

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و ارسال رایگان

Medabook.com



مدابوک



دریافت برنامه ریزی و مشاوره

از مشاوران رتبه برتر

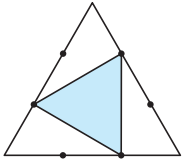
هوشه کنکوری آیدی نوین

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۴



☆ ۱۸۰. هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع مقابل به نسبت های ۱ و ۲ تقسیم شده است. مساحت مثلث رنگی چند

(سراسری ریاضی- ۸۸)



برابر مساحت مثلث متساوی الاضلاع است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

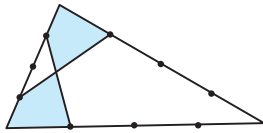
$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{9} \quad (۳)$$

☆ ۱۸۱. در شکل روبه رو هر ضلع مثلث به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. دو چهارضلعی رنگی نسبت به

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۹)



هم کدام وضع را دارند؟

(۲) هم محیط

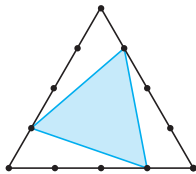
(۱) هم مساحت

(۴) متشابه

(۳) همنهشت

☆ ۱۸۲. هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع به نسبت های ۱ و ۳ تقسیم شده است. مساحت مثلث رنگی چند برابر

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۸)



مساحت مثلث متساوی الاضلاع است؟

$$\frac{3}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{7}{16} \quad (۳)$$

قسمت دوم: قضیه تالس

🕒 تست های متنوعی از قضیه تالس در کنگور مطرح می شود به فصول تالس های هندگانه یا قرار گرفتن متوازی الاضلاع در داخل یک مثلث.

☆ ۱۸۳. در مثلث ABC، $GF \parallel DE \parallel BC$ است. اندازه DE کدام است؟

$$۳ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

$$\frac{5}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{7}{3} \quad (۳)$$

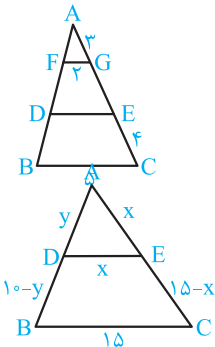
☆ ۱۸۴. در شکل روبه رو $DE \parallel BC$. اگر محیط مثلث ADE با محیط دوزنقه BDEC برابر باشد، آن گاه x کدام است؟

$$۱۰ \quad (۱)$$

$$۸ \quad (۲)$$

$$۱۲ \quad (۳)$$

$$۱۳ \quad (۴)$$



☆ ۱۸۵. اندازه های قاعده های یک دوزنقه قائم الزویه ۱۲ و ۴۸ است. فاصله نقطه تلاقی ساق ها از نزدیک ترین رأس دوزنقه ۱۶ است. طول ساق بزرگ

دوزنقه کدام است؟

$$۸۰ \quad (۴)$$

$$۶۰ \quad (۳)$$

$$۴۰ \quad (۲)$$

$$۲۰ \quad (۱)$$

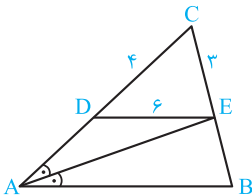
☆ ۱۸۶. در شکل روبه رو $DE \parallel AB$ ، $CE = ۳$ ، $DE = ۶$ و $CD = ۴$. اگر AE نیمساز زاویه A باشد، اندازه BE کدام است؟

$$۴/۵ \quad (۱)$$

$$۳/۵ \quad (۲)$$

$$۳ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۴)$$



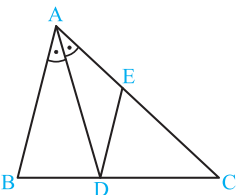
☆ ۱۸۷. در شکل روبه رو، $\angle A = ۶۰^\circ$ ، $AB = ۳$ ، $AC = ۶$ ، AD نیمساز زاویه A و $DE \parallel AB$ است. اندازه EC کدام است؟

$$۱۲/۵ \quad (۲)$$

$$۱۲ \quad (۱)$$

$$۱۵ \quad (۴)$$

$$۱۳/۵ \quad (۳)$$



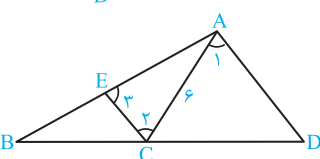
☆ ۱۸۸. در شکل روبه رو داریم $\hat{1} = \hat{2} = \hat{3}$. اگر $AB = ۱۵$ و $AC = ۶$ باشد، $\frac{BD}{CD}$ چقدر است؟

$$\frac{5}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{3} \quad (۱)$$

$$۳ \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

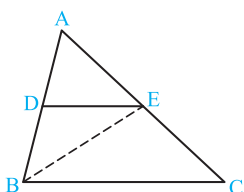


۱۸۹. در مثلث ABC به اضلاع $AB = ۶$ ، $AC = ۳$ و $BC = ۴$. نقاط D ، E و F به ترتیب روی اضلاع AB ، AC و BC قرار دارند، به طوری که چهارضلعی $BDEF$ لوزی است. اندازه ضلع این لوزی کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{۵}{۲}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{۱۲}{۵}$

۱۹۰. در دوزنقه‌ای اندازه قاعده‌ها ۴ و ۹ واحد و اندازه ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون دوزنقه تشکیل می‌شود، کدام است؟

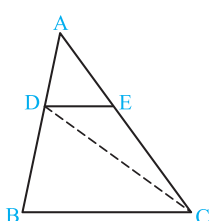
- (۱) $۱۱/۴$ (۲) $۱۱/۶$ (۳) $۱۲/۲$ (۴) $۱۲/۸$



۱۹۱. در مثلث ABC ، پاره خط DE موازی ضلع BC و $AD = \frac{۴}{۵} DB$ است. مساحت مثلث EBC چند برابر مساحت مثلث EBD است؟

(سراسری ریاضی - ۹۳)

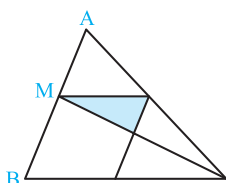
- (۱) ۲ (۲) $۲/۲۵$ (۳) $۲/۵$ (۴) $۲/۷۵$



۱۹۲. در شکل مقابل $\frac{AD}{AB} = \frac{۳}{۷}$ و $DE \parallel BC$. مساحت مثلث ADE چند درصد مساحت مثلث DEC است؟

(سراسری تجربی - ۸۹)

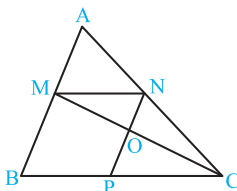
- (۱) ۷۰ (۲) ۷۵ (۳) ۷۸ (۴) ۸۴



۱۹۳. در شکل مقابل $\frac{MA}{MB} = \frac{۲}{۳}$. مساحت مثلث رنگی چند درصد مساحت متوازی‌الاضلاع است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۰)

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰



۱۹۴. در شکل مقابل $\frac{MA}{MB} = \frac{۳}{۷}$ و چهارضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟

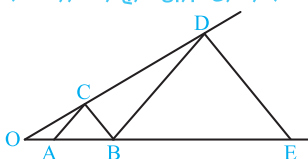
(سراسری تجربی - ۹۰)

- (۱) ۶۳ (۲) ۶۰ (۳) ۷۰ (۴) ۸۴

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۴)

۱۹۵. در شکل روبه‌رو، دو جفت پاره خط موازی اند. $OA = ۳$ و $AB = ۵$ است. اندازه پاره خط BE کدام است؟

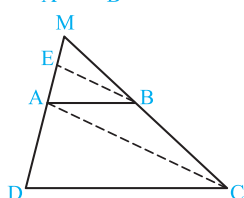
- (۱) $۱۳\frac{۱}{۳}$ (۲) $۱۲\frac{۲}{۳}$ (۳) $۱۱\frac{۱}{۳}$ (۴) $۱۰\frac{۲}{۳}$



۱۹۶. در دوزنقه $ABCD$ ، پاره خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = ۷$ و $AE = ۳$ باشد، طول پاره خط MD کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۳)

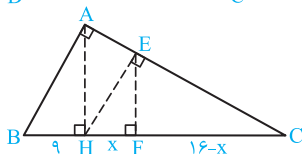
- (۱) ۱۲ (۲) $۱۲/۲۵$ (۳) $۱۲/۵$ (۴) $۱۲/۷۵$



۱۹۷. در شکل مقابل، ارتفاع هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه x کدام است؟

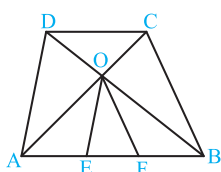
(سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۶)

- (۱) $۴/۵۴$ (۲) $۵/۳۶$ (۳) $۵/۷۶$ (۴) $۶/۷۵$

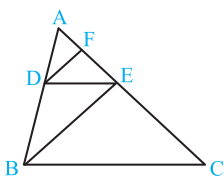


۱۹۸. در دوزنقه مقابل اندازه قاعده‌ها ۶ و ۱۰ است. از نقطه O محل تلاقی قطرهای، خطوطی موازی ساق‌ها رسم شده است. طول پاره خط EF کدام است؟

- (۱) $۲/۴$ (۲) $۲/۵$ (۳) $۱/۶$ (۴) $۳/۲$



☆ ۱۹۹. در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ، $DE = ۸$ و $BC = ۲۰$ است. حاصل $\frac{EF}{AC}$ کدام است؟



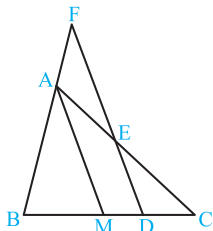
(۱) $\frac{۲۴}{۵}$

(۲) $\frac{۲۷}{۵}$

(۳) $\frac{۳}{۵}$

(۴) $\frac{۱۸}{۵}$

۲۰۰. در مثلث ABC طول میانه $AM = ۳۰$ ، $\frac{CD}{BD} = \frac{۲}{۳}$ و $DF \parallel AM$ است. طول پاره خط EF کدام است؟



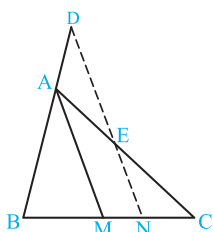
(۱) ۱۵

(۲) ۱۰

(۳) ۱۲

(۴) ۹

☆ ۲۰۱. در مثلث ABC $(AB = \frac{۲}{۳} AC)$ ، پاره خط ND موازی میانه AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟



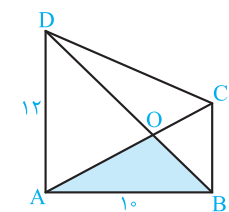
(۱) $\frac{۴}{۹}$

(۲) $\frac{۵}{۹}$ (سراسری ریاضی - ۹۴)

(۳) $\frac{۲}{۳}$

(۴) $\frac{۴}{۵}$

۲۰۲. در دوزنقه قائم الزاویه مقابل اندازه ساق $AB = ۱۰$ ، قاعده بزرگ $AD = ۱۲$ و مساحت مثلث AOB، ۳۵ است. مساحت دوزنقه کدام است؟



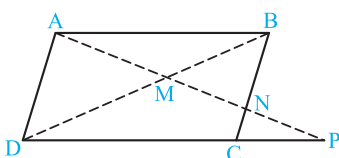
(۱) ۲۸۸

(۲) ۱۴۴

(۳) ۲۰۰

(۴) ۱۸۰

☆ ۲۰۳. در شکل روبه‌رو ABCD متوازی الاضلاع است. حاصل $MN \times MP$ برابر کدام است؟



(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۴)

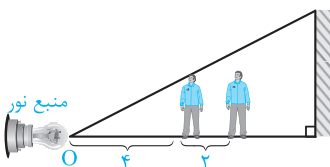
(۱) AB^2

(۲) AD^2

(۳) MD^2

(۴) MA^2

۲۰۴. در شکل مقابل تصویر سایه فردی به ارتفاع $\frac{۱}{۶}$ متر روی دیوار مقابل، ۴ متر است. اگر این فرد ۲ متر به دیوار نزدیک شود، تصویر سایه جدید فرد روی دیوار چند متر است؟



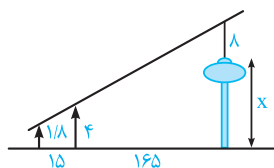
(۱) $\frac{۸}{۵}$

(۲) $\frac{۲}{۵}$

(۳) ۳

(۴) $\frac{۸}{۳}$

☆ ۲۰۵. در شکل مقابل دکل به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشمی ناظر به ارتفاع $\frac{۱}{۸}$ متر، از ارتفاع دکل و تیرک در یک راستا است. بلندی برج چند متر است؟ (سراسری ریاضی - ۸۷)



(سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۷)

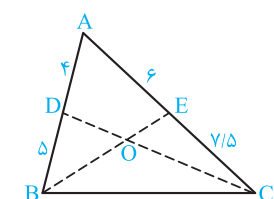
(۱) $\frac{۱۹}{۸}$

(۲) $\frac{۲۰}{۲}$

(۳) $\frac{۲۰}{۸}$

(۴) $\frac{۲۱}{۲}$

۲۰۶. در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟



(۱) $\frac{۲}{۳}$

(۲) $\frac{۴}{۵}$

(۳) $\frac{۵}{۶}$

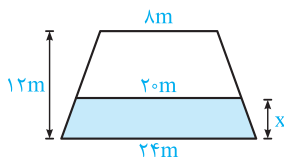
(۴) ۱

۲۰۷. در دوزنقه متساوی الساقین $ABCD$ ، $AB = ۵$ ، $CD = ۱۳$ ، قاعده بزرگ می باشد. ارتفاع BH را رسم می کنیم. از نقطه H

خطی موازی قطر AC رسم می کنیم و نقطه تلاقی آن با ساق AD را E می نامیم. حاصل $\frac{AE}{DE}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{۱}{۳}$ (۲) $\frac{۴}{۹}$ (۳) $\frac{۵}{۹}$ (۴) $\frac{۲}{۹}$

۲۰۸. مقطع عرضی یک کانال آب به صورت دوزنقه می باشد. ارتفاع آب جاری در کانال چند متر است؟

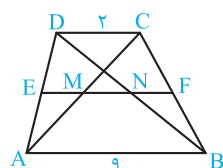


- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۲۰۹. در دوزنقه $ABCD$ ($AB \parallel CD$)، اگر $AB = ۱۰$ ، $CD = ۳$ ، M وسط AB ، E نقطه تلاقی قطر AC و پاره خط DM و F نقطه تلاقی قطر

BD و پاره خط CM باشد، آن گاه طول پاره خط EF کدام است؟

- (۱) $\frac{۵}{۸}$ (۲) $\frac{۷}{۸}$ (۳) $\frac{۳}{۴}$ (۴) $\frac{۱}{۲}$



۲۱۰. در دوزنقه مقابل EF موازی قاعده ها، دو قطر دوزنقه را در M و N قطع کرده است به طوری که

$ME = MN = NF$. حاصل $\frac{AE}{DE}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{۳}{۵}$ (۲) $\frac{۳}{۲۵}$ (۳) $\frac{۱}{۲۵}$ (۴) $\frac{۳}{۲۵}$

۲۱۱. قاعده های یک دوزنقه ۷ و ۱۳ است. خطی موازی قاعده ها که فاصله اش از قاعده کوچک دو برابر فاصله اش از قاعده بزرگ است، دو ساق را

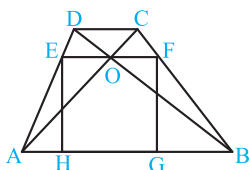
قطع می کند. اگر مساحت ناحیه کوچک تر ایجاد شده ۱۶ باشد، مساحت ناحیه بزرگ تر کدام است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴) ۳۶

۲۱۲. در دوزنقه $ABCD$ ، وسط های ساق های CD و AB را به هم وصل کرده ایم. اگر قاعده بزرگ دوزنقه دو برابر قاعده کوچک آن

باشد ($BC = ۲AD$)، آن گاه نسبت مساحت های دو دوزنقه ایجاد شده کدام است؟

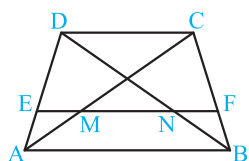
- (۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) $\frac{۱}{۵}$ (۳) $\frac{۱}{۶}$ (۴) $\frac{۱}{۴}$



۲۱۳. در دوزنقه مقابل اندازه قاعده ها $AB = ۴$ و $CD = ۱$ و O نقطه تلاقی قطر ها است. اگر چهارضلعی $EFGH$

مربع باشد، مساحت آن کدام است؟

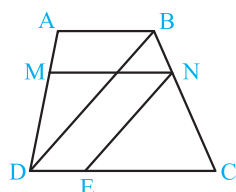
- (۱) $\frac{۲}{۸۹}$ (۲) $\frac{۲}{۲۵}$ (۳) $\frac{۲}{۵۶}$ (۴) $\frac{۲}{۱۶}$



۲۱۴. در دوزنقه $ABCD$ مطابق شکل اندازه قاعده ها ۸ و ۱۲ است. اگر $\frac{DE}{AE} = \frac{CF}{BF} = \frac{۳}{۲}$ باشد، آن گاه اندازه

پاره خط MN کدام است؟

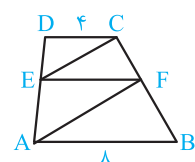
- (۱) $\frac{۴}{۸}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{۳}{۶}$ (۴) $\frac{۵}{۲}$



۲۱۵. در دوزنقه مقابل، MN موازی قاعده ها و $NE \parallel BD$ است. اگر $\frac{AM}{MD} = \frac{۳}{۷}$ و $CD = ۱۵$ باشد، آن گاه

اختلاف طول پاره خط های CE و DE کدام است؟

- (۱) $\frac{۴}{۵}$ (۲) $\frac{۵}{۵}$ (۳) ۶ (۴) ۵



۲۱۶. در دوزنقه $ABCD$ مطابق شکل EF موازی CD و CE موازی با AF است. طول پاره خط EF کدام است؟

- (۱) $\frac{۱۶}{۳}$ (۲) ۶ (۳) $۴\sqrt{۲}$ (۴) $۲\sqrt{۱۰}$



جامع فصل دوم

آزمون ۲

۳۱۵. در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ با فرض $a + m = ۴۵$ ، $b + n = ۴۰$ و $m = ۵$ ، مقدار n کدام است؟

(۴) $\frac{۲۰}{۳}$

(۳) $\frac{۱۵}{۳}$

(۲) $\frac{۲۰}{۹}$

(۱) $\frac{۴۰}{۹}$

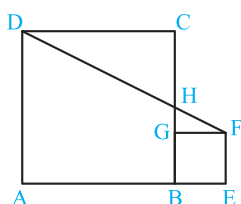
۳۱۶. مساحت مربع‌های ABCD و BEFG به ترتیب ۴۹ و ۱ است. طول پاره خط GH کدام است؟

(۲) $\frac{۳}{۴}$

(۱) ۱

(۴) $\frac{۷}{۸}$

(۳) $\frac{۵}{۶}$



۳۱۷. در مثلث به اضلاع ۳، ۴ و ۵، عمود منصف بزرگ‌ترین ضلع، ضلع متوسط را در نقطه M قطع می‌کند. نقطه M این ضلع را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

(۴) $\frac{۲۸}{۵}$

(۳) $\frac{۳۶}{۵}$

(۲) $\frac{۲۵}{۵}$

(۱) $\frac{۳}{۵}$

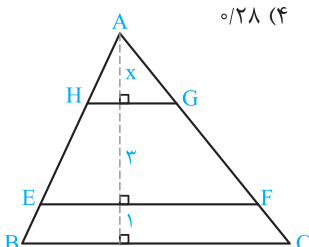
۳۱۸. در شکل مقابل $GH \parallel EF \parallel BC$ ، $GH = ۶$ و $BC = ۱۰$ است. طول پاره خط EF کدام است؟

(۱) ۷

(۲) ۸

(۳) ۹

(۴) $\frac{۷}{۵}$



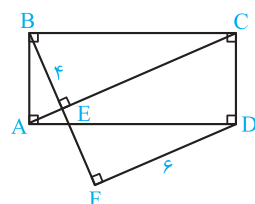
۳۱۹. با توجه به شکل مقابل، مساحت مستطیل ABCD کدام است؟

(۱) ۳۰

(۲) ۲۴

(۳) ۴۸

(۴) ۴۰



۳۲۰. نسبت مساحت‌های دو پنج‌ضلعی متشابه، $\frac{۴}{۹}$ است. اگر محیط یکی از آن‌ها ۱۲ واحد باشد، دو مقدار برای محیط پنج‌ضلعی دیگر به دست می‌آید. تفاضل این دو مقدار کدام است؟

(۴) ۶

(۳) ۹

(۲) ۸

(۱) ۱۰

۳۲۱. در یک مثلث قائم‌الزاویه طول ارتفاع وارد بر وتر $\sqrt{۴۰}$ و اختلاف اندازه پاره‌خط‌هایی که این ارتفاع بر وتر پدید می‌آورد، ۳ است. طول وتر این مثلث کدام است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۹

(۲) ۱۳

(۱) ۱۰

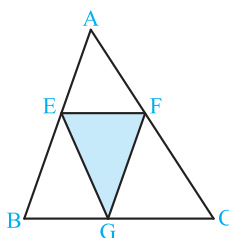
۳۲۲. در شکل روبه‌رو، چهارضلعی BEFG متوازی‌الاضلاع و $\frac{AE}{BE} = \frac{۲}{۳}$ است. نسبت مساحت مثلث‌های EFG و ABC کدام است؟

(۲) $\frac{۶}{۲۵}$

(۱) $\frac{۱۲}{۲۵}$

(۴) $\frac{۵}{۲۵}$

(۳) $\frac{۸}{۲۵}$



۳۲۳. اندازه قاعده‌های یک دوزنقه قائم‌الزاویه ۴ و ۹ است و قطرهای آن بر هم عمودند. مساحت دوزنقه کدام است؟

(۳) ۳۹

(۲) ۳۶

(۱) ۴۰

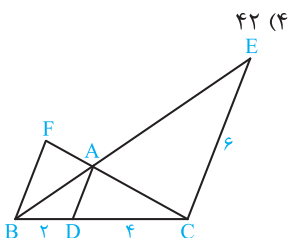
۳۲۴. در شکل مقابل با فرض $AD \parallel CE \parallel BF$ ، طول پاره خط BF کدام است؟

(۲) ۳

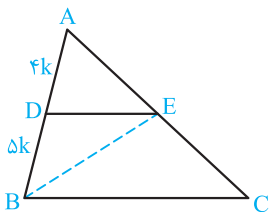
(۱) $\frac{۲}{۵}$

(۴) ۲

(۳) $\frac{۳}{۵}$



پس در دوزنقه BDEC داریم:



$$\frac{S(EBC)}{S(EBD)} = \frac{BC}{DE}$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

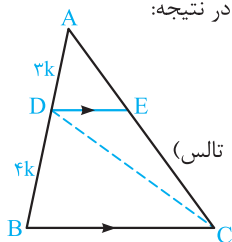
$$\Rightarrow \frac{4k}{9k} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{S(EBC)}{S(EBD)} = \frac{BC}{DE} = \frac{9}{4} = 2/25$$

۱۹۲

بنابه فرض $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{7}$ پس $AD = 3k$ و $AB = 7k$ و $BD = 4k$ دو

مثلث ADE و DEC در رأس D هم‌ارتفاعند. در نتیجه:

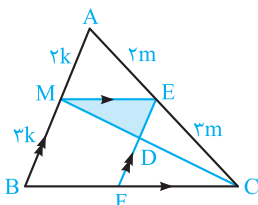


$$\frac{S(ADE)}{S(DEC)} = \frac{AE}{CE}$$

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AD}{BD} = \frac{3}{4} \quad (\text{قضیه تالس})$$

$$\Rightarrow \frac{S(ADE)}{S(DEC)} = \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\%$$

۱۹۳



بنابه فرض $ME \parallel BC$ و $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$

پس بنابه قضیه تالس داریم

$$\frac{AE}{CE} = \frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$$

و در نتیجه $CE = 3m$ و $AE = 2m$

مثلث MDE و متوازی‌الاضلاع BMEF در رأس M هم‌ارتفاع هستند. پس:

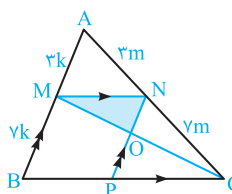
$$\frac{S(MDE)}{S(BMEF)} = \frac{\frac{1}{2} DE \times h}{EF \times h} = \frac{DE}{2EF} = \frac{DE}{2BM}$$

$$\triangle ACM: DE \parallel AM \Rightarrow \frac{DE}{AM} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow DE = 2k \times \frac{3m}{5m} = \frac{6k}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{S(MDE)}{S(BMEF)} = \frac{\frac{6k}{5}}{2 \times 3k} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{S(MDE)}{S(BMEF)} = \frac{1}{5} \times 100 = 20\%$$

۱۹۴

با فرض $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{7}$ ، نسبت پاره‌خط‌ها به صورت مقابل است و داریم:



$$\triangle ACM: ON \parallel AM \Rightarrow \frac{ON}{AM} = \frac{CN}{AC}$$

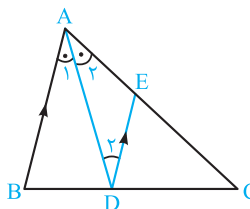
$$\Rightarrow ON = 3k \times \frac{7m}{10m} = \frac{21}{10}k$$

دو مثلث OMN و AMN هر کدام دارای یک ارتفاع هستند که همان

ارتفاع دوزنقه AMON یا فاصله دو خط موازی PN و AB است. پس:

$$\frac{S(OMN)}{S(AMN)} = \frac{ON}{AM} = \frac{\frac{21}{10}k}{3k} = \frac{7}{10} = 70\%$$

۱۸۷



$AB \parallel DE \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1$

$$\frac{\hat{A}_1 = \hat{A}_2}{\hat{A}_1 = \hat{A}_2} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{D}_2 \Rightarrow AE = DE$$

$$\triangle ABC: DE \parallel AB \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{AC}$$

بنابه فرض $AB = 12$ و $AC = 20$ ، پس $AB = 3AC = 60$ ،
در نتیجه:

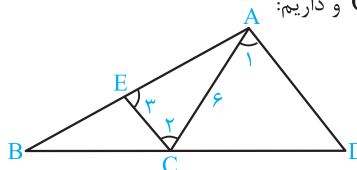
$$\frac{DE}{12} = \frac{CE}{20} \xrightarrow{DE=AE} \frac{AE}{12} = \frac{CE}{20} = \frac{AE+CE}{12+20} = \frac{AC}{32}$$

$$\Rightarrow CE = 20 \times \frac{AC}{32} = 20 \times \frac{20}{32} = \frac{50}{4} = 12/5$$

۱۸۸

چون $\hat{2} = \hat{3}$ ، پس مثلث ACE متساوی الساقین است. $AE = AC = 6$ و

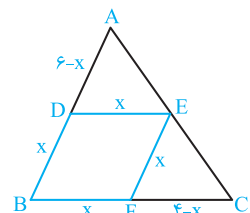
از طرفی $\hat{1} = \hat{4}$ ، پس $CE \parallel AD$ و داریم:



$$CE \parallel AD \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{AE}{AB} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{5}{2}$$

۱۸۹

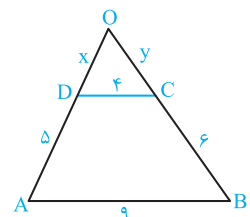
بنابه فرض چهارضلعی BDEF لوزی است، به کمک قضیه تالس و خواص تناسب داریم:



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{6-x}{6} = \frac{x}{4} = \frac{6-x+x}{6+4} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{6}{10} \Rightarrow x = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

۱۹۰



$$CD \parallel AB \Rightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{CD}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = 4$$

$$CD \parallel AB \Rightarrow \frac{OC}{OB} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow \frac{y}{y+6} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{6} = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{24}{5} = 4/8$$

$$\triangle ODC \text{ محیط} = OD + OC + CD = 4 + 4/8 + 4 = 12/8$$

۱۹۱

نکته: قطر هر دوزنقه آن را به دو مثلث تقسیم می‌کند که نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های دوزنقه است.

بنابه فرض $AD = 4k$ و $DB = 5k$ ، $\frac{AD}{DB} = \frac{4}{5}$

$$\triangle ABC: OF \parallel BC \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{OA}{AC} \Rightarrow \frac{AF}{10} = \frac{5m}{10} \Rightarrow AF = \frac{25}{4}$$

با استدلال مشابه در مثلث ABD نتیجه می‌شود $BE = \frac{25}{4}$ و نهایتاً:

$$EF = AF - AE = AF - (AB - BE) = AF + BE - AB$$

$$= \frac{25}{4} + \frac{25}{4} - 10 = \frac{25}{2} - 10 = \frac{12.5}{2} - 10 = \frac{2.5}{2}$$

۱۹۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\triangle ABC: DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{20} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AD = 2k \\ AB = 5k \end{cases} \Rightarrow BD = 3k$$

$$\triangle ABE: DF \parallel BE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AF}{EF} = \frac{AD}{BD} = \frac{2k}{3k} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} AF = 2m \\ EF = 3m \end{cases}$$

$$\triangle ABC: DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{CE} = \frac{AD}{BD} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow CE = \frac{3}{2} AE = \frac{3}{2} (AF + EF) = \frac{3}{2} (2m + 3m) = \frac{15m}{2}$$

$$\frac{EF}{AC} = \frac{3m}{2m + 3m + \frac{15m}{2}} = \frac{6}{25} = 0.24$$

۲۰۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\frac{CD}{BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow CD = 2m, BD = 3m$$

$$\Rightarrow BC = BD + CD = 5m$$

$$\triangle AMC: DE \parallel AM \Rightarrow \frac{DE}{AM} = \frac{CD}{CM} \Rightarrow \frac{DE}{30} = \frac{2m}{5m}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{30} = \frac{4}{5} \Rightarrow DE = 30 \times \frac{4}{5} = 24$$

$$\triangle BDF: AM \parallel DF \Rightarrow \frac{BM}{BD} = \frac{AM}{DF} \Rightarrow \frac{2}{3m} = \frac{30}{DF}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{30}{DF} \Rightarrow DF = \frac{6 \times 30}{5} = 36$$

$$EF = DF - DE = 36 - 24 = 12$$

۲۰۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

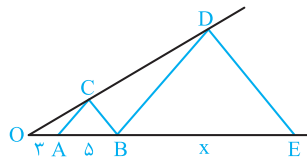
بنابراین فرض AM میانبر است (BM = CM) و $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$ داریم.

$$\triangle AMC: NE \parallel AM \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{MN}{CM}$$

$$\triangle BDN: AM \parallel ND \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{MN}{BM}$$

$$\xrightarrow{BM=CM} \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$$

۱۹۵ (۱) (۲) (۳) (۴)
دو بار قضیه تالس را می‌نویسیم:



$$\begin{cases} \triangle OBD: AC \parallel BD \Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD} \Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{3+5}{x} \\ \triangle ODE: BC \parallel DE \Rightarrow \frac{OB}{BE} = \frac{OC}{CD} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{40}{3} = \frac{39+1}{3} = 13\frac{1}{3}$$

۱۹۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته: اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ آن‌گاه $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$

$$\begin{cases} \triangle MDC: AB \parallel CD \Rightarrow \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \\ \triangle MAC: AC \parallel BE \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MB}{BC} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{AD} = \frac{ME}{AE} \Rightarrow \frac{x+3}{y} = \frac{x}{3} = \frac{x+3-x}{y-3} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$MD = x + 3 + y = 10 + 2.25 = 12.25$$

۱۹۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\begin{cases} \triangle ABC: AB \parallel HE \Rightarrow \frac{CH}{BH} = \frac{CE}{AE} \\ \triangle ACH: AH \parallel EF \Rightarrow \frac{CF}{HF} = \frac{CE}{AE} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{CH}{BH} = \frac{CF}{HF} \Rightarrow \frac{x+16-x}{9} = \frac{16-x}{x} \Rightarrow \frac{16}{9} = \frac{16-x}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{25}{9} = \frac{16}{x} \Rightarrow x = \frac{144}{25} = \frac{576}{100} = 5.76$$

۱۹۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته: در هر دوزنقه قطرها یکدیگر را به نسبت قاعده‌ها قطع می‌کنند.

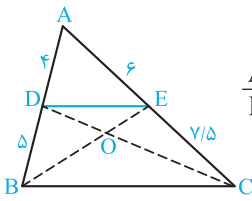
$$\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB}$$

بنابراین فرض در دوزنقه ABCD داریم $CD = 6$ و $AB = 10$
قضیه تالس را در مثلث AOB برای امتداد اضلاع می‌نویسیم:

$$CD \parallel AB \Rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OC = 3m, OA = 5m \\ OD = 3n, OB = 5n \end{cases}$$

۲۰۶ ۱ ۲ ۳ ۴

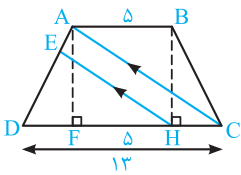


D را به E وصل می‌کنیم. داریم:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{4}{5}, \quad \frac{AE}{CE} = \frac{6}{7.5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} DE \parallel BC$$

بنابراین مساحت‌های دو مثلث BDE و CDE برابرند. زیرا قاعده DE در آن‌ها مشترک است و رأس سوم آن‌ها یعنی B و C روی خطی موازی DE قرار دارد. با کم کردن مساحت DOE از مساحت آن‌ها نتیجه می‌شود:



AF را عمود بر CD رسم می‌کنیم. چهارضلعی ABHF مستطیل است پس FH = AB = 5

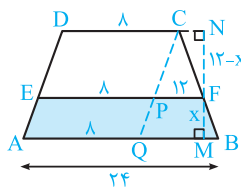
دو پاره‌خط CH و DF برابرند زیرا مثلث‌های قائم‌الزاویه BHC و AFD هم‌نهشت‌اند. داریم:

$$CH = DF = \frac{CD - FH}{2} = \frac{CD - AB}{2} = \frac{13 - 5}{2} = 4$$

$$\triangle ACD : EH \parallel AC \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{CH}{DH} = \frac{4}{13 - 4} = \frac{4}{9}$$

۲۰۸ ۱ ۲ ۳ ۴

قضیه تالس را برای امتداد اضلاع در مثلث FBM می‌نویسیم:



$$\frac{BF}{CF} = \frac{FM}{FN} = \frac{x}{12 - x}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{BC}{CF} = \frac{12}{12 - x}$$

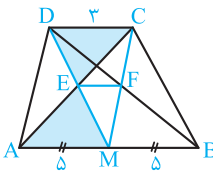
$$\Rightarrow \frac{CF}{BC} = \frac{12 - x}{12}$$

حال از C خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم. چهارضلعی‌های DEPC و DAQC متوازی‌الاضلاع هستند و به کمک قضیه تالس در مثلث BCQ داریم:

$$\frac{CF}{BC} = \frac{PF}{BQ} \Rightarrow \frac{12 - x}{12} = \frac{EF - PE}{AB - AQ} \Rightarrow \frac{12 - x}{12} = \frac{20 - 8}{24 - 8}$$

$$\Rightarrow \frac{12 - x}{12} = \frac{12}{16} \Rightarrow 12 - x = \frac{144}{16} = 9 \Rightarrow x = 12 - 9 = 3$$

۲۰۹ ۱ ۲ ۳ ۴



قضیه تالس را در مثلث AME برای امتداد اضلاع می‌نویسیم. با استدلال $\frac{AM}{CD} = \frac{ME}{DE}$

مشابه در مثلث MFB داریم: $\frac{MB}{CD} = \frac{MF}{CF}$ اما $\frac{MB}{CD} = \frac{MF}{CF}$

$$\frac{ME}{DE} = \frac{MF}{CF} = \frac{5}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس در مثلث CDM}} EF \parallel CD \Rightarrow \frac{EF}{CD} = \frac{ME}{MD}$$

اما از $\frac{ME}{DE} = \frac{5}{3}$ با ترکیب در مخرج نتیجه می‌شود $\frac{ME}{MD} = \frac{5}{8}$ و

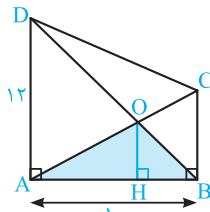
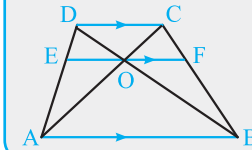
$$\frac{EF}{3} = \frac{5}{8} \Rightarrow EF = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$$

در نتیجه:

۲۰۲ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: در هر دوزنقه مطابق شکل، با فرض $EF \parallel AB \parallel CD$ داریم:

$$\frac{1}{OE} = \frac{1}{OF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$



$$S(\triangle AOB) = 25 \Rightarrow \frac{1}{2} OH \times AB = 25$$

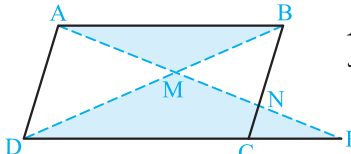
$$\Rightarrow \frac{1}{2} OH \times 10 = 25 \Rightarrow OH = \frac{50}{10} = 5$$

$$\frac{1}{OH} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{12} + \frac{1}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{BC} = \frac{1}{5} - \frac{1}{12} = \frac{5}{60} \Rightarrow BC = \frac{60}{5} = 12$$

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} \times AB \times (AD + BC) = \frac{1}{2} \times 10 \times (12 + 12) = 120$$

۲۰۳ ۱ ۲ ۳ ۴



ابتدا قضیه تالس را در مثلث DMP برای امتداد اضلاعش می‌نویسیم:

$$AB \parallel DP \Rightarrow \frac{MA}{MP} = \frac{BM}{DM}$$

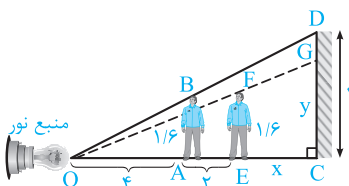
حال قضیه تالس را در مثلث ADM برای امتداد اضلاعش می‌نویسیم:

$$AD \parallel BN \Rightarrow \frac{BM}{DM} = \frac{MN}{MA}$$

$$\frac{MA}{MP} = \frac{MN}{MA} \Rightarrow MA^2 = MN \times MP$$

از مقایسه این دو تناسب نتیجه می‌شود:

۲۰۴ ۱ ۲ ۳ ۴



$$\triangle OCD : AB \parallel CD$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC}$$

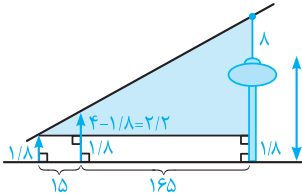
$$\Rightarrow \frac{1/6}{4} = \frac{4}{4 + 2 + x}$$

$$\Rightarrow x + 6 = 10 \Rightarrow x = 4$$

$$\triangle OCG : EF \parallel CG \Rightarrow \frac{EF}{CG} = \frac{OE}{OC} \Rightarrow \frac{1/6}{y} = \frac{4 + 2}{4 + 2 + x}$$

$$\Rightarrow \frac{1/6}{y} = \frac{6}{6 + 4} \Rightarrow y = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

۲۰۵ ۱ ۲ ۳ ۴

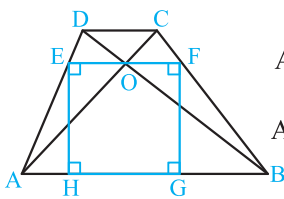


ارتفاع برج و دکل برابر ۸ است. در مثلث قائم‌الزاویه رنگی، قضیه تالس برقرار است. داریم:

$$\frac{2/2}{x + 8 - 1/8} = \frac{15}{15 + 165} \Rightarrow \frac{2/2}{x + 6/2} = \frac{15}{180}$$

$$\Rightarrow \frac{2/2}{x + 6/2} = \frac{1}{12} \Rightarrow x + 6/2 = 24/4 \Rightarrow x = 24/4 - 6/2 = 20/2$$

۲۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴



روش اول:

$$\triangle ABD : OE \parallel AB \Rightarrow \frac{OE}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

$$\triangle ABC : OF \parallel AB \Rightarrow \frac{OF}{AB} = \frac{CF}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{AE} = \frac{CF}{BF} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{DE}{AD} = \frac{CF}{BC}$$

از مقایسه سه تناسب فوق نتیجه می‌شود $\frac{OE}{AB} = \frac{OF}{AB}$. پس $OE = OF$

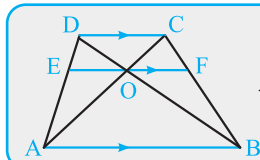
به کمک قضیه تالس در مثلث‌های ABD و BCD داریم:

$$\frac{OE}{AB} = \frac{OD}{BD}, \frac{OF}{CD} = \frac{OB}{BD} \xrightarrow{+} \frac{OE}{AB} + \frac{OF}{CD} = \frac{OD + OB}{BD}$$

$$\Rightarrow \frac{OE}{4} + \frac{OE}{1} = \frac{BD}{BD} = 1 \Rightarrow OE + 4OE = 4 \Rightarrow OE = \frac{4}{5}$$

$$EFGH = EF^2 = (2OE)^2 = \left(2 \times \frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25} = 2\frac{14}{25}$$

روش دوم:



نکته: در دوزنقه روبه‌رو داریم:

$$\frac{1}{OE} = \frac{1}{OF} = \frac{1}{CD} + \frac{1}{AB}$$

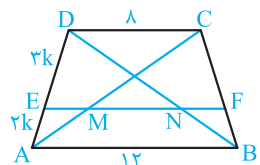
$$\frac{1}{OE} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$

$$\xrightarrow{\text{بنابه فرض } CD=1, AB=4} \frac{1}{OE} = \frac{1}{4} + \frac{1}{1} = \frac{5}{4} \Rightarrow OE = OF = \frac{4}{5}$$

$$EF = OE + OF = 2 \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$$

$$EFGH = EF^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25} = 2\frac{14}{25}$$

۲۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴



بنابه عکس قضیه تالس در دوزنقه، از

$$\frac{DE}{AE} = \frac{CF}{BF} = \frac{3}{2} \quad \text{فرض نتیجه}$$

می‌شود $EF \parallel CD \parallel AB$

داریم:

$$\triangle ACD : ME \parallel CD \Rightarrow \frac{ME}{CD} = \frac{AE}{AD}$$

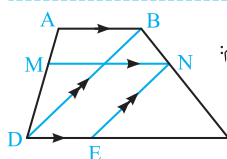
$$\Rightarrow \frac{ME}{8} = \frac{3k}{12} \Rightarrow ME = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$$

$$\triangle ABD : NE \parallel AB \Rightarrow \frac{NE}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{NE}{12} = \frac{3k}{12} \Rightarrow NE = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$$

$$MN = NE - ME = 7\frac{1}{5} - 3\frac{1}{5} = 4$$

۲۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴

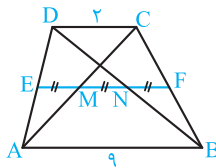
بنابه فرض $\frac{AM}{MD} = \frac{3}{7}$ و $CD = 15$ است. داریم:

$$MN \parallel AB \parallel CD$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه تالس در دوزنقه}} \frac{BN}{NC} = \frac{AM}{MD} = \frac{3}{7}$$

$$\triangle BDC : NE \parallel BD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BN}{NC} = \frac{DE}{CE}$$

۲۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴



بنابه فرض EF موازی قاعده‌های دوزنقه است و سایر موارد فرض روی شکل نشان داده شده است. داریم:

$$\triangle ABD : EN \parallel AB \Rightarrow \frac{DN}{BD} = \frac{EN}{AB} = \frac{2ME}{9}$$

$$\triangle BCD : NF \parallel CD \Rightarrow \frac{BN}{BD} = \frac{NF}{CD} = \frac{ME}{2}$$

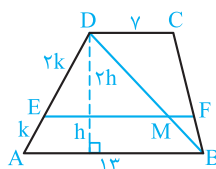
$$\xrightarrow{+} \frac{DN + BN}{BD} = \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{2}\right)ME$$

$$\Rightarrow ME \times \frac{13}{18} = \frac{BD}{BD} = 1 \Rightarrow ME = \frac{18}{13}$$

$$\triangle ACD : ME \parallel CD \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{ME}{CD} = \frac{\frac{18}{13}}{2} = \frac{9}{13}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{AE}{DE} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

۲۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴



بنابه فرض فاصله E از قاعده کوچک دو برابر فاصله آن تا قاعده بزرگ است. پس E ساق AD را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند. جهت محاسبه EF، قطر BD را رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن با EF را M می‌نامیم. داریم:

$$\triangle ABD : ME \parallel AB$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{AD} = \frac{ME}{AB} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{ME}{13} \Rightarrow ME = \frac{26}{3}$$

حال به کمک قضیه تالس در دوزنقه داریم:

$$\triangle BDC : MF \parallel CD \Rightarrow \frac{BF}{BC} = \frac{MF}{CD} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{MF}{7} \Rightarrow MF = \frac{7}{3}$$

$$EF = ME + MF = \frac{26}{3} + \frac{7}{3} = \frac{33}{3} = 11$$

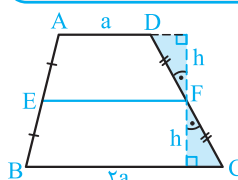
$$\text{فرض } S(AEFB) = 16 \Rightarrow \frac{1}{2} \times h \times (EF + AB) = 16$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times h \times (11 + 13) = 16 \Rightarrow h = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$S(CDEF) = \frac{1}{2} \times 2h \times (EF + CD) = \frac{4}{3} \times (11 + 7) = \frac{4}{3} \times 18 = 24$$

۲۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: پاره‌خطی که وسط دو ساق یک دوزنقه را به هم وصل می‌کند، پاره‌خط میانگین دوزنقه نامیده می‌شود که همواره موازی قاعده‌ها و اندازه آن میانگین حسابی طول دو قاعده است.



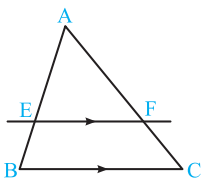
پس چهارضلعی‌های AEFD و EFCB دوزنقه هستند و ارتفاع‌هایشان برابر است، زیرا مثلث‌های قائم‌الزاویه رنگی به حالت وتر و یک زاویه حاده همنهشت هستند. داریم:

$$\frac{S(AEFD)}{S(EFCB)} = \frac{\frac{1}{2} h \times (BC + EF)}{\frac{1}{2} h \times (AD + EF)} = \frac{2a + \frac{a + 2a}{2}}{a + \frac{a + 2a}{2}} = \frac{4a + 3a}{5a} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$$

فصل ۲ قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

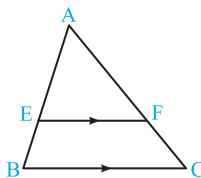
قسمت دوم: قضیه تالس

قضیه تالس: اگر خطی موازی یک ضلع مثلث دو ضلع دیگر آن را قطع کند، پاره‌های متناظر ایجاد شده روی آن دو ضلع متناسب هستند.



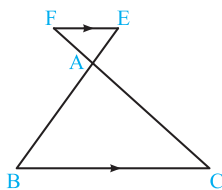
$$EF \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} ۱) \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{CF} \\ ۲) \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \\ ۳) \frac{BE}{AB} = \frac{CF}{AC} \end{cases}$$

عکس قضیه تالس: اگر در مثلث ABC نقطه‌های E و F روی اضلاع AB و AC چنان باشند که هر یک از تناسب‌های فوق برقرار باشد، آن‌گاه $EF \parallel BC$ است.



نتیجه اساسی در قضیه تالس: خطی که موازی یک ضلع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند، مثلثی ایجاد می‌کند که اضلاعش متناظر با اضلاع مثلث مفروض متناسب هستند. (به عبارت دیگر دو مثلث AEF و ABC متشابه هستند).

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$



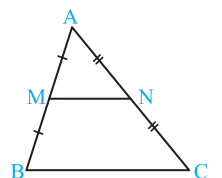
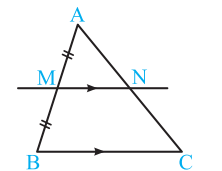
نکته قضیه تالس و نتیجه اساسی آن هنگامی که خطی موازی یک ضلع مثلث امتداد دو ضلع دیگر را قطع کند نیز برقرار است. (دو مثلث AEF و ABC متشابه‌اند).

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

پاره‌خط میانگین مثلث

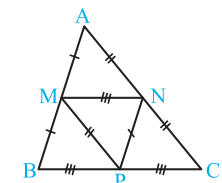
۱- خطی که از وسط یک ضلع مثلث موازی ضلع سوم آن رسم شود، از وسط ضلع مقابل می‌گذرد و پاره‌خط حاصل نصف ضلع سوم است (این پاره‌خط را، پاره‌خط میانگین مثلث می‌نامند. هر مثلث سه پاره‌خط میانگین دارد).

$$(AM = MB, MN \parallel BC) \Rightarrow AN = CN, MN = \frac{BC}{2}$$



۲- پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع یک مثلث را به هم وصل می‌کند (پاره‌خط میانگین مثلث)، موازی و نصف ضلع سوم است.

$$(AM = MB, AN = NC) \Rightarrow MN \parallel BC, MN = \frac{BC}{2}$$



نتیجه اگر هر سه پاره‌خط میانگین یک مثلث را به هم وصل کنیم، چهار مثلث همنهشت (ض‌ض‌ض) پدید می‌آید که مثلث وسطی را مثلث میانگین می‌نامند. هم‌چنین سه متوازی‌الاضلاع و سه دوزنقه ایجاد می‌شود. مساحت هر یک از این مثلث‌ها $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث ABC و محیط آن‌ها نصف محیط مثلث ABC است. این مثلث‌ها با مثلث ABC متشابه با نسبت تشابه ۲ یا $\frac{1}{2}$ می‌باشند.

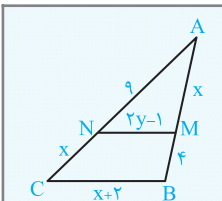
تست: در شکل مقابل $MN \parallel BC$ است. $x - y$ کدام است؟

$$۳/۲ (۲)$$

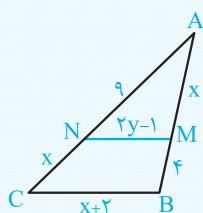
$$۳/۱ (۱)$$

$$۳/۳ (۴)$$

$$۲/۷ (۳)$$



پاسخ:



$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{CN} = \frac{AM}{BM} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{2y-1}{x+2} = \frac{9}{9+x} \Rightarrow \frac{2y-1}{6+2} = \frac{9}{9+6}$$

$$\Rightarrow 2y-1 = \frac{24}{5} = 4.8 \Rightarrow y = \frac{5.8}{2} = 2.9 \Rightarrow x-y = 6-2.9 = 3.1 \Rightarrow \text{گزینه (۱) درست است.}$$

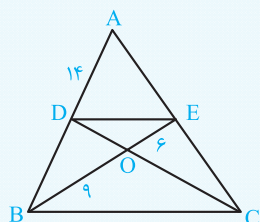
تست: در دوزنقه روبه‌رو اندازه ساق BD کدام است؟

(۲) ۷

(۴) ۹

(۱) ۶

(۳) ۸

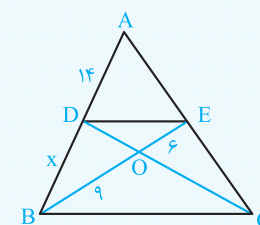


پاسخ: قضیه تالس را در مثلث OBC برای امتداد اضلاع می‌نویسیم یا این‌که می‌گوییم دو مثلث OBC و OED متشابه‌اند.

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{OE}{OB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\triangle ABC : DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{14}{x+14} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{14}{x} = \frac{2}{1} \Rightarrow x = 7 \Rightarrow \text{گزینه (۲) درست است.}$$



تست: در شکل مقابل چهارضلعی ADEF متوازی‌الاضلاع است. محیط آن کدام است؟

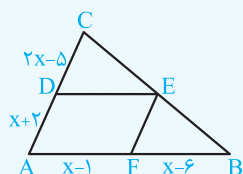
(۲) ۵۶

(۴) ۷۰

(۱) ۶۰

(۳) ۶۶

پاسخ:



$$\left. \begin{array}{l} DE \parallel AB \Rightarrow \frac{CD}{AD} = \frac{CE}{BE} \\ EF \parallel AC \Rightarrow \frac{CE}{BE} = \frac{AF}{BF} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{CD}{AD} = \frac{AF}{BF} \Rightarrow \frac{2x-5}{x+2} = \frac{x-1}{x-6}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 17x + 30 = x^2 + x - 2 \Rightarrow x^2 - 18x + 32 = 0 \Rightarrow (x-16)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 16, x = 2$$

جواب $x = 2$ قابل قبول نیست (چرا؟)، پس $x = 16$ است.

$$\text{محیط } ADEF = 2(AF + AD) = 2(x-1 + x+2) = 2(2x+1) = 2(32+1) = 66 \Rightarrow \text{گزینه (۳) درست است.}$$

تست: در شکل مقابل $\frac{AD}{BD} = \frac{4}{3}$ ، $\frac{AE}{CE} = \frac{2}{5}$ و $EF \parallel DK$. اگر $CF = 10$ و $BK = 6$ باشد، طول

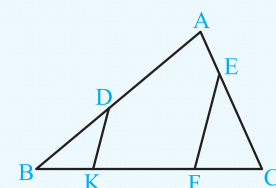
پاره خط KF کدام است؟

(۲) ۱۲

(۴) ۱۵

(۱) ۱۴

(۳) ۱۰

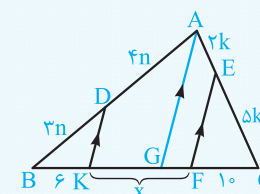


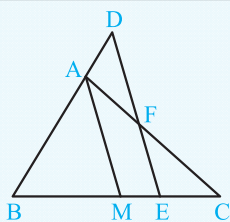
پاسخ: از A خطی موازی EF یا DK رسم می‌کنیم تا BC را در G قطع کند. بنابه قضیه تالس در مثلث‌های AGC و ABG داریم:

$$\frac{CF}{GF} = \frac{CE}{AE} \Rightarrow \frac{10}{GF} = \frac{2k}{5k} = \frac{2}{5} \Rightarrow GF = \frac{50}{2} = 25$$

$$\frac{BK}{GK} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{6}{GK} = \frac{4n}{3n} = \frac{4}{3} \Rightarrow GK = \frac{24}{3} = 8$$

$$x = KF = GK + GF = 8 + 25 = 33 \Rightarrow \text{گزینه (۲) درست است.}$$





تست: در مثلث ABC مطابق شکل، AM میانه و $DE \parallel AM$. اگر DE ضلع AC را در F قطع کند به

طوری که $\frac{EF}{AM} = \frac{3}{5}$ باشد، آنگاه نسبت $\frac{DE}{AM}$ کدام است؟

۱/۴ (۲)

۱/۵ (۱)

۱/۲ (۴)

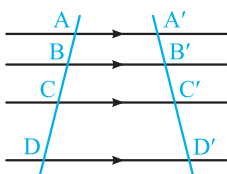
۱/۶ (۳)

پاسخ: بنابه فرض $BM = CM$. به کمک قضیه تالس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AMC : EF \parallel AM \Rightarrow \frac{EF}{AM} = \frac{CE}{CM} \\ \triangle BDE : AM \parallel DE \Rightarrow \frac{DE}{AM} = \frac{BE}{BM} = \frac{BE}{CM} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} \frac{EF}{AM} + \frac{DE}{AM} = \frac{CE + BE}{CM} = \frac{BC}{CM}$$

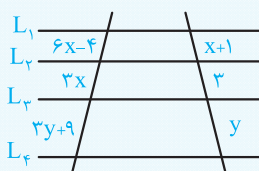
$$\Rightarrow \frac{EF}{AM} + \frac{DE}{AM} = \frac{2CM}{CM} = 2 \Rightarrow \frac{DE}{AM} + \frac{3}{5} = 2 \Rightarrow \frac{DE}{AM} = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5} \Rightarrow \text{گزینه (۲) درست است.}$$

قضیه تالس در خطوط متوازی



اگر چند خط موازی از یک صفحه دو خط مورب را قطع کنند، پاره‌های متناظر ایجادشده روی دو خط مورب، متناسب هستند.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \dots$$



تست: در شکل مقابل $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$ است. حاصل $y - x$ کدام است؟

۴ (۲)

۳ (۱)

۶ (۴)

۵ (۳)

پاسخ: بنابه قضیه تالس در خطوط موازی داریم:

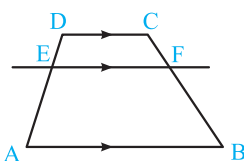
$$\frac{6x-4}{x+1} = \frac{3x}{3} = \frac{3y+9}{y} \Rightarrow \frac{6x-4}{x+1} = x \Rightarrow 6x-4 = x^2+x \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow (x-1)(x-4)=0 \Rightarrow x=1 \text{ یا } x=4$$

$$x = \frac{3y+9}{y} \xrightarrow{x=1} y = 3y+9 \Rightarrow y = -\frac{9}{2}, x = \frac{3y+9}{y} \xrightarrow{x=4} 4y = 3y+9 \Rightarrow y = 9$$

پس $x=1$ ، قابل قبول نیست، زیرا به ازای آن مقدار y منفی می‌شود. $x=4$ و $y=9$ جواب هستند، که نتیجه می‌دهد:

$$y - x = 9 - 4 = 5 \Rightarrow \text{گزینه (۳) درست است.}$$

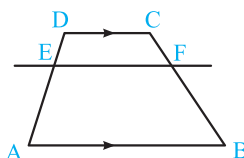
قضیه تالس در دوزنقه



اگر خطی موازی قاعده‌های یک دوزنقه ساق‌های آن را قطع کند، نسبت پاره‌های ایجادشده روی دو ساق متناظراً متناسب هستند.

$$EF \parallel AB \parallel CD \Rightarrow \frac{DE}{AE} = \frac{CF}{BF}$$

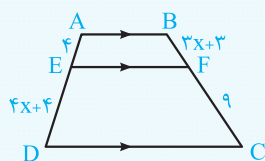
عکس قضیه تالس در دوزنقه



اگر خطی دو ساق دوزنقه را قطع کند و پاره‌های ایجادشده روی آن‌ها متناظراً متناسب باشند، آنگاه آن خط با قاعده‌ها موازی است.

$$\frac{DE}{AE} = \frac{CF}{BF} \Rightarrow EF \parallel CD \parallel AB$$

نکته برای محاسبه طول پاره خط EF در قضیه تالس دوزنقه، بهتر است یکی از قطرهای دوزنقه رسم شود یا از یکی از دو سر قاعده کوچک، خطی موازی ساق دوزنقه رسم شود.



تست: در دوزنقه ABCD مطابق شکل EF موازی قاعده‌ها است. نسبت طول دو ساق دوزنقه کدام است؟

$$\sqrt{3} + 1 \quad (۲)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{4} \quad (۳)$$

پاسخ: بنابه قضیه تالس در دوزنقه داریم:

$$\frac{AE}{DE} = \frac{BF}{CF} \Rightarrow \frac{4}{4x+4} = \frac{3x+3}{9} \Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{3} \Rightarrow (x+1)^2 = 3 \Rightarrow x+1 = \sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3} - 1$$

$$\frac{AD}{BC} = \frac{4x+4}{3x+3} = \frac{4\sqrt{3}-4+4}{3\sqrt{3}-3+3} = \frac{4(\sqrt{3}+1)}{3(\sqrt{3}+3)} \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{4(\sqrt{3}+1)}{3\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \text{گزینه (۴) درست است.}$$

تست: در دوزنقه ABCD (AB || CD)، AB = ۹، CD = ۲، نقطه E روی ساق AD چنان قرار دارد که $\frac{DE}{EA} = \frac{3}{4}$ است. از E خطی موازی قاعده‌ها رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن با ساق BC را F می‌نامیم. طول پاره خط EF کدام است؟

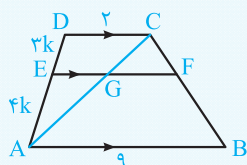
$$۶ \quad (۴)$$

$$۵ \quad (۳)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

پاسخ: قطر AC را رسم می‌کنیم. بنابه قضیه تالس داریم:



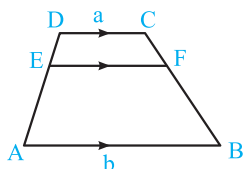
$$GE \parallel CD \Rightarrow \frac{GE}{CD} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{GE}{2} = \frac{4k}{4k} = \frac{4}{4} \Rightarrow GE = \frac{4}{4} = 1$$

$$GF \parallel AB \Rightarrow \frac{GF}{AB} = \frac{CF}{BC}$$

$$\frac{GF}{9} = \frac{3}{4} \Rightarrow GF = \frac{27}{4}$$

$$\text{از طرفی بنابه قضیه تالس در دوزنقه داریم } \frac{CF}{BF} = \frac{DE}{AE} = \frac{3}{4} \text{ در نتیجه } \frac{CF}{BC} = \frac{3}{7} \text{ و داریم:}$$

$$EF = GE + GF = 1 + \frac{27}{4} = \frac{31}{4} = 7.75 \Rightarrow \text{گزینه (۳) درست است.}$$



روش فرمولی برای تست قبل: به طور کلی اگر خطی موازی قاعده‌های دوزنقه ساق‌ها را قطع کند، طول پاره خط حاصل را می‌توان به صورت مقابل به دست آورد:

$$\frac{DE}{AE} = \frac{m}{n} \Rightarrow EF = \frac{mb + na}{m + n}$$

$$\text{برای مثال در تست قبلی داریم } a = 2, b = 9 \text{ و } \frac{DE}{AE} = \frac{3}{4} \text{ در نتیجه:}$$

$$EF = \frac{3 \times 9 + 4 \times 2}{3 + 4} = \frac{27 + 8}{7} = \frac{35}{7} = 5$$

پاره خط میانگین دوزنقه

پاره خطی که وسط‌های ساق‌های یک دوزنقه را به هم وصل می‌کند، پاره خط میانگین دوزنقه می‌نامند. (آ) پاره خط میانگین دوزنقه، موازی قاعده‌هاست و اندازه آن میانگین حسابی دو قاعده است.

$$(AM = MD, BN = CN) \Rightarrow MN \parallel AB \parallel CD, MN = \frac{AB + CD}{2}$$

(ب) اگر خطی از وسط یک ساق دوزنقه موازی قاعده‌های آن رسم شود از وسط ساق دیگر می‌گذرد و پاره خط محدود به دو ساق همان پاره خط میانگین دوزنقه است.

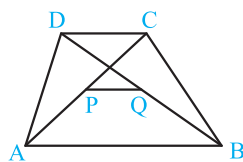
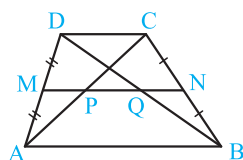
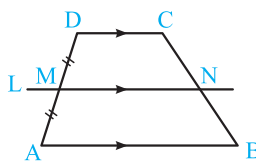
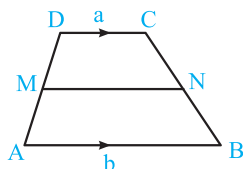
$$(MD = MA, L \parallel AB \parallel CD) \Rightarrow CN = BN, MN = \frac{AB + CD}{2}$$

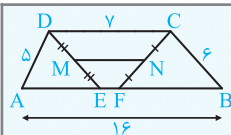
(پ) پاره خط میانگین هر دوزنقه قطرهای آن را نصف می‌کند و طول پاره خط بین قطرهای برابر است با نصف تفاضل قاعده کوچک از قاعده بزرگ.

$$(AM = MD, BN = CN) \Rightarrow PA = PC, QB = QD, PQ = \frac{AB - CD}{2}$$

(ت) پاره خطی که وسط‌های دو قطر یک دوزنقه را به هم وصل می‌کند موازی قاعده‌های دوزنقه است و اندازه آن برابر است با نصف تفاضل قاعده کوچک از قاعده بزرگ. همچنین امتداد این پاره خط از وسط ساق‌ها می‌گذرد.

$$(AP = PC, BQ = QD) \Rightarrow PQ \parallel AB \parallel CD, PQ = \frac{AB - CD}{2}$$





تست: در دوزنقه مقابل نیمساز زوایای C و D قاعده بزرگ را به ترتیب در F و E قطع کرده‌اند. اگر M وسط DE و N وسط CF باشد، آن‌گاه طول پاره خط MN کدام است؟

۵ (۳)

۵/۵ (۲)

۴/۵ (۱)

AB // CD ، مورب DE $\Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{AED}$ (فرض) $\widehat{ADE} = \widehat{EDC} \Rightarrow AE = AD = 5$

پاسخ:

AB // CD ، مورب CF $\Rightarrow \widehat{DCF} = \widehat{BFC}$ (فرض) $\widehat{BCF} = \widehat{DCF} \Rightarrow BF = BC = 6$

$$EF = AB - AE - BF = 16 - 5 - 6 = 5$$

اما چهارضلعی EFCD دوزنقه و MN پاره خط میانگین آن است. پس داریم:

$$MN = \frac{EF + CD}{2} = \frac{5 + 7}{2} = \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow \text{گزینه (۴) درست است.}$$

تست: در یک دوزنقه پاره خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل می‌کند، قطرها را قطع می‌کند و به سه پاره خط به طول‌های مساوی تقسیم می‌شود. اگر طول قاعده بزرگ دوزنقه ۱۲ باشد، آن‌گاه طول قاعده کوچک آن کدام است؟

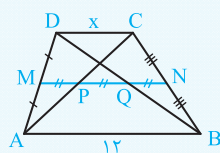
۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: MN پاره خط میانگین دوزنقه است و از وسط قطرها می‌گذرد، پس داریم:

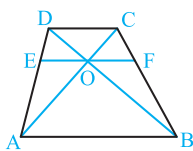


$$PQ = \frac{AB - CD}{2} \Rightarrow PQ = \frac{12 - x}{2}$$

$$MN = \frac{AB + CD}{2} \Rightarrow 3PQ = \frac{12 + x}{2}$$

$$\Rightarrow 3 \times \frac{12 - x}{2} = \frac{12 + x}{2} \Rightarrow 36 - 3x = 12 + x \Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \text{گزینه (۴) درست است.}$$

یک خاصیت مهم در دوزنقه‌ها



اگر خطی از نقطه تلاقی قطره‌های دوزنقه رسم شود و مطابق شکل ساق‌ها را در نقاط E و F قطع کند، آن‌گاه داریم:

$$\frac{2}{EF} = \frac{1}{CD} + \frac{1}{AB} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{OE} = \frac{1}{OF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$

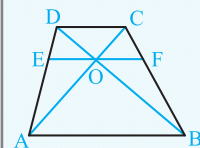
تست: اندازه قاعده‌های یک دوزنقه ۳ و ۷ است. از نقطه تلاقی قطره‌های آن خطی موازی قاعده‌ها رسم می‌کنیم. طول پاره خط ایجاد شده بین ساق‌ها کدام است؟

۴ (۱)

۴/۵ (۲)

۳/۶ (۳)

۴/۲ (۴)



$$\frac{1}{OE} = \frac{1}{OF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{10}{21}$$

پاسخ: شکل مقابل همان شکل مطلوب است. پس داریم:

$$\Rightarrow OE = OF = \frac{21}{10} \Rightarrow EF = 2 \times \frac{21}{10} = \frac{42}{10} = 4.2 \Rightarrow \text{گزینه (۴) درست است.}$$

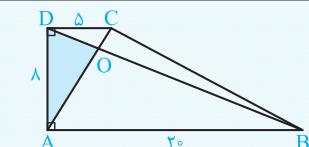
تست: در دوزنقه قائم‌الزاویه مقابل قطرها رسم شده است. مساحت مثلث AOD کدام است؟

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

۱۸ (۴)

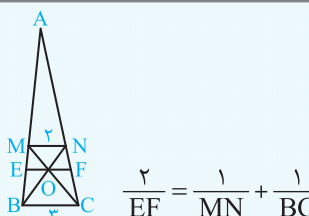
۱۶ (۳)



پاسخ: با توجه به نکته گفته شده داریم:

$$\frac{1}{OH} = \frac{1}{CD} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{4+1}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \Rightarrow OH = 4$$

$$S(AOD) = \frac{1}{2} OH \times AD = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16 \Rightarrow \text{گزینه (۳) درست است.}$$



تست: در شکل مقابل MN // EF // BC حاصل $\frac{AM}{ME}$ کدام است؟

۳ (۲)

۲ (۱)

۵ (۴)

۴ (۳)

$$\frac{2}{EF} = \frac{1}{MN} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \Rightarrow EF = \frac{6 \times 2}{5} = \frac{12}{5}$$

پاسخ:

$$\triangle AEF : MN \parallel EF \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AM}{AE} = \frac{MN}{EF} = \frac{2}{\frac{12}{5}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{AM}{ME} = \frac{5}{1} = 5 \Rightarrow \text{گزینه (۴) درست است.}$$