

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و
ارسال رایگان

Medabook.com



مدابوک



دریافت برنامه ریزی و مشاوره

از مشاوران رتبه برتر

هوا کنکور آیدی نوین

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۴



10

THE GEOMETRY



STANISLAV SMIRNOV

Stanislav Konstantinovich Smirnov is a Russian mathematician currently working at the University of Geneva. He was awarded the Fields Medal in 2010. His research involves complex analysis, dynamical systems and probability theory.

PETER SCHOLZE

Peter Scholze is a German mathematician known for his work in algebraic geometry. He has been a professor at the University of Bonn since 2012, and director at the Max Planck Institute for Mathematics since 2018. He has been called one of the leading mathematicians in the world.

PIERRE DELIGNE

Pierre René, Viscount Deligne is a Belgian mathematician. He is known for work on the Weil conjectures, leading to a complete proof in 1973. He is the winner of the 2013 Abel Prize, 2008 Wolf Prize, 1988 Crafoord Prize, and 1978 Fields Medal.

VLADIMIR VOEVODSKY

Vladimir Alexandrovich Voevodsky was a Russian-American mathematician. His work in developing a homotopy theory for algebraic varieties and formulating motivic cohomology led to the award of a Fields Medal in 2002.

GAJ INTERNATIONAL PUBLICATIONS



پتر شولتسه
متولد ۱۹۸۷

درس اول: ترسیم‌های هندسی

درس دوم: استدلال

1

CHAPTER

Geometric Drawings

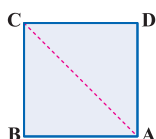
Peter Scholze

ترسیم‌های هندسی

آزمون اول

I gaj

ص ۱۰ تا ۱۶ هندسه دهم



1 در مربع ABCD به ضلع $2\sqrt{2}$ چند نقطه روی محیط مربع وجود دارد که فاصله آن‌ها از قطر AC برابر $1/5$ واحد باشد؟

(۲) ۲

(۱) هیچ

(۴) بی‌شمار

(۳) ۴

2 چند نقطه روی قطرهای دوزنقه ABCD وجود دارد که فاصله آن از دو قاعده یکسان باشد؟

(۲) ۲

(۱) نامشخص

(۴) بی‌شمار

(۳) ۴

3 دو نقطه A و B به فاصله $5/7$ واحد از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصله $1/5$ واحد از A و به فاصله $2/6$ واحد از B باشد؟

(۲) دو

(۱) یک

(۴) هیچ

(۳) چهار

4 پاره خط AB به طول ۱۰ مفروض است. در رسم عمود منصف AB دهانه پیرگار را به اندازه $3a-1$ باز کرده‌ایم تا به مراکز A و B کمان‌هایی رسم کنیم. برای

این‌که ترسیم به درستی انجام گیرد. حدود a کدام باید باشد؟

(۲) $\frac{1}{3} < a < 2$

(۱) $0 < a < 2$

(۴) $a > \frac{11}{3}$

(۳) $a > 2$

5 در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۶ و ۲ عمود منصف وتر امتداد ضلع کوچک‌تر را در M قطع می‌کند. فاصله M از نزدیک‌ترین رأس مثلث کدام است؟

(۲) ۸

(۱) $7/5$

(۴) $\frac{25}{3}$

(۳) $\sqrt{10}$

6 در رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج خط، از کدام ترسیم استفاده می‌شود؟

(۲) ترسیم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای واقع بر آن

(۱) ترسیم خطی موازی یک خط

(۴) ترسیم نیمساز

(۳) ترسیم عمود منصف یک پاره خط

7 زاویه XOY مطابق شکل مفروض است. اگر OP نیمساز زاویه XOY باشد، اندازه OA کدام است؟

(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) $2\sqrt{5}$

(۳) ۵

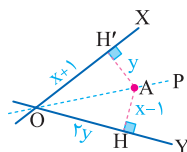
8 چند مثلث دویه دو ناهم‌نهشت به اضلاع ۱۵، ۱۱، ۸ می‌توان رسم کرد؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) ۴

(۳) ۲



NOTE



10

خرید آنلاین در gajmarket.com

وب‌سایت سریع

PLUS AZMOON

هندسه دهم | فصل ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال

9 نقطه A به فاصله ۸ واحد از خط Δ قرار دارد. چند مثلث متساوی الساقین ناهم‌نهشت به رأس A وجود دارد که قاعده آن‌ها منطبق بر خط Δ بوده و مساحت آن‌ها برابر ۴۸ باشد؟

۱ (۱) ۲ (۲)

هیچ (۳) ۴ بی‌شمار

10 اگر محیط یک مثلث برابر با ۷۲ باشد و اندازه اضلاع مثلث برابر نباشند آن‌گاه اندازه بزرگ‌ترین ضلع مثلث کدام عدد می‌تواند باشد؟

۴۰ (۱) ۳۶ (۲)

۳۰ (۳) ۲۴ (۴)

11 محیط مثلث متساوی الساقینی برابر ۲۴ است. کدام عدد می‌تواند اندازه ساق این مثلث باشد؟

۵ (۱) ۶ (۲)

۷ (۳) ۱۳ (۴)

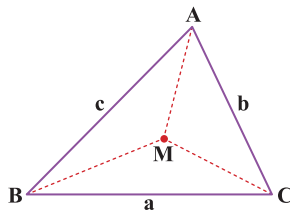
12 اگر در شکل مقابل $MA + MB + MC = 12$ باشد، آن‌گاه حاصل $a + b + c$ کدام عدد ممکن است باشد؟

۱۶ (۱)

۲۴ (۲)

۸ (۳)

۱۲ (۴)



13 پاره خط AB به طول ۶ مفروض است. عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه M قطع کند. سپس به مرکز M و شعاع ۴ کمانی می‌زنیم

تا عمود منصف AB را در C و D قطع کند. چهار ضلعی ACBD چگونه است؟

۱) لوزی با محیط ۲۰ ۲) مربع به مساحت ۱۲

۳) متوازی الاضلاع به محیط ۲۴ ۴) مستطیل به قطرهای ۶ و ۸

14 پاره خط AB به طول ۸ مفروض است؛ عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و به شعاع ۵ کمانی می‌زنیم تا عمود منصف را در C و

D قطع کند. چهار ضلعی ACBD کدام است؟

۱) مستطیل به قطر ۸ و ضلع ۵ ۲) لوزی به محیط ۲۰

۳) لوزی با محیط ۱۰ ۴) مستطیل به مساحت ۴۸

15 پاره خط AB به طول ۱۰ مفروض است؛ از نقطه M وسط پاره خط AB دایره‌ای به شعاع ۵ رسم می‌کنیم. یکی از قطرهای دایره آن را در C و D قطع می‌کند.

چهار ضلعی ACBD:

۱) متوازی الاضلاع به قطرهای ۵ و ۱۰ ۲) مستطیل به ضلع ۱۰

۳) مستطیل به قطر ۱۰ ۴) مربع به ضلع ۵

16 در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و به شعاع $\frac{2}{5}$ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطه تقاطع

کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

NOTE



11

خرید آنلاین در
gajmarket.com
وژه جمعیتی سریع

PLUS
AZMOON

هندسه دهم | فصل ۱۰. ترسیم‌های هندسی و استدلال

(داخل - ۹۵)



ولادیمیر وایودسکی
متولد ۱۹۶۶

Vladimir Voevodsky

درس اول: نسبت و تناسب در هندسه

درس دوم: قضیه تالس

درس سوم: تشابه مثلث‌ها

درس چهارم: کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها

Thales theorem

2

CHAPTER

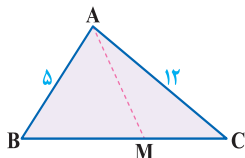
آزمون سوم



ص ۳۰ تا ۳۳ هندسه دهم

نسبت و تناسب در هندسه

39 در مثلث قائم‌الزاویه ABC مطابق شکل، پاره خط AM آن را به دو مثلث با محیط‌های برابر تقسیم می‌کند، نقطه M و ترا به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟



$$\frac{3}{10} \quad (2)$$

$$\frac{3}{5} \quad (1)$$

$$\frac{4}{5} \quad (4)$$

$$\frac{2}{9} \quad (3)$$

40 اگر $\frac{3x-y}{y-x} = \frac{1}{8}$ باشد، حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

$$\frac{9}{25} \quad (2)$$

$$\frac{3}{5} \quad (1)$$

$$\frac{4}{5} \quad (4)$$

$$\frac{2}{5} \quad (3)$$

41 اگر $\frac{x}{y+3} = \frac{y}{x+5}$ باشد، حاصل $\frac{3x-y}{x+2y}$ کدام است؟

$$\frac{12}{13} \quad (2)$$

$$\frac{1}{11} \quad (1)$$

$$\frac{10}{11} \quad (4)$$

$$\frac{2}{11} \quad (3)$$

42 اگر $\frac{x}{3} = y = z + 1$ و داشته باشیم $x + 3y + z = 20$ ، آن‌گاه مقدار z کدام است؟

$$7 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

$$2 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

43 روی پاره خط AB به طول ۱۲، دو نقطه M و N را طوری انتخاب می‌کنیم که رابطه $\frac{MA}{MB} = \frac{BN}{AN} = 3$ بین آن‌ها برقرار باشد. اندازه پاره خط MN کدام است؟

$$6 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

$$3 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

44 دو پاره خط به طول‌های x و $13-x$ مفروض‌اند. اگر طول پاره خطی که واسطه هندسی بین آن‌ها است، ۶ واحد باشد، طول پاره خط بزرگ‌تر کدام است؟

$$9 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

$$8 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

NOTE



15

خرید آنلاین در gajmarket.com

ویژه جمع‌بندی سریع

PLUS AZMOON

هندسه دهم | فصل ۲. قضیه تالس، تشابه و کاربردها

45 در مثلثی به اضلاع $a = 6, b = 3, c = 5$ حاصل $\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c}$ کدام است؟ [منظور از h_a ارتفاع وارد بر ضلع a است]

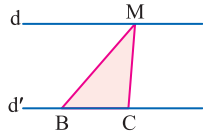
(۱) $\frac{13}{8}$

(۲) $\frac{6}{13}$

(۴) $\frac{13}{6}$

(۳) $\frac{8}{13}$

46 در شکل مقابل دو خط d, d' موازی اند. با تغییر نقطه M روی خط d ، محیط و مساحت مثلث MBC چگونه تغییر می‌کند؟



(۱) محیط ثابت و مساحت ثابت

(۲) محیط متغیر و مساحت ثابت

(۳) محیط متغیر و مساحت متغیر

(۴) محیط ثابت و مساحت متغیر

قضیه تالس

آزمون چهارم



ص ۳۴ تا ۳۷ هندسه دهم

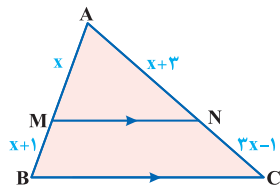
47 در شکل مقابل MN مقابل موازی قاعده BC است، مقدار x کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵



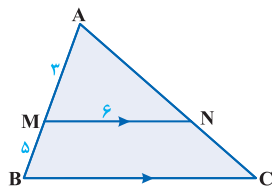
48 در شکل مقابل MN با BC موازی است، اندازه ضلع BC کدام است؟

(۱) ۱۸

(۲) ۱۹

(۳) ۱۲

(۴) ۱۶



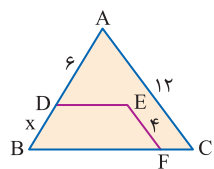
49 در مثلث ABC از نقطه E پاره خط DE را به موازات BC و پاره خط EF را به موازات AC رسم کرده ایم. با توجه به اعداد روی شکل مقدار x کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) $\frac{3}{5}$

(۴) ۳



50 در مثلث ABC ، اضلاع $AB=4$ و $AC=6$ و $BC=7$ است. از رأس C خطی موازی میانه AM رسم شده و امتداد BA را در نقطه D قطع کرده است.

اندازه BD کدام است؟

(۲) ۸

(۱) $\frac{7}{5}$

(۴) ۹

(۳) $\frac{8}{5}$

(خارج - ۹۸)

NOTE



16

فهرست آزمون در gajmarket.com

وبسایت جمع‌بندی سریع

PLUS AZMOON

هندسه دهم | فصل ۲. قضیه تالس، تشابه و کاربردها



استانیسلاف اسمیرنوف
متولد ۱۹۷۰

Stanislav Smirnov

درس اول: چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آنها
درس دوم: مساحت و کاربردهای آن

Polygons

3

CHAPTER

چند ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها

آزمون هفتم

ص ۵۴ تا ۶۴ هندسه دهم

104 در یک n ضلعی، تعداد قطرهای ۸ برابر تعداد اضلاع است. اختلاف تعداد اضلاع و اقطار این چندضلعی کدام است؟

۱۲۴ (۱) ۱۱۹ (۲)

۱۳۳ (۳) ۱۲۷ (۴)

105 یک چندضلعی در کدام حالت ممکن است محدب نباشد؟

(۱) تمام نقاط پاره‌خطی که هر دو نقطه دلخواه درون چندضلعی را به هم وصل می‌کند، درون آن باشد.

(۲) هر زاویه داخلی کمتر از نیم صفحه باشد.

(۳) سایر رأس‌ها در یک طرف خطی باشند که بر ضلع آن منطبق است.

(۴) یک قطر، آن را به دو چندضلعی محدب تقسیم کند.

106 حاصل ضرب تعداد اضلاع و اقطار یک n ضلعی برابر ۵۴ است. مجموع زوایای داخلی این n ضلعی چند درجه است؟

۳۶۰° (۱) ۷۲۰° (۲)

۵۴۰° (۳) ۹۰° (۴)

107 مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی بدون یکی از آن‌ها ۲۵۷۰° است. تعداد قطرهای این n ضلعی کدام است؟

۹۰ (۱) ۷۷ (۲)

۱۰۴ (۳) ۱۱۹ (۴)

108 کدام یک از موارد زیر الزاماً یک متوازی‌الاضلاع را مشخص نمی‌کند؟

(۱) یک چهارضلعی که اضلاع روبه روی آن دو به دو برابرند.

(۲) یک چهارضلعی که زاویه‌های مقابل دو به دو برابرند.

(۳) یک چهارضلعی که قطرهاش همدیگر را نصف می‌کنند.

(۴) یک چهارضلعی که دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی دارد.

109 کدام یک از تعاریف زیر الزاماً یک مستطیل را مشخص نمی‌کند؟

(۱) متوازی‌الاضلاع که دو قطر برابر دارد.

(۲) چهارضلعی که قطرهای برابر دارد و دو ضلع مقابل آن، هم اندازه است.

(۳) متوازی‌الاضلاع که دو زاویه قائمه دارد.

(۴) چهارضلعی که ۳ زاویه قائمه دارد.

110 یک چهارضلعی در کدام صورت قطعاً لوزی است؟

(۱) قطرهاش عمود باشند.

(۲) قطرهاش برابر باشند.

(۳) قطرهاش منصف و دو ضلع مجاور برابر

(۴) قطرهاش منصف و دو ضلع مقابل برابر

NOTE



24

خرید آنلاین در gajmarket.com

وبسایت جامع‌ی سریع

PLUS
AZMOON

هندسه دهم | فصل ۳. چندضلعی‌ها

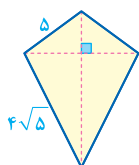
111 کدام چهارضلعی الزاماً یک مربع را مشخص می‌کند؟

- (۱) چهارضلعی که در آن قطرهای برابر و نیمساز زوایا باشند.
 (۲) چهارضلعی که در آن دو ضلع مقابل برابر و قطرهای عمود باشند.
 (۳) چهارضلعی که در آن قطرهای عمود و نیمساز زوایا باشند.
 (۴) چهارضلعی که در آن اضلاع مجاور عمود و قطرهای منصف هم باشند.

112 در دوزنقه متساوی‌الساقین کدام ویژگی الزاماً برقرار نیست؟

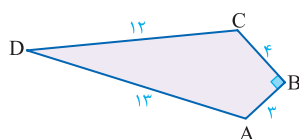
- (۱) قطرهای با هم برابرند.
 (۲) زاویه‌های مقابل مکمل هم هستند.
 (۳) زاویه‌های مجاور برابرند.
 (۴) دو ضلع غیرموازی برابرند.

113 در یک کایت اندازه اضلاع $4\sqrt{5}$ و ۵ و اندازه قطر بزرگ ۱۱ است اندازه قطر کوچک کدام است؟



- (۱) ۶
 (۲) ۸
 (۳) ۱۰
 (۴) ۵

114 اگر در چهارضلعی ABCD مطابق شکل، وسط‌های اضلاع را متوالیاً به هم وصل کنیم، چهارضلعی به دست آمده یک و مساحت آن است.



(۱) دوزنقه - ۱۸

(۲) متوازی‌الاضلاع - ۳۶

(۳) متوازی‌الاضلاع - ۱۸

(۴) کایت - ۱۶

115 در چهارضلعی ABCD وسط دو ضلع غیرمجاور و وسط دو قطران، رأس‌های یک لوزی است. الزامات نتیجه‌گیری در مورد چهارضلعی مفروض، درست است؟

(داخل - ۹۸)

(۱) دو ضلع غیرمجاور دیگر، برابرند.
 (۲) دو قطر عمود برهم‌اند.

(۳) دو ضلع شامل رأس‌های لوزی، برابرند.
 (۴) دو ضلع غیرمجاور، موازی‌اند.

116 در یک چهارضلعی با قطرهای عمود برهم وسط‌های اضلاع را متوالیاً به هم وصل کرده‌ایم و چهارضلعی MNPQ حاصل شده است. از وصل کردن وسط‌های اضلاع چهارضلعی MNPQ، کدام چهارضلعی حاصل می‌شود؟

(۱) لوزی
 (۲) مستطیل

(۳) دوزنقه
 (۴) مربع

117 وسط‌های اضلاع یک دوزنقه قائم‌الزاویه را به هم وصل کرده‌ایم تا چهارضلعی جدیدی پدید آید. از تقاطع نیمسازهای داخلی این چهارضلعی جدید، کدام شکل ایجاد می‌شود؟

(۱) مربع
 (۲) مستطیل

(۳) دوزنقه
 (۴) لوزی

118 در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) اگر اندازه میانه و ارتفاع وارد بر وتر به ترتیب ۳ و $2\sqrt{2}$ باشد، اندازه ضلع متوسط کدام است؟

(۱) $3\sqrt{2}$
 (۲) $2\sqrt{3}$

(۳) $2\sqrt{6}$
 (۴) $6\sqrt{2}$

NOTE





پی‌یر دلین
متولد ۱۹۴۴

درس اول: خط، نقطه و صفحه

درس دوم: تفکر تجسمی

4

CHAPTER

Pierre Deligne

خط، نقطه و صفحه

آزمون نهم



ص ۷۸ تا ۸۶ هندسه دهم

Space visualization

154 دو خط d_1 و d_2 موازی اند. اگر خط Δ خط d_1 را قطع کند، وضعیت Δ و d_2 چگونه است؟

(۱) متقاطع

(۳) غیرمتقاطع

155 خط d با صفحه P موازی است. اگر خط d' خط d را قطع کند، وضعیت خط d' نسبت به صفحه P چگونه است؟

(۱) موازی

(۳) غیرمتقاطع

156 دو صفحه P_1 و P_2 موازی اند و P_1 با صفحه Q متقاطع است در این صورت:

(۱) P_2 ممکن است با Q موازی باشد.

(۳) P_1 و P_2 با Q فصل مشترک‌های غیرموازی دارند.

157 اگر خط d با صفحه P متقاطع باشد، وضعیت خط d نسبت به خطوط منطبق بر صفحه P کدام است؟

(۱) غیرمتقاطع

(۳) غیرمتقاطع

158 اگر دو خط d و d' در نقطه A مشترک باشند و خط d در نقطه B صفحه P را قطع کرده باشد ($B \neq A$) وضعیت خط d' نسبت به صفحه P چگونه است؟

(۱) ناموازی

(۳) نامنطبق

159 اگر یکی از دو خط متقاطع باشد دیگری است.

(۱) موازی صفحه‌ای - غیرموازی با آن صفحه

(۳) منطبق بر صفحه‌ای - غیرمنطبق بر آن صفحه

160 اگر صفحه‌های P_1, P_2, P_3 دو به دو متقاطع باشند، فصل مشترک دو به دو آن‌ها کدام نمی‌تواند باشد؟

(۱) نقطه

(۳) دو خط موازی

161 دو صفحه P و Q در خط Δ مشترک‌اند و d موازی Δ است در این صورت

(۱) d با هر دو صفحه موازی است

(۳) d حداقل بر یکی از صفحه‌ها منطبق است

162 دو خط d و d' بر صفحه P عمودند. وضعیت d و d' نسبت به هم چگونه است؟

(۱) موازی

(۳) موازی یا متقاطع

NOTE



31

خرید آنلاین در
gajmarket.com

وژه جمعی‌شدی سریع

PLUS
AZMOON

هندسه دهم | فصل ۴. تجسم فضایی



163 دو صفحه P_1 و P_2 بر صفحه Q عمودند. وضعیت P_1 و P_2 نسبت به هم چگونه است؟

- (۱) موازی
(۲) متقاطع
(۳) عمود
(۴) هر وضعی ممکن است.

164 دو خط D و D' موازی‌اند. اگر خط Δ بر خط D عمود باشد وضعیت D' و Δ کدام است؟

- (۱) متقاطع
(۲) متناظر
(۳) عمود
(۴) موازی

165 نقطه A خارج خط d مفروض است از نقطه A می‌توان رسم کرد.

- (۱) یک خط عمود بر d
(۲) بی‌شمار خط عمود بر d
(۳) بیشمار صفحه عمود بر d
(۴) یک صفحه به موازات d

166 نقطه A خارج از صفحه P مفروض است. از A می‌توان رسم کرد.

- (۱) یک خط به موازات P
(۲) بی‌شمار صفحه عمود بر P
(۳) یک صفحه عمود بر P
(۴) بی‌شمار خط عمود بر P

167 اگر دو خط d_1 و d_2 متناظر باشند که شامل یکی از آن‌ها بوده و موازی دیگری باشد.

- (۱) هیچ صفحه‌ای وجود ندارد
(۲) دقیقاً یک صفحه وجود دارد
(۳) حداقل یک صفحه وجود دارد
(۴) بی‌شمار صفحه وجود دارد

168 اگر خط d غیرموازی و غیرعمود بر صفحه P باشد که شامل خط d و عمود بر صفحه P باشد.

- (۱) هیچ صفحه‌ای وجود ندارد
(۲) دقیقاً یک صفحه وجود دارد
(۳) دقیقاً دو صفحه وجود دارد
(۴) بی‌شمار صفحه وجود دارد

169 نقطه A و خط d و صفحه P مفروض‌اند. در رسم صفحه‌ای گذرا از نقطه A موازی خط d و عمود بر صفحه P ، در کدام حالت، تعداد جواب‌ها، بی‌شمار است؟

(داخل - ۹۸)

- (۱) $d \cap P = d$
(۲) $d \cap P \neq \emptyset$
(۳) $d \parallel P$
(۴) $d \perp P$

170 خط d و صفحه P و نقطه A در خارج آن دو مفروض است. در رسم خطی گذرا از نقطه A ، موازی صفحه P و متقاطع با خط d ، در کدام وضعیت، خط و صفحه مفروض، تنها یک جواب دارد؟

(خارج - ۹۸)

- (۱) الزاماً عمود
(۲) منطبق
(۳) موازی
(۴) متقاطع

171 اگر خط d با صفحه P موازی باشد، هر صفحه غیرموازی با P و گذرنده از d

(خارج - ۹۱)

- (۱) می‌تواند عمود بر d باشد.
(۲) می‌تواند عمود بر P باشد.
(۳) الزاماً فصل مشترکی با P و عمود بر d دارد.
(۴) الزاماً فصل مشترکی با P و موازی با d دارد.

172 صفحه P شامل نقطه A و خط D است. خط گذرا از A و متقاطع با هر دو خط D و Δ در کدام حالت وجود ندارد؟

(خارج - ۸۵)

- (۱) خط Δ موازی صفحه P باشد.
(۲) خط Δ صفحه P را در A قطع کند.
(۳) خط Δ درون صفحه P باشد.
(۴) خط Δ عمود بر صفحه P باشد.

173 صفحه P و خط D و نقطه A مفروض‌اند. صفحه گذرا بر نقطه A و عمود بر صفحه P و موازی خط D در کدام حالت موجود ولی یکتاست؟

(داخل - ۸۵)

- (۱) موازی P باشد.
(۲) D عمود بر P باشد.
(۳) نقطه A درون خط P باشد.
(۴) نقطه A روی خط D باشد.

THE 11 GEOMETRY

TIMOTHY GOWERS

Sir William Timothy Gowers, FRS is a British mathematician. He is a Royal Society Research Professor at the Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics at the University of Cambridge, where he also holds the Rouse Ball chair, and is a Fellow of Trinity College, Cambridge.

AKSHAY VENKATESH

Akshay Venkatesh FRS is an Australian mathematician and a professor at the School of Mathematics at the Institute for Advanced Study.

ARTUR AVILA

Artur Avila Cordeiro de Melo is a Brazilian mathematician working primarily on dynamical systems and spectral theory. He is one of the winners of the 2014 Fields Medal, being the first Latin American to win such an award. He has been a researcher at both the IMPA and the CNRS.

GAJ INTERNATIONAL PUBLICATIONS



آکشی ونکاتش
متولد ۱۹۶۴

Circle

Akshay Venkatesh

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره

درس سوم: چندضلعی‌های محاطی و محیطی

1

CHAPTER

آزمون یازدهم



ص ۱۰ تا ۱۷ هندسه یازدهم

203 فاصله نقطه A تا مرکز دایره‌ای به شعاع $2x+1$ برابر با $3x-5$ است. اگر نقطه A خارج این دایره باشد، حدود x کدام است؟

$$x \leq 6 \quad (2)$$

$$1 < x < 3 \quad (1)$$

$$1 \leq x < 6 \quad (4)$$

$$x > 6 \quad (3)$$

204 کمترین و بیشترین فاصله نقطه A تا دایره C به ترتیب برابر ۳ و ۷ است. شعاع دایره کدام می‌تواند باشد؟

$$5 \text{ یا } 2 \quad (2)$$

$$5 \text{ یا } 4 \quad (1)$$

$$6 \text{ یا } 4 \quad (4)$$

$$4 \text{ یا } 2 \quad (3)$$

205 فاصله مرکز دایره $C(O, 7-2x)$ تا خط d برابر $x+1$ است. به ازای کدام مقدار x خط d در ۲ نقطه دایره را قطع می‌کند؟

$$\sqrt{5} \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

$$\sqrt{2} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

206 فاصله مرکز دایره $C(O, 4)$ تا خط d برابر ۵ است. کمترین فاصله نقاط دایره از خط d کدام است؟

$$1 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

$$2/5 \quad (4)$$

$$9 \quad (3)$$

207 در دایره $C(O, 5)$ فاصله مرکز دایره تا وتر AB برابر ۴ است. طول وتر AB چقدر است؟

$$1 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

$$6 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

208 نقطه P وسط یکی از شعاع‌های دایره $C(O, 6)$ قرار دارد. طول کوتاه‌ترین وتر دایره که از نقطه P می‌گذرد، چقدر است؟

$$3\sqrt{3} \quad (2)$$

$$6\sqrt{3} \quad (1)$$

$$6 \quad (4)$$

$$4\sqrt{5} \quad (3)$$

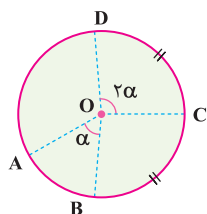
209 مطابق شکل، اگر O مرکز دایره و کمان‌های BC و CD هم‌اندازه و $\widehat{AD} = 13^\circ$ باشد، مقدار α چند درجه است؟

$$58 \quad (1)$$

$$41 \quad (2)$$

$$53 \quad (3)$$

$$46 \quad (4)$$



NOTE



38

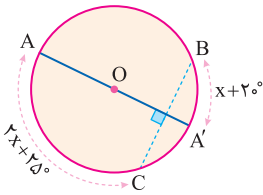
خرید آنلاین در
gajmarket.com

وب‌سایت جامع‌ترین سریع

PLUS
AZMOON

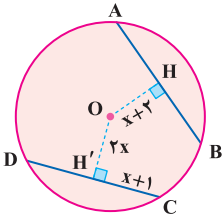
هندسه یازدهم | فصل ۱. دایره

210 در شکل زیر AA' قطر عمود بر وتر BC است. اندازه کمان $\widehat{BC}$ چقدر است؟



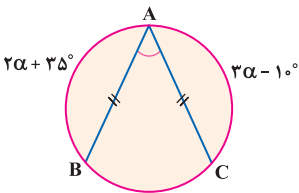
- (1) 125°
- (2) 120°
- (3) 135°
- (4) 130°

211 در شکل مقابل اگر $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ باشد، شعاع دایره چقدر است؟



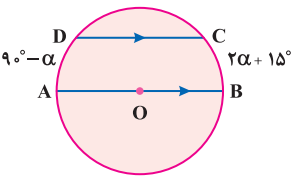
- (1) 5
- (2) $2\sqrt{7}$
- (3) $2\sqrt{6}$
- (4) 6

212 در شکل مقابل اندازه زاویه A کدام است؟



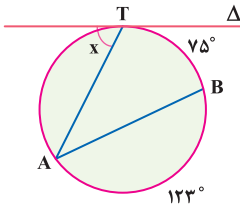
- (1) 45°
- (2) 55°
- (3) 40°
- (4) 60°

213 در شکل زیر AB قطر دایره است و $AB \parallel CD$ ، اندازه کمان $\widehat{CD}$ چقدر است؟



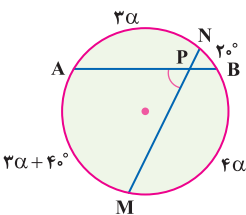
- (1) 65°
- (2) 75°
- (3) 50°
- (4) 60°

214 در شکل زیر خط Δ در نقطه T بر دایره مماس است. اندازه زاویه x چقدر است؟



- (1) 79°
- (2) 81°
- (3) 74°
- (4) 67°

215 مطابق شکل، دو وتر MN و AB از دایره $C(O, R)$ در نقطه P متقاطع اند. اندازه زاویه $\widehat{APM}$ چقدر است؟



- (1) 90°
- (2) 75°
- (3) 80°
- (4) 85°

NOTE

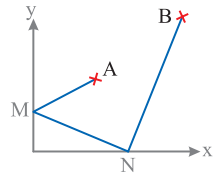


299 دو نقطه A و B در یک طرف خط d قرار دارند. برای پیدا کردن نقطه M روی خط d که $MA + MB$ کمترین مقدار ممکن باشد کدام تبدیل به کار می‌رود؟

- (۱) بازتاب
(۲) دوران
(۳) انتقال
(۴) تجانس

300 نقاط $A \left(\frac{3}{5} \right)$ و $B \left(\frac{9}{11} \right)$ در صفحه محوره‌های مختصات مفروض اند، دو نقطه M و N همواره روی دو محور می‌لغزند. کمترین اندازه خط شکسته AMNB، کدام است؟

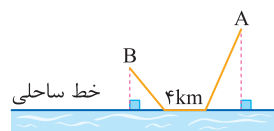
(داخل - ۹۸)



- (۱) ۱۸
(۲) ۱۹
(۳) ۲۰
(۴) ۲۱

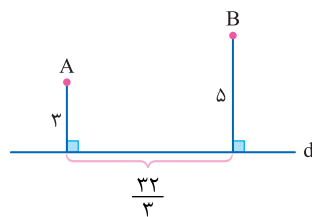
301 در شکل زیر قرار است جاده‌ای از A به B احداث شود به طوری که ۴ کیلومتر آن در امتداد خط ساحلی باشد پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر ممکن از

کدام تبدیل‌ها استفاده شود؟



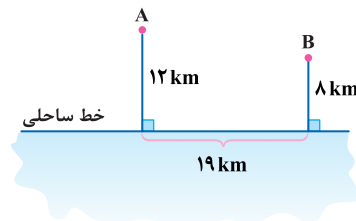
- (۱) دوران و بازتاب
(۲) بازتاب و انتقال
(۳) دوران و تجانس
(۴) انتقال و دوران

302 در شکل زیر نقطه M را روی خط d طوری به دست می‌آوریم که $AM + BM$ کمترین مقدار را داشته باشد. طول AM چقدر است؟



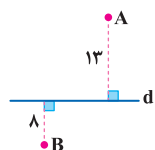
- (۱) ۷
(۲) ۶
(۳) ۴
(۴) ۵

303 در شکل زیر قرار است جاده‌ای از A به B احداث شود به طوری که ۴ کیلومتر از آن در امتداد خط ساحل باشد. طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن چقدر است؟



- (۱) ۳۵
(۲) ۲۶
(۳) ۳۲
(۴) ۲۹

304 در شکل مقابل اگر نقطه M روی خط d باشد، آن‌گاه حداکثر مقدار $|MA - MB|$ کدام است؟

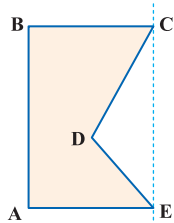


- (۱) $8\sqrt{2}$
(۲) $4\sqrt{10}$
(۳) ۱۳
(۴) ۱۲

NOTE

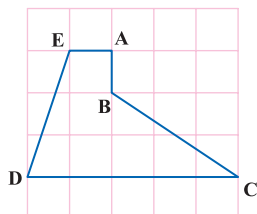


305 در شکل زیر اگر بازتاب رأس D نسبت به امتداد پاره خط CE را D' بنامیم، آن‌گاه کدام گزینه در مورد محیط و مساحت پنج‌ضلعی‌های $ABCDE$ و $ABCD'E$ درست است؟



- (۱) محیط‌ها و مساحت‌های دو شکل برابرند.
- (۲) محیط‌ها برابرند ولی مساحت شکل جدید بیشتر است.
- (۳) محیط و مساحت شکل جدید بیشتر است.
- (۴) محیط شکل قبلی بیشتر و مساحت شکل جدید بیشتر است.

306 در شکل زیر طول ضلع مربع‌های صفحه شطرنجی برابر یک است. اگر رأس B را نسبت به ضلع AC بازتاب دهیم تا به نقطه B' برسیم، مساحت پنج‌ضلعی $AB'CDE$ چقدر از مساحت پنج‌ضلعی $ABCDE$ بیشتر خواهد بود؟



- (۱) ۶
- (۲) ۳
- (۳) ۲
- (۴) ۴

307 دایره $C(O, R)$ و پاره خط AB ($AB < 2R$) مفروض‌اند. برای رسم وتری در دایره که موازی و مساوی با AB باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

- (۱) دوران
- (۲) تجانس
- (۳) انتقال
- (۴) بازتاب

308 اگر d' و d دو خط موازی و A نقطه‌ای بین آن‌ها باشد، برای رسم مثلث متساوی‌الاضلاع ABC که رأس‌های B و C روی d و d' باشند، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

- (۱) تجانس
- (۲) دوران
- (۳) انتقال
- (۴) بازتاب

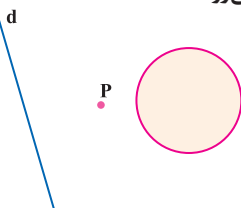
309 برای رسم مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین به رأس A که رأس B از آن روی خط مفروض d و رأس C از آن روی یک دایره باشند، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

- (۱) بازتاب
- (۲) دوران ۴۵
- (۳) تجانس
- (۴) دوران ۹۰

310 در رسم بزرگترین مربع ممکن داخل مثلث ABC به طوری که یک ضلع مربع منطبق بر ضلع BC باشد، از کدام تبدیل هندسی استفاده می‌شود؟ (خارج - ۹۸)

- (۱) انتقال
- (۲) تجانس
- (۳) بازتاب
- (۴) دوران

311 در شکل زیر برای رسم خطی گذرنده از P که دایره را در M و خط d را در N قطع کند و $PM = 2PN$ کدام تبدیل به کار می‌رود؟



- (۱) انتقال
- (۲) دوران ۱۸۰
- (۳) تجانس
- (۴) بازتاب

خرید کتاب‌های کنکور
با تخفیف ویژه
ارسال رایگان
Medabook.com



53

خرید آنلاین در
gajmarket.com
وبسایت جامع‌ترین مرجع

هندسه یازدهم | فصل ۲. تبدیل‌های هندسی و کاربردها

NOTE



Timothy Gowers

تیموئی گاورز
متولد ۱۹۶۳

درس اول: قضیه سینوس‌ها

درس دوم: قضیه کسینوس‌ها

درس سوم: قضیه نیمسازهای زوایای داخلی

درس چهارم: قضیه هرون (محاسبه ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)

Longitudinal relations in the triangle

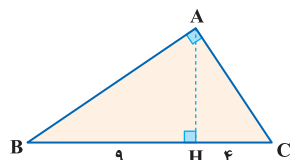
3

CHAPTER

قضیه سینوس‌ها

آزمون شانزدهم

ص ۶۲ تا ۶۵ هفتم یازدهم



312 در مثلث قائم‌الزاویه شکل زیر، AH ارتفاع نظیر وتر است. مساحت مثلث چقدر است؟

۲۸ (۱)

۳۹ (۲)

۳۶ (۳)

۲۶ (۴)

313 طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای x ، $x+1$ ، $x+2$ است. مقدار سینوس کوچک‌ترین زاویه مثلث چقدر است؟

۰/۷۵ (۲)

۰/۸ (۱)

۰/۵ (۴)

۰/۶ (۳)

314 در مثلث ABC با $BC = 2$ ، $\hat{B} = 75^\circ$ ، $\hat{C} = 60^\circ$ طول ضلع AB چقدر است؟

$2\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{6}$ (۱)

۳ (۴)

$2\sqrt{3}$ (۳)

315 در مثلث ABC با $\hat{B} = 45^\circ$ ، $\hat{C} = 60^\circ$ ، $AC = 6$ طول ضلع BC کدام است؟

$3(\sqrt{3}+1)$ (۲)

$\sqrt{3}+2\sqrt{2}$ (۱)

$\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$ (۴)

$\sqrt{3}(\sqrt{2}+2)$ (۳)

316 در مثلث ABC اگر $a = \sqrt{2}$ و همچنین $\hat{A} = 2\hat{B}$ باشد، نوع مثلث کدام است؟

(۲) قائم‌الزاویه

(۱) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

(۴) منفرجه‌الزاویه

(۳) متساوی‌الساقین

317 اگر در مثلثی رابطه $\sin^2 B + \sin^2 C + \cos^2 A = 1$ برقرار باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

$a = b = c$ (۲)

$\hat{A} = 90^\circ$ (۱)

$\hat{B} + \hat{C} = 120^\circ$ (۴)

$b = c$ (۳)

318 در مثلثی با اضلاع ۵، ۵، ۸ شعاع دایره محیطی کدام است؟

$\frac{25}{8}$ (۲)

۴ (۱)

$\frac{25}{6}$ (۴)

۳ (۳)

NOTE



54

فهرست آملین در گاجمارکت

وبسایت گاجمارکت

PLUS AZMOON

هفتم یازدهم | فصل ۳ | روابط طولی در مثلث

319 اگر شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی در مثلثی برابر ۱۵، ۱۰، ۳ باشد، شعاع دایره محیطی این مثلث چقدر است؟

- (۱) ۶/۵
(۲) ۵
(۳) ۹
(۴) ۷/۵

آزمون هفدهم قضیه کسینوس‌ها

ص ۶۶ تا ۶۹ هندسه یازدهم

320 در مثلث ABC با $\hat{A} = 60^\circ$ ، $b = 3$ ، $c = 8$ طول ضلع BC کدام است؟

- (۱) $5\sqrt{2}$
(۲) ۷
(۳) $3\sqrt{6}$
(۴) ۹

321 در مثلث ABC با اضلاع $2\sqrt{2}$ ، ۳، $\sqrt{5}$ اندازه کوچک‌ترین زاویه مثلث چقدر است؟

- (۱) 30°
(۲) 45°
(۳) $\cos^{-1}(\frac{2}{3})$
(۴) $\cos^{-1}(\frac{3}{5})$

322 اگر در مثلثی رابطه $b^2 = a^2 + c^2 + \sqrt{2}ac$ برقرار باشد، زاویه B چقدر است؟

- (۱) 90°
(۲) 120°
(۳) 135°
(۴) 150°

323 مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ است. اگر $b = 8$ و $c = 5$ طول ضلع متوسط a کدام است؟

- (۱) $5\sqrt{2}$
(۲) $3\sqrt{5}$
(۳) $\sqrt{41}$
(۴) $3\sqrt{9}$

324 در چهار ضلعی روبه‌رو، دو ضلع عمود برهم‌اند. $\sin \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۲) $\frac{3}{5}$
(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(۴) $\frac{4}{5}$

325 اگر اندازه اضلاع مثلث ABC را با a ، b ، c نشان دهیم، در کدام گزینه مثلث ABC، زاویه منفرجه دارد؟

- (۱) $c = 9$ ، $b = 6$ ، $a = 4$
(۲) $c = 10$ ، $b = 8$ ، $a = 7$
(۳) $c = 4$ ، $b = 7$ ، $a = 6$
(۴) $c = 3$ ، $b = 4$ ، $a = 5$

326 در شکل روبه‌رو، اندازه ضلع بزرگ‌تر چهارضلعی کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{10}$
(۲) $2\sqrt{11}$
(۳) $4\sqrt{3}$
(۴) $5\sqrt{2}$

327 در مثلثی با اضلاع ۳، ۵، ۶ طول کوتاه‌ترین میانه چقدر است؟

- (۱) ۲
(۲) $\sqrt{6}$
(۳) ۳
(۴) $2\sqrt{2}$

328 در مثلثی با اضلاع x ، ۵، $2x$ اگر مجموع مربعات میانه‌ها برابر $\frac{105}{4}$ باشد، محیط مثلث چقدر است؟

- (۱) ۱۷
(۲) ۱۵
(۳) ۱۲
(۴) ۱۴

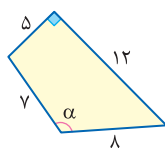
NOTE



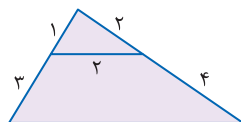
55

(خارج - ۹۲)

(خارج - ۹۸)

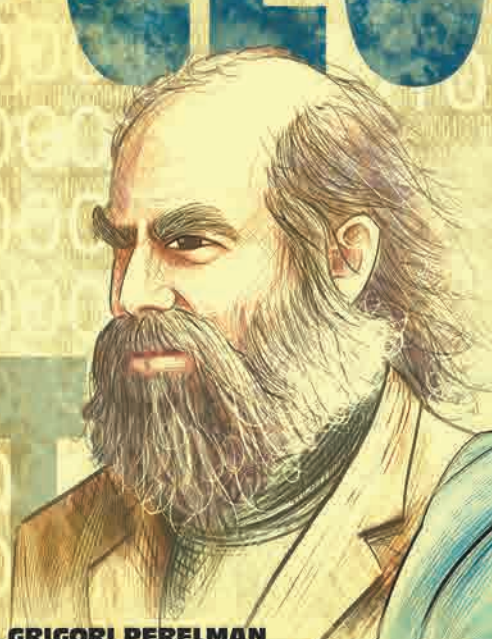


(داخل - ۹۸)



12

THE GEOMETRY



GRIGORI PERELMAN

Grigori Yakovlevich Perelman is a Russian mathematician. He has made contributions to Riemannian geometry and geometric topology. In 1994, Perelman proved the Poincaré conjecture. In 2003, he proved Thurston's geometrization conjecture. The proof was confirmed in 2006.



MARYAM MIRZAKHANI

Maryam Mirzakhani was an Iranian mathematician and a professor of mathematics at Stanford University. Her research topics included Teichmüller theory, hyperbolic geometry, ergodic theory, and symplectic geometry.



MARTIN HAIRER

Sir Martin Hairer KBE FRS is an Austrian mathematician working in the field of stochastic analysis, in particular stochastic partial differential equations.

GAJ INTERNATIONAL PUBLICATIONS

1

CHAPTER

آزمون بیستم I gaj

ص ۱۰ تا ۲۱ هفتم دوازدهم



Martin Hairer

مارتین هایر
متولد ۱۹۷۵

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

درس دوم: وارون ماتریس و دترمینان

Matrix and Applications

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

356 در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x & 5 \\ 3 & -1 & 4 & y \\ 7 & 8 & 9 & x-2 \end{bmatrix}$ اگر درایه سطر اول و ستون سوم و سطر سوم و ستون دوم ۵ واحد بزرگ‌تر باشد، حاصل $\sum_{j=i}^4 a_{3j}$ کدام است؟

۳۷ (۲)

۳۶ (۱)

۳۵ (۴)

۳۴ (۳)

357 اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ مفروض باشد، به طوری که برای $i > j$ داشته باشیم $a_{ij} = 7$ ، برای $i < j$ داشته باشیم $a_{ij} = 5$ و برای $i = j$ داشته باشیم $a_{ij} = i^2 + j$ ، در این صورت ماتریس A کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} (2)$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} (1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} (4)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} (3)$$

358 اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a-1 & a-2 \\ b+3 & b-2 \end{bmatrix}$ قطری باشد، $a+b$ کدام است؟

۱ (۲)

-۱ (۱)

۵ (۴)

۳ (۳)

359 به ازای کدام مقدار x و y ماتریس $\begin{bmatrix} x-1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است؟

$x=2, y=-7$ (۲)

$x=1, y=-7$ (۱)

$x=1, y=-5$ (۴)

$x=2, y=-5$ (۳)

360 اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-y & 5 \\ 2 & z-2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & x+y \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x+y+z$ کدام است؟

۸ (۲)

۹ (۱)

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

(خارج - ۹۸)



60

خرید آنلاین در gajmarket.com

وبگاه جمع‌بندی سریع

PLUS AZMOON

هفتم دوازدهم | فصل ۱. ماتریس و کاربردها

NOTE

361 اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$, $b_{ij} = i^2 + j^2$ حاصل $2A - B + I$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}^{(2)} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}^{(1)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}^{(4)} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}^{(3)} \end{array}$$

362 اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2x & -1 \\ x+1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ x & 5 \end{bmatrix}$ و درایه سطر دوم و ستون اول از ماتریس AB برابر 7 باشد، درایه سطر سوم و ستون اول از BA کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 11^{(1)} & 9^{(2)} \\ 7^{(3)} & 13^{(4)} \end{array}$$

363 اگر $A = [i - j]_{3 \times 3}$ و $B = [i + j]_{4 \times 2}$ و i شماره سطر و j شماره ستون باشد، مجموع درایه های سطر اول ماتریس BA کدام است؟

$$\begin{array}{ll} -6^{(1)} & 6^{(2)} \\ -5^{(3)} & 5^{(4)} \end{array}$$

364 اگر A, B, C, D چهار ماتریس مربعی و هم مرتبه و I ماتریس همانی هم مرتبه با آن ها باشد، کدام گزینه نادرست است؟

$$\begin{array}{ll} ABC + ADC = A(B + D)C^{(1)} & AC + C = (A + I)C^{(2)} \\ BA + AC = A(B + C)^{(3)} & BC - 2B = B(C - 2I)^{(4)} \end{array}$$

365 اگر A, B, C ماتریس های 2×2 و $BC = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل $(AB + 2B)(CA + C)$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}^{(1)} & \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}^{(2)} \\ \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}^{(3)} & \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}^{(4)} \end{array}$$

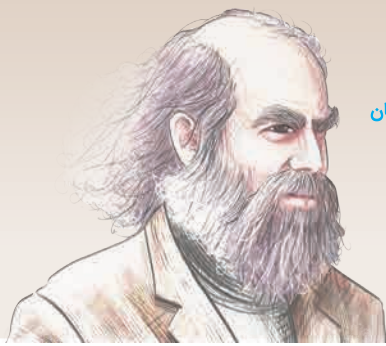
366 اگر i شماره سطر و j شماره ستون و $AB + BA = [i + j]_{2 \times 2}$ و $A - B = [i^2 - j]_{2 \times 2}$ باشد، حاصل $A^2 + B^2$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}^{(1)} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}^{(2)} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}^{(3)} & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}^{(4)} \end{array}$$

367 اگر دو ماتریس $A = [i + m \cdot j]$ و $B = \begin{bmatrix} m+1 & 3 \\ 3 & x \end{bmatrix}$ برابر باشند، $m + x$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 3^{(1)} & 4^{(2)} \\ 5^{(3)} & 2^{(4)} \end{array}$$





گریگوری پرلمان
متولد ۱۹۶۶

درس اول: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

درس دوم: دایره

درس سوم: بیضی و سهمی

2

CHAPTER

Grigori Perelman

آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

آزمون بیست و دوم

ص ۳۴ تا ۳۹ هندسه دوازدهم

430 مقطع یک سطح مخروطی با یک صفحه، یک سهمی است. این صفحه با مولد یا محور سطح مخروطی کدام وضع را دارد؟

(۱) موازی یک مولد

(۲) موازی محور

(۳) عمود بر یک مولد

(۴) گذرا از نقطه تلاقی محور و مولد

431 مقطع یک سطح مخروطی با صفحه‌ای که از رأس سطح مخروطی عبور نکند و عمود بر محور سطح مخروطی باشد، کدام است؟

(۱) دایره

(۲) بیضی

(۳) سهمی

(۴) نقطه

432 مقطع یک سطح مخروطی با صفحه‌ای که عمود بر محور سطح مخروطی نبوده و با مولد نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، کدام است؟

(۱) دایره

(۲) بیضی

(۳) سهمی

(۴) هذلولی

433 سطح مقطع یک کره به شعاع ۵ با یک صفحه که به فاصله ۲ واحد از مرکز کره آن را قطع کند، کدام است؟

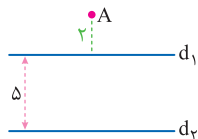
(۱) بیضی

(۲) سهمی

(۳) دایره

(۴) نامشخص

434 دو خط موازی d_1 و d_2 به فاصله ۵ واحد از هم و نقطه A به فاصله ۲ واحد از خط d_1 مفروض اند چند نقطه در صفحه وجود دارد که از d_1 به یک فاصله و از A به فاصله ۶ واحد باشد؟



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۴

435 معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه $A(2, 0)$ و خط $x = -2$ به یک فاصله باشد، کدام است؟

(۱) $y^2 = 8x$

(۲) $x^2 + y^2 = 4$

(۳) $y = 2x$

(۴) $x = 4$

دایره

آزمون بیست و سوم

ص ۴۰ تا ۴۶ هندسه دوازدهم

436 طول قطر دایره $36 = 9(x-1)^2 + 9(y+2)^2$ کدام است؟

(۱) ۶

(۲) ۲

(۳) ۴

(۴) ۳

NOTE



70

خرید آنلاین در gajmarket.com

وبسایت جامع آشنایی سریع

PLUS AZMOON

هندسه دوازدهم | فصل ۲. آشنایی با مقاطع مخروطی

437 دایره $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$

- (۱) بر محور OX مماس است
(۲) محور Yها را در دو نقطه قطع می‌کند
(۳) محور X را قطع نمی‌کند
(۴) محور X را در دو نقطه قطع می‌کند

438 دایره $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 8$ در کدام نواحی محورهای مختصات واقع است؟

- (۱) سوم و چهارم
(۲) دوم و سوم
(۳) اول و چهارم
(۴) هر چهار ناحیه
- 439 مساحت محدود به دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$ کدام است؟

- (۱) 4π
(۲) 2π
(۳) π
(۴) 3π

440 به ازای کدام مقادیر a، منحنی به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ یک دایره است؟

- (۱) ۲
(۲) -۲
(۳) ± 2
(۴) $\emptyset$

441 به ازای چند مقدار m معادله $2x^2 + (m^2 - 2)y^2 + 4x - 2m = 0$ مربوط به یک دایره است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) بیش از دو

442 دو دایره $x^2 + y^2 - 4x = 0$ و $x^2 + y^2 + 4x = 5$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

- (۱) مماس داخل
(۲) مماس خارج
(۳) متقاطع
(۴) متقاطع

443 طول مماس مشترک خارجی دو دایره $C_1: x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$ و $C_2: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

444 وضعیت خط $3x + 4y + 5 = 0$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 6$ چگونه است؟

- (۱) همدیگر را قطع نمی‌کنند.
(۲) از مرکز دایره می‌گذرد.
(۳) مماس بر دایره است.
(۴) متقاطع است و از مرکز دایره نمی‌گذرد.

445 طول وتری که خط $5x + 12y = 14$ از دایره $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8$ جدا می‌کند، کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۸
(۳) ۱۰
(۴) ۱۲

446 نقطه $A = (-1, 4)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $2x - 3y + 1 = 0$ وتری به طول $2\sqrt{7}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y = 2$ را با کدام طول قطع می‌کند؟

(داخل - ۹۸)

- (۱) ۳، -۵
(۲) ۲، -۴
(۳) $-1 \pm \sqrt{3}$
(۴) $-1 \pm \sqrt{3}$

NOTE





مریم میرزاخانی
۱۳۵۶-۱۳۹۶

Vectors

Maryam Mirzakhani

درس اول: معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

درس دوم: ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها

3

CHAPTER

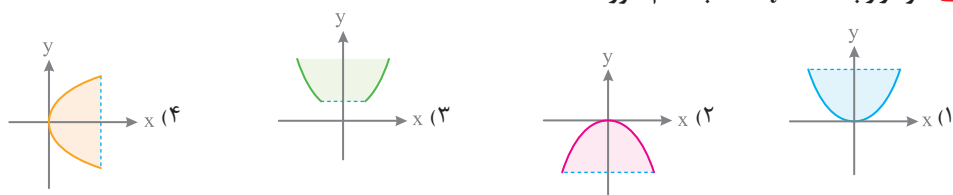
معرفی فضای $\mathbb{R}^3$ آزمون بیست و پنجم I gaj

ص ۶۲ تا ۷۴ هندسه دوازدهم

501 نمودار رابطه $\{(x, y) : x = 1, -1 \leq y \leq 3\}$ به کدام صورت است؟

- (۱) مستطیلی به ابعاد 4×2
(۲) یک پاره خط افقی به طول ۲
(۳) دو خط موازی به فاصله ۲
(۴) یک پاره خط قائم به طول ۴

502 نمودار رابطه $x^2 \leq y < 2$ به کدام صورت است؟



503 اگر نقطه $A(m-1, m, 2)$ در ناحیه دوم دستگاه مختصات قرار گرفته باشد، حدود m به کدام صورت باید باشد؟

- (۱) $m < 0$
(۲) $m > 1$
(۳) $0 < m < 1$
(۴) $1 < m < 2$

504 اگر $A(1, 2, 3)$ و $B(4, -2, 4)$ باشد، اندازه تصویر پاره خط AB روی صفحه xy کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۳
(۳) ۲
(۴) ۵

505 در یک مکعب مستطیل یکی از رأس‌ها مبدأ مختصات و معادله دو وجه آن $y = 5$ و $z = 4$ و معادله یکی از یال‌های آن $\begin{cases} x = 2 \\ z = 4 \end{cases}$ است، حجم این مکعب مستطیل

- (۱) ۲۰
(۲) ۴۰
(۳) ۸۰
(۴) ۱۶۰

506 اگر نقطه $B(0, 4, 1)$ انتهای بردار $\vec{AB} = (1, 2, -1)$ باشد، فاصله قرینه نقطه A نسبت به محور oz از قرینه آن نسبت به صفحه xz کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
(۲) $2\sqrt{2}$
(۳) ۴
(۴) ۲

507 نقاط $A(5, -4, 1)$ ، $B(-1, 2, 4)$ ، $O(0, 0, 0)$ مفروض هستند و $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ ، مقدار $|\vec{OM}|$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{10}$
(۲) $\sqrt{11}$
(۳) $\sqrt{13}$
(۴) $\sqrt{14}$

NOTE



508 اگر دو بردار $a = (2, 1, m)$ و $b = (-1, 2k, 1)$ موازی باشند، آنگاه مقدار $m \times k$ کدام است؟

- (1) $\frac{1}{2}$
(2) -2
(3) 2
(4) $-\frac{1}{2}$

509 اگر $a = (1, 2, 2)$ ، $b = (3, -1, -1)$ دو بردار باشند، اندازه‌ی قطر بزرگ متوازی‌الاضلاع ساخته شده بر روی دو بردار a و b کدام است؟

- (1) $2\sqrt{5}$
(2) $3\sqrt{2}$
(3) $\sqrt{22}$
(4) $2\sqrt{6}$

510 نقاط $A(1, 1, 2)$ ، $B(3, 1, 0)$ ، $C(-1, 4, 7)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر نقطه‌ی G محل برخورد میانه‌های مثلث باشد، حاصل $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}$ کدام است؟

- (1) $i + 2j + 5k$
(2) $3i - j - 2k$
(3) $i + j$
(4) $\vec{O}$

511 اگر بردارهای $a = (1, 2, -2)$ و $b = (2, 3, -1)$ به ترتیب معرف نیروی محرکه هواپیما و نیروی باد باشند، بردار مسیر فرود خرچنگی هواپیما کدام است؟

- (1) $(3, 5, -1)$
(2) $(1, 1, 1)$
(3) $(4, 2, 0)$
(4) $(3, 5, -3)$

512 اگر a و b دو بردار باشند که $a = (m, 2, -1)$ و $|b| = \sqrt{41}$ و دو بردار $a + b$ و $a - b$ برهم عمود باشند، مقدار مثبت m کدام است؟

- (1) 6
(2) 5
(3) 4
(4) 3

513 اگر بردار $a + b$ نیمساز زاویه دو بردار $a = (7, 4, 1)$ و $b = (5, 5, m)$ باشد، m کدام است؟

- (1) ± 4
(2) ± 3
(3) ± 2
(4) ± 1

514 بردار نیمساز دو بردار $a = (2, 1, -2)$ و $b = (-6, 3, 2)$ کدام است؟

- (1) $(-1, 3, 2)$
(2) $(1, 4, 2)$
(3) $(1, 4, -2)$
(4) $(-1, 4, -2)$

515 حاصل $|i - k| + |k - j|$ کدام است؟

- (1) صفر
(2) 2
(3) $\sqrt{6}$
(4) $2\sqrt{2}$

516 اگر a, b, c سه بردار و r یک عدد مثبت باشد، کدام گزینه الزاماً درست نیست؟

- (1) $a - (b - c) = (a - b) - c$
(2) $a - \vec{O} = a$
(3) $r(b - c) = rb - rc$
(4) $a = rb \Rightarrow |a| = r|b|$

NOTE



79

خرید آنلاین در
gajmarket.com
ویژه جمع‌بندی سریع

PLUS
AZMOON

هندسه دوازدهم | فصل ۳ بردارها

41 چون نسبتی داده شده و نسبتی خواسته شده، می‌توانیم از عددگذاری استفاده کنیم. ولی مشکل این جاست که تناسب داده شده دارای یک سمت مجهول و یک سمت معلوم نیست، بنابراین ابتدا آن را کمی ساده می‌کنیم:

$$\frac{x}{x+5} = \frac{y}{y+3} \xrightarrow{\text{تفصیل درمخرج}} \frac{x}{(x+5)-x} = \frac{y}{(y+3)-y}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{3}$$

حال می‌توانیم فرض کنیم $x=5$ و $y=3$ است، در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{3x-y}{x+2y} = \frac{(3 \times 5) - 3}{5 + (2 \times 3)} = \frac{12}{11} = \frac{11+1}{11} = 1 + \frac{1}{11} = 1\frac{1}{11}$$

42 هر چند یک نسبت داده شده، ولی چون نسبتی خواسته نشده، نباید از عددگذاری استفاده کرد، بنابراین از روش ضرب k استفاده می‌کنیم. یعنی:

$$\frac{x}{3} = y = z+1 = k \Rightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y = k \\ z = k-1 \end{cases}$$

حال این مقادیر را در معادله داده شده قرار می‌دهیم تا مقدار k و در نتیجه مقدار z به دست آید:

$$3k + 2(k) + (k-1) = 20 \Rightarrow 7k = 21 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow z = 3-1 = 2$$

43 پاره‌خط‌ها را برحسب دو پارامتر مختلف نشان می‌دهیم و به روی شکل منتقل می‌کنیم:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{BN}{AN} = 3 \Rightarrow \begin{cases} MA = 3x \\ MB = x \end{cases}, \begin{cases} BN = 3y \\ AN = y \end{cases}$$


$$\begin{cases} 3x + x = 12 \Rightarrow x = 3 \\ 3y + y = 12 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

حال با به دست آمدن مقادیر x و y طول پاره خط MN به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$MN = AB - x - y = 12 - 3 - 3 = 6$$

44 باید مربع عدد ۶ با حاصل ضرب اعداد x و $13-x$ برابر باشد:

$$6^2 = x(13-x) \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow (x-9)(x-4) = 0$$

بنابراین برای x دو مقدار ۴ و ۹ به دست می‌آید در نتیجه طول پاره خط بزرگ‌تر برابر ۹ است.

45 می‌دانیم نسبت ارتفاع‌ها با نسبت اضلاع رابطه عکس دارد. بنابراین کافی است به جای $\frac{h_a}{h_b}$ نسبت $\frac{b}{a}$ و به جای $\frac{h_b}{h_c}$ نسبت $\frac{c}{b}$ را قرار دهیم:

$$\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} = \frac{3}{6} + \frac{5}{3} = \frac{3}{6} + \frac{10}{6} = \frac{13}{6}$$

46 با تغییر M روی خط d ، اندازه قاعده BC ثابت می‌ماند. همچنین چون

M روی خطی موازی d' (یعنی BC) حرکت می‌کند اندازه ارتفاع نیز ثابت خواهد ماند. بنابراین مساحت هیچ تغییری نخواهد کرد، اما با دور شدن از B و C محیط رفته رفته افزایش می‌یابد [کمترین مقدار محیط زمانی حاصل می‌شود که M روی عمود منصف BC قرار گیرد و مثلث ABC ، متساوی الساقین شود].

47 اگر در یک تست اندازه پاره خط MN نه داده شده بود و نه خواسته شده بود، بهتر است از تالس جزء به جزء استفاده کنیم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{x+3}{3x-1} \Rightarrow 3x^2 - x = x^2 + 4x + 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(2x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

غریب

48 چون MN جزء داده‌های مسئله است، باید از تالس جزء به کل استفاده کنیم:

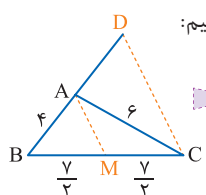
$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{3}{3+5} = \frac{6}{BC} \Rightarrow 3BC = 48 \Rightarrow BC = 16$$

49 همان طور که می‌بینید، خطوط موازی وجود دارد ولی مثلی که در شرایط قضیه تالس صدق کند. وجود ندارد.

بنابراین با امتداد دادن DE مثلث ایجاد می‌کنیم. در ضمن چهار ضلعی $ENCF$ که اضلاع دو به دو موازی دارد متوازی الاضلاع است:

$$DN \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 3$$

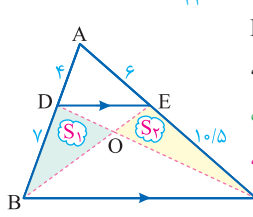
50 چون صحبت از دو خط موازی است به سراغ تالس می‌رویم و چون BD را می‌خواهد باید از تالس جزء به کل استفاده کنیم:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{4}{BD} = \frac{2}{8} \Rightarrow BD = 8$$


51 همان طور که در شکل دیده می‌شود طول هر ۴ قطعه روی اضلاع مثلث مشخص است، و معلوم بودن هر ۴ قطعه روی ساق‌های مثلث خبر از عکس تالس می‌دهد [خبر آمد، خبری در راه است!] بنابراین کنترل می‌کنیم ببینیم واقعاً خبری هست یا نه؟!:

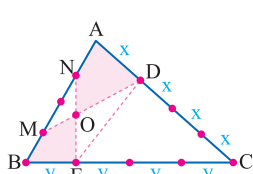
$$\frac{4}{7} = \frac{6}{10/5} \Rightarrow \frac{4}{7} = \frac{6 \times 5}{10} = \frac{30}{10} = 3 \Rightarrow BC \parallel DE$$

پس در چهارضلعی $DECB$ قاعده‌های DE و BC موازی‌اند، یعنی این چهارضلعی دوزنقه است. بنابراین مثلث‌های رنگ شده، هم مساحت هستند. [در هر دوزنقه مساحت بال‌های پروانه متکی به ساقین با هم برابر است.]

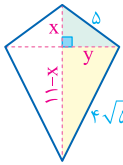


52 اگر دقت کنیم $\frac{3x}{x} = \frac{3y}{y}$ می‌باشد؛ بنابراین طبق عکس تالس $DE \parallel AB$ است. پس مثلث‌های ADM و BEN هم ارتفاع هستند. در ضمن

قاعده‌های آن‌ها نیز برابر است. پس هم مساحت هستند. در نتیجه اگر مثلث OMN که در هر دوی آن‌ها مشترک است را برداریم، دو چهارضلعی باقی‌مانده نیز هم مساحت خواهند بود.




113 اندازه قطر کوچک کایت را $2y$ فرض می‌کنیم. می‌دانیم که قطر بزرگ کایت عمود منصف قطر کوچک آن است. حال با توجه به شکل، رابطه فیثاغورس را در دو مثلث رنگ شده می‌نویسیم:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (11-x)^2 + y^2 = 80 \end{cases}$$

حال طرفین دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

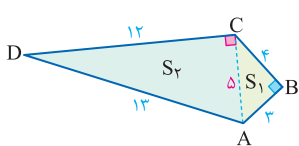
$$121 - 22x = 55 \Rightarrow 22x = 66 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 4$$

$$d = 2y = 8$$

بنابراین اندازه قطر کوچک کایت برابر است با:

114 از وصل کردن وسط‌های اضلاع هر چهار ضلعی محدب یا غیر محدب

همواره یک متوازی‌الاضلاع حاصل می‌شود و برای یافتن مساحت متوازی‌الاضلاع مورد نظر باید مساحت چهارضلعی $ABCD$ را به دست آوریم. برای این کار ابتدا قطر AC را رسم می‌کنیم. مثلث ABC مثلثی قائم‌الزاویه است پس اندازه قطر



AC برابر با ۵ است، در ضمن از آن جاکه

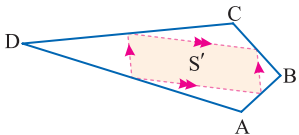
$$ADC \text{ پس } 13^2 = 5^2 + 12^2$$

نیز قائم‌الزاویه است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 \\ S_2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30 \end{cases} \Rightarrow S = 6 + 30 = 36$$

حال مساحت متوازی‌الاضلاع که از وصل کردن وسط‌های هر چهارضلعی محدب

به دست می‌آید. نصف مساحت چهارضلعی $ABCD$ است پس:



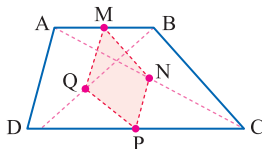
$$S' = \frac{S}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

115 در مثلث ABC نقاط M و N وسط‌های دو ضلع رابه هم وصل کرده‌اند،

بنابراین MN موازی و نصف ضلع مقابل است یعنی $MN = \frac{1}{2} BC$ و به طریق

مشابه در مثلث BDC نیز $PQ = \frac{1}{2} BC$ است و از طرف دیگر در مثلث‌های

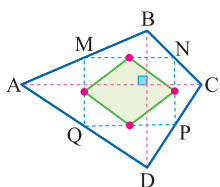
ABD و ADC نیز داریم $MQ = NP = \frac{1}{2} AD$ حال اگر $MNPQ$ لوزی باشد،



به یقین اضلاع آن برابرند و در نتیجه باید

$$BC = AD \text{ باشد، یعنی دو ضلع غیر}$$

مجاور دیگر چهارضلعی باید برابر باشند.



116 در یک چهارضلعی با قطرهای

عمود بر هم، اگر وسط‌های اضلاع را به هم

وصل کنیم، یک مستطیل حاصل می‌شود.

حال اگر وسط‌های اضلاع این مستطیل را

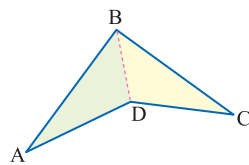
به هم وصل کنیم، یک لوزی ایجاد می‌شود.

105 اگر یک قطر، چندضلعی را به دو

چندضلعی محدب تقسیم کند امکان دارد

چندضلعی محدب نباشد. در سایر حالات

همواره چندضلعی محدب است.



106 اگر تعداد اضلاع را n فرض کنیم خواهیم داشت:

$$n \times \frac{n(n-2)}{2} = 54 \Rightarrow n^2(n-2) = 108$$

حال 108 را به صورت حاصل ضرب یک عدد مربع کامل در یک عدد دیگر تجزیه

$$n^2 \times (n-2) = 6^2 \times 3 \Rightarrow n = 6$$

می‌کنیم:

از طرفی مجموع زوایای داخلی برابر $(n-2) \times 180^\circ$ است، بنابراین:

$$\text{مجموع زوایای داخلی} = 4 \times 180^\circ = 720^\circ$$

107 مجموع زوایای داخلی باید مضرب 180° باشد:

$$\begin{array}{r} 2570 \\ 180 \\ \hline 14 \\ \hline 50 \end{array} \Rightarrow 50^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 130^\circ$$

بنابراین مجموع زوایای داخلی این چندضلعی $2570^\circ + 130^\circ = 2700^\circ = 15 \times 180^\circ$

است. یعنی $n-2=15$ و در نتیجه $n=17$ است. پس تعداد قطرهای آن

$$\frac{17 \times 14}{2} = 17 \times 7 = 119$$

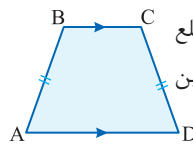
برابر است با:

108 گزینه ۴ الزاماً یک متوازی‌الاضلاع را مشخص

نمی‌کند چون یک چهارضلعی که دو ضلع آن موازی و دو ضلع

آن مساوی باشد، می‌تواند یک دوزنقه متساوی‌الساقین

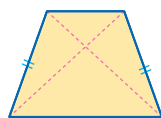
نیز باشد.



109 گزینه ۲ الزاماً یک مستطیل را مشخص نمی‌کند

چون چهارضلعی که قطرهای برابر دارد و دو ضلع مقابل آن

هم اندازه است، می‌تواند یک دوزنقه متساوی‌الساقین باشد.



110 چهارضلعی که قطرهایش منصف هم باشند قطعاً متوازی‌الاضلاع

است و در یک متوازی‌الاضلاع، اگر دو ضلع مجاور با هم برابر باشند، متوازی‌الاضلاع

تبدیل به یک لوزی خواهد شد.

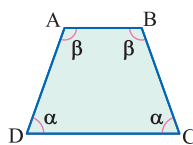
111 چهارضلعی که قطرهای آن نیمساز زوایا باشد قطعاً لوزی است. حال

اگر در یک لوزی قطرهای برابر باشد، لوزی خواص مستطیل را پیدا می‌کند و

تبدیل به مربع می‌شود. مثال نقض برای گزینه‌های ۲ و ۳ لوزی و برای گزینه

۴ مستطیل است.

112 در دوزنقه متساوی‌الساقین مطابق شکل مقابل، زاویه‌های مجاور



می‌توانند با هم برابر باشند یا مکمل هم باشند، یعنی

گزینه ۳ نادرست است اما سایر گزینه‌ها در تمام

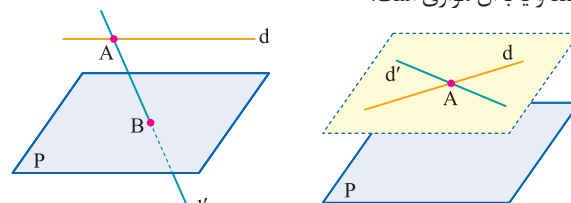
دوزنقه‌های متساوی‌الساقین برقرار هستند:

$$\hat{A} = \hat{B} \quad \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$$

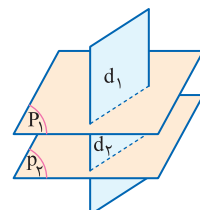


95

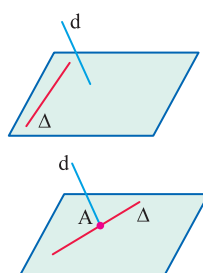
155 خط d' قطعاً غیرمنطبق بر صفحه P است چون یا صفحه P را قطع می‌کند و یا با آن موازی است.



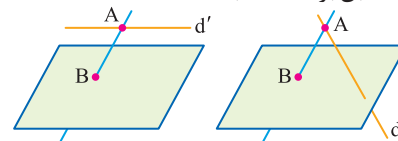
156 اگر یکی از دو صفحه موازی، صفحه‌ای را قطع کند، دیگری نیز آن را قطع می‌کند و فصل مشترک‌های ایجادشده با هم موازی است.



157 اگر خط d ، صفحه P را قطع کند و خط Δ بر این صفحه منطبق باشد، آن‌گاه d و Δ یا متقاطع اند یا متناظر و هرگز نمی‌توانند موازی باشند زیرا اگر خط Δ با خط d موازی باشد، باید قطعاً صفحه P را قطع کند در حالی که می‌دانیم خط Δ بر صفحه منطبق است.

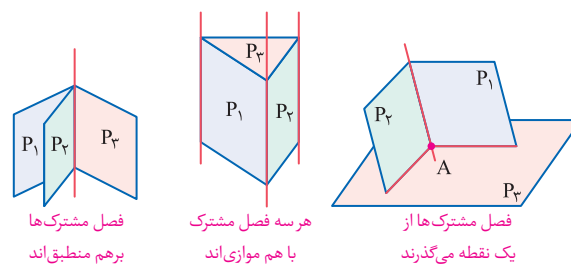


158 خط d' نمی‌تواند منطبق بر صفحه P باشد.

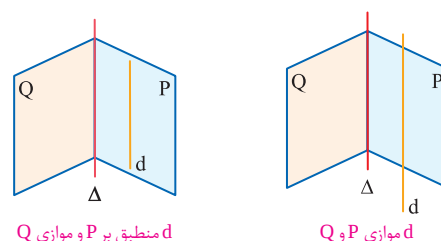


159 اگر یکی از دو خط متناظر، منطبق بر صفحه‌ای باشد، دیگری قطعاً غیرمنطبق بر آن صفحه است چون دو خط متناظر، هرگز در یک صفحه جای نمی‌گیرند.

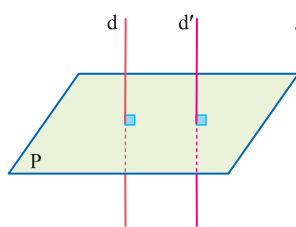
160 تحت هیچ شرایطی دو خط موازی امکان پذیر نیست.



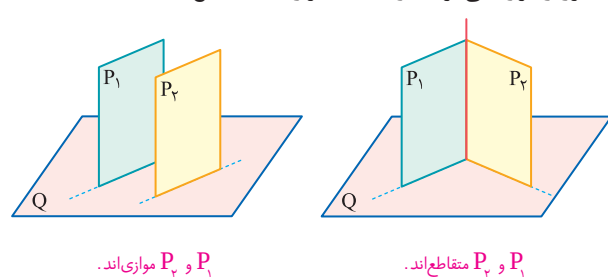
161 خط d یا با هر دو صفحه موازی است یا منطبق بر یک صفحه و با دیگری موازی است یعنی حداقل با یکی از دو صفحه موازی است.



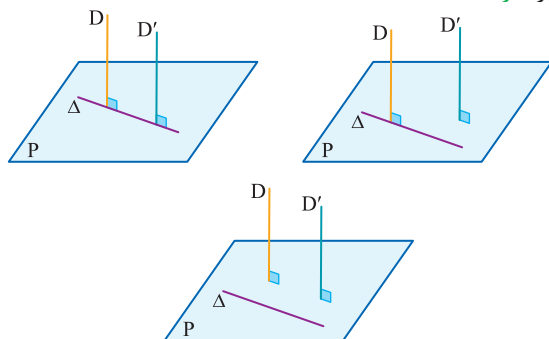
162 اگر دو خط، بر صفحه‌ای عمود باشند الزاماً با هم موازی اند.



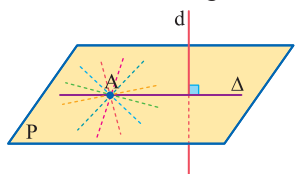
163 صفحات P_1 و P_2 هر وضعی ممکن است نسبت به هم داشته باشند [منظور از هر وضعی برای دو صفحه، موازی یا متقاطع است].



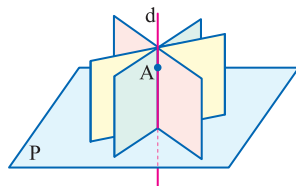
164 هر خط [یا صفحه‌ای] که بر یکی از دو خط موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است.



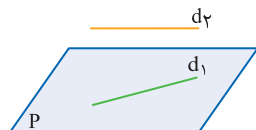
165 مطابق شکل، از هر نقطه خارج یک خط، بی‌شمار خط عمود بر آن خط می‌توان رسم کرد که یکی از آن‌ها عمود متقاطع [خط Δ] و بقیه، عمود متناظر هستند. این خطوط همگی در صفحه‌ای قرار دارند که از نقطه A می‌گذرد و خط d بر آن عمود است.



166 از هر نقطه خارج صفحه P بی‌شمار صفحه عمود بر P می‌توان رسم کرد. این صفحات همگی شامل خط d هستند که از A می‌گذرد و عمود بر P است.



167 اگر دو خط d_1 و d_2 متناظر باشند، تنها یک صفحه وجود دارد که شامل یکی و موازی دیگری باشد.



271 می‌دانیم برای یافتن بازتاب نقطه B نسبت به خط d باید به آن عمود کنیم و به همان اندازه ادامه دهیم. پس با توجه به شکل مقابل و قائمه بودن مثلث ABH خواهیم داشت:

$\sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{BH}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow BH = 1 \Rightarrow BB' = 2BH = 2$

از طرفی با توجه به اینکه بازتاب تبدیلی ایزومتري است، هر پاره خط با تبدیل یافته‌اش هم‌اندازه است؛ بنابراین $AB' = AB = 2$ در نتیجه محیط مثلث ABB' برابر است با:

272 در بازتاب نسبت به قطر AC نقطه M به Q تبدیل می‌شود، پس گزینه‌های 1 و 3 درست نیست. در بازتاب نسبت به قطر BD نقطه N به نقطه M تصویر می‌شود، پس گزینه 2 درست نیست. اما قطر BD عمود منصف PQ است، یعنی در بازتاب نسبت به قطر BD نقطه P به Q تبدیل می‌شود، پس گزینه 4 درست است.

273 خطوط L_1 و L_2 ممکن است متقاطع نیز باشند، بنابراین گزینه 1 نادرست است. در ضمن در حالتی که L_1 و L_2 موازی هستند، خط d نیمساز زاویه L_1 و L_2 نیست، یعنی گزینه 2 نیز نادرست است. از طرفی گزینه 3 تنها در حالتی می‌تواند درست باشد که L_1 و L_2 برهم منطبق باشند؛ پس گزینه 4 نیز نادرست است. اما اگر یکی از دو خط L_1 یا L_2 با خط d موازی باشد، خط دیگر نیز با آن موازی است بنابراین تنها گزینه قابل قبول، گزینه 2 است.

274 در حالتی که خط و تصویرش متقاطع باشند، محور بازتاب نیمساز زاویه بین دو خط است. پس گزینه 2 درست است.

275 نقطه M با بازتاب نسبت به AB و CD روی A' و C' تصویر شده‌است، پس AB عمود منصف $A'M$ و CD عمود منصف MC' است، بنابراین:

$A'C' = A'M + MC' = 2MH + 2MH' = 2(MH + MH') = 2AD$

به همین ترتیب داریم $B'D' = 2AB$ حال می‌توانیم نسبت مساحت‌ها را به دست آوریم:

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} A'C' \cdot B'D'}{AB \cdot AD} = \frac{\frac{1}{2} (2AD)(2AB)}{AB \cdot AD} = 2$$

مساحت هر چهارضلعی با قطرهای عمود برهم، با نصف حاصل ضرب اندازه قطرهای برابر است.

276 پاره خط AB با پاره خط (b) هم‌اندازه نیست، پس گزینه 2 نادرست است. در سایر گزینه‌ها نیز فقط پاره خط (d) می‌تواند تصویر پاره خط AB باشد، زیرا با توجه به شکل اگر دوسر پاره خط (d) را A' و B' نام‌گذاری کنیم، عمود منصف‌های دو پاره خط AA' و BB' برهم منطبق هستند ولی برای بقیه پاره خط‌ها، این اتفاق نمی‌افتد.

277 در گزینه 1 پاره خط‌های واصل بین رأس‌های نظیر موازی نیستند. پس گزینه 1 نادرست است. در گزینه 2 مثلث‌های ABC و PNQ هم‌نهشت نیستند پس نمی‌توانند بازتاب یافته یکدیگر باشند بنابراین گزینه 2 نیز نادرست است. در گزینه 3 مثلث‌های ABC و FDQ هم‌جهت هستند پس نمی‌توانند با بازتاب به یکدیگر تبدیل شوند، بنابراین گزینه 3 هم نادرست است.

اما در گزینه 4 مثلث‌های ABC و MNP هم‌نهشت‌اند ولی هم‌جهت نیستند و مانند شکل پاره خط‌های واصل بین رأس‌های نظیر موازی‌اند پس می‌توانند با بازتاب نسبت به خط d به یکدیگر تبدیل شوند، بنابراین گزینه 4 صحیح است.

278 برای انتقال با بردار $\vec{BC}$ ، از نقطه A برداری مساوی با بردار $\vec{BC}$ رسم می‌کنیم، در این صورت نقطه انتهایی این بردار یعنی نقطه A' ، همان تصویر نقطه A است. به همین ترتیب نقاط B و C را به کمک بردارهای $\vec{CA}$ و $\vec{AB}$ انتقال می‌دهیم تا به ترتیب نقاط B' و C' دست‌آید. مطابق شکل، اضلاع مثلث $A'B'C'$ از رأس‌های مثلث ABC می‌گذرد و طول هر ضلع مثلث $A'B'C'$ دو برابر اضلاع مثلث ABC است، پس می‌توان نوشت:

$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = 4$

279 انتقال یک تبدیل ایزومتري است، پس اگر اندازه ضلع مربع ABCD برابر a باشد، تصویرش تحت انتقال نیز مربعی به ضلع a است و B روی نقطه B' تصویر شده است، بنابراین:

$$DB' = \sqrt{AD^2 + AB'^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a$$

280 باید بردار انتقال از نقطه‌ای روی خط d شروع شود و در نقطه‌ای روی خط d' پایان یابد، ولی در گزینه 4 چنین حالتی اتفاق نمی‌افتد.



316 چون رابطه دو ضلع و زاویه روبه‌رو به آن دوزلع مطرح شده از قضیه سینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}b}{\sin \hat{B}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \sqrt{2} \sin \hat{B} = \sin \hat{A}$$

$$\sqrt{2} \sin \hat{B} = \sin \hat{B} \cos \hat{B} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ$$

$$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ$$

بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویه متساوی الساقین است.

317 ابتدا باید به جای $\cos^2 A$ عبارت $1 - \sin^2 A$ را جای‌گذاری کنیم و می‌دانیم اگر رابطه هم‌درجه‌ای بین اضلاع مثلث برقرار باشد همان رابطه بین سینوس‌های زوایای مثلث نیز برقرار است و برعکس:

$$\sin^2 B + \sin^2 C + (1 - \sin^2 A) = 1 \Rightarrow \sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A$$

چون یک رابطه هم‌درجه بین سینوس‌های زوایای مثلث برقرار است، همان

$$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

رابطه بین اضلاع مثلث برقرار است:

318 در مثلث متساوی‌الساقین ABC، ابتدا ارتفاع را رسم می‌کنیم و به کمک رابطه فیثاغورس اندازه ارتفاع را به دست می‌آوریم:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

با معلوم بودن اندازه ارتفاع، مساحت مثلث قابل محاسبه است:

$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{3 \times 8}{2} = 12$$

حال با در دست داشتن مساحت مثلث، می‌توانیم اندازه شعاع دایره محیطی

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{5 \times 5 \times 8}{4 \times 12} = \frac{25}{6}$$

را به دست آوریم:

319 ابتدا به کمک سه شعاع دایره‌های محاطی خارجی، شعاع دایره محاطی داخلی را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{10+3+2}{30} = \frac{1}{6} \Rightarrow r = 6$$

حال می‌توانیم شعاع دایره محیطی را محاسبه کنیم:

$$r_a + r_b + r_c = r + R \Rightarrow 3 + 10 + 15 = 6 + R \Rightarrow R = 22$$

320 برای محاسبه طول ضلع BC، از قضیه سینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$a^2 = 9 + 64 - 2 \times 3 \times 8 \times \cos 60^\circ = 49 \Rightarrow a = 7$$

321 می‌دانیم کوچک‌ترین زاویه مثلث، روبه‌رو به کوچک‌ترین ضلع است

و در بین اعداد داده شده $a = \sqrt{5}$ کوچک‌ترین ضلع مثلث است، پس داریم:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + (2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \times 3 \times 2\sqrt{2}} = \frac{12}{12\sqrt{2}}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \hat{A} = 45^\circ$$

322 عبارت داده شده را با قضیه کسینوس‌ها مقایسه می‌کنیم تا بتوانیم کسینوس زاویه B را به دست آوریم:

$$b^2 = a^2 + c^2 + \sqrt{2}ac$$

فرض مسئله

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

قضیه کسینوس‌ها

$$a^2 + c^2 + \sqrt{2}ac = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$\cos B = -\frac{\sqrt{2}ac}{2ac} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 135^\circ$$

323 ابتدا با استفاده از دستور مساحت سینوسی، سینوس زاویه A را به دست می‌آوریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A \Rightarrow 16 = \frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \pm \sqrt{1 - \sin^2 A} = \pm \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \pm \frac{3}{5}$$

دقت کنید که چون a ضلع متوسط است $\cos A$ نمی‌تواند منفی باشد، چون در این صورت $\hat{A} > 90^\circ$ بوده و ضلع a قطعاً بزرگ‌ترین ضلع مثلث است. حال به کمک قضیه کسینوس‌ها، طول ضلع A به دست می‌آید:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A \Rightarrow a^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \frac{3}{5}$$

$$a^2 = 64 + 25 - 48 \Rightarrow a^2 = 41 \Rightarrow a = \sqrt{41}$$

324 در مثلث ABC طبق فیثاغورس ضلع BC به دست می‌آید، حال به سراغ قضیه کسینوس‌ها در مثلث BCD می‌رویم:

$$13^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \times 7 \times 8 \times \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{56}{-2 \times 7 \times 8} = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = 120^\circ \Rightarrow \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

325 باید در هر گزینه، مربع بزرگ‌ترین ضلع را با مجموع مربعات دو ضلع دیگر مقایسه کنیم:

$$9^2 > 4^2 + 6^2 \Rightarrow \hat{C} > 90^\circ \quad 10^2 < 8^2 + 7^2 \Rightarrow \hat{C} < 90^\circ$$

$$7^2 < 6^2 + 4^2 \Rightarrow \hat{B} < 90^\circ \quad 5^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

326 چون $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{4}$ است، بنابراین MN موازی BC نیست و استفاده از قضیه تالس برای پیدا کردن BC منتفی است.

بنابراین ابتدا به کمک قضیه کسینوس‌ها مقدار $\cos \alpha$ را پیدا می‌کنیم:

$$2^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

حال مجدداً به کمک قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC ضلع BC را پیدا می‌کنیم:

$$BC^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \frac{1}{4} = 16 + 36 - 12 = 40 \Rightarrow BC = 2\sqrt{10}$$

327 می‌دانیم کوتاه‌ترین میانه بزرگ‌ترین ضلع وارد می‌شود، بنابراین خواهیم داشت:

$$2m_a^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2 \Rightarrow 2m_a^2 + \frac{6^2}{2} = 3^2 + 5^2$$

$$2m_a^2 = 9 + 25 - 18 \Rightarrow 2m_a^2 = 16 \Rightarrow m_a^2 = 8 \Rightarrow m_a = 2\sqrt{2}$$



363 1 کافیت سطر اول ماتریس B را در ماتریس A ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه های سطر اول}$$

364 3 تک تک گزینه ها را بررسی می کنیم:

1 ابتدا ماتریس A را از سمت چپ فاکتور می گیریم:

$$ABC + ADC = A(BC + DC)$$

حال ماتریس C را از سمت راست از ماتریس های درون پرانتز فاکتور می گیریم:

$$A(BC + DC) = A(B + D)C$$

2 می توان به جای ماتریس C ماتریس $I \times C$ قرار داد (چون I عضو بی اثر ضرب است) و از ماتریس C از سمت راست فاکتور گرفت:

$$A \times C + C = A \times C + I \times C = (A + I) \times C$$

3 اگر دقت کنید متوجه می شوید در ماتریس BA ماتریس A در سمت راست و در ماتریس AC ماتریس A در سمت چپ واقع شده است، بنابراین نمی توان از ماتریس A فاکتور گرفت.

دقت کنید نمی توان ماتریس BA را به صورت AB نوشت، چون همان طور که گفتیم ضرب ماتریس ها در حالت کلی دارای خاصیت جابه جایی نیست.

4 اگر به جای ماتریس BI ماتریس BI را قرار دهیم، آن گاه داریم:

$$BC - 2B = BC - 2BI = BC - B(2I) = B \times (C - 2I)$$

365 4 در پرانتز اول از ماتریس B از سمت راست و در پرانتز دوم از C از سمت چپ فاکتور می گیریم و با توجه به این که $BC = 2I$ است، خواهیم داشت:

$$(AB + 2B)(CA + C) = (A + 2I)BC(A + I)$$

$$= (A + 2I)(2I)(A + I) = 2(A + 2I)(A + I)$$

$$= 2 \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 2 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$$

366 4 می دانیم $(A - B)^T = (A - B)(A - B)$ حال در طرف دوم تساوی

پرانتزها را طبق قانون پخش در هم ضرب می کنیم:

$$(A - B)^T = A^T - AB - BA + B^T \Rightarrow A^T + B^T = (A - B)^T + AB + BA$$

$$AB + BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (A - B)^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

حال کافی است 1 و 2 را با هم جمع کنیم:

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

367 2 ابتدا ماتریس A را با درایه ها مشخص می کنیم، سپس درایه های نظیر

در دو ماتریس را برابر قرار می دهیم:

$$\begin{bmatrix} 1+m & 1+2m \\ 2+m & 2+2m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+1 & 2 \\ 2 & x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1+2m=2 \Rightarrow m=1 \\ 2+m=x \Rightarrow x=3 \\ 2+2m=x \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

368 3 برای این که ضرب این دو ماتریس تعویض پذیر باشد، باید نسبت

تفاضل اعداد قطر اصلی آن ها برابر با نسبت اعداد قطر فرعی باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\frac{a-2}{y-3} = \frac{3}{6} = \frac{5}{b} \Rightarrow \begin{cases} 2a-4=4 \Rightarrow 2a=8 \Rightarrow a=4 \\ 2 \times 3 \times b = 3 \times 0 \Rightarrow b=1 \end{cases} \Rightarrow a+b=14$$

در ساختن این نسبت ها گاهی ممکن است مخرج یکی از کسرها صفر شود، در این صورت برای این که تناسب برقرار گردد باید صورت نیز صفر شود و آن کسر به صورت $\frac{0}{0}$ درآید.

369 1

$$\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 11x-1 & -x-2 & -3x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x(11x-1) + (-x-2)(2x) - 1(3x) = 0 \Rightarrow 9x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{2}{9}$$

370 3 ابتدا باید ماتریس A^2 را تشکیل دهیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چون تشخیص نظم موجود کمی مشکل است پس A^3 را هم می سازیم:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال با توجه به نظم موجود درمی یابیم که:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه ها} = 22$$

371 2

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & \log_2 2 \\ \log_2 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \log_2 2 \\ \log_2 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

حال طرفین تساوی را به توان 49 می رسانیم:

$$A^{48} = I^{49} = I$$

372 2 ابتدا ماتریس A^2 را تشکیل می دهیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow A \text{ متناوب}$$

$$A^y - A^x = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

اگر $A^2 = I$ باشد، آن گاه: $A^{2k} = I$ و $A^{2k+1} = I$

436 برای پیدا کردن شعاع دایره باید ابتدا طرفین را بر ۹ تقسیم کنیم تا معادله به صورت استاندارد درآید:

$$9(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 36 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \Rightarrow R = \sqrt{4} = 2$$

قطر دایره همواره دو برابر شعاع دایره است؛ یعنی:

$$d = 2R = 4$$

437 برای تقاطع منحنی با محور x ها به جای y صفر قرار می‌دهیم:

$$y = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (0+1)^2 = 4 \Rightarrow (x-2)^2 = 3 \Rightarrow x-2 = \pm\sqrt{3}$$

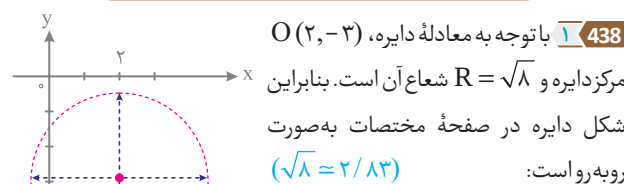
بنابراین منحنی محور x ها را دو نقطه قطع می‌کند.

برای تقاطع منحنی با محور y ها به جای x صفر قرار می‌دهیم:

$$x = 0 \Rightarrow (0-2)^2 + (y+1)^2 = 4 \Rightarrow (y+1)^2 = 0 \Rightarrow y = -1$$

ریشه مضاعف $y = -1$

بنابراین منحنی در یک نقطه به محور y ها مماس است.



برای مشخص کردن حدود دایره کافی است از مرکز دایره به اندازه شعاع به چپ و راست و همچنین بالا و پایین حرکت کنیم.

439 برای پیدا کردن مساحت دایره ابتدا باید شعاع دایره را به دست آوریم و برای پیدا کردن شعاع باید ابتدا مرکز را معلوم کنیم:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$$

$$O\left(-\frac{x}{2}, -\frac{y}{2}\right) = \left(-\frac{2}{2}, -\frac{-4}{2}\right) = (-1, 2)$$

$$R = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 - 3} = \sqrt{2}$$

بنابراین مساحت دایره برابر است با:

$$S = \pi R^2 = \pi (\sqrt{2})^2 = 2\pi$$

440 همان طور که می‌بینید در معادله داده شده $C=0$ است، پس اگر ضرایب x^2 و y^2 برابر شوند، قطعاً این معادله دایره است و نیازی به محاسبه شعاع نیست:

$$a^2 - 2 = 2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

441 ابتدا ضرایب x^2 و y^2 را برابر قرار می‌دهیم:

$$m^2 - 2 = 2 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

حال باید در هر کدام از این دو حالت شعاع را به دست آوریم و کنترل کنیم که عدد حقیقی به دست آید:

$$m = 2 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O(-1, 0) \\ R = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$m = -2 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O(-1, 0) \\ R = \sqrt{-1} \end{cases}$$

442 مرکز و شعاع دو دایره را پیدا می‌کنیم و طول خط‌المركزین را با مجموع و تفاضل دو شعاع مقایسه می‌کنیم:

- $x^2 + y^2 - 4x = 0 \Rightarrow O_1(2, 0) \Rightarrow R_1 = \sqrt{4+0+0} = 2$
- $x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow O_2(-2, 0) \Rightarrow R_2 = \sqrt{4+0+5} = 3$
- $d = \sqrt{(2+2)^2 + (0-0)^2} = 4$
- $R_1 + R_2 = 5$
- $|R_1 - R_2| = 1$

همان طور که ملاحظه می‌شود $1 < d < 5$ ، بنابراین دو دایره متقاطع‌اند.

443 ابتدا مرکزها و شعاع‌های دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$C_1: \begin{cases} O_1(-1, 4) \\ R_1 = \sqrt{1+16-1} = 4 \end{cases} \quad C_2: \begin{cases} O_2(3, 1) \\ R_2 = \sqrt{9+1-9} = 1 \end{cases}$$

$$d = |O_1O_2| = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-1)^2} = 5$$

حال می‌توانیم طول مماس مشترک خارجی را با داشتن d ، R_1 و R_2 محاسبه کنیم:

$$L = \sqrt{d^2 - (R_1 - R_2)^2} = \sqrt{5^2 - (4-1)^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$$

444 ابتدا مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم، سپس فاصله مرکز دایره تا خط را با شعاع مقایسه می‌کنیم:

$$O(3, -1) \Rightarrow R = \sqrt{9+1-(-6)} = 4$$

$$OH = \left| \frac{3(3) + 4(-1) + 5}{\sqrt{9+16}} \right| = \frac{10}{5} = 2$$

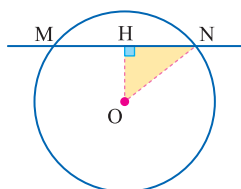
چون $OH < R$ است، پس خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند اما از مرکز دایره نمی‌گذرد (چون اگر از مرکز می‌گذشت، باید فاصله مرکز دایره از خط صفر می‌شد؛ درحالی‌که ۲ به دست آمده است).

445 اگر خط و دایره در دو نقطه M و N متقاطع باشند، آن‌گاه برای یافتن اندازه وتر MN ابتدا باید مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره را به دست آوریم:

$$O(1, 4) \Rightarrow R = \sqrt{1+16-(-8)} = 5$$

در این مرحله، باید فاصله مرکز دایره [نقطه $O(1, 4)$] از خط یعنی اندازه باره خط OH را بیابیم:

$$5x + 12y - 14 = 0 \Rightarrow OH = \left| \frac{5(1) + 12(4) - 14}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \right| = \left| \frac{39}{13} \right| = 3$$



حال با توجه به این‌که $R = 5$ و $OH = 3$ است، در مثلث قائم‌الزاویه ONH ، $NH = 4$ خواهد بود و در نتیجه طول وتر MN برابر است با:

$$|MN| = 4 \times 2 = 8$$



123



508 برای این که دو بردار موازی باشند، باید نسبت مؤلفه‌های آن‌ها با هم برابر شود، اما برای این که اشتباه محاسباتی برایتان پیش نیاید، نسبت‌ها را به صورت زیر تشکیل دهید:

$$\frac{2}{-1} = \frac{1}{2k} = \frac{m}{1} \Rightarrow m \times k = (-2)\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

یعنی ابتدا یک بردار را در صورت‌های مناسب قرار دهید و سپس بردار دوم را قرار دهید:

$$\frac{2}{-1} = \frac{1}{2k} = \frac{m}{1} \Rightarrow m \times k = (-2)\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

509 قطره‌های متوازی الاضلاع بنا شده بر a و b بردارهای $a+b$ و $a-b$ هستند:

$$a+b = (4, 1, 1) \Rightarrow |a+b| = \sqrt{4^2+1^2+1^2} = 3\sqrt{2}$$

$$a-b = (-2, 2, 2) \Rightarrow |a-b| = \sqrt{4+9+9} = \sqrt{22}$$

510 رابطه داده شده را باز می‌کنیم:

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{A} - \vec{G} + \vec{B} - \vec{G} + \vec{C} - \vec{G} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} - 3\vec{G}$$

حال با توجه به این که G محل برخورد میانه‌هاست $\vec{G} = \frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}{3}$ می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} - 3\left(\frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}{3}\right) = \vec{0}$$

511 مسیر فرود خرچنگی یا فرود ایمن در راستای مجموع دو بردار a و b است:

$$a+b = (1, 2, -2) + (2, 3, -1) = (3, 5, -3)$$

512 برای این که دو بردار $a+b$ و $a-b$ بر هم عمود باشند، لازم است که دو بردار a و b هم اندازه باشند:

$$(a+b) \perp (a-b) \Leftrightarrow |a| = |b|$$

$$\sqrt{m^2 + 4 + 1} = \sqrt{41} \Rightarrow m^2 + 5 = 41 \Rightarrow m^2 = 36 \xrightarrow{m>0} m = 6$$

513 چون بردار $a+b$ نیمساز است، به یقین دو بردار a و b هم اندازه هستند، بنابراین:

$$|a| = |b| \Rightarrow \sqrt{7^2 + 4^2 + 1} = \sqrt{5^2 + 5^2 + m^2}$$

$$66 = 50 + m^2 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

514 می‌دانیم بردار نیمساز بین دو بردار a و b از رابطه $u = |a|b + |b|a$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$u = \sqrt{4+1+4}(-6, 3, 2) + \sqrt{36+9+4}(2, 1, -2)$$

$$u = 3(-6, 3, 2) + 7(2, 1, -2) = (-4, 16, -8) \approx (-1, 4, -2)$$

515 می‌دانیم $i-k = (1, 0, -1)$ و $k-j = (0, -1, 1)$ ، بنابراین:

$$\begin{cases} |i-k| = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \\ |k-j| = \sqrt{0^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} \\ |i-k| + |k-j| = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

516 همه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

1 تفاضل بردارها شرکت‌پذیر نیست: $a - (b-c) = a - b + c \neq (a-b) - c$

2 بردار صفر عضو بی‌اثر جمع و تفریق بردارهاست: $a - \vec{0} = a$

3 ضرب عدد روی جمع و تفریق بردارها توزیع‌پذیر است: $r(b-c) = rb - rc$

4 ویژگی ضرب عدد در بردار: $a = rb \Rightarrow |a| = |r||b| \xrightarrow{r>0} |a| = r|b|$

517 ابتدا بردارهای $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ را می‌سازیم:

$$\vec{AB} = B - A = (3, -1, 1) - (1, 2, 1) = (2, -3, 0)$$

$$\vec{AC} = C - A = (-2, 1, -2) - (1, 2, 1) = (-3, -1, -3)$$

حال می‌توانیم حاصل ضرب داخلی دو بردار را به دست آوریم:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (2)(-3) + (-3)(-1) + (0)(-3) = -6 + 3 = -3$$

518 می‌دانیم وقتی می‌خواهیم زاویه دو بردار را از روی شکل پیدا کنیم، باید دو بردار هم مبدأ باشند.

بنابراین بردار $\vec{AB}$ را امتداد می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$\vec{AB} \cdot \vec{BD} = |\vec{AB}| |\vec{BD}| \cos 135^\circ = 6 \times 6\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -36$$

519 می‌دانیم مجموع زاویه‌های حول یک نقطه برابر 360° است، بنابراین

$$\theta + 110^\circ + 170^\circ = 360^\circ \Rightarrow \theta = 80^\circ$$

اگر θ زاویه بین b و c باشد، داریم: $\theta + 110^\circ + 170^\circ = 360^\circ \Rightarrow \theta = 80^\circ$ بنابراین زاویه بین b و c حاده است و ضرب داخلی آن‌ها عددی مثبت است، درحالی‌که زاویه بین a و b و همچنین زاویه بین a و c منفرجه است و ضرب داخلی آن‌ها عددی منفی است.

520 چون زاویه رأس A را می‌خواهیم، باید دو برداری را تشکیل دهیم که از رأس A شروع می‌شوند:

$$\vec{AB} = B - A = (3, -1, 2) - (2, 1, 0) = (1, -2, 2)$$

$$\vec{AC} = C - A = (-1, 1, 3) - (2, 1, 0) = (-3, 0, 3)$$

$$\cos A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{-3+0+6}{\sqrt{1+4+4} \times \sqrt{9+0+9}} = \frac{3}{3\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

521 مختصات بردار a به صورت $a = (-1, 1, \sqrt{2})$ ، حال برای پیدا کردن

زاویه آن با جهت مثبت محور z زاویه بردار a را با بردار $j = (0, 0, 1)$ پیدا می‌کنیم:

$$\cos \beta = \frac{a \cdot j}{|a| |j|} = \frac{0+0+\sqrt{2}}{\sqrt{1+1+2} \times 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 60^\circ$$

522 ابتدا کسینوس زاویه بین دو بردار را به دست می‌آوریم:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta + 0/6^2 = 1 \Rightarrow \cos \theta = \pm 0/6$$

با توجه به این که θ منفرجه است $\cos \theta < 0$ است یعنی $\cos \theta = -0/6$ است، حال با توجه به ویژگی‌های ضرب داخلی که بسیار شبیه ضرب دو عدد است، عبارت داده شده را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(2a-b) \cdot (a+b) = 2|a|^2 + 2a \cdot b - b \cdot a - |b|^2 = 2|a|^2 + a \cdot b - |b|^2$$

می‌دانیم $a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$ است بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{حاصل} = 2 \times 3^2 + [3 \times 1 \times (-0/6)] - 10^2 = 18 - 18 - 100 = -100$$