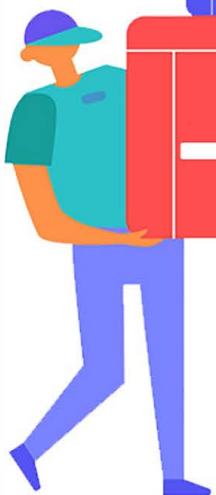


خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و  
ارسال رایگان

Medabook.com



مدابوک



دریافت برنامه ریزی و مشاوره

از مشاوران رتبه برتر

هوشه کنکوری آیدی نوین

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۴



# آشنايي با نظريه اعصاب



## استدلال ریاضی

- ۷۸۹- اگر مجموع ۵ عدد طبیعی، عددی فرد و حاصل ضرب آن‌ها عددی زوج باشد، چه تعداد از این اعداد می‌توانند فرد باشند؟ (A)
- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۷۹۰- اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه عدد زوج متوالی باشند، عبارت  $A = abc + a + b + c$  همواره بر کدام یک از اعداد زیر بخش پذیر است؟ (A)
- (۱) ۱۰ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲
- ۷۹۱- اگر  $a$  و  $b$  دو عدد طبیعی متوالی باشند ( $a < b$ ) و حاصل عدد  $fab + 1$  برابر با مربع عددی طبیعی مانند  $c$  باشد، آن‌گاه  $c$  کدام است؟ (A)
- (۱)  $\frac{a+2b}{2}$  (۲)  $\frac{4a+b}{2}$  (۳)  $a+b$  (۴)  $2a-b$
- ۷۹۲- اگر  $a$  و  $b$  اعداد گویا بوده و  $a(\sqrt{2}-1) + b(3-2\sqrt{2}) = 4$  باشد، حاصل  $3a-b$  کدام است؟ (A)
- (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰
- ۷۹۳- اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه عدد صحیح دلخواه باشند، کدام یک از اعداد زیر همواره زوج است؟ (B)
- (۱)  $abc + (a+1)(b+1)(c+1)$  (۲)  $(a+1)(b+1)(c+1) + (a+2)(b+2)(c+2)$
- (۳)  $(a+1)(b+2)(c+3) + (a+2)(b+1)(c+3)$  (۴)  $(a+2)(b+4)(c+6) + (a-2)(b-4)(c-6)$
- ۷۹۴- اگر  $a$  و  $b$  اعدادی گنگ و  $c$  عددی گویا باشد، کدام یک از اعداد زیر، همواره عددی گنگ است؟ (A)
- (۱)  $a+c$  (۲)  $a-b$  (۳)  $a^2$  (۴)  $ac$
- ۷۹۵- اگر  $a$  عددی گویا و  $b$  عددی گنگ باشد، چه تعداد از اعداد  $b^3$ ،  $a+b^2$ ،  $a \times b$ ،  $a+b$  همواره گنگ هستند؟ (A)
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۷۹۶- اگر  $\alpha$  عددی گنگ باشد، کدام عدد زیر، الزاماً عددی گنگ است؟ (A)
- (۱)  $\alpha^2 + 3\alpha$  (۲)  $(|\alpha| + 2)^2$  (۳)  $\frac{2\alpha-1}{\alpha+1}$  (۴)  $\alpha - \frac{2}{\alpha}$
- ۷۹۷- کدام عدد زیر، مثال نقض حکم «مجموع هر  $n$  عدد متوالی بر  $n$  بخش پذیر است.» می‌باشد؟ (A)
- (۱) ۳۹ (۲) ۴۲ (۳) ۴۵ (۴) ۴۹
- ۷۹۸- در کدام یک از گزینه‌های زیر، عبارت داده شده می‌تواند به ازای مقادیر مختلف طبیعی  $n$ ، هم زوج و هم فرد باشد؟ (A)
- (۱)  $5n^2 - 3n + 10$  (۲)  $4n^2 - 2n + 7$  (۳)  $3n^2 - 5n + 7$  (۴)  $6n^2 - 5n + 10$
- ۷۹۹- اگر عبارت  $4n + 9 - n^2$  مضرب ۵ باشد، باقی‌مانده تقسیم  $2n + 1$  بر ۵ کدام است؟ (A)
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۸۰۰- به ازای چند عدد صحیح از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 27\}$ ، عبارت  $A = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$  زوج است؟ (A)
- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳
- ۸۰۱- روش اثبات درستی یا نادرستی گزاره‌های «مجموع هر دو عدد گویا، همواره عددی گویا است.»، «مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، همواره عددی گنگ است» و «مجموع دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است.» به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟ (A)
- (۱) برهان خلف - اثبات مستقیم - مثال نقض (۲) اثبات مستقیم - برهان خلف - مثال نقض
- (۳) برهان خلف - مثال نقض - اثبات مستقیم (۴) اثبات مستقیم - مثال نقض - برهان خلف
- ۸۰۲- فرض کنید  $a_1, a_2, \dots, a_n$  عددهایی صحیح  $b_1, b_2, \dots, b_n$  نیز همان اعداد با ترتیبی دیگر باشند. به ازای کدام یک از مقادیر زیر برای  $n$  می‌توان مطمئن بود که عدد  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_n - b_n)$ ، عددی زوج است؟ (B)
- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹
- ۸۰۳- چه تعداد از گزاره‌های شرطی زیر صحیح است؟ (B)
- (الف) اگر  $x^2 - y^2$  زوج باشد،  $x^2 - y^2$  بر ۴ بخش پذیر است.
- (ب) اگر  $p$  عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم  $p^2$  بر ۶ برابر با ۱ است.
- (پ) اگر  $a$  عددی اول باشد،  $a+1$  عددی اول نمی‌باشد.
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۰۴ (A) عکس کدام یک از عبارات شرطی زیر، صحیح نمی باشد؟

- (۱) اگر  $A \cup C = B \cup C$  باشد، آن گاه  $A = B$   
 (۲) اگر  $a > b$  باشد، آن گاه  $a^2 > b^2$   
 (۳) اگر  $xy > 0$  باشد، آن گاه  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$   
 (۴) اگر  $a$  و  $b$  دو عدد فرد باشند،  $a^2 - b^2$  بر ۸ بخش پذیر است.

۸۰۵ (A) در کدام یک از گزینه های زیر، دو گزاره داده شده هم ارز نمی باشند؟

- (۱)  $a < 0$  و  $a + \frac{1}{a} \leq -2$   
 (۲)  $a^2 < b^2$  و  $a < b$   
 (۳) نقطه C روی عمود منصف پاره خط AB باشد و فاصله نقطه C از نقاط A و B یکسان باشد.  
 (۴)  $ab$  فرد باشد و  $a + b$  زوج باشد.

۸۰۶ (A) برای اثبات ..... گزاره «  $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$  » با شرط ..... از روش ..... استفاده می کنیم.

- (۱) نادرستی -  $xy > 0$  - مثال نقض  
 (۲) درستی -  $xy > 0$  - اثبات بازگشتی  
 (۳) درستی -  $x \geq 0, y \geq 0$  - اثبات بازگشتی  
 (۴) درستی -  $x \geq 0, y \geq 0$  - برهان خلف

۸۰۷ (A) در اثبات نامساوی  $\frac{4a-5b}{1+a} \leq \frac{a-b}{b}$  به ازای اعداد حقیقی و مثبت  $a$  و  $b$  به کدام رابطه بدیهی می رسیم؟

- (۱)  $(3a-2b)^2 + (a-b)^2 \geq 0$  (۲)  $(3a+2b)^2 + (a-b)^2 \geq 0$  (۳)  $(a-2b)^2 + (2a-b)^2 \geq 0$  (۴)  $(a+2b)^2 + (3a-b)^2 \geq 0$

۸۰۸ (A) اگر  $x$  و  $y$  دو عدد مثبت باشند، در اثبات نامساوی  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{x+y}{x^2} + \frac{y}{x^2}$  به روش اثبات بازگشتی، به کدام رابطه بدیهی زیر می رسیم؟

- (۱)  $(x+y)(x-y)^2 \geq 0$  (۲)  $(x-y)(x+y)^2 \geq 0$  (۳)  $(x-y)^2 \geq 0$  (۴)  $(x+y)^2 \geq 0$

۸۰۹ (A) در اثبات نامساوی  $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$  به کدام رابطه بدیهی زیر می رسیم؟

- (۱)  $(ac-bd)^2 \geq 0$  (۲)  $(a-c)^2 + (b-d)^2 \geq 0$  (۳)  $(ad-bc)^2 \geq 0$  (۴)  $(a-d)^2 + (b-c)^2 \geq 0$

۸۱۰ (A) در اثبات حکم  $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$  برای اعداد حقیقی  $x$  و  $y$ ، به کدام عبارت بدیهی زیر می رسیم؟

- (۱)  $(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$  (۲)  $(x+y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$   
 (۳)  $(x-y)^2 + (x+1)^2 + (y+1)^2 \geq 0$  (۴)  $(x+y)^2 + (x+1)^2 + (y+1)^2 \geq 0$

۸۱۱ (A) در اثبات نامساوی  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy - xz + yz$ ، به کدام عبارت بدیهی زیر می رسیم؟

- (۱)  $(x-y)^2 + (x+z)^2 + (y-z)^2 \geq 0$  (۲)  $(x+y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0$   
 (۳)  $(x+y-z)^2 \geq 0$  (۴)  $(x-\frac{y}{2})^2 + (y-\frac{z}{2})^2 + (z-\frac{x}{2})^2 \geq 0$

۸۱۲ (B) اگر عبارت  $a^2 + 4b^2 + 3c^2 + A \geq 2a + 12b + 6c$  همواره درست باشد، حداقل مقدار A کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۸۱۳ (A) هرگاه  $a$  و  $b$  دو عدد منفی و  $A = \frac{ab}{a^2+b^2}$  باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $A \geq \frac{5}{4}$  (۲)  $A \leq \frac{5}{4}$  (۳)  $A \geq \frac{-5}{4}$  (۴)  $A \leq \frac{-5}{4}$

۸۱۴ (B) اگر  $a, b$  و  $c$  هر سه مثبت باشند، حداقل مقدار عبارت  $A = (a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۸۱۵ (B) اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی مثبت باشند، حداقل مقدار عبارت  $\frac{(2a^2+2b^2)(3a^4+3b^4)}{(ab)^3}$  کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴

۸۱۶ (A) حکم «اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد گنگ و  $\alpha + \beta$  عددی گویا باشد، آن گاه  $\alpha^2 + 3\alpha\beta + 2\beta^2$  عددی گنگ است» از ..... استفاده می کنیم.  $(\alpha + \beta \neq 0)$

- (۱) درستی - برهان خلف  
 (۲) نادرستی - مثال نقض  
 (۳) درستی - اثبات بازگشتی  
 (۴) درستی - اثبات با در نظر گرفتن همه حالتها



## بخش پذیری در اعداد صحیح

۸۱۷- کدام یک از نتیجه‌گیری‌های زیر صحیح است؟ (A)

$$a|b \Rightarrow a|b^2 \quad a|b+c \Rightarrow a|b \quad a|b^n \Rightarrow a|b \quad a|bc \Rightarrow a|b$$

۸۱۸- اگر  $a$  یک عدد صحیح باشد، به ازای کدام یک از مقادیر زیر برای  $a$  تابع  $f(x) = \frac{yx+a}{x+3}$  دارای تعداد کم‌تری نقطه با طول و عرض صحیح است؟ (A)

$$3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

۸۱۹- باقی‌مانده تقسیم بزرگ‌ترین عدد طبیعی  $n$  بر ۴ که در رابطه  $16n+1|n^2+1$  صدق می‌کند، کدام است؟ (B)

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

۸۲۰- تابع  $y = \frac{x^3+12}{x+5}$  را در نظر بگیرید. به ازای کدام یک از مقادیر زیر برای  $x$ ، این تابع شامل نقطه‌ای مانند  $(a, b)$  خواهد بود به طوری که هر دو مؤلفه آن طبیعی باشند؟ (A)

$$108 \quad 109 \quad 110 \quad 111$$

۸۲۱- منحنی  $y = \frac{12}{x-2}$  از چند نقطه با مختصات صحیح در ربع سوم دستگاه مختصات می‌گذرد؟ (A)

$$4 \quad 5 \quad 6 \quad 8$$

۸۲۲- کدام یک از نتیجه‌گیری‌های زیر نادرست است؟ (A)

$$a|bc \Rightarrow a|c \quad ab|c \Rightarrow a|c \quad a|b, b|c \Rightarrow a|c \quad a^2|c^2 \Rightarrow a|c$$

۸۲۳- اگر  $112|b^2$  و  $135|a^2$ ، کم‌ترین مقدار  $a+b$  کدام است؟ (A)

$$29 \quad 73 \quad 53 \quad 59$$

۸۲۴- اگر  $a|b+4$  و  $a|c-3$ ، به ازای کدام یک از مقادیر زیر برای  $k$ ، عبارت  $bc+k$  همواره بر  $a$  بخش پذیر است؟ (B)

$$6 \quad 8 \quad 12 \quad 16$$

۸۲۵- اگر  $13|11x+7y$  و  $13|10x+ky$  آن‌گاه،  $k$  کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟ (B)

$$2 \quad 4 \quad 6 \quad 8$$

۸۲۶- اگر از روابط  $d|ax+b$  و  $d|a'x+b'$  بتوان نتیجه گرفت که  $d = \pm 1$  است، کدام یک از روابط زیر درست است؟ (A)

$$ab-a'b' = \pm 1 \quad aa'-bb' = \pm 1 \quad ab'-ba' = \pm 1 \quad ab+a'b' = \pm 1$$

۸۲۷- اگر  $a > 1$  و از روابط  $a|9k+7$  و  $a|7k+b$ ، تنها یک مقدار ممکن برای  $a$  به دست آید، آن‌گاه مقدار  $b$  کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟ (A)

$$7 \quad 8 \quad 9 \quad 11$$

۸۲۸- کدام یک از گزینه‌های زیر، درست است؟ (A)

$$3|x+y \Rightarrow 9|x^2-y^2 \quad 2|x-y \Rightarrow 4|x^2-y^2 \quad 3|x-y \Rightarrow 9|x^2-y^2 \quad 4|x-y \Rightarrow 16|x^2-y^2$$

۸۲۹- اگر  $3x+11y|x-y$ ، در این صورت کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟ (A)

$$x-y|3x-11y \quad x-y|8x+8y \quad x-y|11x+3y \quad x-y|11x-3y$$

۸۳۰- مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی مضرب ۶ که مربع و مکعب آن به ترتیب بر ۴۲ و ۵۴۰ بخش پذیر باشد، کدام است؟ (B)

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 6$$

۸۳۱- باقی‌مانده تقسیم  $19^{66} + 11^{66}$  بر ۲۴۱ کدام است؟ (B)

$$-1 \quad 0 \quad 1 \quad 66$$

۸۳۲- باقی‌مانده تقسیم  $1843^{88} - 2025^{88}$  بر ۱۳ کدام است؟ (B)

$$1 \quad 2 \quad 8 \quad 5$$

۸۳۳- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی  $n$ ،  $3^n - 2^n$  بر ۶۵ بخش پذیر است؟ (A)

$$16 \quad 18 \quad 20 \quad 22$$

۸۳۴- عدد  $2^{36} - 3^{36}$  بر کدام یک از اعداد زیر بخش پذیر نمی باشد؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۳۵ (۳) ۴۲ (۴) ۶۵

۸۳۵- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی  $n$ ،  $1 - 3^n$  و  $28 - 1 - 5^n$  درست است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

### فصلیه تقسیم

۸۳۶- در یک تقسیم با عوامل طبیعی کدام یک از گزینه های زیر می تواند نادرست باشد؟

- (۱) اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه بر  $n$  بخش پذیر باشند، آن گاه باقی مانده نیز بر  $n$  بخش پذیر است.  
 (۲) اگر در یک تقسیم، مقسوم و خارج قسمت بر  $n$  بخش پذیر باشند، آن گاه باقی مانده نیز بر  $n$  بخش پذیر است.  
 (۳) اگر در یک تقسیم، مقسوم علیه و باقی مانده بر  $n$  بخش پذیر باشند، آن گاه مقسوم نیز بر  $n$  بخش پذیر است.  
 (۴) اگر در یک تقسیم، مقسوم علیه و خارج قسمت بر  $n$  بخش پذیر باشند، آن گاه مقسوم نیز بر  $n$  بخش پذیر است.

۸۳۷- اگر در یک تقسیم، تمامی عوامل، اعداد طبیعی بوده و باقی مانده تقسیم برابر با ۹۶ باشد، مقسوم کدام یک از اعداد زیر نمی تواند باشد؟

- (۱) ۱۹۰ (۲) ۱۹۴ (۳) ۱۹۸ (۴) ۲۰۲

۸۳۸- اگر باقی مانده تقسیم اعداد  $m$  و  $n$  بر ۱۷ برابر با ۳ و ۵ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد  $2n - m^2$  بر ۱۷ کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۸۳۹- در تقسیم عدد  $a$  بر عدد طبیعی  $b$  باقی مانده ۱۷ و خارج قسمت ۲۵ می باشد. اگر  $a$  مضرب ۶ باشد، رقم دهگان کوچک ترین عدد طبیعی

$a$ ، کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۹

۸۴۰- اگر در تقسیم عدد طبیعی  $a$  بر  $b$ ، باقی مانده بیشترین مقدار خود را داشته باشد و  $a + 7$ ،  $b$ ، آن گاه چند مقدار برای  $b$  وجود دارد؟ ( $b > 1$ )

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۵

۸۴۱- در یک تقسیم، مقسوم ۸۰۰ واحد بیشتر از مقسوم علیه بوده و باقی مانده ۶۲ است. بیشترین مقدار ممکن برای خارج قسمت کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۸۴۲- اگر باقی مانده تقسیم عدد فرد  $a$  بر ۱۳ برابر با ۱۰ باشد، باقی مانده تقسیم عدد  $a$  بر ۲۶ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۱۰ (۳) ۱۳ (۴) ۲۳

۸۴۳- در یک تقسیم، مقسوم علیه برابر با ۴۴ و باقی مانده برابر با ۳۲ است. کوچک ترین عدد طبیعی که می توان به مقسوم اضافه کرد تا

باقی مانده تغییر نکند، چند برابر بزرگ ترین عدد طبیعی است که می توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج قسمت تغییر نکند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۴۴- بزرگ ترین عددی که در تقسیم بر ۴۷، باقی مانده اش از دو برابر مربع خارج قسمت ۳ واحد کم تر می باشد، کدام است؟

- (۱) ۱۹۴ (۲) ۲۰۵ (۳) ۲۱۷ (۴) ۲۳۱

۸۴۵- بزرگ ترین عدد طبیعی که در تقسیم بر ۴۱ دارای خارج قسمت و باقی مانده برابر است، چند برابر کوچک ترین عدد طبیعی است که در

تقسیم بر ۳۹، دارای خارج قسمت و باقی مانده برابر است؟

- (۱) ۳۹ (۲) ۴۰ (۳) ۴۱ (۴) ۴۲

۸۴۶- در یک تقسیم، باقی مانده ۶۰ و خارج قسمت ۷ می باشد. حداکثر چند واحد می توان به مقسوم علیه اضافه کرد، تا با ثابت ماندن

مقسوم، خارج قسمت تغییر نکند؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۸۴۷- در یک تقسیم با عوامل طبیعی، خارج قسمت و باقی مانده مساوی اند. اگر ۳ واحد از مقسوم علیه کم شود، ۵ واحد به خارج قسمت

اضافه شده و باقی مانده صفر می شود. حداقل مقدار ممکن برای مقسوم کدام است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۳۲ (۳) ۳۷ (۴) ۴۰

۸۴۸- در تقسیم عدد طبیعی  $a$  بر ۳۷، باقی مانده تقسیم از مربع خارج قسمت آن، ۲ واحد کم تر است. بزرگ ترین مقدار  $a$  مضرب کدام است؟

ریاضی داخل ۸۴

- (۱) ۹  
(۲) ۱۲  
(۳) ۱۴  
(۴) ۱۶

ریاضی داخل ۸۷

۸۴۹- در تقسیم عدد ۱۶۵ بر عدد طبیعی  $b$ ، خارج قسمت، مجذور باقی مانده است. چند عدد  $b$  می توان یافت؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

۸۵۰- در یک تقسیم، مقسوم علیه برابر با ۴۱ و باقی مانده ۱۷ می باشد. در صورت اضافه کردن کدام یک از اعداد زیر به مقسوم، مقدار باقی مانده کاهش می یابد؟

- (۱) ۸۳  
(۲) ۹۳  
(۳) ۱۰۳  
(۴) ۱۱۳

۸۵۱- در تقسیم عدد  $a$  بر ۶۳ باقی مانده ۱۷ است. اگر ۶۰ واحد به  $a$  اضافه کنیم، باقی مانده و خارج قسمت به ترتیب چه تغییری می کنند؟

- (۱) سه واحد کم می شود - یک واحد اضافه می شود.  
(۲) سه واحد اضافه می شود - یک واحد اضافه می شود.  
(۳) سه واحد اضافه می شود - تغییر نمی کند.  
(۴) سه واحد کم می شود - دو واحد اضافه می شود.

۸۵۲- اگر عبارت  $9x^2 + 3x^3$  مربع کامل باشد، آن گاه باقی مانده تقسیم بیشترین عدد دو رقمی  $x$  بر ۵ کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) صفر  
(۳) ۲  
(۴) ۴

۸۵۳- اگر در تقسیم عدد طبیعی  $a$  بر ۱۸، باقی مانده از  $\frac{5}{y}$  خارج قسمت، ۲ واحد بیشتر باشد، حداکثر مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۳۷۵  
(۲) ۳۹۵  
(۳) ۴۱۵  
(۴) ۴۲۵

۸۵۴- باقی مانده تقسیم عدد  $A$  بر ۲۴ برابر با ۱۷ است. باقی مانده تقسیم عدد  $\frac{A}{5}$  بر ۱۲ کدام است؟ (عدد  $A$  مضرب ۵ است)

- (۱) ۱  
(۲) ۳  
(۳) ۵  
(۴) ۷

۸۵۵- در یک تقسیم، مقسوم برابر با ۱۷۱ بوده و مجموع مقسوم علیه، خارج قسمت و باقی مانده برابر با ۲۹ می باشد. مجموع خارج قسمت و باقی مانده، کدام یک از اعداد زیر می تواند باشد؟

- (۱) ۱۷  
(۲) ۱۸  
(۳) ۱۹  
(۴) ۲۰

۸۵۶- اگر در یک تقسیم، مقسوم ۱۴ برابر باقی مانده باشد و باقی مانده دارای حداکثر مقدار خود باشد، مجموع مقسوم علیه و خارج قسمت کدام است؟

- (۱) ۱۶  
(۲) ۲۰  
(۳) ۲۵  
(۴) ۳۱

۸۵۷- رقم یکان بزرگ ترین عدد طبیعی  $a$  که اگر آن را بر ۱۵ و ۲۱ تقسیم کنیم، باقی مانده هر تقسیم با خارج قسمت برابر می شود، کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۶  
(۳) ۵  
(۴) ۷

۸۵۸- اگر  $a$  عددی اول و دورقمی باشد، باقی مانده تقسیم  $5 + 4a^2 + a^6$  بر ۶، کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۳  
(۳) ۴  
(۴) ۵

۸۵۹- اگر  $(m, m+2) = 1$  و  $a \mid m+2$ ، باقی مانده تقسیم  $3 + m^2 + a^2$  بر ۸، کدام است؟

- (۱) ۴  
(۲) ۵  
(۳) ۶  
(۴) ۷

۸۶۰- اگر  $(m, m+1) = (n, n+2)$  و  $m \mid n+4$ ، باقی مانده تقسیم  $m^2 - n^2$  بر ۸ کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۴  
(۴) ۷

۸۶۱- اگر باقی مانده تقسیم  $a$  بر ۱۳ و ۱۰ به ترتیب برابر با ۵ و ۴ باشد، باقی مانده تقسیم  $a$  بر ۱۳۰ کدام است؟

- (۱) ۳  
(۲) ۲۰  
(۳) ۳۲  
(۴) ۴۴

۸۶۲- اگر باقی مانده تقسیم عدد  $4a + 7$  بر  $b$ ، ۷ واحد از باقی مانده تقسیم عدد  $2a + 4$  بر  $b$  بیشتر باشد، باقی مانده تقسیم  $4a$  بر  $b$  کدام می تواند باشد؟

- (۱) ۸  
(۲) ۱۲  
(۳) ۱۶  
(۴) ۲۰

۸۶۳- در تقسیم اعداد ۱۴۸ و ۱۰۰ بر عدد دورقمی  $b$ ، باقی مانده ها به ترتیب ۵ و ۹ می باشند. مجموع ارقام عدد  $b$  کدام است؟

- (۱) ۴  
(۲) ۵  
(۳) ۶  
(۴) ۷

۸۶۴- B اگر باقی‌مانده تقسیم  $a$  بر ۱۲ برابر با ۸ و باقی‌مانده تقسیم  $2a$  بر ۲۳ برابر با ۲۰ بوده و مقدار خارج‌قسمت نیز در این دو تقسیم برابر باشد، باقی‌مانده تقسیم  $a$  بر ۱۱ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

۸۶۵- B اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد  $a$  و  $2a$  بر  $b$  به ترتیب برابر با ۱۳ و ۹ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد ۴۱ بر  $b$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۸۶۶- A اگر باقی‌مانده تقسیم  $a$  و  $3a$  بر  $b$  به ترتیب ۶ و ۴ باشد، اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار  $b$  کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۷ (۳) ۱۲ (۴) ۲

۸۶۷- B باقی‌مانده تقسیم دو عدد ۶۲۹ و ۲۴۱ بر عدد طبیعی  $b$  به ترتیب برابر ۵ و ۱ است. نسبت بزرگ‌ترین مقدار  $b$  به کوچک‌ترین مقدار آن کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

۸۶۸- C تعداد نقاط با مختصات صحیح که در معادله  $x^2 + y^2 = 1398$  صدق می‌کنند، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۸۶۹- C اگر  $a$  عددی زوج باشد، بزرگ‌ترین عددی که عبارت  $(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)$  همواره بر آن بخش‌پذیر است، کدام می‌باشد؟

- (۱) ۲۵۶ (۲) ۳۸۴ (۳) ۵۷۶ (۴) ۸۶۴

۸۷۰- C به ازای کدام‌یک از مقادیر زیر برای  $b$ ، عبارت  $(a+b)(a+45)(a+17)$  به ازای تمامی مقادیر طبیعی  $a$  بر ۳ بخش‌پذیر است؟

- (۱) ۷۳ (۲) ۸۳ (۳) ۹۵ (۴) ۱۱۴

۸۷۱- B مجموع مکعبات سه عدد متوالی همواره بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۸۷۲- B کدام‌یک از اعداد زیر را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب دو عدد  $3k + 6$  و  $5k' + 6$  نوشت؟

- (۱) ۶۶۱ (۲) ۶۶۳ (۳) ۶۶۵ (۴) ۶۶۷

۸۷۳- C کدام‌یک از معادلات زیر، در مجموعه اعداد صحیح جواب ندارد؟

- (۱)  $x^2 - y^2 = 4k$  (۲)  $x^2 - y^2 = 4k + 1$  (۳)  $x^2 - y^2 = 4k + 2$  (۴)  $x^2 - y^2 = 4k + 3$

۸۷۴- B کدام‌یک از معادلات زیر، در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب است؟

- (۱)  $n^3 - n = 14360$  (۲)  $n^3 - n = 24360$  (۳)  $n^3 - n = 34360$  (۴)  $n^3 - n = 44360$

۸۷۵- C کدام‌یک از نتیجه‌گیری‌های زیر، درست است؟

- (۱)  $7 | (a^2 + b^2) \Rightarrow 49 | ab$  (۲)  $8 | a^2 + b^2 \Rightarrow 64 | ab$  (۳)  $9 | a^2 + b^2 \Rightarrow 81 | ab$  (۴)  $10 | a^2 + b^2 \Rightarrow 100 | ab$

### ۹-ب-م-م-م

۸۷۶- A اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  اعداد طبیعی باشند،  $[a, b] = b$  و  $(b, c) = b$  باشد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

- (۱)  $(a, b) = a$  (۲)  $[a, c] = c$  (۳)  $(a, c) = a$  (۴)  $[b, c] = b$

۸۷۷- A اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی  $n$ ، دو عدد  $7n + 12$  و  $5n - 2$  نسبت به هم اول نباشند، آنگاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این

دو عدد کدام است؟

- (۱) ۵۹ (۲) ۶۷ (۳) ۸۳ (۴) ۸۹

۸۷۸- A اگر  $n$  عددی طبیعی و دو عدد  $5n - 9$  و  $4n + n$  دارای مقسوم‌علیه مشترک غیریک باشند، تعداد اعداد دو رقمی  $n$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۷۹- B اگر  $a = 11k + 2$  و  $a^3 | 750$ ، آنگاه حاصل  $(a, 660)$  با مربع کدام گزینه بیشترین اختلاف را دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۴ (۴) ۶

۸۸۰- B اگر  $(x, 10) = 5$  و  $(y, 10) = 5$  باشد، حاصل تقسیم  $(x + y - 5, 10)$  بر  $(y, 10)$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۵ (۳) صفر (۴) ۲



## استدلال ریاضی

**اثبات مستقیم:** با کمک فرض مسأله و مفاهیم و قضایایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، درستی حکم را ثابت می‌کنیم.

❶ مسائلی که به این روش حل می‌کنیم، عموماً به صورت یک حکم شرطی هستند.

**مثال** حاصل ضرب دو عدد به فرم  $6k+1$  و  $6k+5$  به کدام صورت است؟

$$6k+2 \quad (4)$$

$$6k+1 \quad (3)$$

$$6k-1 \quad (2)$$

$$36k+1 \quad (1)$$

**پاسخ** اعداد به فرم  $6k+5$  را می‌توان به شکل  $6k'-1$  نیز فرض کرد:

$$(6k+1)(6k+5) = (6k+1)(6k'-1) = 36kk' - 6k + 6k' - 1 = 6k'' - 1$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

**مثال نقض:** مثالی است که درستی یک حکم را در حالت کلی رد می‌کند.

اگر احکام مطرح‌شده با سور عمومی نادرست به نظر بیایند، از مثال نقض برای رد آن حکم کمک می‌گیریم.

**مثال** کدام گزینه دارای مثال نقض نیست؟

(۱) باقی‌مانده تقسیم اعداد اول غیر از ۵ و ۷ بر ۱۳، برابر ۲ است.

(۲) مربع هر عدد حقیقی از مکعب آن کوچک‌تر است.

(۳) اگر برای دو عدد حقیقی  $a$  و  $b$  داشته باشیم  $a \geq b$ ، آن‌گاه  $\frac{b}{a} \leq 1$  ( $a \neq 0$ )

(۴) باقی‌مانده تقسیم مربع اعداد اول غیر از ۲ و ۳ بر ۴، برابر ۱ است.

**پاسخ** مثال نقض برای گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳):

$$1) a = 17 \Rightarrow 17 = 13 \times 1 + 4$$

باقی‌مانده

$$2) x = \frac{1}{2} \Rightarrow x^3 < x^2 \quad \left(\frac{1}{8} < \frac{1}{4}\right)$$

$$3) \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = 2 > 1$$

$$p^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 = 4k' + 1$$

اثبات گزینه (۴): اعداد اول غیر از ۲ و ۳ به فرم  $p = 6k \pm 1$  می‌باشند. پس:

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

**اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها:** گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن در مورد مسأله را در نظر بگیریم.

این روش منحصر به اثبات مسائلی است که تعداد حالت‌های ممکن برای اثبات آن‌ها متناهی است و امکان بررسی همه حالت‌ها وجود دارد.

هم‌ارزی منطقی زیر دلیلی برای درستی این روش اثبات است:

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

همه حالت‌های ممکن

هم‌چنین برای هر تعداد متناهی گزاره دلخواه نیز می‌توان گفت:

$$(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \Rightarrow r \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow r)$$

همه حالت‌های ممکن

**تذکره** در واقع در طرف دوم نشان می‌دهیم که برقراری همه حالت‌ها گزاره  $r$  را نتیجه می‌دهد.

**مثال** اگر  $a$  مضرب ۳ نباشد،  $a^2$  به کدام صورت است؟

$$9q-1 \quad (4)$$

$$3q \quad (3)$$

$$3q-2 \quad (2)$$

$$3q-1 \quad (1)$$

**پاسخ** چون  $a$  مضرب ۳ نیست، پس به یکی از صورت‌های  $3k+1$  یا  $3k+2$  می‌باشد:

$$a = 3k+1 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3q + 1$$

$$a = 3k+2 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 9k^2 + 12k + 3 + 1 = 3q' + 1$$

پس  $a^2$  به فرم  $3q+1$  یا همان  $3q-2$  است. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

**اثبات غیر مستقیم (برهان خلف):** ابتدا فرض می‌کنیم حکم نادرست است (فرض خلف)، سپس با استدلال‌هایی منطقی و مبتنی بر فرض به یک

نتیجه غیرممکن یا خلاف فرض (تناقض) می‌رسیم.

به جای اثبات درستی قضیه، نادرست بودن نقیض آن را ثابت می‌کنیم. (توجه کنید که  $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ )

به این الگو توجه کنید:

فرض می‌کنیم حکم نادرست است  $\Leftarrow$  به یک تناقض می‌رسیم  $\Leftarrow$  پس حکم مسأله درست است.

**مثال** اثبات کدام گزینه احتیاج به استدلال به روش برهان خلف ندارد؟

(۱) عدد  $\sqrt{5}$  گنگ است.

(۲) از یک نقطه خارج یک خط فقط یک خط موازی با خط مفروض می‌توان رسم کرد.

(۳) از هر نقطه روی یک خط یا خارج آن فقط یک خط عمود بر آن می‌توان رسم کرد.

(۴) اگر  $\alpha$  و  $\beta$  گنگ باشند و  $\alpha + \beta$  گویا باشد، آنگاه  $2\alpha + \beta$  گنگ است.

**پاسخ** گزینه (۲) اصل توافقی اقلیدس است و قضیه نیست، پس نیازی به اثبات ندارد، بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

**اثبات بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز):** دو گزاره معادل‌اند (هم‌ارزند)، هرگاه دارای ارزش یکسان باشند. برای اثبات درستی یکی از آن‌ها گزاره ساده‌تر را

به گزاره‌های ساده‌تر معادل تبدیل می‌کنیم و ادامه این روند ما را به گزاره‌ای بدیهی می‌رساند.

$p \Leftrightarrow q$  زمانی دارای ارزش درست است که  $p$  و  $q$  معادل باشند، پس می‌توانیم به جای اثبات یکی از آن‌ها دیگری را اثبات کنیم.

**مثال** در اثبات درستی رابطه  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$  به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟

$$(1) (xy - xz)^2 + (x - y)^2 + (y - z)^2 \geq 0$$

$$(2) (x + y)^2 + (x - z)^2 + z^2 \geq 0$$

$$(3) (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0$$

$$(4) (z - x)^2 + (z - y)^2 + (z - x - y)^2 \geq 0$$

**پاسخ** طرفین رابطه را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2xz + 2yz \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

چون مجموع پنج عدد عددی فرد است، باید تعداد اعداد فرد، فرد باشد. اگر در میان ۵ عدد طبیعی، ۲ تا زوج و ۳ تا فرد باشند، مجموع این اعداد، فرد و حاصل ضرب آن‌ها زوج خواهد بود. (اگر ۵ تا فرد باشند، حاصل ضرب آن‌ها عددی فرد خواهد شد). البته حالت ۴ تا زوج و یکی فرد هم قابل قبول است که در گزینه‌ها نیست.

**۷۹۰ | ۲** سه عدد زوج متوالی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a = 2k, b = 2k + 2, c = 2k + 4, \quad (k \geq 0)$$

حاصل ضرب ۳ عدد متوالی مضرب ۳! است.

پس داریم:

$$\begin{cases} abc = 2k(2k+2)(2k+4) = 8k(k+1)(k+2) = 4 \cdot 2k \\ a + b + c = 2k + 2k + 2 + 2k + 4 = 6k + 6 = 6(k+1) = 6q' \end{cases} \Rightarrow A = abc + a + b + c = 4 \cdot 2k + 6q' = 6(2k + q')$$

**۷۹۱ | ۳**

$$a = k, b = k + 1 \Rightarrow 4ab + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k + 1)^2$$

$(2k + 1)^2$  برابر  $c^2$  است، پس:

$$c = \pm(2k + 1) \xrightarrow{a, b \in \mathbb{N}} c = 2k + 1 = k + (k + 1) = a + b$$

**۷۹۲ | ۴**

$$a(\sqrt{2} - 1) + b(3 - 2\sqrt{2}) = 4 \Rightarrow a\sqrt{2} - a + 3b - 2b\sqrt{2} = 4 \Rightarrow \sqrt{2}(a - 2b) + (3b - a) = 4$$

چون  $a$  و  $b$  گویا هستند و سمت راست تساوی عددی گویا است، پس باید ضریب  $\sqrt{2}$  برابر صفر باشد تا سمت چپ هم گویا شود، یعنی:

$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ 3b - a = 4 \end{cases} \Rightarrow b = 4, a = 8 \Rightarrow 3a - b = 3(8) - 4 = 20$$

**۷۹۳ | ۴** مثال نقض برای گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳):

$$1) a = b = c = 1 \Rightarrow 1 + 8 = 9: \text{ فرد}$$

$$2) a = b = c = 1 \Rightarrow 8 + 27 = 35: \text{ فرد}$$

$$3) a = 1, b = 2, c = 2 \Rightarrow (2 \times 4 \times 5) + (3 \times 3 \times 5) = 40 + 45 = 85: \text{ فرد}$$

بررسی گزینه (۴): ۲ حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) اگر حداقل یکی از اعداد  $a, b, c$  زوج باشند، آنگاه:

$$\underbrace{(a+2)(b+4)(c+6)}_{\text{زوج}} + \underbrace{(a-2)(b-4)(c-6)}_{\text{زوج}} = \text{زوج}$$

$$\underbrace{(a+2)(b+4)(c+6)}_{\text{فرد}} + \underbrace{(a-2)(b-4)(c-6)}_{\text{فرد}} = \text{زوج}$$

ب) اگر هر سه فرد باشند، آنگاه:

۱۷۹۴ مثال نقض برای گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴):

$$۲) a = ۶ - \sqrt{۲}, b = ۷ - \sqrt{۲} \Rightarrow a - b = -۱$$

$$۳) a = \sqrt{۶} \Rightarrow a^2 = ۶$$

$$۴) a = \sqrt{۲}, c = ۰ \Rightarrow ac = ۰$$

اما در گزینه (۱)، با استفاده از برهان خلف می‌توان اثبات کرد که  $a + c$  همواره گنگ است.

۱۷۹۵

$$a = ۰, b = \sqrt{۲} \Rightarrow a \times b = ۰ \text{ گویا}$$

$$a = ۱, b = \sqrt{۲} \Rightarrow a + b^2 = ۳ \text{ گویا}$$

$$a = ۰, b = \sqrt{۲} \Rightarrow b^a = (\sqrt{۲})^0 = ۱ \text{ گویا}$$

به کمک برهان خلف می‌توان نشان داد که  $a + b$  همواره گنگ است، یعنی:

$$\text{فرض خلف: } a + b = c \in \mathbb{Q} \Rightarrow \underbrace{b}_{\in \mathbb{Q}'} = \underbrace{c - a}_{\in \mathbb{Q}}$$

که این تناقض است، پس  $a + b$  گنگ می‌باشد.

۳۷۹۶ مثال نقض برای گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴):

$$۱) \alpha^2 + 3\alpha = 1 \Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

بنابراین اگر  $\alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$  باشد (که عددی گنگ است)،  $\alpha^2 + 3\alpha$  برابر با ۱ می‌شود.

$$۲) \alpha = \sqrt{11} - 2 \Rightarrow (|\alpha| + 2)^2 = (|\sqrt{11} - 2| + 2)^2 = (\sqrt{11} - 2 + 2)^2 = (\sqrt{11})^2 = 11$$

$$۴) \alpha - \frac{2}{\alpha} = 2 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

بنابراین اگر  $\alpha = 1 \pm \sqrt{3}$  باشد،  $\alpha - \frac{2}{\alpha}$  برابر با ۲ می‌شود.

بررسی گزینه (۳):

$$\frac{2\alpha - 1}{\alpha + 1} = \frac{2(\alpha + 1) - 3}{\alpha + 1} = 2 - \frac{3}{\alpha + 1} \in \mathbb{Q}'$$

۲۷۹۷ برای  $n = 42$  داریم:

$$k, k+1, k+2, \dots, k+41 \xrightarrow{+} 42k + \frac{41 \times 42}{2} = 42k + 21 \times 41$$

و عبارت بالا بر ۴۲ بخش پذیر نمی‌باشد.

⊕ نکته تمام اعداد زوج، مثال نقض برای گزاره داده شده می‌باشند.

۴۷۹۸ در گزینه (۱)، عبارت داده شده همواره زوج است و در گزینه‌های (۲) و (۳) عبارت‌های داده شده همواره فرد هستند. اما در گزینه (۴) داریم:

$$n: \text{فرد} \Rightarrow \underbrace{6n^2}_{\text{زوج}} - \underbrace{5n}_{\text{فرد}} + 10 = \text{فرد}$$

$$n: \text{زوج} \Rightarrow \underbrace{6n^2}_{\text{زوج}} - \underbrace{5n}_{\text{زوج}} + 10 = \text{زوج}$$

۱۷۹۹ تمام حالت‌های ممکن برای  $n$  را در نظر می‌گیریم:

$$n = \Delta k \xrightarrow{k=0} n^2 - 4n + 9 = 0^2 - 4 \times 0 + 9 = 9 \quad \times$$

$$n = \Delta k + 1 \xrightarrow{k=0} n^2 - 4n + 9 = 1^2 - 4 \times 1 + 9 = 6 \quad \times$$

$$n = \Delta k + 2 \xrightarrow{k=0} n^2 - 4n + 9 = 2^2 - 4 \times 2 + 9 = 5 \quad \checkmark$$

$$n = \Delta k + 3 \xrightarrow{k=0} n^2 - 4n + 9 = 3^2 - 4 \times 3 + 9 = 6 \quad \times$$

$$n = \Delta k + 4 \xrightarrow{k=0} n^2 - 4n + 9 = 4^2 - 4 \times 4 + 9 = 9 \quad \times$$

$$2n + 1 = 2(\Delta k + 2) + 1 = 10k + 5 = 5(2k + 1)$$

بنابراین  $n = \Delta k + 2$  می‌باشد و داریم:

پس  $2n + 1$  بر ۵ بخش پذیر است.

$$n = 4k \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{16k^2(4k+1)^2}{4} = 4k^2(4k+1)^2 \quad \checkmark \text{ زوج}$$

۴۸۰۰ با توجه به باقی‌مانده تقسیم  $n$  بر ۴ داریم:

$$n = 4k + 1 \Rightarrow \frac{(4k+1)^2(4k+2)^2}{4} = \frac{(4k+1)^2 \times 2 \times (2k+1)^2}{4} = (4k+1)^2(2k+1)^2 \quad \times \text{ فرد}$$

$$n = 4k + 2 \Rightarrow \frac{(4k+2)^2(4k+3)^2}{4} = \frac{4(2k+1)^2(4k+3)^2}{4} = (2k+1)^2(4k+3)^2 \quad \times \text{ فرد}$$

$$n = 4k + 3 \Rightarrow \frac{(4k+3)^2(4k+4)^2}{4} = \frac{(4k+3)^2 \times 16 \times (k+1)^2}{4} = 4(4k+3)^2(k+1)^2 \quad \checkmark \text{ زوج}$$

پس برای  $n = 4k$  و  $n = 4k + 3$  عبارت داده شده زوج می‌شود که این اعضا در مجموعه  $A$  عبارتند از:

$$\{3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27\} \Rightarrow 13 \text{ تا}$$

۸۰۱ | ۲ برای اثبات حکم (۱) با استفاده از اثبات مستقیم داریم:

$$A + B = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

برای حکم (۲) از روش برهان خلف استفاده می‌شود و برای رد کردن حکم (۳)، می‌توان از مثال نقض  $a = 3 - \sqrt{2}$  و  $b = 6 + \sqrt{2}$  استفاده کرد.

۸۰۲ | ۲ اگر  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \cdots (a_n - b_n)$  زوج نباشد (فرض خلف)، پس عددی فرد است. بنابراین تمام  $n$  عامل  $a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n$  هم

فرد هستند. حال اگر  $n$  فرد باشد، باید حاصل جمع فردتا عدد فرد، عددی فرد شود. اما با توجه به این که  $b_1, b_2, \dots, b_n$  همان اعداد  $a_1, a_2, \dots, a_n$  با

ترتیبی متفاوت هستند، پس داریم:

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = 0$$

بنابراین مجموع زوج می‌شود که با «حاصل جمع فردتا عدد فرد، عددی فردی» است در تناقض است، پس فرض خلف باطل است و باید  $n$  زوج باشد.

۸۰۳ | ۳ الف) اگر  $x^2 - y^2$  زوج باشد، آن‌گاه  $x$  و  $y$  یا هر دو زوج هستند یا هر دو فرد. داریم:

$$x = 2k, y = 2k' \Rightarrow x^2 - y^2 = 4k^2 - 4k'^2 = 4(k^2 - k'^2) = 4q \quad \checkmark$$

$$x = 2k + 1, y = 2k' + 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 4k^2 + 4k + 1 - 4k'^2 - 4k' - 1 = 4(k^2 + k - k'^2 - k') = 4q \quad \checkmark$$

ب) اگر  $p$  عددی اول باشد، به صورت  $6k + 1$  یا  $6k + 5$  است (چرا که اعداد  $6k, 6k + 2$  و  $6k + 4$  زوج بوده و  $6k + 3$  همواره مضرب ۳ است)، بنابراین

باقی‌مانده تقسیم  $p^2$  بر ۶، برابر با ۱ خواهد بود و اثبات آن به شکل زیر است:

$$\begin{cases} (6k+1)^2 = 36k^2 + 12k + 1 = 6(6k^2 + 2k) + 1 = 6q + 1 \\ (6k+5)^2 = 36k^2 + 60k + 25 = 6(6k^2 + 10k + 4) + 1 = 6q' + 1 \end{cases}$$

پ) مثال نقض: اگر  $a = 2$  باشد،  $a + 1 = 3$  نیز عددی اول است.

پس گزاره‌های (الف) و (ب) صحیح‌اند.

۸۰۴ | ۴ در گزینۀ (۴): اگر  $a = 8$  و  $b = 4$  باشد،  $a^2 - b^2$  بر ۸ بخش‌پذیر بوده اما  $a$  و  $b$  فرد نمی‌باشند.

۸۰۵ | ۴ اگر دو گزارۀ  $p$  و  $q$  هم‌ارز باشند ( $p \Leftrightarrow q$ )؛ هر دو گزاره‌های  $p \Rightarrow q$  و  $q \Rightarrow p$  درست خواهند بود.

در گزینۀ (۴)، «اگر  $ab$  فرد باشد،  $a + b$  زوج خواهد بود» که گزاره‌ای درست است، اما گزارۀ «اگر  $a + b$  زوج باشد،  $ab$  فرد است» گزاره‌ای نادرست است.

(مثال نقض:  $a = 8$  و  $b = 6$ )

۸۰۶ | ۳ گزارۀ  $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$  گزاره‌ای درست، با شرط  $x \geq 0$  و  $y \geq 0$  می‌باشد و برای اثبات آن با استفاده از اثبات بازگشتی داریم:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 4xy \geq 0 \Rightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

۸۰۷ | ۱

$$\frac{4a - 5b}{10a} \leq \frac{a-b}{b} \xrightarrow{\times 10ab} 4ab - 5b^2 \leq 10a^2 - 10ab \Rightarrow 10a^2 + 5b^2 - 14ab \geq 0 \Rightarrow (2a - 2b)^2 + (a - b)^2 \geq 0$$

توجه کنید با توجه به مثبت بودن  $a$  و  $b$ ، با ضرب طرفین نامساوی در  $10ab$ ، علامت نامساوی عوض نمی‌شود.

۸۰۸ | ۱ با ضرب طرفین در  $x^2 y^2$  داریم:

$$\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Rightarrow x^3 + y^3 \geq xy^2 + yx^2 \Rightarrow (x+y)(x^2 + y^2 - xy) - xy(x+y) \geq 0$$

$$\Rightarrow (x+y)(x^2 + y^2 - xy - xy) \geq 0 \Rightarrow (x+y)(x-y)^2 \geq 0$$

با توجه به مثبت بودن  $x$  و  $y$ ، عبارت  $x + y$  همواره مثبت است و  $(x - y)^2$  هم که همواره نامنفی می‌باشد، پس عبارت حاصل همواره برقرار است.

۸۰۹ | ۳

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2 \Rightarrow a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2 \geq a^2 c^2 + b^2 d^2 + 2abcd$$

$$\Rightarrow a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \geq 0 \Rightarrow (ad - bc)^2 \geq 0$$

۸۱۰ | ۱ با ضرب طرفین در ۲ داریم:

$$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$$

۸۱۱ | ۱ با ضرب طرفین در ۲ داریم:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2xz + 2yz \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xz + z^2 - 2yz + y^2 \geq 0 \Rightarrow (x-y)^2 + (x+z)^2 + (y-z)^2 \geq 0$$

$$a^2 + 4b^2 + 3c^2 + A \geq 2a + 12b + 6c \Rightarrow a^2 - 2a + 4b^2 - 12b + 3c^2 - 6c \geq -A$$

۱۸۱۲

$$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 + 4b^2 - 12b + 9 + 3c^2 - 6c + 3 \geq -A + 1 + 9 + 3 \iff (a-1)^2 + (2b-3)^2 + 3(c-1)^2 \geq 13 - A$$

$$13 - A \leq 0 \Rightarrow A \geq 13$$

برای این که عبارت داده شده همواره صحیح باشد، باید داشته باشیم:

بنابراین حداقل مقدار قابل قبول برای  $A$ ، برابر با ۱۳ است.

۱۸۱۳ با توجه به میانگین حسابی و هندسی دو عدد داریم:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq |ab| \xRightarrow{ab > 0} \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab \Rightarrow \frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{5}{2}$$

۱۸۱۴

$$A = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 = 3 + \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{a}{c} + \frac{c}{a}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{b}{c} + \frac{c}{b}}_{\geq 2}$$

بنابراین  $A \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$  می باشد.

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \Rightarrow \frac{a^4 + b^4}{2} \geq \sqrt{a^4 b^4} \Rightarrow \frac{a^4 + b^4}{2} \geq a^2 b^2 \Rightarrow \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} \geq 2$$

۱۸۱۵

$$\frac{(2a^2 + 2b^2)(2a^4 + 2b^4)}{(ab)^3} = \frac{2 \times 2 \times \frac{a^2 + b^2}{2} \times \frac{a^4 + b^4}{2}}{ab \times (a^2 b^2)} = \frac{2 \times 2 \times \frac{a^2 + b^2}{2} \times \frac{a^4 + b^4}{2}}{ab \times (a^2 b^2)}$$

بنابراین عبارت داده شده بزرگتر یا مساوی  $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$  بوده و حداقل مقدار آن ۱۶ می باشد و حالت تساوی زمانی رخ می دهد که  $a = b$  باشد.

۱۸۱۶ اگر فرض کنیم  $\alpha = \sqrt{2}$  و  $\beta = -\sqrt{2}$ ، آن گاه  $\alpha + \beta = 0$  می شود که عددی گویا است. اما:

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2 = (\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2})(-\sqrt{2}) + 2(-\sqrt{2})^2 = 2 - 4 + 4 = 2 \in \mathbb{Q}$$

پس عبارت داده شده نادرست است.

۱۸۱۷

### بخش پذیری در اعداد صحیح

$$b = aq$$

**بخش پذیری:** عدد صحیح  $a$  (مخالف صفر) را شمارنده عدد  $b$  گوئیم، هرگاه عددی صحیح چون  $q$  وجود داشته باشد به طوری که:

۱ می توانیم بنویسیم  $a \mid b$  و بخوانیم  $a$ ،  $b$  را عاد می کند.

۲ در واقع اگر  $b$  بر  $a$  بخش پذیر باشد، می گوئیم  $a$ ،  $b$  را می شمارد.

۳ قرارداد می کنیم که صفر، عدد صفر را می شمارد:  $0 \mid 0$ .

### ویژگی های رابطه عاد کردن

۱ برای عدد صحیح  $a$  داریم:  $\left. \begin{array}{l} \pm a \mid a, \pm 1 \mid a, a \mid 0 \text{ (الف)} \\ a = \pm 1 \text{ اگر } a \mid 1, \text{ آن گاه } a \mid 1 \\ a = 0 \text{ اگر } a \mid 0, \text{ آن گاه } a \mid 0 \text{ (ب)} \end{array} \right\}$

توجه همه اعداد صفر را عاد می کنند اما صفر هیچ عدد غیر صفری را عاد نمی کند.

مثال به ازای چند عدد طبیعی  $n$ ، داریم:  $2n^2 + n - 2 \mid 1$ ؟

$$1 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

پاسخ از آن جایی که  $1 \mid P(n)$  پس  $P(n) = \pm 1$ ، در نتیجه داریم:

$$P(n) = 1 \Rightarrow 2n^2 + n - 2 = 1 \Rightarrow 2n^2 + n - 3 = 0 \xrightarrow[\text{صفر است.}]{\text{مجموع ضرایب}} \begin{cases} n = 1 \\ n = \frac{c}{a} = \frac{-3}{2} \notin \mathbb{N} \end{cases} \text{ غ ق}$$

$$P(n) = -1 \Rightarrow 2n^2 + n - 2 = -1 \Rightarrow 2n^2 + n - 1 = 0 \Rightarrow (2n-1)(n+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2n-1=0 \Rightarrow n=\frac{1}{2} \notin \mathbb{N} \text{ غ ق} \\ n+1=0 \Rightarrow n=-1 \notin \mathbb{N} \text{ غ ق} \end{cases}$$

پس فقط برای  $n = 1$  این رابطه برقرار است. بنابراین گزینه (۴) درست است.



- الف)  $a \mid b, -a \mid b, -b \mid a, -a \mid -b$
- ب)  $a \mid mb, ma \mid mb$  ( $m \in \mathbb{Z}$ )
- ۲ اگر  $a \mid b$  آن گاه: پ) اگر  $b \neq 0$  باشد آن گاه:  $|a| \leq |b|$  (ت)  $a \mid b + ma$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) (ث) اگر  $a \mid b$ ، آن گاه:  $|a| = |b|$

۴ اگر  $a \mid b$  و  $c \mid d$ ، آن گاه:  $ac \mid bd$

۶ اگر  $a \mid b$  و  $c \mid a$ ، آن گاه:  $a \mid am + bn$  ( $m, n \in \mathbb{Z}$ )

مثال اگر  $a \mid b$  و  $a \mid c$ ، آن گاه کدام گزینه درست نیست؟

- ۱)  $a^2 \mid bc$  ۲)  $a \mid b + c$  ۳)  $a^2 \mid b + c$  ۴)  $a^2 \mid bc$

پاسخ بررسی گزینه‌ها:

$$۱) \begin{cases} a \mid b \\ a \mid c \end{cases} \Rightarrow a \mid b + c \quad ۲) a \mid b \Rightarrow \begin{cases} a \mid b^2 \\ a \mid c \end{cases} \Rightarrow a \mid b^2 + c \quad ۴) \begin{cases} a \mid b \\ a \mid c \end{cases} \xrightarrow{\times} a^2 \mid bc$$

مثال نقض برای گزینه (۳):

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \Rightarrow a^2 = 9, b + c = 15 \xrightarrow{9/15} a^2 \nmid b + c \end{cases} \Rightarrow \text{پس گزینه (۳) جواب است.}$$

مثال اگر  $a$  عددی صحیح و  $d \mid a - 4$  و  $d \mid a^2 - 7a + 25$ ، آن گاه مجموع مقادیر طبیعی ممکن برای  $d$  کدام است؟

- ۱۷ (۴) ۱۶ (۳) ۱۵ (۲) ۱۴ (۱)

پاسخ

$$\left. \begin{aligned} d \mid a - 4 &\xrightarrow{\times a} d \mid a^2 - 4a \\ d \mid a^2 - 7a + 25 &\end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} d \mid 3a - 25$$

حال مجدداً از رابطه  $d \mid a - 4$  کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} d \mid a - 4 \\ d \mid 3a - 25 \end{cases} \Rightarrow d \mid 3a - 25 - 3(a - 4) \Rightarrow d \mid -13 \Rightarrow d = \pm 1, \pm 13$$

پس مجموع مقادیر طبیعی ممکن برای  $d$  برابر است با:  $13 + 1 = 14$ . پس گزینه (۱) صحیح است.

مثال چند نقطه با مختصات صحیح بر روی منحنی به معادله  $xy + x + y^2 + 2y = 0$  وجود دارد؟

- ۴ صفر ۱ (۳) ۲ (۲) ۳ (۱)

پاسخ روش اول: در چنین مثال‌هایی ابتدا یکی از متغیرها را برحسب دیگری می‌نویسیم:

$$xy + x + y^2 + 2y = 0 \Rightarrow x(1 + y) = -(y^2 + 2y) \Rightarrow x = \frac{-(y^2 + 2y)}{1 + y} \in \mathbb{Z}$$

حال برای آن‌که  $\frac{-y^2 - 2y}{1 + y}$  صحیح باشد، باید  $1 + y \mid -y^2 - 2y$ .

طبق ویژگی (۲) قسمت (د) اگر  $a \mid b$ ، آن گاه  $a \mid b + am$ ، داریم:

$$1 + y \mid -y^2 - 2y \Rightarrow 1 + y \mid -y^2 - 2y + y(1 + y) \Rightarrow 1 + y \mid -y$$

دوباره از همین ویژگی استفاده می‌کنیم:

$$1 + y \mid -y \Rightarrow 1 + y \mid -y + 1(y + 1) \Rightarrow 1 + y \mid 1 \Rightarrow 1 + y = \pm 1$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} 1 + y = 1 \Rightarrow y = 0 \\ 1 + y = -1 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

پس  $y$  دو مقدار صحیح دارد، در نتیجه دو نقطه با مختصات صحیح داریم. پس گزینه (۲) درست است.

نکته چندان جمله‌ای  $f(n)$  با ضرایب صحیح را در نظر بگیرید. برای یافتن  $n$ هایی که  $n - a \mid f(n)$ ، می‌توانیم  $n$ هایی را بیابیم که  $n - a \mid f(a)$ .

حال راه‌حل دیگری برای مثال بالا ارائه می‌کنیم:

روش دوم: همان‌طور که در روش اول دیدیم باید مقادیری برای  $y$  پیدا کنیم که  $1 + y \mid -y^2 - 2y$

$$1 + y = 0 \Rightarrow y = -1 \xrightarrow{\text{نکته بالا}} 1 + y \mid f(-1) \xrightarrow{f(y) = -y^2 - 2y} 1 + y \mid 1 \Rightarrow 1 + y = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

پس دو مقدار صحیح برای  $y$  وجود دارد.

برای به توان رساندن طرفین رابطه عاد کردن یا حذف توان می‌توانیم به شکل زیر عمل کنیم:

①  $a | b \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} a^n | b^n$

②  $a | b \xrightarrow{n \leq m} a^n | b^m$

③  $a^n | b^m \xrightarrow{n \geq m} a | b$

مثال ۱-۷۲۰ بر کدام یک از اعداد زیر بخش پذیر است؟

۱۸ (۴)

۲۱ (۳)

۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ می‌دانیم  $7^{200} - 1 = 49^{100} - 1$  و همواره برای هر  $n \in \mathbb{N}$  داریم:

$$a - b | a^n - b^n \xrightarrow[a=49, b=1, n=100]{a=49} 49 - 1 | 49^{100} - 1 \Rightarrow 48 | 49^{100} - 1 \xrightarrow[12 | 48]{12 | 48} 12 | 49^{100} - 1$$

بنابراین  $7^{200} - 1$  بر ۱۲ بخش پذیر است. پس گزینه (۱) درست است.

با فرض صحیح بودن اعداد  $a$  و  $b$  برای اعداد طبیعی  $n$  و  $m$  داریم:

①  $a - b | a^n - b^n (n \in \mathbb{N}) \xrightarrow{\text{به طور ویژه}} a^m - b^m | a^n - b^n$  (مضرب  $m$  است.)

②  $a + b | a^n - b^n (n \text{ زوج}) \xrightarrow{\text{به طور ویژه}} a^m + b^m | a^n - b^n$  (مضرب زوج  $m$  است.)

③  $a + b | a^n + b^n (n \text{ فرد}) \xrightarrow{\text{به طور ویژه}} a^m + b^m | a^n + b^n$  (مضرب فرد  $m$  است.)

بررسی گزینه‌ها:

۱)  $4 | 6 \times 10 \nrightarrow 4 | 6, 4 | 10$

۲)  $8 | 2^4 \nrightarrow 8 | 2$

۳)  $4 | 3 + 5 \nrightarrow 4 | 3, 4 | 5$

اما در گزینه (۴) داریم:

$$ac | b \Rightarrow b = acq \Rightarrow b = a(cq) \Rightarrow b = aq' \Rightarrow a | b$$

برای آن‌که نقطه‌ای دارای طول و عرض صحیح باشد، باید مخرج کسر، صورت آن را عاد کند:

$$\begin{cases} x + 3 | 7x + a \\ x + 3 | 7(x + 3) \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} x + 3 | 21 - a$$

برای آن‌که تعداد کم‌تری نقطه داشته باشیم، باید  $21 - a$  بین گزینه‌ها کم‌ترین تعداد مقسوم‌علیه را داشته باشد یا به عبارتی  $21 - a$  اول باشد. به ازای مقادیر ۳، ۵ و ۶ برای  $a$ ، عبارت  $21 - a$  مرکب می‌شود اما به ازای  $a = 4$ ،  $21 - a = 17$  می‌شود که اول است، پس جواب گزینه (۲) است.

روش اول: ۳-۸۱۹ می‌دانیم اگر  $a | b$ ، آن‌گاه  $a \leq b$  است.

$$n^2 + 1 | 6n + 1 \Rightarrow n^2 + 1 \leq 6n + 1 \Rightarrow n^2 - 6n \leq 0 \Rightarrow 0 \leq n \leq 6$$

حال با آزمایش مقادیر  $n$  داریم:

$$n = 6 \Rightarrow 6^2 + 1 | 6(6) + 1 \quad \checkmark$$

که باقی‌مانده تقسیم ۶ بر ۴، برابر ۲ است.

روش دوم:

$$\begin{cases} n^2 + 1 | 6n + 1 \xrightarrow{\times(6n-1)} n^2 + 1 | (6n+1)(6n-1) \\ n^2 + 1 | n^2 + 1 \xrightarrow{\times 36} n^2 + 1 | 36n^2 + 36 \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} n^2 + 1 | 37 \Rightarrow n^2 + 1 = \pm 1, \pm 37$$

$n^2 + 1$  عددی مثبت است، پس:

$$n^2 + 1 = 37 \Rightarrow n^2 = 36 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 6$$

که باقی‌مانده تقسیم ۶ بر ۴، برابر ۲ است.

۱-۸۲۰ مخرج کسر باید صورت آن را عاد کند تا  $x$  و  $y$  دارای مختصات صحیح باشند:

$$x + 5 | x^3 + 12 \Rightarrow x + 5 | (-5)^3 + 12 \Rightarrow x + 5 | -113 \Rightarrow x + 5 | 113$$

$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

۱۱۳ عددی اول است، پس با توجه به این‌که  $x \in \mathbb{N}$ ، داریم:

$$x + 5 = 1 \Rightarrow x = -4 \notin \mathbb{N}$$

$$x + 5 = 113 \Rightarrow x = 108$$

۱۸۲۱) برای آن که کسر داده شده، عدد صحیح شود، لازم است مخرج کسر، صورت کسر را عاد کند:  $x - 2 \mid 12 \Rightarrow x - 2 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

$$x - 2 = \begin{cases} -12 \\ -6 \\ -4 \\ -3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} -10 \Rightarrow y = -1 \\ -4 \Rightarrow y = -2 \\ -2 \Rightarrow y = -3 \\ -1 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$$

منحنی باید از ربع سوم بگذرد، در نتیجه  $x$  و  $y$  باید منفی باشند. پس:

پس ۴ نقطه در ربع سوم داریم.

۱۸۲۲) بررسی گزینه‌ها:

۱)  $a^y \mid c^x \xRightarrow{x \cdot y} a^y \mid c^y \Rightarrow a \mid c \checkmark$

۲)  $\left\{ \begin{array}{l} a \mid b \\ b \mid c \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{عاد کردن}]{\text{تعدی در}} a \mid c \checkmark$

۳)  $ab \mid c \xRightarrow{a \mid ab} a \mid c \checkmark$

۴)  $a \mid bc \not\Rightarrow a \mid c$  مثال نقض  $\left\{ \begin{array}{l} a = 6 \\ b = 3 \Rightarrow 6 \mid 3 \times 8 \text{ اما } 6 \nmid 3 \\ c = 8 \end{array} \right.$  پس گزینه (۴) صحیح است.  $6 \nmid 8$  و  $6 \nmid 3$

۱۸۲۳) ۲

$$\left\{ \begin{array}{l} 112 \mid b^3 \Rightarrow 2^4 \times 7 \mid b^3 \Rightarrow \min(b) = 2^4 \times 7 = 28 \\ 135 \mid a^2 \Rightarrow 5 \times 3^3 \mid a^2 \Rightarrow \min(a) = 5 \times 3^2 = 45 \end{array} \right. \Rightarrow \min(a+b) = 73$$

۱۸۲۴) ۳

$$\left\{ \begin{array}{l} a \mid b+4 \\ a \mid c-3 \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{در هم ضرب}} a \mid (b+4)(c-3) \Rightarrow a \mid bc - 3b + 4c - 12$$

از طرفی طبق فرض  $a \mid b+4$ ، پس  $a \mid 3b+12$ . بنابراین:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \mid bc - 3b + 4c - 12 \\ a \mid 3b + 12 \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{با هم جمع می‌کنیم}]{\text{با هم جمع می‌کنیم}} a \mid bc + 4c$$

از طرفی  $a \mid c-3$ ، پس  $a \mid 4c-12$  بنابراین:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \mid bc + 4c \\ a \mid 4c - 12 \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{از هم کم می‌کنیم}]{\text{از هم کم می‌کنیم}} a \mid bc + 12$$

پس برای  $k=12$  عبارت  $bc+k$  بر  $a$  بخش پذیر است.

۱۸۲۵) ۲

$$\left\{ \begin{array}{l} 13 \mid 11x + 7y \xRightarrow{\times 5} 13 \mid 55x + 35y \\ 13 \mid 13x + 13y \xRightarrow{\times 5} 13 \mid 65x + 65y \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{از هم کم می‌کنیم}]{\text{از هم کم می‌کنیم}} 13 \mid 42x - 28y \xRightarrow{\times 3} 13 \mid 126x - 84y$$

چون  $13 \mid 10x + ky$ ، پس  $k=4$  قابل قبول است.

۱۸۲۶) ۳

$$\left\{ \begin{array}{l} d \mid ax + b \\ d \mid a'x + b' \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d \mid aa'x + ba' \\ d \mid aa'x + ab' \end{array} \right\} \Rightarrow d \mid ab' - ba'$$

حال اگر  $ab' - ba' = \pm 1$  باشد، آن‌گاه  $d \mid \pm 1$  از آن نتیجه می‌شود که  $d = \pm 1$  که همان مطلوب مسأله است. لذا باید  $ab' - ba' = \pm 1$  باشد.

۱۸۲۷) ۳

$$\left\{ \begin{array}{l} a \mid 9k + 7 \xRightarrow{\times 7} a \mid 63k + 49 \\ a \mid 7k + b \xRightarrow{\times 9} a \mid 63k + 9b \end{array} \right\} \Rightarrow a \mid 9b - 49$$

حال به بررسی هریک از گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱)  $b=7 \Rightarrow a \mid 63 - 49 \Rightarrow a \mid 14 \xRightarrow{a>1} a=2 \text{ یا } a=7$

۲)  $b=8 \Rightarrow a \mid 72 - 49 \Rightarrow a \mid 23 \Rightarrow a=23$

۳)  $b=9 \Rightarrow a \mid 81 - 49 \Rightarrow a \mid 32 \Rightarrow a=2, a=4, \dots$

۴)  $b=11 \Rightarrow a \mid 99 - 49 \Rightarrow a \mid 50 \Rightarrow a=2, a=5, \dots$

در واقع برای این‌که تنها یک مقدار برای  $a$  به دست آید،  $9b - 49$  باید عددی اول باشد.

۱۸۲۸) ۳

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2k, y = 2k' \Rightarrow 4 \mid 4k^2 - 4k'^2 \Rightarrow 4 \mid 4(k^2 - k'^2) \Rightarrow 4 \mid x^2 - y^2 \checkmark \\ x = 2k+1, y = 2k'+1 \Rightarrow 4 \mid 4k^2 + 4k + 1 - 4k'^2 - 4k' - 1 \Rightarrow 4 \mid 4(k^2 + k - k'^2 - k') \Rightarrow 4 \mid x^2 - y^2 \checkmark \end{array} \right.$$

پس گزینه (۳) درست است. حال برای گزینه‌های (۱) و (۲) و (۴) مثال نقض ارائه می‌کنیم:

۱)  $4 \mid 5 - 1 \not\Rightarrow 4 \mid 25 - 1$

۲)  $3 \mid 5 - 2 \not\Rightarrow 3 \mid 25 - 4$

۴)  $3 \mid 2 + 1 \not\Rightarrow 3 \mid 4 - 1$

۸۲۹ ۲

$$\begin{cases} x-y \mid 3x+11y \\ x-y \mid 3(x-y) \end{cases} \xrightarrow{\substack{\text{از هم کم می کنیم} \\ 3x-3y}} x-y \mid 14y \quad (I)$$

$$\begin{cases} x-y \mid 3x+11y \\ x-y \mid 11(x-y) \end{cases} \xrightarrow{\substack{\text{با هم جمع می کنیم} \\ 11x-11y}} x-y \mid 14x \quad (II)$$

$$\begin{cases} (I) + (II) \Rightarrow x-y \mid 14x+14y \\ x-y \mid 3x+11y \end{cases} \xrightarrow{\substack{\text{از هم کم می کنیم} \\ x-y \mid 3x+11y}} x-y \mid 11x+3y$$

به علاوه این طور هم می توان گفت که:

۸۳۰ ۳ a مضرب ۶،  $a^2$  مضرب ۴۲ و  $a^3$  مضرب ۵۴۰ است، پس داریم:

$$\begin{cases} 6 \mid a \Rightarrow 2 \times 3 \mid a & (1) \\ 42 \mid a^2 \Rightarrow 2 \times 3 \times 7 \mid a^2 \Rightarrow 2 \times 3 \times 7 \mid a & (2) \\ 540 \mid a^3 \Rightarrow 2^2 \times 3^3 \times 5 \mid a^3 \Rightarrow 2 \times 3 \times 5 \mid a & (3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(3),(2),(1)} 2 \times 3 \times 5 \times 7 \mid a \Rightarrow 210 \mid a \Rightarrow a = 210q \xrightarrow{q=1} \min(a) = 210 \Rightarrow \text{جمع ارقام} = 2+1+0 = 3$$

۸۳۱ ۲ می دانیم  $a^m + b^m \mid a^n + b^n$  اگر  $n$  مضرب فرد  $m$  باشد، پس:

$$11^2 + 19^2 \mid (11^2)^3 + (19^2)^3 \Rightarrow 482 \mid 11^{16} + 19^{16} \xrightarrow{241 \mid 482} 241 \mid 11^{16} + 19^{16}$$

۸۳۲ ۲ برای هر عدد طبیعی  $n$  داریم  $a-b \mid a^n - b^n$ . پس داریم:

$$2025 - 1843 \mid 2025^{13} - 1843^{13} \Rightarrow 182 \mid 2025^{13} - 1843^{13} \xrightarrow{13 \mid 182} 13 \mid 2025^{13} - 1843^{13}$$

پس  $2025^{13} - 1843^{13}$  بر ۱۳ بخش پذیر است.

۸۳۳ ۴ می دانیم که  $a^m - b^m \mid a^n - b^n$  (برای  $n$  های مضرب  $m$ ). از آن جایی که  $3^4 - 2^4 = 65$ ، پس اگر  $4 \mid n$ ، آن گاه  $65 \mid a^n - b^n$ .

$$\frac{96-12}{4} + 1 = 22$$

حال تعداد اعداد دورقمی مضرب ۴ برابر است با:

۸۳۴ ۳ اگر  $n$  مضرب  $m$  باشد، آن گاه:  $a^m - b^m \mid a^n - b^n$

$$\begin{cases} m=3 \Rightarrow 3^3 - 2^3 = 19 \Rightarrow 19 \mid 3^{36} - 2^{36} \\ m=4 \Rightarrow 3^4 - 2^4 = 65 \Rightarrow 65 \mid 3^{36} - 2^{36} \end{cases}$$

$$m=3 \Rightarrow 3^3 + 2^3 = 35 \Rightarrow 35 \mid 3^{36} - 2^{36}$$

همین طور اگر  $n$  مضرب زوج  $m$  باشد، آن گاه:  $a^m + b^m \mid a^n - b^n$

پس عدد داده شده تنها به ۴۲ بخش پذیر نیست.

۸۳۵ ۳ اگر  $m \mid n$ ، آن گاه  $a^m - b^m \mid a^n - b^n$ . از طرفی  $5^4 - 3^4 = 39$ ، پس برای آن که  $5^n - 3^n$ ، باید  $4 \mid n$ . حال اعداد دورقمی با این شرط عبارتند از:

$$A = \{12, 16, 20, \dots, 96\}$$

همین طور می دانیم که اگر  $n$  مضرب زوج  $m$  باشد، آن گاه:  $a^m + b^m \mid a^n - b^n$ . از طرفی  $3^3 + 2^3 = 35$ ، پس برای آن که  $3^n - 2^n$ ، باید  $3 \mid n$ ، مضرب زوج ۳

$$B = \{12, 18, 24, \dots, 96\}$$

باشد که اعداد دو رقمی با این شرط عبارتند از:

$$A \cap B = \{12, 24, 36, \dots, 96\} \Rightarrow \text{تعداد} = \frac{96-12}{12} + 1 = 8$$

از اشتراک  $A$  و  $B$  داریم:

۸۳۶ ۴

### قضیه تقسیم

**قضیه تقسیم:** اگر  $a$  عددی صحیح و  $b$  عددی طبیعی باشد، در این صورت (با تقسیم  $a$  بر  $b$ ) اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند  $q$  و  $r$  یافت می شوند

باقی مانده مقسوم علیه

به قسمی که:  $0 \leq r < b$  و  $a = bq + r$

خارج قسمت مقسوم

بیشترین مقداری که  $r$  می تواند داشته باشد،  $b-1$  است.

**مثال** چند عدد طبیعی سه رقمی داریم که باقی مانده تقسیم آن ها بر ۷، برابر ۴ است؟

۱۳۰ (۴)

۱۲۹ (۳)

۱۲۸ (۲)

۱۲۷ (۱)

**پاسخ** طبق قضیه تقسیم داریم:

$$a = bq + r \xrightarrow[r=4]{b=7} a = 7q + 4 \xrightarrow{100 \leq a \leq 999} 100 \leq 7q + 4 \leq 999 \Rightarrow 96 \leq 7q \leq 995 \Rightarrow 14 \leq q \leq 142$$

پس  $129 = 14 + 142 - 14$  عدد داریم. بنابراین گزینه (۳) درست است.

**مثال** مجموع ارقام بزرگ ترین عددی که در تقسیم بر ۴۷، باقی مانده آن، توان دوم خارج قسمت باشد، کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۶ (۱)

**پاسخ** باقی مانده برابر توان دوم خارج قسمت است ( $r = q^2$ )، پس طبق قضیه تقسیم داریم:

$$a = bq + r \xrightarrow[r=q^2]{b=47} a = 47q + q^2 \xrightarrow{0 \leq r < b} 0 \leq q^2 < 47 \Rightarrow q_{\max} = 6$$

پس بیشترین مقدار برای  $a$  برابر است با:

$$a_{\max} = 47(6) + (6)^2 = 318 \Rightarrow \text{جمع ارقام} = 3 + 1 + 8 = 12 \Rightarrow (3) \text{ گزینه}$$

**مثال** اگر در یک تقسیم ۵۴ واحد از مقسوم کم کنیم، ۳ واحد از خارج قسمت کم شده، مقسوم علیه تغییر نکرده و باقی مانده ۶ واحد افزایش می یابد. مقدار مقسوم علیه در این تقسیم کدام است؟

۲۴ (۴)

۲۰ (۳)

۱۸ (۲)

۱۶ (۱)

**پاسخ** در قضیه تقسیم  $a = bq + r$ ، ۵۴ واحد از مقسوم ( $a$ ) و ۳ واحد از خارج قسمت ( $q$ ) کم کرده و ۶ واحد به باقی مانده ( $r$ ) اضافه کرده ایم. پس قضیه به صورت زیر تبدیل می شود:

$$a - 54 = b(q - 3) + (r + 6) \Rightarrow a - 54 = \underbrace{bq + r}_a - 3b + 6 \Rightarrow -54 = -3b + 6 \Rightarrow 3b = 60 \Rightarrow b = 20 \Rightarrow (3) \text{ گزینه}$$

**مثال** در یک تقسیم، مقسوم ۱۸ برابر باقی مانده و باقی مانده برابر با حداکثر مقدار خود است. در این تقسیم، مجموع مقسوم و مقسوم علیه کدام است؟

۳۰۵ (۴)

۲۹۵ (۳)

۲۸۵ (۲)

۲۷۵ (۱)

**پاسخ** در قضیه تقسیم  $a = bq + r$ ، حداکثر مقدار باقی مانده  $b - 1$  است. از آن جایی که مقسوم ۱۸ برابر باقی مانده است. داریم:

$$a = 18r = 18(b - 1) \xrightarrow[r=b-1]{a=bq+r} 18(b - 1) = bq + (b - 1) \Rightarrow 18b - 18 = bq + b - 1 \Rightarrow 17b - bq = 17 \Rightarrow b(17 - q) = 17$$

از آن جایی که ۱۷ عددی اول است، پس دو حالت داریم:

$$1) \begin{cases} b = 17 \\ q = 16 \\ r = b - 1 = 16 \\ a = 18r = 18 \times 16 = 288 \end{cases} \Rightarrow a + b = 288 + 17 = 305$$

$$2) \begin{cases} b = 1 \\ q = 0 \\ r = b - 1 = 0 \\ a = 18r = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b = 1$$

که فقط ۳۰۵ در گزینه ها وجود دارد. پس گزینه (۴) درست است.

**مثال** اگر باقی مانده تقسیم  $a$  بر ۸ و ۷ به ترتیب برابر با ۷ و ۵ باشد، باقی مانده تقسیم  $2a^2 + 5$  بر ۵۶ کدام است؟

۵۲ (۴)

۵۵ (۳)

۴ (۲)

۱ (۱)

**پاسخ** طبق قضیه تقسیم داریم:

$$\begin{cases} a = 8q + 7 \xrightarrow{\times 7} 7a = 56q + 49 \\ a = 7q' + 5 \xrightarrow{\times 8} 8a = 56q' + 40 \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می کنیم.}} a = 56(q' - q) - 9$$

پس باقی مانده تقسیم  $a$  بر ۵۶ برابر ۹- یا ۴۷ است. بنابراین باقی مانده تقسیم  $2a^2 + 5$  بر ۵۶ برابر است با:

$$2(-9)^2 + 5 = 162 + 5 = 167 = 56(2) + 55$$

پس  $2a^2 + 5 = 56q'' + 55$ . بنابراین گزینه (۳) درست است.

**افراز اعداد صحیح به کمک قضیه تقسیم:** اعداد صحیح بر اساس باقی‌مانده تقسیم‌شان بر  $b$  به یکی از  $b$  صورت زیر، قابل نوشتن هستند:

$$bk, bk+1, bk+2, \dots, bk+(b-1)$$

بیشترین مقدار ممکن برای باقی‌مانده

هر عدد صحیح را می‌توان به یکی از دو صورت  $2k+1$  یا  $2k$  (زوج یا فرد) نوشت.

هر عدد اول  $p > 3$  را می‌توان به یکی از دو صورت  $p = 6k+1$  یا  $p = 6k+5$  نوشت.

هر عدد صحیح و فرد را می‌توان به یکی از دو صورت  $4k+1$  یا  $4k+3$  نوشت.

مربع هر عدد صحیح فرد به فرم  $8k+1$  است.

**مثال** عدد  $5^{22}+7$  بر کدام یک از اعداد زیر همواره بخش پذیر است؟

$$13 \text{ (۴)}$$

$$16 \text{ (۳)}$$

$$11 \text{ (۲)}$$

$$8 \text{ (۱)}$$

**پاسخ** عددی فرد است و مربع هر عدد فرد به صورت  $8k+1$  می‌باشد، پس داریم:

$$5^{22}+7 = (5^{11})^2+7 = \frac{(5^{11})^2=8k+1}{8k+1+7=8k+8=8(k+1)}$$

پس  $5^{22}+7$  بر ۸ بخش پذیر است. بنابراین گزینه (۱) درست است.

**بررسی گزینه‌ها:**

$$۱) a = bq + r \Rightarrow nk = nk' \times q + r \Rightarrow r = n(k - k'q) \Rightarrow r = nk'' \quad \checkmark$$

$$۲) a = bq + r \Rightarrow nk = b \times nk' + r \Rightarrow r = n(k - k'b) \Rightarrow r = nk'' \quad \checkmark$$

$$۳) a = bq + r \Rightarrow a = nkq + nk' \Rightarrow a = n(kq + k') \Rightarrow a = nk'' \quad \checkmark$$

$$۴) \text{ مثال نقض } a = 101, b = 7, q = 14, r = 3 \Rightarrow b, q = 7k, 101 = 7 \times 14 + 3 \neq 7k'$$

**۱۸۳۷** طبق قضیه تقسیم  $a = bq + r$  داریم:

$$a = bq + 96$$

تمام عوامل اعداد طبیعی اند، پس حداقل  $q$ ، برابر ۱ و از آن جایی که  $b > 96$  است، حداقل مقدار ممکن برای  $b$  برابر ۹۷ است، پس کمترین مقدار مقسوم برابر است با:

$$a = bq + 96 \xrightarrow[b_{\min}=97]{q_{\min}=1} a_{\min} = 97 \times 1 + 96 = 193$$

پس  $a$  نمی‌تواند برابر ۱۹۰ باشد.

**۴۸۳۸**

$$\left. \begin{aligned} m = 17q + 3 &\Rightarrow m^2 = 17q' + 9 \\ n = 17k + 5 &\Rightarrow 2n = 17k' + 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m^2 - 2n = 17t - 1 = 17t' + 16$$

**۴۸۳۹** روش اول:

$$a = 25b + 17 (b > 17) \xrightarrow{a=6k} 6k = 25b + (25-8) \Rightarrow 2(3k+4) = 25(b+1) \Rightarrow b+1 \equiv 2 \pmod{25} \xrightarrow{b>17} b_{\min} = 19 \Rightarrow a_{\min} = 492$$

روش دوم: طبق قضیه تقسیم  $a = bq + r$  ( $r = 17, q = 25$ ) داریم:

$$a = 25b + 17 \xrightarrow{a \text{ مضرب } 6} 25b + 17 \equiv 0 \pmod{6} \Rightarrow b - 1 \equiv 0 \pmod{6} \Rightarrow b \equiv 1 \pmod{6} \Rightarrow b = 6k + 1$$

از طرفی می‌دانیم در قضیه تقسیم  $b > 17$ ، پس:

$$6k + 1 > 17 \Rightarrow k > \frac{16}{6} \Rightarrow \min k = 3 \Rightarrow \min b = 19 \Rightarrow a_{\min} = 25 \times 19 + 17 = 492 \Rightarrow a \text{ دهگان} = 9$$

**۲۸۴۰** می‌دانیم طبق قضیه تقسیم:  $0 \leq r < b$  و  $a = bq + r$ ، بنابراین بیشترین مقدار باقی‌مانده برابر با  $b-1$  و کمترین مقدار آن برابر صفر است. پس:

$$r_{\max} = b - 1$$

$$a = bq + r \xrightarrow{r=b-1} a = bq + b - 1 \Rightarrow a + 1 = b(q+1) \Rightarrow a + 1 = bq' \Rightarrow b \mid a + 1$$

$$\left\{ \begin{aligned} b \mid a + 1 \\ b \mid a + 7 \end{aligned} \right. \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} b \mid 6 \Rightarrow b \in \{1, 2, 3, 6\} \xrightarrow{b>1} b = 2, 3, 6$$

در نتیجه  $b$  دارای ۳ مقدار است.



۴۸۴۱ طبق قضیه تقسیم  $a = bq + r$  ( $a = b + ۸۰۰, r = ۶۲$ ) داریم:

$$b + ۸۰۰ = bq + ۶۲ \Rightarrow ۷۳۸ = b(q - ۱)$$

برای این که  $q$  دارای بیشترین مقدار ممکن باشد، باید  $b$  دارای حداقل مقدار ممکن باشد. از طرفی  $b < r$ ، پس  $b > ۶۲$  است. یعنی  $b$  کوچکترین عددی است که از ۶۲ بزرگتر بوده و مقسوم علیه ۷۳۸ نیز می باشد. با تجزیه ۷۳۸ داریم:

$$۷۳۸ = ۲ \times ۳^۲ \times ۴۱$$

کوچکترین مقسوم علیه بزرگتر از ۶۲ برای عدد ۷۳۸ برابر با  $b = ۲ \times ۴۱ = ۸۲$  می باشد. بنابراین:

$$۷۳۸ = ۲ \times ۳^۲ \times ۴۱ = b \times (q - ۱) \Rightarrow ۲ \times ۳^۲ \times ۴۱ = ۲ \times ۴۱ \times (q - ۱) \Rightarrow q - ۱ = ۹ \Rightarrow q = ۱۰$$

$$a = ۱۳q + ۱۰$$

۴۸۴۲ طبق قضیه تقسیم  $a = bq + r$  داریم:

با توجه به این که  $a$  عددی فرد و ۱۰ عددی زوج است،  $۱۳q$  باید عددی فرد باشد، از این رو  $q$  باید فرد باشد:  $(q = ۲k + ۱)$

$$a = ۱۳(۲k + ۱) + ۱۰ \Rightarrow a = ۲۶k + ۱۳ + ۱۰ \Rightarrow a = ۲۶k + ۲۳$$

بنابراین باقی مانده تقسیم  $a$  بر ۲۶ برابر با ۲۳ است.

$$a = ۴۴q + ۳۲$$

۴۸۴۳ طبق قضیه تقسیم  $a = bq + r$  ( $b = ۴۴, r = ۳۲$ ) داریم:

(۱) کوچکترین عدد طبیعی که می توان به مقسوم اضافه کرد تا باقی مانده تغییر نکند ۴۴ است، چرا که در آن صورت خواهیم داشت:

$$a + ۴۴ = ۴۴q + ۴۴ + ۳۲ = ۴۴(q + ۱) + ۳۲$$

(۲) بزرگترین عدد طبیعی که می توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج قسمت تغییر نکند ۱۱ است، چرا که اگر به مقسوم ۱۱ واحد اضافه کنیم، باقی مانده برابر ۴۳ می شود (یعنی حداکثر مقدار ممکن باقی مانده). حال اگر باز هم به مقسوم اضافه شود، باقی مانده کاهش یافته و به جای آن یک واحد به خارج قسمت اضافه می شود. در واقع:

$$a + ۱۱ = ۴۴q + ۴۳$$

$$a + ۱۲ = ۴۴q + ۴۴ = ۴۴(q + ۱)$$

بنابراین نسبت این دو مقدار برابر است با:

$$\frac{۴۴}{۱۱} = ۴$$

۴۸۴۴ طبق قضیه تقسیم  $a = bq + r$  ( $b = ۴۷, r = ۲q^۲ - ۳$ ) داریم:

$$a = ۴۷q + ۲q^۲ - ۳$$

$$۲q^۲ - ۳ \leq ۴۶ \Rightarrow q^۲ \leq \frac{۴۹}{۲} \Rightarrow q_{\max} = ۴$$

حداکثر مقدار ممکن برای باقی مانده برابر با  $b - ۱ = ۴۶$  است. پس داریم:

$$a_{\max} = ۴۷ \times ۴ + ۲ \times ۱۶ - ۳ = ۲۱۷$$

در نتیجه:

$$a = ۴۱q + q = ۴۲q$$

۴۸۴۵ طبق قضیه تقسیم  $a = bq + r$  ( $b = ۴۱, r = q$ )، پس داریم:

$$q = r = ۴۰ \Rightarrow a = ۴۲ \times ۴۰$$

و حداکثر مقدار  $r$  برابر با  $b - ۱ = ۴۰$  است، پس:

$$a' = ۳۹q' + r', q' = r' \Rightarrow a' = ۴۰q'$$

حال برای یافتن عدد دیگر داریم:

$$\frac{a}{a'} = \frac{۴۲ \times ۴۰}{۴۰} = ۴۲$$

اگر  $q' = ۰$  باشد، آن گاه  $a'$  طبیعی نیست. بنابراین  $q' = ۱$  و  $a' = ۴۰$  خواهد بود. حال خواهیم داشت:

$$a = b(۷) + ۶۰ = ۷b + ۶۰$$

۴۸۴۶ طبق قضیه تقسیم  $a = bq + r$ ، داریم:

حال اگر به مقسوم علیه  $x$  واحد اضافه کنیم با فرض ثابت ماندن مقسوم و خارج قسمت داریم:

$$a = (b + x) \times ۷ + r' \xrightarrow{a = ۷b + ۶۰} ۷b + ۶۰ = ۷b + ۷x + r' \Rightarrow r' = ۶۰ - ۷x \xrightarrow{۰ \leq r'} ۰ \leq ۶۰ - ۷x \Rightarrow ۷x \leq ۶۰ \Rightarrow x \leq ۸$$

$$a = bq + q$$

۴۸۴۷ طبق قضیه تقسیم  $a = bq + r$ ، چون خارج قسمت و باقی مانده با هم برابرند ( $q = r$ ) داریم:

از طرفی با تغییرات اعمال شده (۳ واحد از مقسوم علیه کم کنیم و ۵ واحد به خارج قسمت اضافه کنیم) داریم:

$$a = (b - ۳)(q + ۵) = bq - ۳q + ۵b - ۱۵$$

با برابر قرار دادن این دو عبارت داریم:

$$bq + q = bq - ۳q + ۵b - ۱۵ \Rightarrow ۴q = ۵b - ۱۵$$

کمترین مقدار  $b$  که به ازای آن عبارت  $۵b - ۱۵$  مضرب ۴ باشد برابر ۷ است ( $(۷ \times ۵) - ۱۵ = ۲۰$ )، پس کمترین مقدار  $q$  برابر است با:

$$۴q = ۳۵ - ۱۵ = ۲۰ \Rightarrow q_{\min} = ۵$$

در نتیجه:

$$a = bq + q \xrightarrow{\substack{b_{\min} = ۷ \\ q_{\min} = ۵}} a_{\min} = ۳۵ + ۵ = ۴۰$$

باقی مانده از مربع خارج قسمت ۲ واحد کمتر است، پس  $r = q^2 - 2$ . طبق قضیه تقسیم داریم:

$$a = 37q + (q^2 - 2) \xrightarrow{0 \leq r < 37} 0 \leq q^2 - 2 < 37 \Rightarrow 2 \leq q^2 < 39 \Rightarrow q_{\max} = 6 \Rightarrow a_{\max} = 37 \times 6 + (36 - 2) = 256$$

که ۲۵۶ مضرب ۱۶ است.

۲) ۸۴۹  $q = r^2$ ، پس طبق قضیه تقسیم داریم:

$$165 = br^2 + r \Rightarrow 3 \times 5 \times 11 = r(br + 1)$$

از آن جایی که  $r < b$  است، پس داریم:

$$r = 1 \Rightarrow 165 = b + 1 \Rightarrow b = 164 \quad \checkmark$$

$$r = 3 \Rightarrow 165 = 9b + 3 \Rightarrow b = 18 \quad \checkmark$$

$$r = 5 \Rightarrow 165 = 25b + 5 \Rightarrow b = 6/4 \notin \mathbb{Z}$$

$$r = 11 \Rightarrow 165 = 121b + 11 \Rightarrow b = 1/2 \notin \mathbb{Z}$$

پس فقط دو مقدار قابل قبول است.

$$a = 41q + 17$$

۴) ۸۵۰ طبق قضیه تقسیم  $a = bq + r$ ، داریم:

اگر عدد نوشته شده در هر یک از گزینه ها را به  $a$  اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$$1) a + 83 = 41q + 17 + 83 = 41q + 100 = 41q' + 18$$

$$2) a + 93 = 41q + 17 + 93 = 41q + 110 = 41q' + 28$$

$$3) a + 103 = 41q + 17 + 103 = 41q + 120 = 41q' + 38$$

$$4) a + 113 = 41q + 17 + 113 = 41q + 130 = 41q' + 7$$

بنابراین در صورت اضافه کردن ۱۱۳ واحد به  $a$ ، باقی مانده برابر با ۷ شده که از ۱۷ کمتر می باشد.

۱) ۸۵۱ طبق قضیه تقسیم  $a = bq + r$ ، داریم:  $(b = 63, r = 17)$

$$a = 63q + 17 \xrightarrow{+60} a + 60 = 63q + 17 + 60 \Rightarrow a + 60 = 63q + 77 = 63q + 63 + 14 = 63(q + 1) + 14$$

از باقی مانده ۳ واحد کم شده و به خارج قسمت ۱ واحد اضافه می شود.

۳) ۸۵۲  $3x^3 + 9x^2$  مربع کامل است، پس داریم:

$$3x^3 + 9x^2 = k^2 \Rightarrow 3x^2(x + 3) = k^2$$

$x^2$  و  $k^2$  مربع کامل اند، پس  $3(x + 3)$  نیز مربع کامل است یا  $3q^2$ ، پس:

$$x = 3(q^2 - 1) \xrightarrow{\text{بیشترین مقدار دو رقمی } x \text{ به ازای } q=5 \text{ است.}} x = 72$$

پس باقی مانده تقسیم ۷۲ بر ۵ برابر است با:

$$72 = 5 \times 14 + 2 \Rightarrow \text{باقی مانده} = 2$$

۲) ۸۵۳ اگر خارج قسمت  $q$  باشد، آن گاه باقی مانده برابر  $2 + \frac{5}{y}q$  می باشد. طبق قضیه تقسیم داریم:

$$a = bq + r \xrightarrow{r = \frac{5}{y}q + 2} a = 18q + \frac{5}{y}q + 2$$

باقی مانده عددی طبیعی است، پس  $7|q$  و داریم:

$$1) q = 7 \Rightarrow a = 18 \times 7 + 7 = 133$$

$$2) q = 14 \Rightarrow a = 18 \times 14 + 12 = 264$$

$$3) q = 21 \Rightarrow a = 18 \times 21 + 17 = 395 \Rightarrow \text{حداکثر مقدار } 395 \text{ است.}$$

$$4) q = 28 \Rightarrow a = 18 \times 28 + 22 \text{ غرق (باقی مانده } (22) \text{ از مقسوم (18) بیشتر است.)}$$

۱) ۸۵۴ طبق قضیه تقسیم  $a = bq + r$  است، پس داریم:  $(r = 17, b = 24)$

$$A = 24q + 17 \Rightarrow A = 24(q - 2) + 2 \times 24 + 17 \Rightarrow A = 24q' + 65$$

از طرفی  $A$  و ۶۵ هر دو مضرب ۵ هستند، پس  $q'$  نیز مضرب ۵ خواهد بود. بنابراین:

$$A = 24q' + 65 \xrightarrow{\div 5} \frac{A}{5} = 24\left(\frac{q'}{5}\right) + 13 \Rightarrow \frac{A}{5} = 24q'' + 13$$

$$\frac{A}{5} = 12 \times 2 \times q'' + 12 + 1 \Rightarrow \frac{A}{5} = 12(2q'' + 1) + 1 \Rightarrow \frac{A}{5} = 12k + 1$$

بنابراین باقی مانده تقسیم  $\frac{A}{5}$  بر ۱۲ برابر با ۱ می باشد.

۱۸۵۵ طبق قضیه تقسیم داریم:

$$\begin{aligned} 171 &= bq + r \xrightarrow{b+q+r=29} 171 = bq + (29 - b - q) \Rightarrow 142 = bq - b - q \xrightarrow{\text{طرفین را به علاوه ۱ می‌کنیم}} 143 = bq - b - q + 1 \\ &= b(q-1) - (q-1) = (b-1)(q-1) \end{aligned}$$

از آن جایی که  $143 = 13 \times 11$ ، دو حالت زیر را داریم:

$$\begin{cases} b-1=13 \Rightarrow b=14 \xrightarrow{b+q+r=29} q+r=29-14=15 \\ b-1=11 \Rightarrow b=12 \xrightarrow{b+q+r=29} q+r=29-12=17 \end{cases}$$

که فقط ۱۷ در بین گزینه‌هاست.

۱۸۵۶ حداکثر مقدار باقی‌مانده  $b-1$  است و از طرفی هم مقسوم ۱۴ برابر باقی‌مانده است، پس داریم:

$$a = bq + r \xrightarrow{a=14r} 14r = bq + r \Rightarrow 13r = bq \xrightarrow{r=b-1} 13(b-1) = bq \Rightarrow 13b - bq = 13 \Rightarrow b(13-q) = 13$$

از آن جایی که ۱۳ عددی اول است دو حالت زیر را داریم:

$$\begin{aligned} ۱) \begin{cases} b=1 \\ 13-q=13 \Rightarrow q=0 \end{cases} &\Rightarrow b+q=1 \\ ۲) \begin{cases} b=13 \\ 13-q=1 \Rightarrow q=12 \end{cases} &\Rightarrow b+q=13+12=25 \end{aligned}$$

که ۲۵ در گزینه‌ها وجود دارد.

۱۸۵۷

$$\begin{cases} a = 15q + q = 16q \\ a = 21q' + q' = 22q' \end{cases} \Rightarrow 16q = 22q' \Rightarrow \frac{q}{q'} = \frac{22}{16} = \frac{11}{8} \Rightarrow \begin{cases} q = 11k \xrightarrow{r=q < 15} 11k < 15 \Rightarrow k \leq 1 \\ q' = 8k' \xrightarrow{r'=q' < 21} 8k' < 21 \Rightarrow k' \leq 2 \end{cases} \Rightarrow k \leq 1 \Rightarrow k_{\max} = 1$$

$$\max(a) = 15 \times 11 + 11 = 165 + 11 = 176 \Rightarrow \text{رقم یکان ۶ است.}$$

بنابراین:

۱۸۵۸ هر عدد اول به صورت  $6k+1$  یا  $6k+5$  یا به اختصار  $6k \pm 1$  است (توجه کنید که عکس این قضیه صحیح نمی‌باشد) داریم:

$$a = 6k \pm 1 \Rightarrow a^6 = 6k^6 + 1, a^7 = 6k^7 + 1 \Rightarrow 4a^7 = 6k^7 + 4 \Rightarrow a^6 + 4a^7 + 5 = 6k^7 + 1 + 6k^7 + 4 + 5 = 6q' + 10 = 6q' + 4$$

۱۸۵۹ می‌دانیم که دو عدد فرد متوالی نسبت به هم اول هستند، بنابراین  $m$  عددی فرد است (توجه کنید که اگر  $m$  زوج باشد،  $(m, m+2) = 2$ )

خواهد بود. حال با توجه به فرد بودن  $m$ ،  $m+2$  نیز فرد بوده و با توجه به این که  $a \mid m+2$ ،  $a$  مقسوم علیه عددی فرد بوده و می‌توان نتیجه گرفت که  $a$  نیز فرد است. با توجه به این که مربع هر عدد فرد به صورت  $4k+1$  است، باقی‌مانده تقسیم  $a^2 + m^2 + 3$  بر ۸ برابر با  $1+1+3=5$  می‌باشد.

۱۸۶۰ می‌دانیم که  $(m, m+1) = 1$ ، بنابراین  $(n, n+2) = 1$  و از آن جا نتیجه می‌گیریم که  $n$  فرد است (اگر  $n$  زوج باشد،  $(n, n+2) = 2$ ) خواهد بود. حال

با توجه به فرد بودن  $n$ ،  $n+4$  نیز فرد بوده و از آن جایی که  $m \mid n+4$  می‌توان نتیجه گرفت که  $m$  نیز یک عدد فرد است (عدد فرد مقسوم‌علیه زوج ندارد). بنابراین

$$m \text{ و } n \text{ فرد بوده و مربع آن‌ها به صورت } 4k+1 \text{ و } 4k'+1 \text{ است و } m^2 - n^2 \text{ برابر خواهد بود با:}$$

$$m^2 - n^2 = 4k + 1 - 4k' - 1 = 4(k - k') = 4k''$$

۱۸۶۱ طبق قضیه تقسیم داریم:

$$\begin{cases} a = 13q + 5 \Rightarrow 10a = 130q + 50 \\ a = 10q' + 4 \Rightarrow 13a = 130q' + 52 \end{cases} \Rightarrow 3a = 130(\underbrace{q' - q}_k) + 2$$

پس داریم:

$$3a = 130k + 2 = 130(\underbrace{k-1}_{k'}) + 130 + 2 \Rightarrow 3a = 130k' + 132$$

چون  $3a$  و  $132$  مضرب ۳ می‌باشند، پس  $k'$  نیز مضرب ۳ است و می‌توانیم آن را بر ۳ تقسیم کنیم:

$$a = 130\left(\frac{k'}{3}\right) + 44$$

چون  $k'$  مضرب ۳ است پس  $\frac{k'}{3} \in \mathbb{Z}$ .

پس باقی‌مانده تقسیم  $a$  بر  $130$ ، برابر ۴۴ است.

۱۸۶۲ طبق قضیه تقسیم داریم:

$$2a + 4 = bq + r \xrightarrow{\times 2} 4a + 8 = b(2q) + 2r \Rightarrow 4a + 7 = b(2q) + (2r-1)$$

طبق صورت سؤال، ۷ واحد از ۲ بیشتر است.

در نتیجه:

$$2r-1 = r+7 \Rightarrow r=8 \Rightarrow 2a+4 = bq+8 \Rightarrow 2a = bq+4 \xrightarrow{\times 2} 4a = b(2q)+8$$

پس باقی‌مانده تقسیم  $4a$  بر  $b$  برابر ۸ است.

۱۸۶۳ طبق قضیه تقسیم  $a = bq + r$  داریم:

$$148 = bq + 5 \Rightarrow bq = 143 \quad 100 = bq' + 9 \Rightarrow bq' = 91$$

بنابراین  $b$  عددی دورقمی است که مقسوم علیه مشترک ۱۴۳ و ۹۱ می باشد. با توجه به این که  $143 = 11 \times 13$  و  $91 = 7 \times 13$ ، لذا تنها عدد با این ویژگی عدد ۱۳ است. بنابراین  $b = 13$  و جمع ارقام آن ۴ می باشد.

۱۸۶۴ طبق قضیه تقسیم  $a = bq + r$  داریم:

$$(b = 12, r = 8) \Rightarrow a = 12q + 8 \Rightarrow 2a = 24q + 16$$

$$\begin{cases} 2a = 24q + 16 \\ 2a = 23q + 20 \end{cases} \Rightarrow 24q + 16 = 23q + 20 \Rightarrow q = 4 \Rightarrow a = 56$$

$$56 = 5 \times 11 + 1$$

حال که مقدار  $a = 56$  به دست آمده، داریم:

بنابراین باقی مانده تقسیم  $a$  بر ۱۱ برابر با ۱ می باشد.

$$a = bq + 13 \Rightarrow 2a = b(2q) + 26 \quad ; \quad (b > 13)$$

اما طبق فرض، باقی مانده تقسیم  $2a$  بر  $b$  برابر ۹ است، پس از ۲۶ مضربی از  $b$  کم شده و حاصل، برابر ۹ شده است. بنابراین داریم:

$$26 - kb = 9 \Rightarrow kb = 17 \xrightarrow{b \geq 14} \begin{cases} b = 17 \\ k = 1 \end{cases}$$

$$41 = 17 \times 2 + 7 \Rightarrow \text{باقی مانده} = 7$$

در نتیجه داریم:

۱۸۶۵ طبق قضیه تقسیم داریم:

$$\begin{cases} a = bq + 6 \\ 3a = bq' + 4 \end{cases} \Rightarrow 3(bq + 6) = bq' + 4 \Rightarrow 3bq + 18 = bq' + 4 \Rightarrow b(q' - 3q) = 14 \xrightarrow{b|14} b = \{1, 2, 7, 14\}$$

از آن جایی که باقی مانده ها برابر ۴ و ۶ می باشند و همواره  $r < b$ ، پس:

$$7 \leq b \xrightarrow{b = \{1, 2, 7, 14\}} \begin{cases} b_{\min} = 7 \\ b_{\max} = 14 \end{cases} \Rightarrow b_{\max} - b_{\min} = 7$$

۱۸۶۷ طبق قضیه تقسیم داریم:

$$\begin{cases} 629 = bq_1 + 5 \Rightarrow bq_1 = 624 \Rightarrow b|624 \Rightarrow b|3 \times 13 \times 2^4 \\ 241 = bq_2 + 1 \Rightarrow bq_2 = 240 \Rightarrow b|240 \Rightarrow b|3 \times 5 \times 2^4 \end{cases} \Rightarrow b|(624, 240) \Rightarrow b|2^4 \times 3 \Rightarrow b|48$$

$$\Rightarrow b \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$

باقی مانده همواره از مقسوم علیه کوچک تر است. پس:

$$1 < b, 5 < b \xrightarrow{\cap} 6 \leq b \Rightarrow b = \{6, 8, 12, 16, 24, 48\} \Rightarrow b_{\max} = 48, b_{\min} = 6 \Rightarrow \frac{b_{\max}}{b_{\min}} = \frac{48}{6} = 8$$

۱۸۶۸ ۱۳۹۸ عددی زوج است. برای  $X$  و  $Y$  یکی از دو حالت زیر پیش می آید:

(۱)  $X$  و  $Y$  هر دو زوج باشند.

در این صورت  $X^2$  و  $Y^2$  هر دو مضرب ۴ بوده اما ۱۳۹۸ مضرب ۴ نمی باشد، بنابراین در این حالت معادله پاسخی در مجموعه اعداد صحیح ندارد.

(۲)  $X$  و  $Y$  هر دو فرد باشند.

در این صورت  $X^2$  و  $Y^2$  هر دو به صورت  $8k+1$  بوده و باقی مانده تقسیم  $X^2 + Y^2$  بر ۸ برابر با ۲ می باشد، اما باقی مانده تقسیم ۱۳۹۸ بر ۸ برابر با ۶ است، پس معادله جوابی ندارد.

۱۸۶۹ ۲ با توجه به این که  $a$  عددی زوج است، به جای  $a$  عبارت  $2k$  را قرار می دهیم:

$$(a+2)(a+4)(a+6)(a+8) = (2k+2)(2k+4)(2k+6)(2k+8) = 16(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$

که اعداد  $k+1, k+2, k+3, k+4$  چهار عدد متوالی بوده و حاصل ضرب آن ها بر ۴! بخش پذیر است پس بزرگ ترین عددی که عبارت داده شده همواره بر آن بخش پذیر است، برابر با  $4! \times 16 = 384$  می باشد.

۱۸۷۰ عبارت داده شده را بر حسب باقی مانده تقسیم بر ۳، به صورت زیر ساده می کنیم:

$$(a + 17)(a + 45)(a + b) \Rightarrow (a + 2)(a + 0)(a + b)$$

بنابراین اگر  $b$  عددی باشد که در تقسیم بر ۳ دارای باقی مانده ۱ باشد، عبارت داده شده در تقسیم بر ۳ به صورت زیر خواهد بود:

$$(a + 2)(a)(a + 1) = a(a + 1)(a + 2)$$

چون اعداد  $a$ ،  $(a + 1)$  و  $(a + 2)$ ، سه عدد متوالی هستند، یکی از آن‌ها بر ۳ بخش پذیر خواهد بود، پس باید  $b = 3k + 1$  باشد.

بررسی گزینه ها:

$$۱) ۷۳ = ۳(۲۴) + ۱ \quad ۲) ۸۳ = ۳(۲۷) + ۲ \quad ۳) ۹۵ = ۳(۳۱) + ۲ \quad ۴) ۱۱۴ = ۳(۳۸) + ۰$$

۱۸۷۱ این سه عدد متوالی را  $k$ ،  $k + 1$  و  $k - 1$  در نظر می گیریم:

$$(k - 1)^3 + k^3 + (k + 1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1 + k^3 + k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 3k^3 + 6k = 3k(k^2 + 2)$$

بنابراین این عدد حداقل یک عامل ۳ دارد.

حال اگر  $k$  مضرب ۳ باشد، این عدد یک عامل ۳ دیگر دارد و اگر  $k$  مضرب ۳ نباشد نیز دارای یک عامل ۳ است (اگر  $k$  مضرب ۳ نباشد،  $k^2 + 2$  همواره بر ۳ بخش پذیر است). بنابراین این عدد همواره بر ۹ بخش پذیر می باشد، اما لزومی ندارد که همواره زوج باشد. (مثال نقض:  $k = 5$ )

۱۸۷۲ روش اول: حاصل ضرب دو عدد به صورت  $6k + 3$  و  $6k' + 5$  برابر خواهد بود با:

$$(6k + 3)(6k' + 5) = 36kk' + 30k + 18k' + 15 = 6(6kk' + 5k + 3k') + 15 = 6(6kk' + 5k + 3k' + 2) + 3 = 6k'' + 3 \Rightarrow$$

تنها گزینه (۲) دارای این ویژگی است.

روش دوم: اگر باقی مانده تقسیم  $a$  بر ۶ برابر ۳ و باقی مانده تقسیم  $b$  بر ۶ برابر ۵ باشد، باقی مانده تقسیم  $ab$  بر ۶ برابر با ۱۵ یا ۳ خواهد بود که عدد ۱۵ غیرقابل قبول است.

بنابراین حاصل ضرب دو عدد به صورت  $6k + 3$  و  $6k' + 5$  به صورت  $6k'' + 3$  خواهد بود و در میان گزینه های داده شده تنها گزینه (۲) دارای این ویژگی می باشد.

۱۸۷۳ باقی مانده تقسیم مربع اعداد طبیعی بر ۴ می تواند ۰ یا ۱ باشد:

$$x = 4k \Rightarrow x^2 = 4k' \quad \text{و} \quad x = 4k + 1 \Rightarrow x^2 = 4k' + 1 \quad \text{و} \quad x = 4k + 2 \Rightarrow x^2 = 4k' \quad \text{و} \quad x = 4k + 3 \Rightarrow x^2 = 4k' + 1$$

حال داریم:

$$x^2 - y^2 = \begin{cases} 4k' - 4k'' = 4\alpha \Rightarrow (۱) \text{ گزینه} \\ (4k' + 1) - 4k'' = 4\alpha + 1 \Rightarrow (۲) \text{ گزینه} \\ (4k' + 1) - (4k'' + 1) = 4\alpha \Rightarrow (۱) \text{ گزینه} \\ 4k' - (4k'' + 1) = 4\alpha - 1 = 4\alpha' + 3 \Rightarrow (۴) \text{ گزینه} \end{cases}$$

بنابراین حاصل  $x^2 - y^2$  به صورت  $4\alpha + 1$ ،  $4\alpha + 3$  می تواند باشد. بنابراین گزینه (۳) در مجموعه اعداد صحیح جواب ندارد.

۱۸۷۴ می دانیم حاصل ضرب ۳ عدد متوالی مضرب ۳ است پس:  $3k = (n - 1)n(n + 1) = n^3 - n$ ، بنابراین:  $n^3 - n \mid 3$ . بنابراین اگر معادله

$n^3 - n = k$  دارای جواب باشد،  $k$  باید مضرب ۳ باشد (توجه کنید این که  $k$  باید مضرب ۳ باشد، شرط لازم است اما کافی نیست). در گزینه های (۱)، (۳) و (۴)

اعداد داده شده مضرب ۳ نیستند، بنابراین با رد گزینه های (۱) و (۳) و (۴)، می توان گفت که گزینه (۲) صحیح است، اما برای این گزینه نیز داریم:

$$n^3 - n = 24360 \Rightarrow n = 29$$

۱۸۷۵ ابتدا باقی مانده تقسیم مربع اعداد صحیح بر ۷ را محاسبه می کنیم:

$$x = 7k \Rightarrow x^2 = 7k' \quad \text{و} \quad x = 7k + 1 \Rightarrow x^2 = 7k' + 1 \quad \text{و} \quad x = 7k + 2 \Rightarrow x^2 = 7k' + 4 \quad \text{و} \quad x = 7k + 3 \Rightarrow x^2 = 7k' + 2$$

$$x = 7k + 4 \Rightarrow x^2 = 7k' + 2 \quad \text{و} \quad x = 7k + 5 \Rightarrow x^2 = 7k' + 4 \quad \text{و} \quad x = 7k + 6 \Rightarrow x^2 = 7k' + 1$$

همان طور که ملاحظه می شود باقی مانده تقسیم مربع اعداد صحیح بر ۷ برابر با ۰، ۱، ۲، ۴ است، بنابراین اگر جمع مربعات دو عدد صحیح بر ۷ بخش پذیر باشد، حتماً هر دو عدد مضرب ۷ بوده اند و می توان نتیجه گرفت که  $ab$  مضرب ۴۹ است.

مثال نقض برای گزینه های (۲)، (۳) و (۴):

$$۲) ۸ \mid 4^2 + 12^2 \Rightarrow 64/48 \quad ۳) ۹ \mid 3^2 + 12^2 \Rightarrow 81/36 \quad ۴) ۱۰ \mid 1^2 + 13^2 \Rightarrow 100/13$$

### بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد «ب م م»

**ب م م:** عدد طبیعی  $d$  را ب م م دو عدد صحیح  $a$  و  $b$  می‌نامیم  $a$  و  $b$  هر دو باهم صفر نیستند و می‌نویسیم  $(a, b) = d$ ، هرگاه دارای دو شرط زیر باشند:

(الف)  $d | a, d | b$  (ب)  $\forall m > 0: m | a, m | b \rightarrow m \leq d$

**نکات ب م م:**

- ①  $(a, b) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b)$
- ②  $a | b \Rightarrow (a, b) = |a|$
- ③ اگر  $k$  عددی طبیعی باشد:  $(ka, kb) = k(a, b)$
- ④ اگر  $n$  عددی طبیعی باشد:  $(a^n, b^n) = (a, b)^n$
- ⑤ اگر  $a = bq + r$ ، آنگاه  $(a, b) = (b, r)$

**مثال:** اگر عدد طبیعی  $n$  مضرب ۷ نباشد، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد  $21 + 9n + n^2$  و  $7 + n$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۱ و ۳ (۳) ۱ و ۵ (۴) ۷

**پاسخ:** فرض کنیم ب م م دو عبارت  $d$  باشد. مطابق تعریف ب م م داریم:

$$\left. \begin{array}{l} d | n^2 + 9n + 21 \\ d | n + 7 \xrightarrow{\times -n} d | -n^2 - 7n \end{array} \right\} \Rightarrow d | 2n + 21$$

$$\left. \begin{array}{l} d | 2n + 21 \\ d | n + 7 \xrightarrow{\times 2} d | 2n + 14 \end{array} \right\} \Rightarrow d | 7 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 7$$

چون  $n \neq 7k$  پس  $d$  نمی‌تواند ۷ باشد، پس  $d = 1$ . پس گزینه (۱) صحیح است.

### کوچکترین مضرب مشترک دو عدد «ک م م»

**ک م م:** عدد طبیعی  $c$  را (ک م م) دو عدد صحیح و ناصفر  $a$  و  $b$  می‌نامیم و می‌نویسیم  $[a, b] = c$ ، هرگاه دو شرط زیر را داشته باشند:

(الف)  $a | c, b | c$  (ب)  $\forall m > 0: a | m, b | m \Rightarrow c \leq m$

**نکات ک م م:**

- ①  $[a, b] = [b, a] = [-a, b] = [a, -b] = [-a, -b]$
- ②  $a | b \Rightarrow [a, b] = |b|$
- ③  $[a, b](a, b) = |ab|$
- ④ اگر  $k$  عددی طبیعی باشد:  $[ka, kb] = k[a, b]$
- ⑤ اگر  $n$  عددی طبیعی باشد:  $[a^n, b^n] = [a, b]^n$
- ⑥  $(a, [a, b]) = |a|$ ,  $[a, (a, b)] = |a|$

**مثال:** اگر  $a$  و  $b$  اعداد صحیح باشند، حاصل  $[(a^2, a), (a, b)]$  کدام است؟

(۱)  $|a|$  (۲)  $a$  (۳)  $b$  (۴)  $ab$

**پاسخ:**  $(a^2, a) = |a| \Rightarrow [(a^2, a), (a, b)] \xrightarrow{d || a} |a|$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} [a, b] = b \Rightarrow a | b \\ (b, c) = b \Rightarrow b | c \end{array} \right\} \Rightarrow a | c \Rightarrow (a, c) = a, [a, c] = c$$

توجه کنید که در گزینه (۴)،  $[b, c] = c$  خواهد بود.

$$(12n + 7, 5n - 2) = d \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d | 5n - 2 \xrightarrow{\times 12} d | 60n - 24 \\ d | 12n + 7 \xrightarrow{\times 5} d | 60n + 35 \end{array} \right. \Rightarrow d | 59 \Rightarrow d = 59 \text{ یا } 1 \text{ غلط}$$