آن جایی

که $f(-1) > 0$ مثبت است، پس عبارت زیر رادیکال منفی می شود و گزینه های 1، 2، 3 حذف می شوند.

179 نمودار تابع f را رسم می کنیم:



بنابراین برد تابع برابر بازه $(-\infty, 2]$ است.



بنابراین برد تابع f برابر بازه $R_f = [-2, +\infty)$ است.

181 چون x^2 عبارتی نامنفی است، پس $\frac{x^2}{x^2+1}$ مثبت بوده و چون مخرج از

صورت یک واحد بیشتر است، پس حاصل $\frac{x^2}{x^2+1}$ عددی کوچکتر از یک خواهد بود، بنابراین برد تابع بازه $[0, 1)$ است.





288 ابتدا با استفاده از تعریف لگاریتم مقدار X را به دست می‌آوریم:

$$\log_7(6 + \log_7 x) = 3 \Rightarrow 6 + \log_7 x = 7^3 = 8 \Rightarrow \log_7 x = 2$$

$$\Rightarrow x = 7^2 = 49 \Rightarrow \log_7(x-1) = \log_7 48 = \log_7 2^3 = 3$$

289 ابتدا A را به دست می‌آوریم:

$$A = \log_8 2^{\sqrt{2}/25} = \log_8 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_8 2 \times (2^{-2})^{\frac{1}{2}} = \log_8 2 \times 2^{-1} = \log_8 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= \log_{8^{\frac{1}{2}}} 2 \times 2^{-\frac{1}{2}} = \log_{8^{\frac{1}{2}}} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{8^{\frac{1}{2}}} 2 = \frac{1}{4}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\log_8 \left(\frac{1}{A} - 1\right) = \log_8 (4 - 1) = \log_8 4 = \log_8 2^2 = \frac{2}{3}$$

$$\log_{\sqrt{7}} a = \frac{4}{3} \Rightarrow a = (\sqrt{7})^{\frac{4}{3}} = (7^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}} = 7^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \log_8 (a^{\frac{1}{2}} + 7) = \log_8 ((7^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} + 7) = \log_8 (7^{\frac{1}{3}} + 7)$$

$$= \log_8 16 = \log_{8^{\frac{1}{2}}} 2^4 = \frac{4}{3}$$

291 از $\log_7 12 = a$ نتیجه می‌گیریم $7^a = 12$ است. پس:

$$4^{a-2} = \frac{4^a}{4^2} = \frac{(7^a)^2}{16} = \frac{12^2}{16} = \frac{144}{16} = 9$$

292 روش اول:

$$\log_7 9A^2 = \log_7 9 + \log_7 (3^a)^2 = \log_7 3^2 + \log_7 3^{2a} = 2 + 2a$$

روش دوم: از $7^a = A$ نتیجه می‌گیریم $\log_7 A = a$ است، بنابراین:

$$\log_7 9A^2 = \log_7 9 + \log_7 A^2 = 2 + 2\log_7 A = 2 + 2a$$

293 ابتدا لگاریتم خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$\log \sqrt[3]{1/6} = \log \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} (\log 1 - \log 6) = \frac{1}{3} (0 - (\log 2 + \log 3)) = -\frac{1}{3} (\log 2 + \log 3)$$

حال از آن جایی که $\log 2 = 1 - \log 3$ پس $\log 2 = 1 - \log 3$ ، بنابراین:

$$\frac{1}{3} (\log 2 - \log 3) = \frac{1}{3} (1 - \log 3 - \log 3) = \frac{1}{3} (1 - 2\log 3) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \log 3$$

294 از آنجایی که $\log 3 = a$ و $\log 2 = 1 - \log 3 = 1 - a$ است، داریم:

$$\log 24 = \log 3 \times 2^3 = \log 3 + \log 2^3 = \log 3 + 3\log 2 = a + 3(1 - a) = 3 - 2a$$

295 اگر یک لگاریتم در مبنایی داده شود و حاصل یک لگاریتم در مبنای دیگری خواسته شود، به طوری که مبنایها به یکدیگر قابل تبدیل نباشند، از قانون تغییر مبنای استفاده می‌کنیم. چون یک لگاریتم در مبنای 10 داده شده و حاصل یک لگاریتم دیگر در مبنای 5 را می‌خواهیم، پس:

$$\log_5 16 = \frac{\log 16}{\log 5} = \frac{\log 2^4}{\log 5} = \frac{4\log 2}{\log 5} \xrightarrow{\log 5 = 1 - \log 2} \frac{4\log 2}{1 - \log 2}$$

$$\Rightarrow \log_5 16 = \frac{4 \times 0.3}{1 - 0.3} = \frac{1.2}{0.7} = \frac{12}{7}$$

296 با توجه به قانون اعداد با توان لگاریتمی، خواهیم داشت:

$$\sqrt{10 \cdot \log 5 + 3 \log 2} = \sqrt{10 \cdot \log 5 + \log 8} = \sqrt{10 \cdot \log 40} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

297 ضرب پشت لگاریتم را به توان عبارت جلوی لگاریتم منتقل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5}) &= \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + \sqrt{5})^2 \\ &= \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + 2\sqrt{5} + 5) = \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(6 + 2\sqrt{5}) \\ &= \log(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5}) = \log(36 - (2\sqrt{5})^2) \\ &= \log(36 - 20) = \log 16 = 4\log 2 = 4k \end{aligned}$$

298 برای تعیین دامنه تابع $f(x) = \log_{(x-5)}(14-x)$ داریم:

$$14 - x > 0 \Rightarrow 14 > x$$

$$x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5 \Rightarrow x \in (5, 14) \cup (14, 14)$$

$$x - 5 \neq 1 \Rightarrow x \neq 6$$

دامنه این تابع شامل 7 عدد صحیح است که عبارتند از: 7, 8, ..., 13

299 ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$\log(2x - 1) + \frac{1}{2} \log x^2 = \log 3 \Rightarrow \log(2x - 1) + \log \sqrt{x^2} = \log 3$$

$$\Rightarrow \log(2x - 1) + \log |x| = \log 3$$

حال چون دامنه معادله $x > \frac{1}{2}$ است، پس $|x| = x$ و داریم:

$$\log(2x - 1) + \log x = \log 3 \Rightarrow \log(2x - 1)x = \log 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x = 3 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \xrightarrow{b=a+c} x = \frac{3}{2}, x = -1$$

$$\log_5 \frac{x}{3} = \log_5 \frac{3}{3} = \log_5 1 = \log_5 3^{-1} = -\frac{1}{3}$$

$$\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5) \quad 300$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 3}\right) = \log(2x - 5) \Rightarrow \frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3} = 2x - 5$$

$$\Rightarrow x + 2 = 2x - 5 \Rightarrow x = 7$$

$$\Rightarrow \log_5 \sqrt[3]{x+1} = \log_5 \sqrt[3]{7+1} = \log_5 \sqrt[3]{8} = \log_5 2 = \frac{1}{3}$$

$$1 \log(y+2) = 1 \Rightarrow y+2 = 10 \Rightarrow y = 8 \quad 301$$

$$2 \log(y-x) + \log(4x+y) = 2 \Rightarrow \log(\lambda-x) + \log(4x+\lambda) = 2$$

$$\Rightarrow \log(\lambda-x)(4x+\lambda) = 2 \Rightarrow 4(\lambda-x)(x+2) = 10^2 = 100$$

$$\Rightarrow (\lambda-x)(x+2) = 25 \Rightarrow \lambda x + 16 - x^2 - 2x = 25$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$$

302 از معادله $\log_3 x + \log_3 y = 2$ داریم:

$$\log_3 xy = 2 \Rightarrow xy = 3^2 = 9$$

از طرفی $x^2 + y^2 = 46$ است، بنابراین با استفاده از اتحاد زیر عبارت $(x+y)$ را به دست می‌آوریم:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 46 + 2 \times 9 = 64 \Rightarrow x+y = 8 \text{ یا } -8$$

$$\log_5(x+y) = \log_5 8 = \log_5 2^3 = \frac{3}{5} = 1/5$$

330 دوزاویه 22° و 67° متتام اند. بنابراین $\sin 67^\circ = \cos 22^\circ$ است. در نتیجه جای محاسبه مقدار $\sin 67^\circ$ ، مقدار معادل، یعنی $\cos 22^\circ$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\cos 22^\circ = \frac{1 + \cos 44^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 67^\circ = \cos 22^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{4}$$

331

$$\frac{\sqrt{1 + \cos 20^\circ}}{\cos^2 5^\circ - \sin^2 5^\circ} = \frac{\sqrt{2 \cos^2 10^\circ}}{(\cos^2 5^\circ - \sin^2 5^\circ)(\cos^2 5^\circ + \sin^2 5^\circ)}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \sqrt{2}$$

332 با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

333 در تست‌هایی که صحبت از $\sin \theta \pm \cos \theta$ می‌شود، می‌توانیم بابه توان رساندن طرفین عبارت داده شده، عبارت $\sin 2\theta$ را ایجاد کنیم.

ابتدا عبارت خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha$$

حال از تساوی داده شده، مقدار $\sin 2\alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{توان}]{\text{طرفین به}} (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

334 ابتدا $\sin \alpha$ را محاسبه کرده و سپس از اتحاد استفاده می‌کنیم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sin \alpha} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

به روابط زیر دقت کنید:

$$1 \quad \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \quad 2 \quad \tan \alpha - \cot \alpha = -\frac{2}{\sin 2\alpha}$$

335 از تساوی داده شده داریم:

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow -2 \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan x = -2$$

حال با استفاده از رابطه $\tan 2x$ خواهیم داشت:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \times (-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{-4}{1 - 4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

336 صورت کسر را با استفاده از رابطه $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ و مخرجکسر را با استفاده از رابطه $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{حال حاصل عبارت خواسته شده را به دست می‌آوریم:}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cot \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

337 می‌دانیم:

$$\tan \frac{2\pi}{3} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}, \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = -\cos x$$

حال از تساوی داده شده داریم:

$$\tan \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = 1 \Rightarrow (-\sqrt{3})(-\cos x) = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

بنابراین حاصل $\cos 2x$ برابر است با:

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

338

$$\frac{\sin 40^\circ \cos 20^\circ + \cos 40^\circ \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \sin 40^\circ \sin 20^\circ} = \frac{\sin(40^\circ + 20^\circ)}{\cos(40^\circ + 20^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

روابط $\sin(\alpha \pm \beta)$ و $\cos(\alpha \pm \beta)$ به صورت زیر است.

$$1 \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$2 \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

339 ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم و خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ - 15^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = 2\sqrt{2}$$

روابط $\cos \alpha \pm \sin \alpha$ به صورت زیر است:

$$1 \quad \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

$$2 \quad \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

340 ابتدا حاصل $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ را به دست می‌آوریم:

$$\left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha\right) - \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha\right)$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \alpha$$

حال از آن جایی که $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ است خواهیم داشت:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sqrt{2} \sin \alpha = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

361 ابتدا با استفاده از رابطه $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ضابطه تابع را ساده

می‌کنیم: $y = 1 + a \sin bx \cos bx = 1 + a \frac{1}{2} \sin 2bx = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$
 باتوجه به نمودار، بیشترین مقدار تابع برابر $\frac{3}{2}$ است، پس:

$$1 + \frac{a}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

از طرفی دوره تناوب تابع برابر $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ است، پس:

$$T = \frac{2\pi}{|2b|} \Rightarrow \pi = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

از آن جایی که نمودار در آغاز رسم در مبدأ به طرف بالا می‌رود، پس a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند. با توجه به گزینه‌ها a و b را مثبت در نظر می‌گیریم، پس:

$$a + b = 1 + 1 = 2$$

362 ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = a \cos \pi \left(\frac{1}{2} - bx \right) = a \cos \left(\frac{\pi}{2} - b\pi x \right) = a \sin b\pi x$$

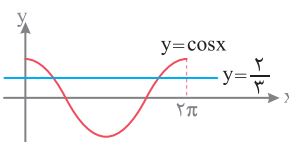
با توجه به نمودار بیشترین مقدار تابع برابر 3 است، پس $a = \pm 3$.

از طرفی دوره تناوب تابع برابر 1 است، پس:

$$T = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

از آنجایی که نمودار ابتدا نزولی است، پس a و b هم علامت نیستند، بنابراین $a.b = -6$ است.

363 از معادله $3 \cos x - 2 = 0$



به معادله $\cos x = \frac{2}{3}$ می‌رسیم.

مطابق شکل معادله $\cos x = \frac{2}{3}$ در

بازه $[0, 2\pi]$ دارای 2 جواب است:

364 ابتدا معادله را به صورت $\cos 3x = -\cos x$ می‌نویسیم و با استفاده از

رابطه $\cos(\pi - x) = -\cos x$ ، ضرب منفی را از بین می‌بریم:

$$\cos 3x = \cos(\pi - x) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + (\pi - x) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - (\pi - x) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

365 می‌دانیم $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ است، پس:

$$\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0 \Rightarrow \sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 2x = \sin(-x)$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + (-x) \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - (-x) \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر است با: $0 + \pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi$

366 ابتدا $\cos 2x$ را به سمت راست تساوی منتقل می‌کنیم که معادله

به صورت $\sin 3x = -\cos 2x$ درمی‌آید. سپس با توجه به این که $-\cos 2x$

برابر با $\sin(\frac{3\pi}{2} - 2x)$ است، سمت راست معادله را به سینوس تبدیل می‌کنیم:

$$\sin 3x = \sin(\frac{3\pi}{2} - 2x) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + (\frac{3\pi}{2} - 2x) \\ 3x = 2k\pi + \pi - (\frac{3\pi}{2} - 2x) \end{cases}$$

حال در هر یک از تساوی‌ها همه x ها را به یک طرف برده و ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \frac{3\pi}{10}, x = \frac{7\pi}{10} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} \text{جواب ندارد.} \end{cases}$$

بنابراین معادله در بازه $[0, \pi]$ دارای 2 جواب است.

367 به جای $\sin^2 x$ معادل آن یعنی $1 - \cos^2 x$ را قرار می‌دهیم تا به یک

معادله درجه دوم برحسب $\cos x$ برسیم:

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0$$

$$-2 \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(-2)} = \frac{-3 \pm 5}{-4}$$

$$\cos x = 2, \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

368 با استفاده از رابطه $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$ داریم:

$$\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos 2x + 1 + \cos 2x = 0$$

$$2 \cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

369 می‌دانیم $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x$ است. بنابراین در معادله مثلثاتی

$$4 \sin x \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$$

$$4 \sin x (-\cos x) = 1 \Rightarrow 2 \sin x \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{11\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{7\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \end{cases}$$

در نتیجه مجموع جواب‌ها برابر است با:

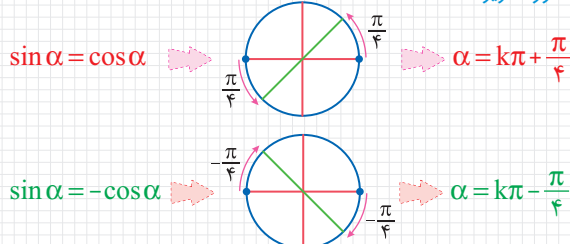
$$\frac{11\pi}{12} + \frac{23\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} + \frac{19\pi}{12} = \frac{(11+23+7+19)\pi}{12} = \frac{60\pi}{12} = 5\pi$$

$$2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow \underbrace{2 \cos^2 x - 1}_{\cos 2x} + \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x = -\cos 2x \xrightarrow{\sin \alpha = -\cos \alpha} 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin \alpha = -\cos \alpha$ و $\sin \alpha = \cos \alpha$

به صورت زیر است:





392 بررسی گزینه ها:

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3x + 2) = 6$$

$$2 \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 3x + 2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$3 \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 1) = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x - 5) = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{وجود ندارد: } \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (2x - 5) = 3$$

393 با توجه به ضابطه توابع f و g، داریم:

$$1 \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + 1 + x - 2) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 6 + 2x) = 9 \end{cases}$$

$$1 \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x + 1}{x - 2} = -\frac{5}{1} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 6}{2x} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$3 \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + 1 - (x - 2)) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 6 - (2x)) = 5 \end{cases}$$

$$4 \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ((3x + 1) \cdot (x - 2)) = -4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ((x^2 + 6) \cdot (2x)) = 14 \end{cases}$$

394 با توجه به تساوی داده شده داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{f(x) - 3} = 1 \Rightarrow \frac{2}{\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 3)} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 3) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f(x) + 4} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + 4)} = \sqrt{5 + 4} = 3$$

395 وقتی $x \rightarrow 0^-$ داریم:

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow [x] = -1, |x| = -x$$

حال حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f[x] - |x|}{|x| - [x]} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(-1) - (-x)}{(-x) - (-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-4 + x}{-x + 1} = \frac{-4}{1} = -4$$

396 برای این که تابع در $x = 0$ دارای حد باشد، باید حد راست و حد چپ

آن در این نقطه برابر باشند:

$$1 \quad x \rightarrow 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow [x] = x, [x] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{a(x)}{x} - f(0) \right) = a$$

$$2 \quad x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow [x] = -x, [x] = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{a(-x)}{x} - f(-1) \right) = -a + 4$$

بنابراین از 1 و 2 داریم:

$$a = -a + 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

397 با کمک دایره مثلثاتی، حاصل هریک از حدها را به دست می‌آوریم:

$$x \rightarrow \pi^-: \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{|\sin x|} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{-\sin x} = -1$$

$$x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}: \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} [\cos x] = -1$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر $1 + (-1) = 0$ است.398 چون نمودار تابع $y = \tan x$ در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ اکیداً صعودی است.پس وقتی $x \rightarrow \frac{\pi^+}{3}$ مقدار $\tan x$ کمی بیش‌تر از $\sqrt{3}$ و وقتی $x \rightarrow \frac{\pi^-}{3}$ مقدار $\tan x$ کمی کمتر از $\sqrt{3}$ خواهد شد:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{3}} ([\sin(x - \frac{\pi}{3})] \cos 3x + [\tan^2 x]) = [0^+](1) + [3^+] = 0 + 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{3}} ([\sin(x - \frac{\pi}{3})] \cos 3x + [\tan^2 x]) = [0^-](1) + [3^-] = 0 + 2 = 2$$

بنابراین حد عبارت برابر 3 است.

399 چون تابع f در $x = -1$ حد دارد، پس حد چپ و حد راست آن در $x = -1$ باهم برابر هستند:

$$1 \quad x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow [x] = -2, |x| = -x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + [x]}{x - (-1) - |x|} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 2}{-x - 1} = \frac{1 - 2}{1} = -1$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (3x + a) = -3 + a$$

$$-3 + a = -1 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین خواهیم داشت:

400 چون حد تابع f در $x = -1$ برابر 5 است، پس حد راست و حد چپ

تابع نیز برابر 5 هستند:

$$1 \quad x \rightarrow (-1)^+ \Rightarrow x > -1 \Rightarrow [x] = -1, |x| = -x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} ((b+1)[x] + |x|) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (-(b+1) - x)$$

$$= -(b+1) - (-1) = -b - 1 + 1 = -b \Rightarrow -b = 5 \Rightarrow b = -5$$

$$2 \quad x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow [x] = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (a[x] + 2bx - 1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (-2a + 2(-5)x - 1)$$

$$= -2a - 10 - 1 = -2a - 11 = 5 \Rightarrow -2a = 16 \Rightarrow a = -8$$

401 ابتدا باید مشخص کنیم وقتی $x \rightarrow 0^-$ عبارت $x^3 - x$ چه وضعی دارد:

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow x(x^2 - 1) \rightarrow 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 - x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

بنابراین باید از ضابطه بالا استفاده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 - x} = \sqrt{1 - 0} = 1$$

478 در صورت کسر $f(x)$ را اضافه و کم می‌کنیم تا بتوانیم حد داده شده را به تعریف مشتق تبدیل کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + f(x) - f(x-h)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \\ = 3f'(x) + f'(x) = 4f'(x) = 4 \times \frac{3}{4} = 3 \end{aligned}$$

479 با استفاده از رابطه $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ صورت کسر را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a \cos x + \cos a \sin x - \sin a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+a) - \sin a}{x}$$

حد ایجاد شده برابر تعریف مشتق تابع $y = \sin x$ در نقطه $x = a$ است، پس حاصل حد برابر $\cos a$ است.

480 می‌دانیم اگر نمودار تابع f در $x = a$ تو خالی باشد، برای محاسبه

مشتق توابع به صورت $y = (x-a)f(x)$ در نقطه $x = a$ باید از تعریف مشتق استفاده کنیم. پس برای محاسبه مشتق تابع $y = xf(x)$ در $x = 0$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

1 تابع $y = g(x) = xf(x)$ در $x = 0$ پیوسته است؛ زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = g(0) = 0$$

2 مشتق تابع $y = g(x) = xf(x)$ در $x = 0$ برابر است با:

$$y' = g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

481 مطابق شکل شیب خط مماس بر نمودار تابع f و رادر نقطه $x = 1$ به ترتیب برابر $\frac{4}{3}$ و $-\frac{4}{3}$ است، پس $f'(1) = \frac{4}{3}$ و $g'(1) = -1$ بوده و در نتیجه:

$$(3f + 2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 3\left(\frac{4}{3}\right) + 2(-1) = 4$$

482 نقطه $A(-2, -3)$ روی منحنی است. پس $f(-2) = -3$ است. از طرفی دیگر شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول -2 برابر با $\frac{1}{4}$ است.

بنابراین $f'(-2) = \frac{1}{4}$ است، حال اگر $y = x^2 f(x)$ باشد خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y' &= 2x \times f(x) + f'(x) \times x^2 \Rightarrow y'(-2) = -4 \times f(-2) + f'(-2) \times 4 \\ &= -4(-3) + \frac{1}{4} \times 4 = 12 + 1 = 13 \end{aligned}$$

483 مشتق تابع $f(x) = (3x^2 - 7)(2x - 5)^2$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (6x)(2x-5)^2 + 3 \times 2 \times (2x-5)(3x^2-7) \\ \xrightarrow{x=2} f'(2) &= (12)(-1)^2 + 6(-1)(5) = -12 + 30 = 18 \end{aligned}$$

484 حاصل عبارت خواسته شده برابر مشتق $(f \cdot g)(x)$ در $x = 2$ است، پس:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) = (x + \sqrt{x^2 - x})^2 (x - \sqrt{x^2 - x})^2 \\ &= ((x + \sqrt{x^2 - x})(x - \sqrt{x^2 - x}))^2 = (x^2 - (x^2 - x))^2 = x^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(2)g(2) + g'(2)f(2) = 12$$

485 حد خواسته شده همان مشتق تابع f در $x = \frac{1}{4}$ است. بنابراین:

$$f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-1)\sqrt{x} - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(-x-1)}{(\sqrt{x})^2}$$

به ازای $x = \frac{1}{4}$ حاصل $\sqrt{x}$ برابر $\frac{1}{2}$ است. بنابراین:

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{(-1)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + 1\right)}{\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$$

486 اگر ضابطه f قبل از مشتق‌گیری ساده شود، بهتر است ابتدا آن را

ساده کنیم و سپس مشتق بگیریم. در صورت کسر از $\sqrt{x}$ فاکتور گرفته و ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم، سپس $f'(4)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0$$

$$\Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

487 ابتدا مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \cos^2 \frac{\pi}{3x} \Rightarrow f'(x) = 2 \times \cos \frac{\pi}{3x} \times \left(-\sin \frac{\pi}{3x}\right) \times \frac{-\pi}{3x^2}$$

به ازای $x = 4$ حاصل $\frac{\pi}{3x}$ برابر $\frac{\pi}{12}$ است، بنابراین:

$$f'(4) = 2 \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12} \times \frac{\pi}{48} = \frac{\pi}{48} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{48} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{96}$$

488 ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = \sin^2 \sqrt{2x} \Rightarrow f'(x) = 2(\sin^2 \sqrt{2x}) \times (\cos \sqrt{2x}) \times \frac{2}{2\sqrt{2x}}$$

به ازای $x = \frac{\pi^2}{18}$ حاصل $\sqrt{2x}$ برابر $\frac{\pi}{3}$ است، پس:

$$f'\left(\frac{\pi^2}{18}\right) = 2\left(\sin^2 \frac{\pi}{3}\right)(\cos \frac{\pi}{3}) \times \frac{1}{\pi} = 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{\pi}$$

$$= 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\pi} = \frac{3}{\pi}$$

489 ابتدا از تابع $f(x) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$ مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = 2 \times 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \times \left(-\frac{1}{4}\right)$$

کمان $\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ برابر $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$ می‌شود. پس:

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2 \times 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{2}{4}\sin \frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$



562 بررسی گزینه‌ها:

۱ چون عرض نقاط B و E نسبت به عرض نقاط اطراف آن‌ها بزرگتر است، پس این نقاط ماکزیمم نسبی‌اند.



۲ عرض نقاط قبل از G کوچکتر از عرض نقطه G و عرض نقاط بعد از G بزرگتر از عرض نقطه G است.

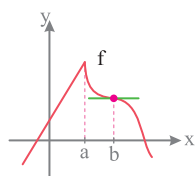


۳ ابتدا و انتهای بازه، اکسترمم نسبی نیستند.

۴ نقطه E ماکزیمم نسبی است، چون عرض آن، از عرض نقاط اطرافش بیشتر است.



563 اگر نقطه c در بازه (a, b) اکسترمم نسبی باشد، آن‌گاه نقطه بحرانی تابع هم می‌باشد. پس ۱ صحیح است. برای بررسی علت نادرستی سایر گزینه‌ها، نمودار تابع f را در نظر بگیرید:



۲ نقطه به طول x=b بحرانی است، زیرا $f'(b) = 0$ است، اما یک نقطه اکسترمم نسبی نیست.

۳، ۴ نقطه به طول x=a ماکزیمم نسبی بوده و بحرانی است، اما تابع f در این نقطه مشتق پذیر نیست.

564 در توابع چند جمله‌ای و گویا ریشه‌های ساده $f'(x) = 0$ طول نقاط اکسترمم تابع هستند. پس مشتق تابع را به دست آورده و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4}{4x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

بنابراین نقاط $A(2, 1)$ و $B(-2, -1)$ اکسترمم‌های تابع f هستند و فاصله آن‌ها برابر است با:

$$AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

565 می‌دانیم ریشه‌های ساده $f'(x) = 0$ طول نقاط بحرانی تابع هستند. پس از تابع مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0 \Rightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$$

حال با کمک جدول تعیین علامت f' ، نحوه تغییرات تابع f را مشخص می‌کنیم

تأیید اکسترمم‌های نسبی مشخص شود، در نتیجه $x = -1$ طول نقطه مینیمم

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
f'	-	+	-	+
f		↙	↗	

نسبی و $x = 2$ طول نقطه ماکزیمم نسبی

تابع f است.

566 مشتق تابع f را به دست می‌آوریم و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 8x \Rightarrow f'(x) = 4x^2 - 12x + 8 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2$$

بنابراین جدول تعیین علامت f' به صورت

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
f'	+	-	+	+
f		↘	↗	

مقابل است، در نتیجه $x = 1$ طول نقطه

ماکزیمم نسبی و $x = 2$ طول نقطه مینیمم

نسبی تابع f است.

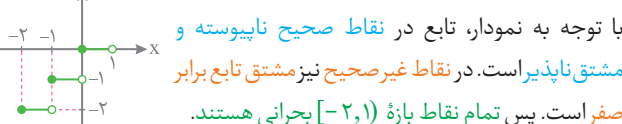
556 می‌دانیم $f(x) = (x^2 - 28)x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{7}{3}} - 28x^{\frac{1}{3}}$ است. پس:

$$f'(x) = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} - \frac{28}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{7}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x^2 - 4) = \frac{7(x^2 - 4)}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

ریشه‌های صورت کسر f' برابر $x = \pm 2$ و ریشه مخرج کسر $x = 0$ است، که همگی

عضو دامنه f هستند. بنابراین مجموعه طول نقاط بحرانی به صورت $\{-2, 0, 2\}$ است.

557 نمودار تابع $f(x) = [x]$ را در بازه $[-2, 1]$ رسم می‌کنیم:



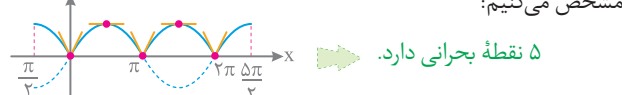
با توجه به نمودار، تابع در نقاط صحیح ناپیوسته و

مشتق ناپذیر است. در نقاط غیر صحیح نیز مشتق تابع برابر

صفر است. پس تمام نقاط بازه $[-2, 1]$ بحرانی هستند.

558 نمودار تابع f را در بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ رسم می‌کنیم و نقاط بحرانی را

مشخص می‌کنیم:



۵ نقطه بحرانی دارد.

559 ابتدا تابع را در بازه $[-1, 2]$ به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم.

چون در بازه $(0, 1)$ تابع به صورت خط افقی $y = 0$ درمی‌آید، پس در تمام نقاط

این بازه مشتق تابع برابر صفر بوده و در نتیجه نقاط بازه $(0, 1)$ بحرانی‌اند:

$$f(x) = [x] \sin \pi x = \begin{cases} -\sin \pi x; & -1 \leq x < 0 \\ 0; & 0 \leq x < 1 \\ \sin \pi x; & 1 \leq x < 2 \\ 0; & x = 2 \end{cases}$$

560 طول نقاط بحرانی در توابع به صورت $y = |f(x)|$ از حل معادلات

$f(x) = 0$ و $f'(x) = 0$ به دست می‌آیند. پس:

$$y = |x^3 - x| \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 1 \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

از آن جایی که نقاط ابتدا و انتهای بازه بحرانی محسوب می‌شوند، بنابراین تابع f

در بازه $[-1, 2]$ دارای ۵ نقطه بحرانی به طول‌های $\{0, 2, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm 1\}$ است.

561 ابتدا تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = |x - 2|\sqrt[3]{x^2} = \begin{cases} (x - 2)\sqrt[3]{x^2}; & x \geq 2 \\ -(x - 2)\sqrt[3]{x^2}; & x < 2 \end{cases} = \begin{cases} x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}}; & x \geq 2 \\ -x^{\frac{5}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}}; & x < 2 \end{cases}$$

حال از تک تک ضابطه‌ها مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}; & x > 2 \\ -\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}; & x < 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{5x - 4}{3\sqrt[3]{x}}; & x > 2 \\ \frac{-5x + 4}{3\sqrt[3]{x}}; & x < 2 \end{cases}$$

اکنون با توجه به تابع f' ، نقاط بحرانی را بررسی می‌کنیم:

۱ $x = 0$ ریشه مخرج کسر ضابطه پایینی است، پس نقطه بحرانی است.

۲ $x = \frac{4}{5}$ ریشه صورت ضابطه پایینی است، پس نقطه بحرانی است.

۳ مقدار مشتق چپ و راست در نقطه مرزی $x = 2$ یکسان نیست، پس نقطه

بحرانی است. (توجه کنید در تابع f، ریشه داخل قدر مطلق $x = 2$ است.)



135