

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و
ارسال رایگان

Medabook.com



مدابوک



دریافت برنامه ریزی و مشاوره

از مشاوران رتبه برتر

هوا کنکور آیدی نوین

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۴





Andrey Nikolaeich Kolmogorov was a Soviet mathematician who made significant contributions to the mathematics of probability theory, topology, intuitionistic logic, turbulence, classical mechanics, algorithmic information theory and computational complexity.



Bertrand Arthur William Russell, 3rd Earl Russell, OM FRS was a British philosopher, logician, mathematician, historian, writer, essayist, social critic, political activist, and Nobel laureate.



Sir Ronald Aylmer Fisher FRS was a British statistician and geneticist. For his work in statistics, he has been described as "a genius who almost single-handedly created the foundations for modern statistical science" and "the single most important figure in 20th century statistics".



David Bryant Mumford is an American mathematician known for distinguished work in algebraic geometry, and then for research into vision and pattern theory. He won the Fields Medal and was a MacArthur Fellow. In 2010 he was awarded the National Medal of Science.



آمار و احتمال
STATISTICS & PROBABILITY
جزوه طلابی

آشنایی با منطق ریاضی

درس اول



ص ۲۶ تا ۳۸ کتاب آمار و ...



۱

منطق ریاضی و گزاره

منطق ریاضی که به آن **منطق نمادین** نیز گفته می‌شود، دستور زبان ریاضی یا مطالعه در ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود. این شاخه از ریاضی به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند.

هر جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا ارزش نادرست باشد را **گزاره** می‌نامند.

• مجموعه هر دو عدد فرد، همواره عددی زوج است. • عدد $2^{101} - 1$ عددی اول است.

• جملات **امری**، **پرسشی**، **عاطفی**، **احساسی**، **تعجبی** و **دعایی** گزاره محسوب نمی‌شوند.

• کتاب‌ها را روی میز بگذارید. [امری] • آیا ۹۹۷ عددی اول است؟ [پرسشی] • بیا و کشتی ما در شط شراب انداز. [احساسی]

• چه هوای دل‌انگیزی! [تعجبی] • ای کاش نرفته بودی! [دعایی] • تو را من چشم در راهم [عاطفی]

• حدس‌های ریاضی که هنوز درستی آن‌ها اثبات یا رد نشده است، گزاره محسوب می‌شوند.

• هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت. [حدس گلدباخ]

• بی‌نهایت عدد اول مانند p وجود دارد که $p+2$ هم اول باشد.

• جمله‌های خبری که نتوانیم ارزش آن‌ها را تعیین کنیم، گزاره محسوب نمی‌شوند.

• درس ریاضی از فیزیک آسان‌تر است. • عربی دشوارترین درس است.

• کتک‌ور امسال خیلی مفهومی بود. • روزه قد بلند است.

• کدام یک از گزینه‌های زیر یک گزاره است؟

(۱) قد علی از رضا بلندتر است. (۲) علی قد بلند است.

(۳) علی از رضا خوشگل‌تر است. (۴) علی خوشگل است.

۱. گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ همگی به سلیقه افراد مرتبط هستند و تنها گزینه ۱ یک جمله خبری با ارزش درست یا نادرست است.

هر گزاره همواره دارای یکی از دو ارزش **درست** یا **نادرست** است. بنابراین اگر دو گزاره مانند p و q را در نظر بگیرید،

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

آن‌گاه برای ارزش آن‌ها می‌توان یک جدول به شکل مقابل تشکیل داد که دارای ۴ حالت است.

اگر ارزش یک گزاره همواره درست باشد آن را با **T** و اگر ارزش آن همواره نادرست باشد با **F** نشان می‌دهند. [این

دو حرف، حروف اول کلمات **True** و **False** هستند.]

به‌طور کلی اگر n گزاره داشته باشیم، جدول ارزش آن‌ها دارای 2^n سطر است.

• اگر از میان تعدادی گزاره، یک گزاره را حذف کنیم از تعداد سطرهای جدول ارزش گزاره‌ها ۸ سطر کم می‌شود، تعداد گزاره‌های اولیه کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۶

۳. فرض کنیم تعداد گزاره‌ها در ابتدا برابر n باشد، در این صورت جدول ارزش آن‌ها دارای 2^n سطر خواهد بود و در نتیجه:

$$2^n - 8 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^n - 2^{n-1} = 8 \Rightarrow 2^{n-1} \times (2 - 1) = 8 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^3 \Rightarrow n - 1 = 3 \Rightarrow n = 4$$

• در جدول ارزش گزاره‌های p, q, r, s چند بار حرف «ن» به معنای نادرست نوشته می‌شود؟

(۱) ۱۶ (۲) ۸ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

۳. در جدول ارزش گزاره، 2^n سطر و n ستون وجود دارد. یعنی در مجموع $n \times 2^n$ بار حرف «ن» و «د» نوشته می‌شود که از این تعداد نصفی حرف «ن» و نصفی دیگر حرف «د» هستند، بنابراین تعداد «ن»‌ها برابر با $n \times 2^{n-1}$ است که در اینجا $n = 4$ است، بنابراین جواب $4 \times 2^3 = 32$ است.

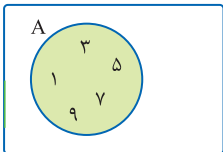


۲

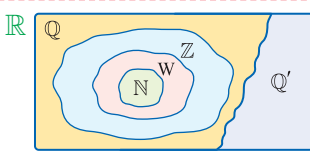
جدول ارزش گزاره‌ها

جزوه
طالین

🍎 مجموعه را دسته‌ای از اشیای متمایز و خوش تعریف در نظر می‌گیرند. [خوش تعریف به معنی آن است که بدون تردید و به یقین بتوان گفت که شیء معینی در مجموعه هست یا نه].
 🍌 دانش‌آموزان پایه یازدهم تهران مجموعه است. 🍌 دانش‌آموزان قذبلند تهران مجموعه نیست. چون قذبلند خوش تعریف نیست.

انواع نمایش مجموعه‌ها		
نمایش با اعضا	نمایش با نماد ریاضی	نمایش هندسی
اعضای مجموعه را به صورت مرتب یا نامرتب درون یک جفت آکولاد نمایش می‌دهیم.	به جای نوشتن اعضا، ویژگی مشترک بین آن‌ها را می‌نویسیم.	اعضای مجموعه را درون یک خم بسته در صفحه مانند مستطیل، دایره و ... قرار می‌دهیم که به آن نمودار ون گفته می‌شود.
$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$	$A = \{2k-1 : k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 5\}$	

🍌 ترتیب اعضا در مجموعه اهمیتی ندارد. یعنی جابه‌جایی اعضا مجموعه را تغییر نمی‌دهند.
 🍌 عضوهای تکراری در مجموعه شمرده نمی‌شوند.

مجموعه‌های مهم اعداد			
اعداد گویا	$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$		اعداد طبیعی
اعداد گنگ	$\mathbb{Q}' = \{x x \notin \mathbb{Q}\}$		اعداد حسابی
اعداد حقیقی	$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$		اعداد صحیح
🍌 مجموعه اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهند و شامل همه اعداد گویا و گنگ است، بنابراین روابط زیر برقرار است: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$ $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$			

🍌 مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن با شمردن به دست آید، مجموعه متناهی نام دارد؛ حتی اگر شمردن تعداد اعضای آن سخت و زمان‌گیر باشد. به بیان دیگر تعداد اعضای مجموعه متناهی، عددی حسابی است.
 🍌 مجموعه اعداد طبیعی زوج یک رقمی به صورت $\{2, 4, 6, 8\}$ است که یک مجموعه متناهی است.

🍌 مجموعه‌ای که متناهی نباشد، یعنی تعداد اعضای آن حتی با صرف زمان خیلی زیاد و امکانات کافی هم قابل شمردن نباشد، مجموعه نامتناهی نام دارد. در واقع تعداد اعضای مجموعه نامتناهی، با یک عدد حسابی قابل بیان نیست و از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است.
 🍌 مضارب طبیعی عدد ۵، به صورت $\{5, 10, 15, \dots\}$ است که یک مجموعه نامتناهی است.

🍌 اگر $n \in \mathbb{N}$ و $2^m \leq 2n$ ، $A_n = \{m \in \mathbb{Z} : m > -n, 2^m \leq 2n\}$ باشد، مجموعه $(A_n - A_f) \cup A_f$ چند عضو دارد؟

🍌 ابتدا A_n, A_f, A_g را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$A_f = \{m \in \mathbb{Z} | m > -4, 2^m \leq 8\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$A_g = \{m \in \mathbb{Z} | m > -8, 2^m \leq 16\} = \{-7, -6, -5, \dots, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\Rightarrow (A_n - A_f) \cup A_f = \{-7, -6, -5, -4, 4\} \cup \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} = \{-7, -6, -5, -4, 0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \text{عضو ۷}$$



جَزوه
طالابین

$$\emptyset = \{x | x \neq x\}$$

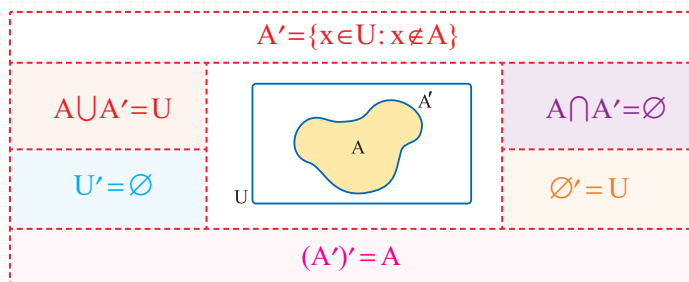
مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعه تهی نامیده می‌شود و با نماد $\emptyset$ یا $\{\}$ نشان داده می‌شود.

$$\{\emptyset\} = \{\{\}\}$$

مجموعه $\{\emptyset\}$ یک مجموعه تک‌عضوی است و با مجموعه $\emptyset$ متفاوت است.

هر مجموعه معمولاً به صورت $A = \{x: x \in U, x \text{ شرطی درباره } x\}$ معرفی می‌شود. به مجموعه U که x ها از درون آن انتخاب می‌شوند، مجموعه مرجع گفته می‌شود.

فرض کنید A مجموعه‌ای با مرجع U باشد، متمم مجموعه A برابر با اعضای U است که متعلق به مجموعه A نباشد. متمم A را با A' نشان می‌دهند.



اگر مجموعه مرجع، اعداد طبیعی یک رقمی باشد، آنگاه متمم $A = \{x \in \mathbb{N}: 2^x < x^2 + 1\}$ چند عضوی است؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

$$A = \{x \in \mathbb{N}: 2^x < x^2 + 1\} = \{2, 3, 4\} \Rightarrow A' = \{1, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

ابتدا اعضای A را مشخص می‌کنیم:



نماد $\in$ به معنی تعلق داشتن و عضو بودن می‌باشد. وقتی می‌نویسیم $a \in A$ باید خود a عیناً درون مجموعه باشد.

$$A = \{a, \{b\}\} \Rightarrow a \in A, \{b\} \in A, \{a\} \notin A, b \notin A$$

نماد $\subseteq$ به معنی زیرمجموعه است. مجموعه A را زیرمجموعه B می‌نامند، هرگاه هر عضو دلخواه از مجموعه A درون مجموعه B باشد.

در این صورت می‌نویسیم: $A \subseteq B$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

وقتی نوشته می‌شود $\{a, b, c, \dots\} \subseteq A$ باید با حذف آکولاد، تمام عضوهای درون آن یعنی $a, b, c, \dots$ و ... تک‌تک درون

$$A = \{a, \{b\}\} \Rightarrow \{a\} \subseteq A, \{b\} \not\subseteq A$$

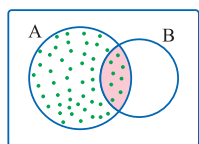
مجموعه A باشند.

چند قانون مقدماتی در زیرمجموعه

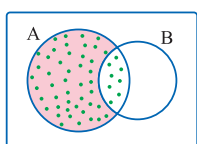
$$1 \emptyset \subseteq A$$

$$2 A \subseteq A$$

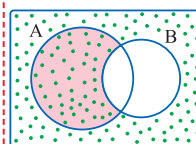
$$3 A \subseteq U$$



$$4 (A \cap B) \subseteq A$$



$$5 (A - B) \subseteq A$$



$$6 (A - B) \subseteq B'$$

اگر بدانیم $A \subseteq B$ است، هرکدام از موارد زیر برقرار است و برعکس از هر کدام از موارد زیر می‌توان نتیجه گرفت که $A \subseteq B$ است:

$$1 A \cup B = B$$

$$2 A \cap B = A$$

$$3 B' \subseteq A'$$

$$4 A - B = \emptyset$$

اگر $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, \{1, 2\}\}, C = \{\{1, 2, \{1, 2\}\}\}$ باشند، کدام بیان در مورد این مجموعه‌ها نادرست است؟

(خارج - ۹۷)

$$B \in C \text{ (۴)}$$

$$A \subseteq B \text{ (۳)}$$

$$A \in B \text{ (۲)}$$

$$B \subseteq C \text{ (۱)}$$

مجموعه B متعلق به مجموعه C است و زیرمجموعه آن نیست.

🍏 به پدیده‌ای که قبل از رخداد نتیجه‌اش معلوم نباشد، ولی مجموعه نتایج ممکن آن مشخص باشد، **آزمایش تصادفی** می‌گوییم.

♣️ پرتاب تاس، پرتاب سکه، انتخاب مهره از جعبه، تولد فرزندان و ... همگی آزمایش‌های تصادفی هستند.

🍏 به مجموعه همه نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، **فضای نمونه** آن آزمایش تصادفی می‌گویند و آن را با **S** نشان می‌دهند.

♣️ اگر یک وجه تاسی سفید و روی وجوه دیگر آن، اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ حک شده باشد، چون فضای نمونه، مجموعه همه نتایج ممکن است و «سفید آمدن» نیز یکی از این نتایج است، بنابراین فضای نمونه به صورت $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ سفید، می‌باشد که دارای ۵ عضو است.

🍏 فضای نمونه پرتاب **n** سکه، دارای $2^n = 2 \times 2 \times \dots \times 2$ عضو است [فضای نمونه تولد **n** فرزند نیز به همین صورت است].

♣️ $S = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, ر), (پ, ر, پ), (پ, ر, ر), (ر, پ, پ), (ر, پ, ر), (ر, ر, پ), (ر, ر, ر)\}$ فضای نمونه پرتاب سه سکه

🍏 فضای نمونه پرتاب **n** تاس، دارای $6^n = 6 \times 6 \times \dots \times 6$ عضو است.

♣️ $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), \dots, (6, 1), (6, 2), \dots, (6, 6)\}$ فضای نمونه پرتاب دو تاس

🍏 در جعبه‌ای که **مهره‌های رنگی** در آن وجود داشته باشد، چه مهره‌ها متمایز باشند و چه مشابه، برای حل مسئله‌های احتمال باید آن‌ها را **متمایز** فرض کنیم و بر این اساس تعداد عضوهای فضای نمونه را به دست آوریم.

♣️ اگر در جعبه‌ای **۳ مهره قرمز مشابه** و **۲ مهره آبی مشابه** وجود داشته باشد یک مهره به تصادف از ظرف خارج کنیم، فضای نمونه دارای ۵ عضو است.

$S = \{R_1, R_2, R_3, B_1, B_2\}$

♣️ در خانواده‌ای با ۳ فرزند، می‌دانیم فرزند اول و دوم دو قلو هستند، فضای نمونه جنسیت فرزندان خانواده چند عضو دارد؟

۳ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

♣️ دو قلو بودن فرزندان در جنسیت آن‌ها تأثیری ندارد. از طرفی جنسیت هر فرزند دو حالت دارد؛ بنابراین فضای نمونه جنسیت فرزندان این خانواده $2^3 = 8$ عضو دارد.

🍏 هر زیرمجموعه از فضای نمونه را یک **پیشامد** و هر یک از اعضای یک پیشامد را **برآمد** می‌نامند. پیشامدها را معمولاً با $A, B, C, \dots$ نشان می‌دهند.

♣️ در پرتاب یک تاس، پیشامد مضرب ۳ آمدن به صورت $A = \{3, 6\}$ و در پرتاب سه سکه، پیشامد «دقیقاً دو بار رو» آمدن مجموعه‌ای ۳ عضوی به صورت $A = \{(ر, ر, پ), (ر, پ, ر), (پ, ر, ر)\}$ است.

🍏 در هر فضای نمونه مانند S ، خود S پیشامد **قطعی** و $\emptyset$ را پیشامد **غیرممکن** می‌نامند.

🍏 اگر فضای نمونه دارای n عضو باشد برای آن می‌توان 2^n پیشامد در نظر گرفت، چون هر عضو از فضای نمونه می‌تواند در پیشامد حضور داشته باشد یا نه.

(To be OR not to be...)

♣️ دو سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. چند پیشامد ناتهی در این آزمایش تصادفی ممکن است به وجود آید؟

۱۵ (۲)

۱۶ (۱)

۳ (۴)

۴ (۳)

♣️ هر پیشامد زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه است. از طرفی فضای نمونه پرتاب دو سکه به صورت $S = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر), (پ, پ)\}$ است. حال این مجموعه ۴ عضوی دارای 2^4 زیر مجموعه است که یکی از آن‌ها تهی است. بنابراین ۱۵ **زیر مجموعه ناتهی** دارد، که هر کدام یک پیشامد محسوب می‌شود.



جزوه
طالبان



۴۳

مفهوم رخداد پیشامد

🍎 هنگامی می‌گوییم یک پیشامد رخ داده است که نتیجه آزمایش، یکی از عضوهای آن پیشامد باشد [یعنی بعد از انجام آزمایش، یکی از اعضای آن پیشامد دیده شود].

♣️ وقتی گفته می‌شود در پرتاب یک تاس پیشامد زوج بودن رخ داده است، یعنی بعد از پرتاب تاس یا ۲ آمده یا ۴ آمده یا ۶ آمده است.

🍎 هرگز امکان ندارد دو برآمد مختلف از یک فضای نمونه با هم دیده شوند. اما امکان رخ دادن دو پیشامد مختلف با هم وجود دارد.

♣️ امکان ندارد در پرتاب یک تاس برآمد ۲ و برآمد ۴ با هم رخ دهند، اما ممکن است پیشامد زوج آمدن و پیشامد عدد اول آمدن با هم رخ دهند و آن هم زمانی است که ۲ بیاید.

♣️ اگر $S = \{a, 1, b, 5\}$ یک فضای نمونه‌ای و $A = \{b, 1\}$ یک پیشامد و نتیجه آزمایش b باشد، آنگاه:

(۱) A رخ داده است. (۲) A رخ نداده است.

(۳) $\{b\}$ یک پیشامد مطمئن است. (۴) $\{1\}$ یک پیشامد ناممکن است.

📌 چون یکی از اعضای پیشامد A به عنوان نتیجه آزمایش رو شده است بنابراین A رخ داده است.



۴۴

پیشامد پرتاب چند سکه

🍎 در مسائل مربوط به پیشامدها در پرتاب چند سکه معمولاً با سه تیپ مسئله ممکن است مواجه شویم:

📌 در پرتاب چند سکه [یا تولد چند فرزند در یک خانواده] اگر وضعیت بعضی از پرتاب‌ها [جنسیت بعضی از فرزندان] را معلوم کنند، تعداد حالات آن‌ها را برابر ۱ در نظر می‌گیریم و سایر پرتاب‌ها [سایر فرزندان] همچنان ۲ حالت خواهند داشت، سپس طبق اصل ضرب تعداد عضوهای پیشامد را پیدا می‌کنیم.

♣️ در خانواده‌ای با ۵ فرزند، پیشامد A که در آن «فرزند بزرگ‌تر، پسر و فرزند کوچک‌تر، دختر باشد»، چند عضو دارد؟

📌 فرزند بزرگ و فرزند کوچک هر کدام یک حالت دارند و بقیه فرزندان هر کدام دو حالت دارند؛ بنابراین تعداد اعضای این پیشامد برابر است با:

$$n(A) = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 8$$

📌 در پرتاب چند سکه [تولد چند فرزند] اگر صحبت از تعداد «رو»ها و «پشت»ها [تعداد پسرها و دخترها] به میان آمده بود، از «انتخاب» استفاده می‌کنیم.

♣️ در یک خانواده چهار فرزندی هر یک از پیشامدهای زیر چند عضو دارد؟

• پیشامد دقیقاً سه فرزند پسر $n(A) = \binom{4}{3} = 4$ • پیشامد دقیقاً یک فرزند دختر $n(B) = \binom{4}{1} = 4$

• پیشامد حداقل سه فرزند پسر $n(C) = \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 5$ • پیشامد حداکثر دو فرزند دختر $n(D) = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 11$

📌 در بعضی موارد در پرتاب سکه یا تولد فرزندان مجبور به نوشتن تمام حالات ممکن برای پیشامد خواسته شده هستیم؛ در این حالت باید دقت کرد که ترتیب دارای اهمیت است.

♣️ در پرتاب ۵ سکه، پیشامد «یک در میان پشت و رو» چند عضو دارد؟

$$n(A) = 2 \quad A = \{(ر, پ, ر, پ, ر), (پ, ر, پ, ر, پ), (ر, پ, ر, پ, ر), (پ, ر, پ, ر, پ)\}$$

♣️ در یک خانواده ۶ فرزند، تعداد عضوهای پیشامد A که «خانواده دارای ۳ دختر بوده ولی بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین فرزندان خانواده پسر باشد»، چند عضو دارد؟

$$\begin{array}{ll} ۱۶ (۱) & ۸ (۲) \\ ۴ (۳) & ۱۲ (۴) \end{array}$$

📌 بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین فرزندان که پسر هستند ۱ حالت دارند بنابراین آن‌ها را کنار می‌گذاریم، اکنون حالتی پیش می‌آید که انگار در یک خانواده با

۴ فرزند می‌خواهیم ۳ دختر داشته باشیم که تعداد حالات برابر است با:

$$n(A) = \binom{4}{3} = 4$$



چیزهای جالب

علم آمار در پی شناخت جامعه نامعلوم با استفاده از نمونه‌های جمع‌آوری شده معلوم است.

پدیده‌هایی که با «شمارش» و «تعداد» سروکار دارند، مربوط به علم آمار هستند.

علم احتمال در پی بررسی یک نمونه نامعلوم از یک جامعه معلوم است و به نوعی در جهت عکس علم آمار است.

پدیده‌هایی که می‌خواهیم «امکان» و «شانس» آن‌ها را بررسی کنیم، مربوط به علم احتمال هستند.

کدام یک از موارد زیر مربوط به علم احتمال است؟

- میزان بارش باران در سال گذشته
- تعداد رأی دهندگان در انتخابات مجلس نمایندگان طی دهه‌های پیش
- درصد رشد نرخ تورم طی یک دوره ریاست جمهوری
- امکان افزایش دست‌مزد و حقوق در سال آینده

گزینه‌های ۱، ۲، ۳ همگی با شمارش و تعداد سروکار دارند، پس به علم آمار مربوط هستند. اما در گزینه ۴ صحبت از امکان است که به علم احتمال مربوط است.

کدام یک از موارد زیر مربوط به علم آمار است؟

- امکان بازگشت سرمایه شرکت بعد از تبلیغات
- شانس درمان ۵ نفر از گروهی که ۳۰ درصد آن‌ها به بیماری مبتلا هستند.
- امکان افزایش قیمت دلار در فصل تابستان
- تعداد کارخانه‌هایی که در اثر افزایش قیمت دلار ورشکست شده‌اند.

گزینه‌های ۱، ۲، ۳ همگی امکان و شانس را بیان می‌کنند، پس به علم احتمال مربوط هستند. اما در گزینه ۴ صحبت از تعداد است که به علم آمار مربوط است.

اگر یک آزمایش تصادفی از دو آزمایش مجزا با فضای نمونه S_1 و S_2 تشکیل شده باشد و این دو آزمایش توأم با هم انجام شود یا یکی پس از دیگری انجام شود، فضای نمونه این آزمایش مرکب، برابر با ضرب دکارتی دو فضای نمونه اولیه است.

$$S = S_1 \times S_2$$

• فضای نمونه پرتاب یک سکه $S = \{ر, پ\}$ است. حال اگر دو سکه را با هم پرتاب کنیم، فضای نمونه به صورت زیر خواهد بود:

$$S = S_1 \times S_2 = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر), (پ, پ)\}$$

• یک راننده ون خطی در ایستگاه منتظر مسافر می‌ماند تا حداکثر ۸ مسافر سوار کند. البته ممکن است با حداقل ۳ مسافر هم حرکت کند. در مسیر برگشت با کمتر از ۵ مسافر برنمی‌گردد. فضای نمونه برای توصیف چنین پدیده‌ای اگر فقط تعداد مسافرها برای ما مهم باشد، چند عضو دارد؟

$$۲۰ (۱)$$

$$۱۶ (۴)$$

$$۲۴ (۳)$$

$$۱۸ (۲)$$

تعداد مسافرها در مسیریافت یکی از اعداد مجموعه $S_1 = \{۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$ و تعداد مسافرها در مسیر برگشت یکی از اعداد مجموعه $S_2 = \{۵, ۶, ۷, ۸\}$ است. بنابراین تعداد عضوهای فضای نمونه برابر است با:

$$n(S) = n(S_1) \times n(S_2) = ۶ \times ۴ = ۲۴$$



۶۶

اولین پیروزی در آزمایش n ام و k پیروزی در n آزمایش

🍊 آزمایش‌های تصادفی دو حالتی مانند پرتاب سکه، تولد بچه و ... را **امتحان** می‌نامیم. در هر امتحان، پیشامدی که مطلوب ماست **پیروزی** و آن چیزی که مطلوب ما نیست و مسأله آن را نمی‌خواهد، **شکست** نامیده می‌شود. این مسائل معمولاً دو تیپ عمده دارند:

1 اگر یک امتحان را پی‌درپی تکرار کنیم تا **اولین پیروزی در آزمایش n ام** حاصل شود، بدان معنی است که $n-1$ آزمایش اولیه، همگی با شکست مواجه شده است و در آزمایش n ام اولین پیروزی حاصل شده است. بنابراین احتمال آن برابر است با: p احتمال پیروزی در یک آزمایش و q احتمال شکست در یک آزمایش است]

$$\text{اولین پیروزی در آزمایش } n \text{ ام} = (\underbrace{q \times q \times \dots \times q}_{n-1 \text{ بار شکست}}) \times \underbrace{p}_{\text{پیروزی}} = q^{n-1} \times p$$

🍷 وقتی می‌گوییم تاسی را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار در پرتاب پنجم عدد «۲» بیاید، یعنی ۴ بار اول نباید «۲» بیاید و بار پنجم باید «۲» بیاید:

$$P = \left(\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \right) \times \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6} \right)^4 \left(\frac{1}{6} \right)$$

شکست ۴ پیروزی

🍏 فضاهای نمونه بیش از دو عضوی را نیز می‌توان امتحان تلقی کرد، مثلاً در پرتاب تاس اگر «۲ آمدن» مطلوب است، «۲ آمدن» پیروزی و «۲ نیامدن» شکست محسوب می‌شود.

2 اگر یک آزمایش تصادفی دو حالتی که احتمال پیروزی آن p و احتمال شکست آن q است را n بار تکرار کنیم و بخواهیم k بار پیروز شویم، باید احتمال k پیروزی در آزمایش‌های اول و $n-k$ شکست در آزمایش‌های بعدی را حساب کنیم و جواب را در جایگشت این شکست‌ها و پیروزی‌ها ضرب کنیم، چون جای شکست‌ها و پیروزی‌ها مهم نیست و فقط تعداد آن‌ها اهمیت دارد:

$$\text{احتمال } k \text{ پیروزی در } n \text{ آزمایش} = \underbrace{p \times p \times \dots \times p}_k \times \underbrace{q \times q \times \dots \times q}_{n-k} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

k بار پیروزی n-k بار شکست

♣ در یک بیمارستان شانس موفقیت در یک عمل جراحی $\frac{4}{5}$ است. اگر این عمل جراحی روی ۶ نفر انجام شود احتمال آن که فقط یک عمل با شکست همراه باشد چقدر است؟

📌 اگر احتمال موفقیت در عمل برابر با $p = \frac{4}{5}$ باشد آنگاه احتمال شکست برابر با $q = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ است. از طرفی دیگر یک شکست در ۶ عمل متناظر با ۵ موفقیت است و با توجه به فرمول فوق، احتمال مطلوب به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{6!}{5!1!} = \binom{6}{5} \left(\frac{4}{5} \right)^5 \left(\frac{1}{5} \right)$$

♣ دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار، هر دو زوج بیایند، با کدام احتمال حداکثر در ۳ پرتاب نتیجه حاصل می‌شود؟ (داخل - ۹۱)

$$\begin{array}{llll} \frac{27}{64} \text{ (۱)} & \frac{37}{64} \text{ (۲)} & \frac{19}{32} \text{ (۳)} & \frac{39}{64} \text{ (۴)} \end{array}$$

2 می‌دانیم در پرتاب دو تاس، احتمال این که هر دو عدد رو شده زوج باشد برابر $\frac{1}{4} = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6}$ است. بنابراین حداکثر در ۳ پرتاب نتیجه حاصل شود یعنی یا بار اول هر دو زوج بیاید یا بار اول نیاید و بار دوم بیاید یا بار اول و دوم نیاید و بار سوم بیاید:

$$P(A) = \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \right) = \frac{16+12+9}{64} = \frac{37}{64}$$

♣ تاسی را سه بار پرتاب می‌کنیم، احتمال آن که دو بار عدد بزرگتر از ۴ حاصل شود، کدام است؟

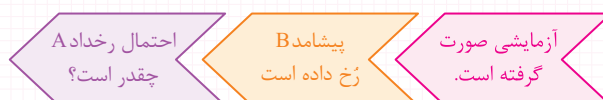
$$\begin{array}{llll} \frac{1}{72} \text{ (۱)} & \frac{1}{9} \text{ (۲)} & \frac{1}{36} \text{ (۳)} & \frac{2}{9} \text{ (۴)} \end{array}$$

4 چون قرار است دو بار از سه بار موفق شویم جایگشت پیروزی‌ها و شکست‌ها را نیز باید در نظر گرفت:

$$P = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3!}{2!1!} = \frac{2}{9}$$

جزئی
حالا

در بعضی از مسائل احتمال که به **احتمال شرطی** مشهور است، جمله‌ای گفته می‌شود که قسمتی از فضای نمونه را **افشا** می‌کند. در این موارد قسمت‌هایی از فضای نمونه را که پوچ شده است از فضای نمونه کنار می‌گذاریم و فضای نمونه را کوچک می‌کنیم و احتمال خواسته شده را روی این فضای نمونه کوچک‌تر به دست می‌آوریم. بنابراین ساختار کلی احتمال‌های شرطی به صورت زیر است:



بنابراین برای حل این مدل از مسائل احتمال، می‌توانیم به ترتیب زیر عمل کنیم:

۱ فضای نمونه اصلی را در نظر می‌گیریم. ۲ با توجه به شرط یا اطلاعی که از نتیجه آزمایش به ما داده شده، فضای نمونه جدیدی (پیشامد B) ایجاد می‌کنیم. به این فضای نمونه جدید، «**فضای نمونه محدود شده**» یا «**فضای نمونه کاهش یافته**» می‌گویند. ۳ احتمال پیشامد مطلوب (پیشامد A) را در فضای نمونه جدید حساب می‌کنیم.

ساختار کلی جملاتی که در احتمال‌های شرطی به کار می‌روند

۱ اگر ... احتمال آن که ... ؟	۵ مشاهده شده ... احتمال آن که ... ؟
۲ می‌دانیم ... احتمال آن که ... ؟	۶ دیدیم ... احتمال آن که ... ؟
۳ مشروط بر آن که ... احتمال آن که ... ؟	۷ در صورتی که ... احتمال آن که ... ؟
۴ ملاحظه شده است که ... احتمال آن که ... ؟	۸ به شرط آن که ... احتمال آن که ... ؟

در برخی از مسائل در احتمال‌های شرطی ممکن است طراح از به کار بردن واژه‌هایی مانند «اگر، می‌دانیم، در صورتی که بدانیم، مشروط بر آن که و ...» خودداری کند و آن‌ها را در مفهوم مسئله پنهان کند؛ یعنی خیلی ریلکس و عادی خبری را اعلام می‌کند که به وسیله آن قسمتی از فضای نمونه افشا می‌شود. سپس بلافاصله بعد از آن سؤالی مطرح می‌کند. این مسئله‌ها کمی فنی‌تر و دقیق‌تر از حالت قبل هستند و باید خوب به جمله‌بندی این گونه مسائل دقت کنید.

تاسی را پرتاب کردیم مضرب ۳ نیامده است احتمال آمدن عدد اول کدام است؟
خبری که ریلکس و عادی اعلام شد. احتمال خواسته شده

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow S_{\text{new}} = \{1, 2, 4, 5\} \Rightarrow A = \{2, 5\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

❖ در کیسه‌ای ۲ مهره قرمز، ۳ مهره سفید و ۴ مهره سبز هست. یک مهره به تصادف از این کیسه برمی‌داریم. اگر این مهره قرمز نباشد احتمال آن که سفید باشد چقدر است؟

$$\frac{1}{7} \quad (1) \quad \frac{3}{9} \quad (2) \quad \frac{3}{7} \quad (3) \quad \frac{1}{4} \quad (4)$$

❖ چون می‌دانیم این مهره قرمز نیست، پس مهره انتخابی از میان ۳ مهره سفید و ۴ مهره سبز است. بنابراین فضای نمونه جدید دارای ۷ عضو بوده و احتمال خارج شدن مهره سفید در این فضای نمونه برابر با $P(A) = \frac{3}{7}$ است.

❖ یک تاس همگن را انداختیم، برآمد حاصل مضرب ۳ نیست. احتمال آن که شماره ظاهر شده ۲ باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{6} \quad (1) \quad \frac{1}{5} \quad (2) \quad \frac{1}{4} \quad (3) \quad \frac{1}{3} \quad (4)$$

$$S_{\text{new}} = \{1, 2, 4, 5\}, A = \{2\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

❖ برآمد حاصل مضرب ۳ نیست، پس ۳ و ۶ را از فضای نمونه کنار می‌گذاریم:



🍏 دو پیشامد را **مستقل** می‌گویند هرگاه آگاهی از رخ دادن یکی از آن‌ها، احتمال رخ دادن دیگری را تغییر ندهد؛ یعنی اگر از رخ دادن یکی از پیشامدها خبردار شویم احتمال رخ دادن پیشامد دیگر، برای ما تغییر نکند. به عبارت دیگر:

$$P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow A \text{ و } B \text{ مستقل اند}$$

بیان ساده این حرف آن است که دو پیشامد وقتی مستقل اند که روی هم تأثیری نداشته باشند.

🍇 می‌دانیم که شانس دختر بودن (یا پسر بودن) یک فرزند برابر با $\frac{1}{2}$ است. حالا خانواده‌ای را فرض کنید که دو فرزند دختر دارد. اگر این خانواده در انتظار تولد فرزند دیگری باشد احتمال آن که این فرزند نیز دختر (یا پسر) باشد همچنان برابر $\frac{1}{2}$ است. یعنی آگاهی از جنسیت فرزندان اول و دوم، شانس دختر بودن (یا پسر بودن) فرزند سوم را تغییر نمی‌دهد بنابراین این پیشامدها نسبت به هم مستقل هستند.

🍏 اگر A و B دو پیشامد ناتهی باشند آنگاه A و B در صورتی مستقل اند که احتمال اشتراک آن‌ها برابر با حاصل ضرب احتمال آن‌ها باشد:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow A \text{ و } B \text{ مستقل اند}$$

🍏 اگر دو پیشامد مستقل نباشند آن‌ها را **وابسته** می‌نامند. اگر دو پیشامد وابسته باشند رابطه فوق بین آن‌ها برقرار نیست.

🍇 اگر $P(A) = \frac{3}{5}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ و A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه احتمال آن که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد چقدر است؟

📦 چون A و B مستقل اند بنابراین $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ است و در نتیجه احتمال اجتماع آن‌ها برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{3} - \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{9+5}{15} - \frac{3}{15} = \frac{11}{15}$$

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، متمم هر کدام نسبت به دیگری و همچنین متمم‌های آن‌ها نیز مستقل اند

$A' \text{ و } B' \text{ مستقل اند.}$	$A' \text{ و } B \text{ مستقل اند.}$	$A \text{ و } B' \text{ مستقل اند.}$
$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')$	$P(A' \cap B) = P(A') \times P(B)$	$P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$

🍇 پیشامد «۶» آمدن در پرتاب یک تاس به «رو» آمدن در پرتاب سکه هیچ ربطی ندارد و مستقل از هم محسوب می‌شوند، «۶» نیامدن در پرتاب تاس هم به «رو» آمدن سکه ربطی ندارد و مستقل محسوب می‌شود و ...

🍇 A و B دو پیشامد مستقل اند به طوری که $P(A) = \frac{2}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{8}$ احتمال آن که فقط B رخ دهد را حساب کنید.

📦 A و B مستقل اند پس A و B' نیز مستقل اند. بنابراین:

🍇 احتمال موفقیت فردی، در یک آزمون مستقل، دو برابر احتمال موفقیت دوست وی است. احتمال موفقیت لااقل یکی از آن دو، $\frac{7}{9}$ است. احتمال موفقیت این فرد کدام است؟

(خارج - ۹۸)

$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{2}{3}$$

📦 احتمال موفقیت شخص A دو برابر B است. اگر $P(B) = x$ فرض شود، $P(A) = 2x$ خواهد شد و داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \Rightarrow \frac{7}{9} = 2x + x - (2x)(x) \Rightarrow 2x^2 - 3x + \frac{7}{9} = 0 \Rightarrow 18x^2 - 27x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{27 \pm 15}{2 \times 18} \Rightarrow x = \frac{7}{6}, \frac{1}{3}$$

$\Delta = 27^2 - 4 \times 18 \times 7 = 225$

بنابراین $P(B) = \frac{1}{3}$ بوده و در نتیجه احتمال موفقیت A برابر $\frac{2}{3}$ است.



چیزهای
عجایب



۹۳

استقلال پرتابها

🍎 پرتاب دو تاس و به طور کلی پرتاب چند تاس مستقل از هم است و اگر چند تاس را پرتاب کنیم و سؤال درباره سرنوشت تک تک آن‌ها به طور جداگانه مطرح شده باشد، کافی است احتمال هر کدام را حساب کنیم و حاصل‌ها را در هم ضرب کنیم.

🍏 پرتاب دو سکه و به طور کلی پرتاب چند سکه مستقل از هم است و اگر چند سکه را پرتاب کنیم و سؤال درباره سرنوشت هر کدام از آن‌ها به طور جداگانه مطرح شده باشد، هر کدام از احتمال‌ها را جداگانه حساب می‌کنیم و حاصل احتمال‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

🍌 در این نوع احتمال‌های مستقل، اگر درباره سرنوشت یک یا چند سکه (یا تاس) سؤال نشد [یعنی هر چه پیش آید، خوش آید!!] احتمال آن را برابریک فرض می‌کنیم. 🍌 یک تاس را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم احتمال آن‌که در پرتاب سوم عدد ۵ و در پرتاب هشتم عدد ۶ رو شود برابر با $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ است به عبارت دیگر وقتی درباره پرتاب‌های دیگر چیزی پرسیده نشده آن‌ها را نادیده می‌گیریم یعنی در محاسبه، احتمال آن‌ها را برابر یک فرض می‌کنیم.

🍌 دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، با کدام احتمال هر دو سکه «رو» یا تاس ۶ ظاهر می‌شود؟ (داخل - ۹۶)

$$\begin{array}{cccc} \frac{3}{8} & (1) & \frac{5}{8} & (2) \\ \frac{4}{12} & (3) & \frac{7}{12} & (4) \end{array}$$

🍌 پیشامد «ظاهر شدن دو رو» در پرتاب دو سکه و «ظاهر شدن عدد ۶» در تاس، مستقل اند، بنابراین احتمال اجتماع آن‌ها برابر است با:

$$P = P(\text{رو}) + P(\text{تاس ۶}) - P(\text{رو} \cap \text{تاس ۶}) \Rightarrow P = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{6+4-1}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$



۹۴

استقلال در جنسیت فرزندان

🍌 فرزندان یک خانواده از لحاظ جنسیت مستقل از هم هستند و اگر درباره پسر و دختر بودن فرزند اول، دوم، سوم و ... بخواهیم بحث کنیم، احتمال هر کدام را جداگانه حساب کرده و در هم ضرب می‌کنیم [البته در حالت عادی احتمال پسر بودن و دختر بودن هر کدام $\frac{1}{2}$ است].

🍌 خانواده‌ای هفت فرزند دارد. احتمال آن‌که سه فرزند اول این خانواده دختر باشند برابر است با:

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

🍌 اگر فرزندان دوقلو یا چندقلو هم باشند باز هم هیچ تفاوتی در اصل ماجرا نخواهد داشت. در واقع دوقلو بودن در فرزندان خانواده مثل این است که دو سکه را با هم پرتاب کنیم.

🍌 خانواده‌ای سه فرزند دارد که دو فرزند اول، دوقلو هستند. احتمال آن‌که دوقلوه‌ها هم جنس نباشند و فرزند سوم پسر باشد، چقدر است؟

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{8} & (1) & \frac{1}{4} & (2) \\ \frac{1}{2} & (3) & \frac{3}{8} & (4) \end{array}$$

🍌 دو قلو بودن فرزند اول و دوم تأثیری در روش محاسبه احتمال ندارد بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

$$P = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$



۹۵

استقلال در جعبه و مهره

🍌 انتخاب مهره از جعبه‌های مختلف پیشامدهایی مستقل از هم می‌باشند و اگر از هر کدام از جعبه‌ها جداگانه مهره انتخاب کنیم باید احتمال هر کدام از جعبه‌ها را برای خودش حساب کنیم و حاصل‌ها را در هم ضرب کنیم.

🍌 انتخاب چند مهره از یک جعبه وقتی مهره‌ها با جایگذاری انتخاب شوند، پیشامدهایی مستقل از هم است و هنگامی که سؤال درباره مهره اول و مهره دوم به طور جداگانه مطرح شده باشد، احتمال هر یک را حساب می‌کنیم و حاصل‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

🍌 جعبه‌ای دارای ۶ مهره با شماره‌های ۱ تا ۶ است. اگر دو مهره یکی پس از دیگری و با جایگذاری خارج کنیم، احتمال آن‌که بار اول مضرب ۳ و بار دوم فرد بیاید؟

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{6} & (1) & \frac{1}{3} & (2) \\ \frac{2}{9} & (3) & \frac{1}{9} & (4) \end{array}$$

🍌 چون مهره‌ها با جایگذاری خارج می‌شوند، برداشت اول و دوم مستقل از هم هستند:

$$P = \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

جزوه
طالبین

توصیف و نمایش داده‌ها

درس اول



ص ۷۴ تا ۸۳ کتاب آمار و ...



۱۰۰

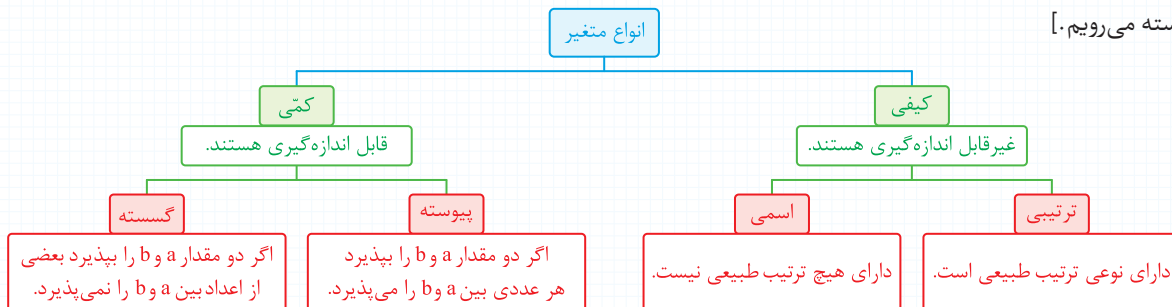
اصطلاحات اولیه

مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات، **آمار** نامیده می‌شود. **علم آمار** مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی است. به عبارت دیگر مراحل علم آمار به صورت زیر است:



واقعیت‌هایی درباره یک شیء یا فرد که در محاسبه، برنامه‌ریزی و پیش‌بینی به کار می‌روند، **داده** نام دارد. هر ویژگی از اشیاء یا افراد که در اعضای جامعه یکسان نیستند و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کنند، **متغیر** نامیده می‌شود. عددی که به آن ویژگی یک عضو از جامعه، نسبت داده می‌شود **مقدار متغیر** یا به اصطلاح **مشاهده** می‌گویند. به مجموعه تمام افراد یا اشیایی که می‌خواهیم در مورد آن‌ها داده‌ها را گردآوری کنیم، **جامعه آماری** گفته می‌شود و به تعداد اعضای یک جامعه آماری، **اندازه جامعه** می‌گوییم. به هر زیرمجموعه از جامعه آماری که به روشی مشخص انتخاب شده باشد، **نمونه** می‌گویند و به تعداد عضوهای یک نمونه، **اندازه نمونه** گفته می‌شود. می‌خواهیم وزن افراد یک کلاس ۲۰ نفره را بررسی کنیم. برای این منظور ۵ نفر از آن‌ها را به عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم و وزن آن‌ها را اندازه می‌گیریم. در این حالت «وزن دانش‌آموزان» یک **متغیر تصادفی** است زیرا از یک عضو به عضو دیگر می‌تواند تغییر کند. عدد وزن هر دانش‌آموز **مقدار متغیر** نام دارد. همچنین ۲۰ دانش‌آموز **جامعه آماری** و **اندازه جامعه** ۲۰ و ۵ دانش‌آموز **یک نمونه** است و **اندازه نمونه** ۵ است.

متغیرها را به دو دسته **کمی** و **کیفی** و هر کدام از آن‌ها را نیز به دو زیرگروه به صورت نمودار زیر می‌توان تقسیم کرد [برای حل تست‌های مربوط به انواع متغیر، اول به این فکر می‌کنیم که آیا قابل اندازه‌گیری است یا نه؟ تا نوع کیفی و کمی معلوم شود. سپس به سراغ زیرگروه‌های آن دسته می‌رویم].



• وزن، قد، قطر تنه درختان، حجم آب، دما، میزان آلودگی هوا، فشار هوا، زمان، سن و ... نمونه‌هایی از متغیر **کمی پیوسته** هستند.

• تعداد طبقات ساختمان، درصد یک درس در کنکور، تعداد مسافران و ... نمونه‌هایی از متغیر **کمی گسسته** هستند.

• گروه خونی، رنگ چشم، ملیت، جنسیت، نوع آلودگی هوا، نژاد و ... نمونه‌هایی از متغیر **کیفی اسمی** هستند.

• مقام‌های یک ورزشکار، میزان لذت از آشپزی، مراحل رشد، مراحل تحصیل، درجه افسران و ... نمونه‌هایی از متغیر **کیفی ترتیبی** هستند.

متغیرهایی که فقط نوع آن‌ها معلوم است **کیفی** هستند. مانند **انواع گل‌های باغ/انواع حساب‌های بانکی/انواع مدارس و ...**

در صورتی که اعداد نسبت داده شده به متغیر قابل معدل‌گیری باشند، می‌توان گفت آن متغیر **کمی** است. اما اگر نتوان از اعداد معدل گرفت آن متغیر **کیفی** است. مانند **مقام‌های ورزشکاران/رتبه دانش‌آموزان و ...**

• نوع کدام یک از متغیرهای زیر با بقیه متفاوت است؟

- (۱) مراحل تحصیلی
- (۲) مراحل رشد
- (۳) وضعیت تأهل
- (۴) درجه سربازان

۳ گزینه‌های ۱، ۲، ۳ **کیفی ترتیبی** هستند و گزینه ۴ **کیفی اسمی** است.

جزوه
طالبین

🍏 اگر کلمه «میزان» در کنار کلماتی نظیر **رضایت**، **سختی**، **لذت**، **علاقه‌مندی** و ... بیاید، یک مفهوم کیفی دارد که می‌تواند کم، متوسط، زیاد یا خیلی زیاد و ... باشد، یعنی کیفی ترتیبی است.

🍏 اگر کلمه «میزان» در کنار کلماتی نظیر **بارش**، **مالیات**، **درآمد فروش** و ... بیاید دقیقاً مفهوم عددی دارد و یک متغیر کمی پیوسته است.

🍏 اگر کلمه «میزان» در کنار آلودگی هوا بیاید، در دنیای امروز مفهوم کمی دارد. چون امروزه ما می‌توانیم میزان آلودگی را اندازه بگیریم. اما شاید در گذشته که وسایل اندازه‌گیری وجود نداشت، می‌گفتیم میزان آلودگی بالاست یا پایین است، اما امروزه برحسب عدد بیان می‌شود.

میزان چه چیزهای کمی و میزان چه چیزهای کیفی است؟	
کمی پیوسته	کیفی ترتیبی
میزان بارش، مالیات، درآمد فروش، آلودگی هوا و ...	میزان رضایت، سختی، لذت، علاقه‌مندی و ...

❖ نوع کدام یک از متغیرهای زیر با بقیه متفاوت است؟

(۱) میزان لذت از آشپزی

(۲) میزان رضایت از شرکت بیمه

(۳) میزان علاقه‌مندی به کتاب‌خوانی

(۴) میزان درآمد شرکت نفت

📌 گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ **کیفی ترتیبی** هستند و گزینه ۴ **کمی پیوسته** است.

🍏 اگر برای بررسی یک متغیر خاص از یک جامعه آماری، داده‌هایی گردآوری شده باشد، آنگاه تعداد کل داده‌ها را با **n** نمایش می‌دهیم. در این صورت **سه نوع فراوانی** برای داده‌ها تعریف می‌شود:

❶ به تعداد دفعاتی که هر داده تکرار (مشاهده) می‌شود، **فراوانی** آن داده می‌گوییم و آن را با **f** نشان می‌دهیم.

❷ در یک کلاس با ۲۰ نفره، رنگ چشم ۱۰ نفر مشکی، ۵ نفر قهوه‌ای، ۳ نفر سبزی و ۲ نفر آبی باشد، در این صورت فراوانی رنگ چشم مشکی $f_1 = 10$ است.

❸ با تقسیم فراوانی هر داده یعنی **f** به تعداد کل داده‌ها یعنی **n**، **فراوانی نسبی** به دست می‌آید. فراوانی نسبی را معمولاً با **F** نشان می‌دهند که همواره عددی در بازه $[0, 1]$ است.

$$F = \frac{f}{n}$$

❹ در یک کلاس با ۲۰ دانش‌آموز اگر رنگ چشم ۱۰ نفر مشکی باشد، فراوانی نسبی کسانی که چشم مشکی دارند برابر $F = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ است.

❺ اگر فراوانی نسبی داده‌ها را در ۱۰۰ ضرب کنیم، **درصد داده‌ها** به دست می‌آید. درصد داده‌ها را معمولاً با **P** نشان می‌دهند و همواره داریم:

$$P = F \times 100 = \frac{f}{n} \times 100$$

رابطه انواع فراوانی		
رابطه درصد داده‌ها با هم	رابطه فراوانی‌های نسبی با هم	رابطه فراوانی‌ها با هم
$\sum P_i = P_1 + P_2 + \dots + P_k = 100$	$\sum F_i = F_1 + F_2 + \dots + F_k = 1$	$\sum f_i = f_1 + f_2 + \dots + f_k = n$
$P \xrightarrow{\div 100} F \xrightarrow{\times n} f$		$f \xrightarrow{\div n} F \xrightarrow{\times 100} P$

❖ فراوانی نسبی داده‌ای ۰/۴ است، اگر بدون تغییر در بقیه داده‌ها فراوانی این داده ۴ برابر شود، فراوانی نسبی آن اکنون کدام است؟

(۱) $\frac{4}{11}$ (۲) $\frac{4}{13}$ (۳) $\frac{1}{11}$ (۴) $\frac{4}{13}$

📌 اگر فراوانی این داده را با **f** و تعداد کل داده‌ها را با **n** نشان دهیم مقدار **f** برحسب **n** معلوم می‌شود:

$$F = \frac{f}{n} \Rightarrow 0.4 = \frac{f}{n} \Rightarrow f = 0.4n$$

حال اگر فراوانی این داده ۴ برابر شود، فراوانی در حالت جدید **۴f** شده و به تعداد کل داده‌ها نیز ۳ اضافه می‌شود. در نتیجه:

$$F_{\text{new}} = \frac{f_{\text{new}}}{n_{\text{new}}} = \frac{4f}{n+3f} = \frac{4(0.4n)}{n+3(0.4n)} = \frac{1.6}{2.2} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$$



جزوه
طالین

🍊 برای همه انواع متغیرها (کمی و کیفی) می‌توان جدول فراوانی به شکل‌های زیر رسم کرد:

جدول درصد داده‌ها	جدول فراوانی نسبی	جدول فراوانی
$\begin{matrix} X_k & \cdots & X_3 & X_2 & X_1 & X_i \\ P_k & \cdots & P_3 & P_2 & P_1 & P_i \end{matrix}$	$\begin{matrix} X_k & \cdots & X_3 & X_2 & X_1 & X_i \\ F_k & \cdots & F_3 & F_2 & F_1 & F_i \end{matrix}$	$\begin{matrix} X_k & \cdots & X_3 & X_2 & X_1 & X_i \\ f_k & \cdots & f_3 & f_2 & f_1 & f_i \end{matrix}$
$\sum P_i = 100$	$\sum F_i = 1$	$\sum f_i = n$

🍏 در متغیرهای تصادفی پیوسته به جای این‌که مقادیر مختلف متغیر تصادفی به صورت سطری مقابل آن قرار گیرد، به صورت ستونی زیر هم نوشته می‌شود. در این حالت می‌توان انواع فراوانی را به صورت ستونی در یک جدول نوشت. حتی می‌توان یک ستون هم برای شاخص‌های عددی در نظر گرفت که به رسم نمودارها کمک می‌کند.

نام متغیر تصادفی	شاخص عددی	فراوانی	فراوانی نسبی	درصد داده‌ها
حدود X_1 یا مقدار X_1	۱	f_1	F_1	P_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
حدود X_n یا مقدار X_n	n	f_n	F_n	P_n

❖ یک جفت تاس را ۵۰ بار پرتاب کرده‌ایم. اگر ۵ بار اعداد ظاهر شده برابر باشد، در چند حالت اختلاف آن‌ها مضرب ۳ است؟

۱۶ (۱)	۱۳ (۲)	اختلاف اعداد دو تاس	۵	۴	۳	۲	۱	۰
۱۴ (۳)	۱۲ (۴)	فراوانی نسبی	۰/۱۴	۰/۰۸	y	۰/۳	۰/۲	x

❖ وقتی گفته می‌شود اعداد ظاهر شده برابرند یعنی اختلاف آن‌ها صفر است بنابراین از روی فراوانی دسته اول مقدار X را می‌توان به دست آورد. چون مجموع فراوانی‌ها برابر ۵۰ است، پس:

$$F_i = \frac{f_i}{n} \Rightarrow x = \frac{5}{50} = 0.1$$

اکنون جمع فراوانی‌های نسبی را «۱» قرار می‌دهیم تا y به دست آید:

$$\sum F_i = 1 \Rightarrow 0.1 + 0.2 + 0.3 + y + 0.08 + 0.14 = 1 \Rightarrow y = 0.18$$

حال جمع فراوانی‌های نسبی حالتی که اختلاف اعداد رو شده مضرب ۳ (یعنی ۰ یا ۳) است برابر با $\sum F = 0.1 + 0.18 = 0.28$ است که از روی آن مقدار فراوانی قابل محاسبه است:

$$F = \frac{f}{n} \Rightarrow 0.28 = \frac{f}{50} \Rightarrow f = 14$$

❖ جدول زیر مربوط به فراوانی و درصد داده‌های شاخص کیفیت هوای تهران (AQI) در چند روز متوالی در سال ۹۵ است، کدام گزینه درست است؟

وضعیت هوا	شاخص کیفیت	فراوانی	درصد داده‌ها
پاک یا سالم	$0 \leq AQI \leq 100$	۷	۳۵
ناسالم	$100 < AQI \leq 200$	x	y
خطرناک	$200 < AQI \leq 300$	۳	z

$Z=15, Y=40, X=10$ (۱)
 $Z=20, Y=50, X=12$ (۲)
 $Z=15, Y=50, X=10$ (۳)
 $Z=20, Y=40, X=12$ (۴)

❖ با توجه به مشخص بودن فراوانی و فراوانی نسبی روزهایی که وضعیت هوا «پاک یا سالم» است، تعداد کل روزهای مورد بررسی برابر است با:

$$P_i = \frac{f_i}{n} \times 100 \Rightarrow 35 = \frac{7}{n} \times 100 \Rightarrow n = 20$$

$$7 + x + 3 = 20 \Rightarrow x = 10$$

$$P_i = \frac{f_i}{n} \times 100 = \frac{10}{20} \times 100 = 50 \Rightarrow y = 50$$

$$35 + 50 + z = 100 \Rightarrow z = 15$$

با معلوم شدن n می‌توان x را نیز به دست آورد:

با مشخص شدن مقدار x ، می‌توانیم درصد داده‌های هوای ناسالم یعنی y را محاسبه کنیم:

از طرفی جمع درصد داده‌ها همیشه ۱۰۰ است. بنابراین مقدار z هم به دست می‌آید:

بنابراین تنها گزینه ۴ درست است.



جزوه
طالبان



۱۱۵

تغییر داده‌ها و تأثیر آن بر میانه

🍏 اگر همه داده‌ها دچار تغییرات یکسانی شوند، میانه در ۳ حالت زیر برای داده‌های جدید قابل محاسبه است:

۱ اگر عددی به همه داده‌ها **اضافه** یا از همه داده‌ها **کم** شود، همان عدد عیناً به میانه اضافه و یا از آن کم خواهد شد.

🍌 اگر میانه a, b, c, d, e برابر ۷ باشد، میانه $a-3, b-3, \dots, e-3$ برابر $7-3=4$ خواهد بود.

۲ اگر عددی در همه داده‌ها **ضرب** یا همه داده‌ها بر آن **تقسیم** شود، همان عدد عیناً در میانه ضرب و یا تقسیم خواهد شد.

🍌 اگر میانه داده‌های a, b, c, d برابر ۲ باشد، میانه داده‌های $3a, 3b, 3c, 3d$ برابر $2 \times 3 = 6$ خواهد شد.

۳ اگر میانه داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر Q_p باشد، در این صورت میانه داده‌های $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ برابر $aQ_p + b$ خواهد شد.

🍌 اگر میانه داده‌های a, b, c, d برابر ۳ باشد، آنگاه میانه $2a-1, 2b-1, 2c-1, 2d-1$ برابر $2(3)-1=5$ خواهد بود.

🍏 اگر k داده کم‌تر از میانه و همان تعداد داده بزرگ‌تر از میانه به داده‌ها اضافه یا از میان داده‌ها حذف شود، **میانه تغییری نمی‌کند**.

🍌 اگر میانه داده‌های a, b, c, d, e, f برابر ۲۷ باشد، میانه داده‌های $2a-11, \dots, 2e-11, 2f-11$ کدام است؟

۴۳ (۱) ۴۲ (۲) ۴۴ (۳) ۴۵ (۴)

$$Q'_p = 2Q_p - 11 = 2 \times 27 - 11 = 43$$

۱



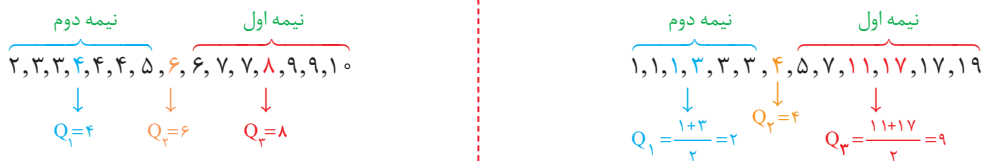
۱۱۶

محاسبه چارک‌ها



جزوه
طالبان

🍏 اگر در داده‌های کوچک‌تر از میانه مجدداً میانه را حساب کنیم، عدد حاصل را **چارک اول** می‌نامند و با Q_1 نشان می‌دهند. همچنین میانه داده‌های بزرگ‌تر از میانه را **چارک سوم** می‌نامند و با Q_3 نشان می‌دهند. **میانه**، خودش **چارک دوم** محسوب می‌شود.



🍌 برای پیدا کردن سریع‌تر چارک اول و سوم، اولین عدد زوج بعد از تعداد داده‌ها را بر ۴ تقسیم می‌کنیم. عدد به دست آمده، جایگاه Q_1 و Q_3 را از ابتدا و انتهای داده‌ها معلوم می‌کند.

🍌 اگر تعداد داده‌ها ۱۸ باشد، به عدد $\frac{18}{4} = 4.5$ می‌رسیم، یعنی داده پنجم از ابتدا Q_1 و داده پنجم از انتها Q_3 است.

🍌 اگر تعداد داده‌ها ۱۷ باشد، به عدد $\frac{17}{4} = 4.25$ می‌رسیم، یعنی میانگین داده‌های چهارم و پنجم، از ابتدا Q_1 و از انتها Q_3 را به ما می‌دهد.

🍏 اگر عدد زوج بعد از n بر ۴ بخش پذیر باشد، دو تا از داده‌ها Q_1 و Q_3 هستند ولی اگر این عدد مضرب ۴ نباشد، چارک اول و سوم جزء داده‌ها نیستند و از میانگین دو داده به دست می‌آیند.

🍌 نرخ بیکاری یک کشور در ۱۰ سال گذشته به صورت زیر است، مقدار $\frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}$ کدام است؟

(داخل - ۹۸)

۱۲/۳	۱۱/۲	۱۳/۵	۱۲/۸	۱۱/۵	-۰/۱۲۵ (۲)	-۰/۲۲۵ (۱)
۱۲/۷	۳۰/۲	۱۰/۶	۱۱/۹	۱۰/۶	۰/۲۷۵ (۴)	۰/۱۷۵ (۳)

۲ داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

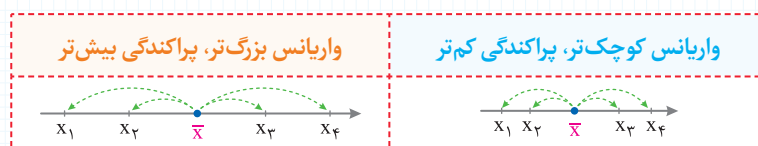
نیمه اول داده‌ها: ۱۰/۶, ۱۰/۶, ۱۱/۲, ۱۱/۵, ۱۱/۹, ۱۲/۳, ۱۲/۷, ۱۲/۸, ۱۳/۵, ۳۰/۲
نیمه دوم داده‌ها: ۱۱/۹, ۱۲/۳, ۱۲/۷, ۱۲/۸, ۱۳/۵, ۳۰/۲

بنابراین $Q_1 = \frac{11/9 + 12/3}{2} = 12/1$ و همچنین $Q_2 = 12/8$ و $Q_3 = 11/2$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} = \frac{(11/2 + 12/8) - 2 \times 12/1}{11/2 - 12/8} = \frac{24 - 24/2}{1/6} = -0/125$$



یکی از شاخص‌های مهم و کارآمد در تشخیص پراکندگی داده‌ها **واریانس** است. که با نماد σ^2 نشان داده می‌شود. جذر مثبت واریانس را **انحراف معیار** می‌نامند و با σ نشان می‌دهند. بنابراین واریانس و انحراف معیار همواره اعداد حقیقی نامنفی [بزرگتر مساوی صفر] هستند و نکته بسیار مهم در مورد این شاخص‌ها این است که هرچه این شاخص‌های پراکندگی کوچک‌تر و به **صفر نزدیک‌تر** باشند، پراکندگی داده‌ها حول میانگین‌شان کم و در نتیجه داده‌ها به **هم نزدیک‌ترند** و هرچه این شاخص‌ها بزرگ‌تر و **از صفر دورتر** باشند، داده‌ها **از هم دورترند** و پراکندگی بیشتری دارند.



اگر چند داده به صورت $x_1, x_2, \dots, x_n$ داده شده باشد، در این صورت واریانس آن‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

یعنی برای محاسبه واریانس همواره باید دو مرحله زیر را مطابق جدول طی کنیم:

روش محاسبه واریانس	واریانس داده‌های ۱، ۲، ۳، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۲۰، ۲۲، ۲۴، ۲۶، ۲۸، ۳۰، ۳۲، ۳۴، ۳۶، ۳۸، ۴۰، ۴۲، ۴۴، ۴۶، ۴۸، ۵۰، ۵۲، ۵۴، ۵۶، ۵۸، ۶۰، ۶۲، ۶۴، ۶۶، ۶۸، ۷۰، ۷۲، ۷۴، ۷۶، ۷۸، ۸۰، ۸۲، ۸۴، ۸۶، ۸۸، ۹۰، ۹۲، ۹۴، ۹۶، ۹۸، ۱۰۰، ۱۰۲، ۱۰۴، ۱۰۶، ۱۰۸، ۱۱۰، ۱۱۲، ۱۱۴، ۱۱۶، ۱۱۸، ۱۲۰، ۱۲۲، ۱۲۴، ۱۲۶، ۱۲۸، ۱۳۰، ۱۳۲، ۱۳۴، ۱۳۶، ۱۳۸، ۱۴۰، ۱۴۲، ۱۴۴، ۱۴۶، ۱۴۸، ۱۵۰، ۱۵۲، ۱۵۴، ۱۵۶، ۱۵۸، ۱۶۰، ۱۶۲، ۱۶۴، ۱۶۶، ۱۶۸، ۱۷۰، ۱۷۲، ۱۷۴، ۱۷۶، ۱۷۸، ۱۸۰، ۱۸۲، ۱۸۴، ۱۸۶، ۱۸۸، ۱۹۰، ۱۹۲، ۱۹۴، ۱۹۶، ۱۹۸، ۲۰۰، ۲۰۲، ۲۰۴، ۲۰۶، ۲۰۸، ۲۱۰، ۲۱۲، ۲۱۴، ۲۱۶، ۲۱۸، ۲۲۰، ۲۲۲، ۲۲۴، ۲۲۶، ۲۲۸، ۲۳۰، ۲۳۲، ۲۳۴، ۲۳۶، ۲۳۸، ۲۴۰، ۲۴۲، ۲۴۴، ۲۴۶، ۲۴۸، ۲۵۰، ۲۵۲، ۲۵۴، ۲۵۶، ۲۵۸، ۲۶۰، ۲۶۲، ۲۶۴، ۲۶۶، ۲۶۸، ۲۷۰، ۲۷۲، ۲۷۴، ۲۷۶، ۲۷۸، ۲۸۰، ۲۸۲، ۲۸۴، ۲۸۶، ۲۸۸، ۲۹۰، ۲۹۲، ۲۹۴، ۲۹۶، ۲۹۸، ۳۰۰، ۳۰۲، ۳۰۴، ۳۰۶، ۳۰۸، ۳۱۰، ۳۱۲، ۳۱۴، ۳۱۶، ۳۱۸، ۳۲۰، ۳۲۲، ۳۲۴، ۳۲۶، ۳۲۸، ۳۳۰، ۳۳۲، ۳۳۴، ۳۳۶، ۳۳۸، ۳۴۰، ۳۴۲، ۳۴۴، ۳۴۶، ۳۴۸، ۳۵۰، ۳۵۲، ۳۵۴، ۳۵۶، ۳۵۸، ۳۶۰، ۳۶۲، ۳۶۴، ۳۶۶، ۳۶۸، ۳۷۰، ۳۷۲، ۳۷۴، ۳۷۶، ۳۷۸، ۳۸۰، ۳۸۲، ۳۸۴، ۳۸۶، ۳۸۸، ۳۹۰، ۳۹۲، ۳۹۴، ۳۹۶، ۳۹۸، ۴۰۰، ۴۰۲، ۴۰۴، ۴۰۶، ۴۰۸، ۴۱۰، ۴۱۲، ۴۱۴، ۴۱۶، ۴۱۸، ۴۲۰، ۴۲۲، ۴۲۴، ۴۲۶، ۴۲۸، ۴۳۰، ۴۳۲، ۴۳۴، ۴۳۶، ۴۳۸، ۴۴۰، ۴۴۲، ۴۴۴، ۴۴۶، ۴۴۸، ۴۵۰، ۴۵۲، ۴۵۴، ۴۵۶، ۴۵۸، ۴۶۰، ۴۶۲، ۴۶۴، ۴۶۶، ۴۶۸، ۴۷۰، ۴۷۲، ۴۷۴، ۴۷۶، ۴۷۸، ۴۸۰، ۴۸۲، ۴۸۴، ۴۸۶، ۴۸۸، ۴۹۰، ۴۹۲، ۴۹۴، ۴۹۶، ۴۹۸، ۵۰۰، ۵۰۲، ۵۰۴، ۵۰۶، ۵۰۸، ۵۱۰، ۵۱۲، ۵۱۴، ۵۱۶، ۵۱۸، ۵۲۰، ۵۲۲، ۵۲۴، ۵۲۶، ۵۲۸، ۵۳۰، ۵۳۲، ۵۳۴، ۵۳۶، ۵۳۸، ۵۴۰، ۵۴۲، ۵۴۴، ۵۴۶، ۵۴۸، ۵۵۰، ۵۵۲، ۵۵۴، ۵۵۶، ۵۵۸، ۵۶۰، ۵۶۲، ۵۶۴، ۵۶۶، ۵۶۸، ۵۷۰، ۵۷۲، ۵۷۴، ۵۷۶، ۵۷۸، ۵۸۰، ۵۸۲، ۵۸۴، ۵۸۶، ۵۸۸، ۵۹۰، ۵۹۲، ۵۹۴، ۵۹۶، ۵۹۸، ۶۰۰، ۶۰۲، ۶۰۴، ۶۰۶، ۶۰۸، ۶۱۰، ۶۱۲، ۶۱۴، ۶۱۶، ۶۱۸، ۶۲۰، ۶۲۲، ۶۲۴، ۶۲۶، ۶۲۸، ۶۳۰، ۶۳۲، ۶۳۴، ۶۳۶، ۶۳۸، ۶۴۰، ۶۴۲، ۶۴۴، ۶۴۶، ۶۴۸، ۶۵۰، ۶۵۲، ۶۵۴، ۶۵۶، ۶۵۸، ۶۶۰، ۶۶۲، ۶۶۴، ۶۶۶، ۶۶۸، ۶۷۰، ۶۷۲، ۶۷۴، ۶۷۶، ۶۷۸، ۶۸۰، ۶۸۲، ۶۸۴، ۶۸۶، ۶۸۸، ۶۹۰، ۶۹۲، ۶۹۴، ۶۹۶، ۶۹۸، ۷۰۰، ۷۰۲، ۷۰۴، ۷۰۶، ۷۰۸، ۷۱۰، ۷۱۲، ۷۱۴، ۷۱۶، ۷۱۸، ۷۲۰، ۷۲۲، ۷۲۴، ۷۲۶، ۷۲۸، ۷۳۰، ۷۳۲، ۷۳۴، ۷۳۶، ۷۳۸، ۷۴۰، ۷۴۲، ۷۴۴، ۷۴۶، ۷۴۸، ۷۵۰، ۷۵۲، ۷۵۴، ۷۵۶، ۷۵۸، ۷۶۰، ۷۶۲، ۷۶۴، ۷۶۶، ۷۶۸، ۷۷۰، ۷۷۲، ۷۷۴، ۷۷۶، ۷۷۸، ۷۸۰، ۷۸۲، ۷۸۴، ۷۸۶، ۷۸۸، ۷۹۰، ۷۹۲، ۷۹۴، ۷۹۶، ۷۹۸، ۸۰۰، ۸۰۲، ۸۰۴، ۸۰۶، ۸۰۸، ۸۱۰، ۸۱۲، ۸۱۴، ۸۱۶، ۸۱۸، ۸۲۰، ۸۲۲، ۸۲۴، ۸۲۶، ۸۲۸، ۸۳۰، ۸۳۲، ۸۳۴، ۸۳۶، ۸۳۸، ۸۴۰، ۸۴۲، ۸۴۴، ۸۴۶، ۸۴۸، ۸۵۰، ۸۵۲، ۸۵۴، ۸۵۶، ۸۵۸، ۸۶۰، ۸۶۲، ۸۶۴، ۸۶۶، ۸۶۸، ۸۷۰، ۸۷۲، ۸۷۴، ۸۷۶، ۸۷۸، ۸۸۰، ۸۸۲، ۸۸۴، ۸۸۶، ۸۸۸، ۸۹۰، ۸۹۲، ۸۹۴، ۸۹۶، ۸۹۸، ۹۰۰، ۹۰۲، ۹۰۴، ۹۰۶، ۹۰۸، ۹۱۰، ۹۱۲، ۹۱۴، ۹۱۶، ۹۱۸، ۹۲۰، ۹۲۲، ۹۲۴، ۹۲۶، ۹۲۸، ۹۳۰، ۹۳۲، ۹۳۴، ۹۳۶، ۹۳۸، ۹۴۰، ۹۴۲، ۹۴۴، ۹۴۶، ۹۴۸، ۹۵۰، ۹۵۲، ۹۵۴، ۹۵۶، ۹۵۸، ۹۶۰، ۹۶۲، ۹۶۴، ۹۶۶، ۹۶۸، ۹۷۰، ۹۷۲، ۹۷۴، ۹۷۶، ۹۷۸، ۹۸۰، ۹۸۲، ۹۸۴، ۹۸۶، ۹۸۸، ۹۹۰، ۹۹۲، ۹۹۴، ۹۹۶، ۹۹۸، ۱۰۰۰، ۱۰۰۲، ۱۰۰۴، ۱۰۰۶، ۱۰۰۸، ۱۰۱۰، ۱۰۱۲، ۱۰۱۴، ۱۰۱۶، ۱۰۱۸، ۱۰۲۰، ۱۰۲۲، ۱۰۲۴، ۱۰۲۶، ۱۰۲۸، ۱۰۳۰، ۱۰۳۲، ۱۰۳۴، ۱۰۳۶، ۱۰۳۸، ۱۰۴۰، ۱۰۴۲، ۱۰۴۴، ۱۰۴۶، ۱۰۴۸، ۱۰۵۰، ۱۰۵۲، ۱۰۵۴، ۱۰۵۶، ۱۰۵۸، ۱۰۶۰، ۱۰۶۲، ۱۰۶۴، ۱۰۶۶، ۱۰۶۸، ۱۰۷۰، ۱۰۷۲، ۱۰۷۴، ۱۰۷۶، ۱۰۷۸، ۱۰۸۰، ۱۰۸۲، ۱۰۸۴، ۱۰۸۶، ۱۰۸۸، ۱۰۹۰، ۱۰۹۲، ۱۰۹۴، ۱۰۹۶، ۱۰۹۸، ۱۱۰۰، ۱۱۰۲، ۱۱۰۴، ۱۱۰۶، ۱۱۰۸، ۱۱۱۰، ۱۱۱۲، ۱۱۱۴، ۱۱۱۶، ۱۱۱۸، ۱۱۲۰، ۱۱۲۲، ۱۱۲۴، ۱۱۲۶، ۱۱۲۸، ۱۱۳۰، ۱۱۳۲، ۱۱۳۴، ۱۱۳۶، ۱۱۳۸، ۱۱۴۰، ۱۱۴۲، ۱۱۴۴، ۱۱۴۶، ۱۱۴۸، ۱۱۵۰، ۱۱۵۲، ۱۱۵۴، ۱۱۵۶، ۱۱۵۸، ۱۱۶۰، ۱۱۶۲، ۱۱۶۴، ۱۱۶۶، ۱۱۶۸، ۱۱۷۰، ۱۱۷۲، ۱۱۷۴، ۱۱۷۶، ۱۱۷۸، ۱۱۸۰، ۱۱۸۲، ۱۱۸۴، ۱۱۸۶، ۱۱۸۸، ۱۱۹۰، ۱۱۹۲، ۱۱۹۴، ۱۱۹۶، ۱۱۹۸، ۱۲۰۰، ۱۲۰۲، ۱۲۰۴، ۱۲۰۶، ۱۲۰۸، ۱۲۱۰، ۱۲۱۲، ۱۲۱۴، ۱۲۱۶، ۱۲۱۸، ۱۲۲۰، ۱۲۲۲، ۱۲۲۴، ۱۲۲۶، ۱۲۲۸، ۱۲۳۰، ۱۲۳۲، ۱۲۳۴، ۱۲۳۶، ۱۲۳۸، ۱۲۴۰، ۱۲۴۲، ۱۲۴۴، ۱۲۴۶، ۱۲۴۸، ۱۲۵۰، ۱۲۵۲، ۱۲۵۴، ۱۲۵۶، ۱۲۵۸، ۱۲۶۰، ۱۲۶۲، ۱۲۶۴، ۱۲۶۶، ۱۲۶۸، ۱۲۷۰، ۱۲۷۲، ۱۲۷۴، ۱۲۷۶، ۱۲۷۸، ۱۲۸۰، ۱۲۸۲، ۱۲۸۴، ۱۲۸۶، ۱۲۸۸، ۱۲۹۰، ۱۲۹۲، ۱۲۹۴، ۱۲۹۶، ۱۲۹۸، ۱۳۰۰، ۱۳۰۲، ۱۳۰۴، ۱۳۰۶، ۱۳۰۸، ۱۳۱۰، ۱۳۱۲، ۱۳۱۴، ۱۳۱۶، ۱۳۱۸، ۱۳۲۰، ۱۳۲۲، ۱۳۲۴، ۱۳۲۶، ۱۳۲۸، ۱۳۳۰، ۱۳۳۲، ۱۳۳۴، ۱۳۳۶، ۱۳۳۸، ۱۳۴۰، ۱۳۴۲، ۱۳۴۴، ۱۳۴۶، ۱۳۴۸، ۱۳۵۰، ۱۳۵۲، ۱۳۵۴، ۱۳۵۶، ۱۳۵۸، ۱۳۶۰، ۱۳۶۲، ۱۳۶۴، ۱۳۶۶، ۱۳۶۸، ۱۳۷۰، ۱۳۷۲، ۱۳۷۴، ۱۳۷۶، ۱۳۷۸، ۱۳۸۰، ۱۳۸۲، ۱۳۸۴، ۱۳۸۶، ۱۳۸۸، ۱۳۹۰، ۱۳۹۲، ۱۳۹۴، ۱۳۹۶، ۱۳۹۸، ۱۴۰۰، ۱۴۰۲، ۱۴۰۴، ۱۴۰۶، ۱۴۰۸، ۱۴۱۰، ۱۴۱۲، ۱۴۱۴، ۱۴۱۶، ۱۴۱۸، ۱۴۲۰، ۱۴۲۲، ۱۴۲۴، ۱۴۲۶، ۱۴۲۸، ۱۴۳۰، ۱۴۳۲، ۱۴۳۴، ۱۴۳۶، ۱۴۳۸، ۱۴۴۰، ۱۴۴۲، ۱۴۴۴، ۱۴۴۶، ۱۴۴۸، ۱۴۵۰، ۱۴۵۲، ۱۴۵۴، ۱۴۵۶، ۱۴۵۸، ۱۴۶۰، ۱۴۶۲، ۱۴۶۴، ۱۴۶۶، ۱۴۶۸، ۱۴۷۰، ۱۴۷۲، ۱۴۷۴، ۱۴۷۶، ۱۴۷۸، ۱۴۸۰، ۱۴۸۲، ۱۴۸۴، ۱۴۸۶، ۱۴۸۸، ۱۴۹۰، ۱۴۹۲، ۱۴۹۴، ۱۴۹۶، ۱۴۹۸، ۱۵۰۰، ۱۵۰۲، ۱۵۰۴، ۱۵۰۶، ۱۵۰۸، ۱۵۱۰، ۱۵۱۲، ۱۵۱۴، ۱۵۱۶، ۱۵۱۸، ۱۵۲۰، ۱۵۲۲، ۱۵۲۴، ۱۵۲۶، ۱۵۲۸، ۱۵۳۰، ۱۵۳۲، ۱۵۳۴، ۱۵۳۶، ۱۵۳۸، ۱۵۴۰، ۱۵۴۲، ۱۵۴۴، ۱۵۴۶، ۱۵۴۸، ۱۵۵۰، ۱۵۵۲، ۱۵۵۴، ۱۵۵۶، ۱۵۵۸، ۱۵۶۰، ۱۵۶۲، ۱۵۶۴، ۱۵۶۶، ۱۵۶۸، ۱۵۷۰، ۱۵۷۲، ۱۵۷۴، ۱۵۷۶، ۱۵۷۸، ۱۵۸۰، ۱۵۸۲، ۱۵۸۴، ۱۵۸۶، ۱۵۸۸، ۱۵۹۰، ۱۵۹۲، ۱۵۹۴، ۱۵۹۶، ۱۵۹۸، ۱۶۰۰، ۱۶۰۲، ۱۶۰۴، ۱۶۰۶، ۱۶۰۸، ۱۶۱۰، ۱۶۱۲، ۱۶۱۴، ۱۶۱۶، ۱۶۱۸، ۱۶۲۰، ۱۶۲۲، ۱۶۲۴، ۱۶۲۶، ۱۶۲۸، ۱۶۳۰، ۱۶۳۲، ۱۶۳۴، ۱۶۳۶، ۱۶۳۸، ۱۶۴۰، ۱۶۴۲، ۱۶۴۴، ۱۶۴۶، ۱۶۴۸، ۱۶۵۰، ۱۶۵۲، ۱۶۵۴، ۱۶۵۶، ۱۶۵۸، ۱۶۶۰، ۱۶۶۲، ۱۶۶۴، ۱۶۶۶، ۱۶۶۸، ۱۶۷۰، ۱۶۷۲، ۱۶۷۴، ۱۶۷۶، ۱۶۷۸، ۱۶۸۰، ۱۶۸۲، ۱۶۸۴، ۱۶۸۶، ۱۶۸۸، ۱۶۹۰، ۱۶۹۲، ۱۶۹۴، ۱۶۹۶، ۱۶۹۸، ۱۷۰۰، ۱۷۰۲، ۱۷۰۴، ۱۷۰۶، ۱۷۰۸، ۱۷۱۰، ۱۷۱۲، ۱۷۱۴، ۱۷۱۶، ۱۷۱۸، ۱۷۲۰، ۱۷۲۲، ۱۷۲۴، ۱۷۲۶، ۱۷۲۸، ۱۷۳۰، ۱۷۳۲، ۱۷۳۴، ۱۷۳۶، ۱۷۳۸، ۱۷۴۰، ۱۷۴۲، ۱۷۴۴، ۱۷۴۶، ۱۷۴۸، ۱۷۵۰، ۱۷۵۲، ۱۷۵۴، ۱۷۵۶، ۱۷۵۸، ۱۷۶۰، ۱۷۶۲، ۱۷۶۴، ۱۷۶۶، ۱۷۶۸، ۱۷۷۰، ۱۷۷۲، ۱۷۷۴، ۱۷۷۶، ۱۷۷۸، ۱۷۸۰، ۱۷۸۲، ۱۷۸۴، ۱۷۸۶، ۱۷۸۸، ۱۷۹۰، ۱۷۹۲، ۱۷۹۴، ۱۷۹۶، ۱۷۹۸، ۱۸۰۰، ۱۸۰۲، ۱۸۰۴، ۱۸۰۶، ۱۸۰۸، ۱۸۱۰، ۱۸۱۲، ۱۸۱۴، ۱۸۱۶، ۱۸۱۸، ۱۸۲۰، ۱۸۲۲، ۱۸۲۴، ۱۸۲۶، ۱۸۲۸، ۱۸۳۰، ۱۸۳۲، ۱۸۳۴، ۱۸۳۶، ۱۸۳۸، ۱۸۴۰، ۱۸۴۲، ۱۸۴۴، ۱۸۴۶، ۱۸۴۸، ۱۸۵۰، ۱۸۵۲، ۱۸۵۴، ۱۸۵۶، ۱۸۵۸، ۱۸۶۰، ۱۸۶۲، ۱۸۶۴، ۱۸۶۶، ۱۸۶۸، ۱۸۷۰، ۱۸۷۲، ۱۸۷۴، ۱۸۷۶، ۱۸۷۸، ۱۸۸۰، ۱۸۸۲، ۱۸۸۴، ۱۸۸۶، ۱۸۸۸، ۱۸۹۰، ۱۸۹۲، ۱۸۹۴، ۱۸۹۶، ۱۸۹۸، ۱۹۰۰، ۱۹۰۲، ۱۹۰۴، ۱۹۰۶، ۱۹۰۸، ۱۹۱۰، ۱۹۱۲، ۱۹۱۴، ۱۹۱۶، ۱۹۱۸، ۱۹۲۰، ۱۹۲۲، ۱۹۲۴، ۱۹۲۶، ۱۹۲۸، ۱۹۳۰، ۱۹۳۲، ۱۹۳۴، ۱۹۳۶، ۱۹۳۸، ۱۹۴۰، ۱۹۴۲، ۱۹۴۴، ۱۹۴۶، ۱۹۴۸، ۱۹۵۰، ۱۹۵۲، ۱۹۵۴، ۱۹۵۶، ۱۹۵۸، ۱۹۶۰، ۱۹۶۲، ۱۹۶۴، ۱۹۶۶، ۱۹۶۸، ۱۹۷۰، ۱۹۷۲، ۱۹۷۴، ۱۹۷۶، ۱۹۷۸، ۱۹۸۰، ۱۹۸۲، ۱۹۸۴، ۱۹۸۶، ۱۹۸۸، ۱۹۹۰، ۱۹۹۲، ۱۹۹۴، ۱۹۹۶، ۱۹۹۸، ۲۰۰۰، ۲۰۰۲، ۲۰۰۴، ۲۰۰۶، ۲۰۰۸، ۲۰۱۰، ۲۰۱۲، ۲۰۱۴، ۲۰۱۶، ۲۰۱۸، ۲۰۲۰، ۲۰۲۲، ۲۰۲۴، ۲۰۲۶، ۲۰۲۸، ۲۰۳۰، ۲۰۳۲، ۲۰۳۴، ۲۰۳۶، ۲۰۳۸، ۲۰۴۰، ۲۰۴۲، ۲۰۴۴، ۲۰۴۶، ۲۰۴۸، ۲۰۵۰، ۲۰۵۲، ۲۰۵۴، ۲۰۵۶، ۲۰۵۸، ۲۰۶۰، ۲۰۶۲، ۲۰۶۴، ۲۰۶۶، ۲۰۶۸، ۲۰۷۰، ۲۰۷۲، ۲۰۷۴، ۲۰۷۶، ۲۰۷۸، ۲۰۸۰، ۲۰۸۲، ۲۰۸۴، ۲۰۸۶، ۲۰۸۸، ۲۰۹۰، ۲۰۹۲، ۲۰۹۴، ۲۰۹۶، ۲۰۹۸، ۲۱۰۰، ۲۱۰۲، ۲۱۰۴، ۲۱۰۶، ۲۱۰۸، ۲۱۱۰، ۲۱۱۲، ۲۱۱۴، ۲۱۱۶، ۲۱۱۸، ۲۱۲۰، ۲۱۲۲، ۲۱۲۴، ۲۱۲۶، ۲۱۲۸، ۲۱۳۰، ۲۱۳۲، ۲۱۳۴، ۲۱۳۶، ۲۱۳۸، ۲۱۴۰، ۲۱۴۲، ۲۱۴۴، ۲۱۴۶، ۲۱۴۸، ۲۱۵۰، ۲۱۵۲، ۲۱۵۴، ۲۱۵۶، ۲۱۵۸، ۲۱۶۰، ۲۱۶۲، ۲۱۶۴، ۲۱۶۶، ۲۱۶۸، ۲۱۷۰، ۲۱۷۲، ۲۱۷۴، ۲۱۷۶، ۲۱۷۸، ۲۱۸۰، ۲۱۸۲، ۲۱۸۴، ۲۱۸۶، ۲۱۸۸، ۲۱۹۰، ۲۱۹۲، ۲۱۹۴، ۲۱۹۶، ۲۱۹۸، ۲۲۰۰، ۲۲۰۲، ۲۲۰۴، ۲۲۰۶، ۲۲۰۸، ۲۲۱۰، ۲۲۱۲، ۲۲۱۴، ۲۲۱۶، ۲۲۱۸، ۲۲۲۰، ۲۲۲۲، ۲۲۲۴، ۲۲۲۶، ۲۲۲۸، ۲۲۳۰، ۲۲۳۲، ۲۲۳۴، ۲۲۳۶، ۲۲۳۸، ۲۲۴۰، ۲۲۴۲، ۲۲۴۴، ۲۲۴۶، ۲۲۴۸، ۲۲۵۰، ۲۲۵۲، ۲۲۵۴، ۲۲۵۶، ۲۲۵۸، ۲۲۶۰، ۲۲۶۲، ۲۲۶۴، ۲۲۶۶، ۲۲۶۸، ۲۲۷۰، ۲۲۷۲، ۲۲۷۴، ۲۲۷۶، ۲۲۷۸، ۲۲۸۰، ۲۲۸۲، ۲۲۸۴، ۲۲۸۶، ۲۲۸۸، ۲۲۹۰، ۲۲۹۲، ۲۲۹۴، ۲۲۹۶، ۲۲۹۸، ۲۳۰۰، ۲۳۰۲، ۲۳۰۴، ۲۳۰۶، ۲۳۰۸، ۲۳۱۰، ۲۳۱۲، ۲۳۱۴، ۲۳۱۶، ۲۳۱۸، ۲۳۲۰، ۲۳۲۲، ۲۳۲۴، ۲۳۲۶، ۲۳۲۸، ۲۳۳۰، ۲۳۳۲، ۲۳۳۴، ۲۳۳۶، ۲۳۳۸، ۲۳۴۰، ۲۳۴۲، ۲۳۴۴، ۲۳۴۶، ۲۳۴۸، ۲۳۵۰، ۲۳۵۲، ۲۳۵۴، ۲۳۵۶، ۲۳۵۸، ۲۳۶۰، ۲۳۶۲، ۲۳۶۴، ۲۳۶۶، ۲۳۶۸، ۲۳۷۰، ۲۳۷۲، ۲۳۷۴، ۲۳۷۶، ۲۳۷۸، ۲۳۸۰، ۲۳۸۲، ۲۳۸۴، ۲۳۸۶، ۲۳۸۸، ۲۳۹۰، ۲۳۹۲، ۲۳۹۴، ۲۳۹۶، ۲۳۹۸، ۲۴۰۰، ۲۴۰۲، ۲۴۰۴، ۲۴۰۶، ۲۴۰۸، ۲۴۱۰، ۲۴۱۲، ۲۴۱۴، ۲۴۱۶، ۲۴۱۸، ۲۴۲۰، ۲۴۲۲، ۲۴۲۴، ۲۴۲۶، ۲۴۲۸، ۲۴۳۰، ۲۴۳۲، ۲۴۳۴، ۲۴۳۶، ۲۴۳۸، ۲۴۴۰، ۲۴۴۲، ۲۴۴۴، ۲۴۴۶، ۲۴۴۸، ۲۴۵۰، ۲۴۵۲، ۲۴۵۴، ۲۴۵۶، ۲۴۵۸، ۲۴۶۰، ۲۴۶۲، ۲۴۶۴، ۲۴۶۶، ۲۴۶۸، ۲۴۷۰، ۲۴۷۲، ۲۴۷۴، ۲۴۷۶، ۲۴۷۸، ۲۴۸۰، ۲۴۸۲، ۲۴۸۴، ۲۴۸۶، ۲۴۸۸، ۲۴۹۰،
--------------------	--

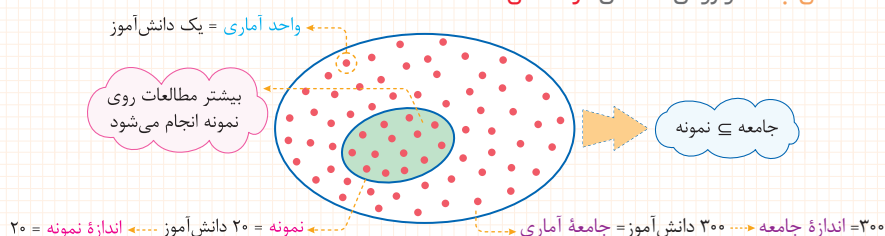
واقعیت‌هایی دربارهٔ یک شیء که در محاسبه، برنامه‌ریزی و پیش‌بینی به کار می‌روند **داده** نامیده می‌شوند.

مجموعهٔ تمام افراد یا اشیایی که می‌خواهیم دربارهٔ آن‌ها، داده را گردآوری کنیم **جامعه آماری** و تعداد اعضای آن را، **اندازه یا حجم جامعه** می‌نامند.

به هر یک از افراد یا اشیای یک جامعه آماری، **واحد آماری** گفته می‌شود.

هر زیرمجموعه از جامعه آماری که با روش مشخصی انتخاب شده باشد یک **نمونه** و تعداد اعضای آن را **اندازه نمونه** یا **حجم نمونه** می‌نامند.

فرض کنید می‌خواهیم میانگین قد دانش‌آموزان مدرسه‌ای با ۳۰۰ دانش‌آموز را بررسی کنیم چون تعداد دانش‌آموزان مدرسه زیاد است با قرعه‌کشی ۲۰ نفر از ۳۰۰ دانش‌آموز مدرسه را انتخاب می‌کنیم. در این صورت این ۲۰ نفر یک **نمونه** و ۳۰۰ نفر **جامعه آماری** و هر نفر یک **واحد آماری** و عدد قد تک تک دانش‌آموزان معرف **داده‌های جامعه** و روش مشخص **قرعه‌کشی** است.



برای مطالعهٔ یک جامعه آماری دو روش عمده وجود دارد:

۱ معمولاً اگر اندازهٔ یک جامعه بزرگ نباشد، می‌توانیم همهٔ واحدهای آماری را مورد بررسی قرار دهیم. این روش را **سرشماری** می‌نامند.

۲ اگر اندازهٔ یک جامعه بزرگ باشد یا همهٔ اعضای آن در دسترس نباشند یا دسترسی به آن‌ها **گران و وقت‌گیر باشد** یا این امکان وجود داشته باشد که در اثر مطالعه، **نمونه‌ها از بین بروند** [مانند بررسی نطفه‌دار بودن تخم مرغ یا میزان خاویار در ماهی اوزون برون] به جای سرشماری از **نمونه‌گیری** استفاده می‌کنیم.

می‌خواهیم وزن ماهی‌های یک حوضچه پرورش ماهی را تخمین بزنیم. به این منظور، ۵ ماهی از میان آن‌ها صید کرده و وزن آن‌ها را اندازه می‌گیریم، در این صورت این ۵ ماهی، معرف یک ----- و هر ماهی درون حوضچه، یک ----- و کل ماهی‌های درون حوضچه، معرف ----- و عدد وزن تک تک ماهی‌های درون حوضچه، ----- است.

(۱) نمونه - داده - جامعه آماری - متغیر

(۲) واحد آماری - داده - نمونه - داده‌های جامعه

(۳) نمونه - واحد آماری - جامعه آماری - داده‌های جامعه

(۴) واحد آماری - داده - جامعه آماری - داده‌های جامعه

۳ ۵ ماهی، معرف یک **نمونه** و هر ماهی درون حوضچه، یک **واحد آماری** و کل ماهی‌های درون حوضچه، معرف **جامعه آماری** و عدد وزن تک تک ماهی‌های درون حوضچه، **داده‌های جامعه** است.

چه زمانی از روش نمونه‌گیری به جای سرشماری استفاده می‌گردد؟

(۱) جامعه محدود و قابل شمارش باشد.

(۲) لیست افراد جامعه آماری موجود نباشد.

(۳) جامعه آماری نامحدود و غیرقابل شمارش باشد.

(۴) لیست افراد جامعه آماری در دست نباشد.

۳ وقتی جامعه **نامحدود و غیرقابل شمارش** باشد، از روش نمونه‌گیری و هنگامی که جامعه محدود و قابل شمارش باشد، از روش سرشماری استفاده می‌شود اما موجود بودن لیست افراد جامعه یا موجود نبودن آن دلیلی برای استفاده از نمونه‌گیری به جای سرشماری نیست.

می‌خواهیم برخی ویژگی‌های سگ‌های ولگرد تهران را بررسی کنیم در این صورت هر سگ ----- است.

(۱) یک نمونه

(۲) یک واحد آماری

(۳) یک داده

(۴) یک آماره

۲ هر سگ یک **واحد آماری** است.



جزوه
طالبان

اگر جامعه آماری قابل فهرست کردن نباشد، جامعه را به دسته‌ها یا زیرمجموعه‌هایی تقسیم‌بندی می‌کنیم [تعداد اعضای زیرمجموعه‌ها لزوماً برابر نیست]. و هر زیرمجموعه را یک **خوشه** می‌نامیم. حال چند خوشه را به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده انتخاب می‌کنیم و در هر یک **سرشماری** انجام می‌دهیم [یعنی همه واحدهای آماری خوشه‌های انتخاب شده را به عنوان نمونه در نظر می‌گیریم]. این روش نمونه‌گیری را **نمونه‌گیری خوشه‌ای** می‌نامند. برای محاسبه میانگین نمرات حسابان دانش‌آموزان شهر تهران، می‌توان چند مدرسه را انتخاب کرد و دانش‌آموزان هر مدرسه را سرشماری کرد [یعنی نمره حسابان همه دانش‌آموزان درون مدرسه را بررسی کرد] در این حالت هر مدرسه یک **خوشه** محسوب می‌شود.

۱ در نمونه‌گیری خوشه‌ای، واحدهای آماری درون هر خوشه از نظر مسافت نزدیک به هم هستند.

دانش‌آموزان درون مدرسه از نظر مسافت نزدیک به هم هستند که باعث کاهش هزینه در نمونه‌گیری خواهد شد.

جامعه

نمونه

نمونه‌گیری خوشه‌ای

خوشه‌ها را سرشماری می‌کنیم

۲ دقت در نمونه‌گیری خوشه‌ای از دقت در نمونه‌گیری تصادفی ساده، کم‌تر است.

۳ هر چقدر ویژگی‌های مورد بررسی درون خوشه‌ها تفاوت بیشتری داشته باشند، می‌توان گفت خوشه‌ها از تنوعی شبیه تنوع کل جامعه برخوردارند و دقت در نمونه‌گیری خوشه‌ای بهتر خواهد شد.

در نمونه‌گیری خوشه‌ای احتمال انتخاب خوشه‌ها باهم برابر است و چون در همه خوشه‌های انتخاب شده سرشماری انجام می‌شود، احتمال انتخاب هر یک از واحدهای آماری نیز با هم برابر بوده و برابر است با:

$$P = \frac{n}{N} = \frac{\text{تعداد خوشه‌های انتخاب شده}}{\text{تعداد کل خوشه‌ها}}$$

❖ در نمونه‌گیری خوشه‌ای: - - - - -

- ۱) جامعه به زیرمجموعه‌هایی با تعداد عضوهای برابر افراز می‌شود.
- ۲) احتمال انتخاب خوشه‌ها باهم برابر نیست.
- ۳) احتمال انتخاب واحدهای آماری با هم برابر نیست.
- ۴) خوشه‌ها از تنوعی شبیه تنوع کل جامعه برخوردارند.

❖ بررسی گزینه‌ها:

- ۱ در نمونه‌گیری خوشه‌ای جامعه به زیرمجموعه‌هایی ناتهی افراز می‌شود که لزوماً تعداد عضوهای زیرمجموعه‌ها برابر نیست.
- ۲ در نمونه‌گیری خوشه‌ای چون خوشه‌ها بر اساس نمونه‌گیری تصادفی ساده انتخاب می‌شوند، احتمال انتخاب خوشه‌ها باهم برابر است.
- ۳ در نمونه‌گیری خوشه‌ای چون هر خوشه پس از انتخاب سرشماری می‌شود، احتمال انتخاب تمام واحدهای آماری باهم برابر خواهد شد.
- ۴ در نمونه‌گیری خوشه‌ای، خوشه‌ها از تنوعی شبیه کل جامعه برخوردارند.

❖ هریک از مدارس A, B, C, D, E, F به ترتیب دارای ۳۰۰, ۲۷۰, ۲۳۰, ۲۰۰, ۱۵۰, ۱۰۰ دانش‌آموز هستند، می‌خواهیم یک نمونه‌گیری خوشه‌ای از میان آن‌ها انجام دهیم. برای این منظور دو مدرسه را به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد دانش‌آموزی از مدرسه A درون نمونه انتخاب شده باشد؟

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{3} & (۱) \\ \frac{1}{6} & (۲) \\ \frac{1}{۱۲۵} & (۳) \\ \frac{۲}{۱۲۵} & (۴) \end{array}$$

۱ می‌دانیم احتمال انتخاب ۲ خوشه از میان ۶ خوشه برابر $\frac{۲}{۶}$ است. حال اگر مدرسه A انتخاب شده باشد، چون در آن سرشماری انجام می‌شود، احتمال آن که دانش‌آموزی از آن مدرسه در نمونه حضور داشته باشد همان $\frac{۲}{۶}$ خواهد بود.



جزوه
طلالین



۱۴۰

مقایسه انواع نمونه‌گیری احتمالی

اگر بخواهیم در یک نگاه کلی و اجمالی انواع نمونه‌گیری‌های احتمالی را با هم مقایسه کنیم جدول زیر راهگشاست:

نوع نمونه‌گیری	موارد استفاده	مزایا	معایب	ویژگی به خصوص	احتمال انتخاب هر واحد آماری
تصادفی ساده	فهرست واحدهای آماری موجود باشد. مانند ثبت نام‌کنندگان در آزمون کنکور سراسری	همه واحدهای آماری امکان حضور در نمونه را دارند چون فهرست آن‌ها موجود است.	در جوامع بزرگ، زمان‌بر و هزینه‌بردار است، چون دسترسی به فهرست همه واحدهای آماری سخت است.	اگر جامعه از طبقات متمایز تشکیل شده باشد روش مناسبی نیست. چون ممکن است از بعضی طبقات واحد آماری در نمونه موجود نباشد.	$P = \frac{n}{N}$ n = اندازه نمونه N = اندازه جامعه
خوشه‌ای	فهرست واحدهای آماری موجود نیست ولی فهرست گروه‌های تشکیل دهنده جامعه موجود است.	ساده‌تر، کم‌هزینه‌تر و سریع‌تر از نمونه‌گیری تصادفی ساده و طبقه‌ای است.	از بعضی خوشه‌ها نماینده‌ای در نمونه وجود ندارد.	واحدهای آماری درون هر خوشه باید از نظر مسافت به هم نزدیک باشد. هر خوشه به تنهایی از تنوعی شبیه‌کل جامعه، برخوردار است.	$P = \frac{n}{N}$ n = تعداد خوشه‌های انتخاب شده N = تعداد کل خوشه‌ها
طبقه‌ای	جامعه از چند گروه با ویژگی‌های متمایز تشکیل شده که افراد هر گروه شبیه هم ولی اختلاف بین گروه‌ها زیاد است.	از تمام طبقات تشکیل دهنده جامعه، واحد آماری در نمونه وجود دارد.	از نمونه‌گیری تصادفی ساده و خوشه‌ای دقیق‌تر ولی زمان‌برتر و هزینه‌بردارتر است.	از هر طبقه متناسب با جمعیت آن، واحد آماری انتخاب می‌شود.	$P = \frac{n}{N}$ n = اندازه نمونه N = اندازه جامعه
سیستماتیک	واحدهای آماری به‌طور تصادفی فهرست شده باشند، مانند خط تولید کارخانه، سالن سینما و تئاتر و مسابقات پیامکی	از تمام طبقه‌ها نماینده در نمونه حضور دارد.	تقسیم جامعه به گروه‌ها و دسته‌های مساوی ممکن است هزینه‌بردار و زمان‌بر باشد.	فقط از دسته اول یک واحد آماری به تصادف انتخاب می‌شود. اندازه طبقات با هم برابر است.	$P = \frac{n}{N}$ n = اندازه نمونه N = اندازه جامعه

❖ در کدام نوع نمونه‌گیری، جامعه به چند زیرمجموعه افزایش نمی‌شود؟

- (۱) خوشه‌ای
- (۲) سیستماتیک
- (۳) طبقه‌ای
- (۴) تصادفی ساده

❖ به جز نمونه‌گیری تصادفی ساده، در سایر نمونه‌گیری‌های احتمالی همیشه جامعه را به زیرمجموعه‌هایی (طبقه‌هایی) افزایش می‌کنیم اما:

- ۱ در نمونه‌گیری خوشه‌ای بعضی از خوشه‌ها (زیرمجموعه‌ها) به تصادف انتخاب و سرشماری می‌شوند.
- ۲ در نمونه‌گیری سیستماتیک هیچ طبقه‌ای به تصادف انتخاب نمی‌شود، بلکه یک نفر از طبقه اول به تصادف انتخاب می‌شود و بقیه افراد طبق رویه به خصوصی انتخاب می‌شوند.

۳ در نمونه‌گیری طبقه‌ای از همه طبقات متناسب با جمعیت آن‌ها واحد آماری به تصادف انتخاب می‌شود.

❖ برای بررسی سن ساکنان یک برج ۴۰ طبقه، ۵ طبقه را به تصادف انتخاب و سن تک‌تک افراد ساکن را بررسی می‌کنیم. این روش نمونه‌گیری چه نام دارد؟

- (۱) خوشه‌ای
- (۲) سامان‌مند
- (۳) تصادفی ساده
- (۴) طبقه‌ای

❖ درون یک برج طبقه‌ها تنوعی شبیه تنوع کل جامعه دارند، یعنی این‌طور نیست که افراد یک طبقه از نظر سنی شبیه هم باشند که در آن صورت نمونه‌گیری طبقه‌ای مناسب بود. از طرف دیگر چون در هر طبقه سرشماری انجام شده، پس نمونه‌گیری به یقین خوشه‌ای است. می‌دانیم در نمونه‌گیری طبقه‌ای از هر طبقه، متناسب با جمعیت آن واحد آماری به تصادف انتخاب می‌شود.

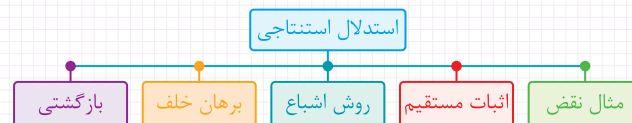
❖ می‌خواهیم میانگین قد افراد شرکت‌کننده در المپیک را بررسی کنیم. اگر ۲۰ نفر از افراد شرکت‌کننده زن و ۸۰۰ نفر آن‌ها مرد باشند و ما بخواهیم یک نمونه ۲۰ نفره انتخاب کنیم، کدام روش نمونه‌گیری مناسب‌تر است؟

- (۱) خوشه‌ای
- (۲) تصادفی ساده
- (۳) طبقه‌ای
- (۴) سیستماتیک

❖ نمونه‌گیری طبقه‌ای بهتر است چون جامعه از دو طبقه مردان و زنان تشکیل شده که از نظر قد با هم تفاوت دارند، ولی افراد هر گروه از نظر قدی شبیه هم هستند.

چیزه
طلالین

🍎 درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. اگر برای اثبات درستی یا نادرستی یک گزاره، از حقایق استفاده کنیم که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم، از نوعی استدلال به نام **استدلال استنتاجی** استفاده کرده‌ایم. استدلال استنتاجی دارای انواع و اقسامی است:



🍎 برای اثبات درستی یک گزاره به روش **اثبات مستقیم**، ابتدا باید گزاره داده شده را به زبان ریاضی برگردانیم. جدول زیر برای برگرداندن یک گزاره به **زبان ریاضیات** کمک مهمی به شما می‌کند:

نماد ریاضی	عبارت فارسی	نماد ریاضی	عبارت فارسی	نماد ریاضی	عبارت فارسی
$2k-1, 2k+1$	دو عدد فرد متوالی	k^2	عدد مکعب کامل	$2k$	عدد زوج
$2k, 2k+2$	دو عدد زوج متوالی	$(2k+1)^2$	عدد فرد مربع کامل	$2k+1$	عدد فرد
$k-1, k, k+1$	سه عدد متوالی	$2k+1, 2k'+1$	دو عدد فرد	$3k$	عدد مضرب ۳
$\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$	عدد گویا	$2k, 2k'$	دو عدد زوج	k^2	عدد مربع کامل

🍎 به کمک اثبات مستقیم نشان دهید جمع سه عدد طبیعی متوالی مضرب ۳ است.

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$$

🍎 سه عدد طبیعی متوالی را با n و $n+1$ و $n+2$ نشان می‌دهیم؛ در این صورت داریم:

🍎 اگر k حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی باشد، کدام عبارت مربع کامل است؟

$$4k+1 \quad (1) \quad 6k+1 \quad (2) \quad 8k+1 \quad (3) \quad 2k+1 \quad (4)$$

$$4k+1 = 4(n(n+1)) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

🍎 عبارت $4k+1$ مربع کامل است، زیرا:

🍎 کدام گزینه درباره عبارت $k(k+1)(k+2)(k+3)+1$ درست است؟

(۱) مکعب یک عدد فرد است.

(۲) مربع یک عدد زوج است.

(۳) مربع یک عدد فرد است.

(۴) مکعب یک عدد زوج است.

🍎 حاصل ضرب چهار عدد متوالی زوج است و و هنگامی که با عدد ۱ جمع می‌شود فرد خواهد شد، از طرف دیگر داریم:

$$k(k+1)(k+2)(k+3)+1 = (\underbrace{k^2+3k}_x)(\underbrace{k^2+3k+2}_x)+1 = x(x+2)+1 = x^2+2x+1 = (x+1)^2$$

بنابراین این عبارت **مربع یک عدد فرد** است.

🍎 اگر به حاصل ضرب دو عدد فرد متوالی یک واحد اضافه کنیم، عدد حاصل:

(۱) مضرب ۸ است.

(۲) مربع کامل است.

(۳) بر ۳ بخش پذیر است.

(۴) مکعب کامل است.

$$(2k-1)(2k+1)+1 = 4k^2-1+1 = 4k^2 = (2k)^2$$

🍎 اگر n یک عدد طبیعی باشد عبارت $n^4 + 4$ به ازای $n > 1$:

(۱) مربع کامل است.

(۲) قابل تجزیه به حاصل ضرب دو عدد طبیعی است.

(۳) همواره زوج است.

(۴) یک عدد اول است.

🍎 می‌دانیم $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ است، بنابراین:

$$n^4 + 4 = (n^2)^2 + (2)^2 = (n^2 + 2)^2 - 2(n^2)(2) = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n)$$

بنابراین عبارت قابل تجزیه به حاصل ضرب دو عدد طبیعی است.



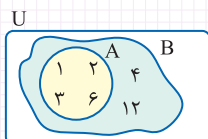
جزوه
طالبان



۱۶۹

قانون لورل - هاردی [فشرده ۱۵ قانون در یک جمله!]

می‌دانیم $۱۲ = ۶ \times ۲$ بنابراین می‌توان گفت $۱۲ | ۶$ از طرفی مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۶ به صورت $A = \{۱, ۲, ۳, ۶\}$ و مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۱۲ به صورت $B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲\}$ است و بدیهی است که $A \subseteq B$ ، بنابراین به طور کلی خواهیم داشت:



$$a|b \Rightarrow \{ \text{مقسوم‌علیه‌های } a \} \subseteq \{ \text{مقسوم‌علیه‌های } b \}$$

عکس رابطه فوق نیز درست است یعنی اگر $\{ \text{مقسوم‌علیه‌های } b \} \subseteq \{ \text{مقسوم‌علیه‌های } a \}$ آنگاه $a|b$.

در رابطه بخش‌پذیری $a|b$ ، همواره به نوعی مجموعه مقسوم‌علیه‌های a کوچک‌تر یا مساوی مجموعه مقسوم‌علیه‌های b است. بنابراین از این به بعد به طور قراردادی در این کتاب سمت چپ رابطه عادی را **لاغر** و سمت راست را **چاق** می‌نامیم.

چاق | لاغر

صفر چاق‌ترین عدد است چون بر تمام اعداد بخش‌پذیر است.

± ۱ لاغرتین اعداد هستند. چون همه اعداد را می‌شمارند.

هر عددی چاق‌تر یا لاغرتر از خودش محسوب می‌شود چون به‌ازای هر a داریم $a|a$.

همواره در یک بخش‌پذیری می‌توان **چاق** را **چاق‌تر** و همچنین **لاغر** را **لاغرتر** کرد. این قضیه را به طور قراردادی در این کتاب **قانون لورل - هاردی** می‌نامیم.

$$a|b \Rightarrow \downarrow a|b \uparrow$$

$$\bullet ۴|۱۲ \Rightarrow ۴|۱۲ \times ۵ \quad \bullet ۲|۸ \Rightarrow ۲|۸ \times (-۳) \quad \bullet ۵|۲۵ \Rightarrow ۵|۲۵ \quad \bullet ۸|۲۴ \Rightarrow ۴|۲۴ \quad \bullet -۱۲|۳۶ \Rightarrow -۴|۳۶ \quad \bullet ۱۰|۵ \Rightarrow ۵|۱۰$$

عوامل لاغری	عوامل چاقی
1 تقسیم شدن بر یک عدد صحیح	1 ضرب شدن در یک عدد صحیح
$\bullet r a \Rightarrow r a$ $\bullet v a \Rightarrow v a$ $\bullet bc a \Rightarrow b a$	$\bullet a b \Rightarrow a 4b$ $\bullet ۸ b \Rightarrow ۸ ab$ $\bullet a b \Rightarrow a bc$
2 کاهش توان	2 افزایش توان
$\bullet a^r b \Rightarrow a b$ $\bullet ۲^۳ a \Rightarrow ۲^۳ a$ $\bullet a^۳ ۳۶ \Rightarrow a^۳ ۳۶$	$\bullet ۲ ۶ \Rightarrow ۲ ۶^۲$ $\bullet a b \Rightarrow a b^۲$ $\bullet a^۲ b \Rightarrow a^۲ b^۵$
بدیهی است که اگر لاغر، چاق شود یا چاق، لاغر شود نتایج به‌دست آمده الزاماً درست نیست.	

بدیهی است که همزمان که چاق را چاق‌تر می‌کنیم می‌توانیم توأم با آن لاغر را نیز لاغرتر کنیم. در تمام موارد زیر لاغر، لاغرتر و در عین حال چاق، چاق‌تر شده است:

$$\bullet a^r|b \Rightarrow a|b^۳ \quad \bullet ۲a|b \Rightarrow a|b^۲ \quad \bullet a^۳|b^۲ \Rightarrow a^۲|b^۳ \quad \bullet a^۳|۳b \Rightarrow a|۶b$$

می‌توان طرفین یک بخش‌پذیری را با هم چاق یا با هم لاغر کرد:

$a b \Rightarrow a^n b^n \quad n \in \mathbb{N}$	$a^n b^n \Rightarrow a b \quad n \in \mathbb{N}$	$a b \Rightarrow ma mb \quad m \in \mathbb{Z}$	$ma mb \Rightarrow a b \quad m \in \mathbb{Z} - \{0\}$
$\bullet ۲ ۶ \Rightarrow ۲^۳ ۶^۳$	$\bullet ۲^۳ ۶^۳ \Rightarrow ۲ ۶$	$\bullet ۲ ۶ \Rightarrow ۲ \times ۵ ۶ \times ۵$	$\bullet ۲ \times ۵ ۶ \times ۵ \Rightarrow ۲ ۶$

جمع شدن طرف چاق با یک عدد صحیح موجب چاقی نمی‌شود همان طور که کم شدن یک عدد از طرف لاغر باعث لاغری آن نمی‌شود. در واقع در قضیه لورل - هاردی تنها اعمالی که باعث چاقی می‌شود ضرب شدن در عدد صحیح و افزایش توان است و همچنین تنها اعمالی که باعث لاغری می‌شود تقسیم شدن [از دست دادن عامل] و کاهش توان است.

$$\bullet ۵|۱۰ \not\Rightarrow ۵-۲|۱۰ \quad \bullet ۶|۱۸ \not\Rightarrow ۶|۱۸+۴$$

جزوه
طالبان



۲۲۱

یافتن باقی‌مانده a^n بر m

🍏 برای پیدا کردن کوچک‌ترین توان a که باقی‌مانده آن بر m برابر ۱ باشد، ابتدا کوچک‌ترین توان a را که در حوالی m باشد، پیدا می‌کنیم؛ اگر باقی‌مانده «۱» شد که به نتیجه رسیده‌ایم، اگر «-۱» شد، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و اگر عددی غیر از ۱ یا -۱ شد با ضرب طرفین هم‌نهشتی در a یا توان‌های a ، سعی می‌کنیم طرف دوم را به m نزدیک و سپس ساده کنیم.

فرض کنید می‌خواهیم توانی از ۳ را پیدا کنیم که باقی‌مانده تقسیم آن برابر «۱» باشد

1 کوچک‌ترین توان ۳ را که در حوالی (کمی کم‌تر یا کمی بیشتر) ۱۱ است در پیمانه ۱۱ کوچک می‌کنیم:	$3^2 \equiv -2$
2 چون باقی‌مانده ۱ یا -۱ نشد، طرفین را در توانی از ۳ ضرب می‌کنیم تا طرف دوم به حوالی ۱۱ برسد:	$3^2 \equiv -2 \xrightarrow{\times 3} 3^3 \equiv -6 \equiv 5$
3 مجدداً این کار را ادامه می‌دهیم؛ تا اولین توان از ۳ که در پیمانه ۱۱ برابر ۱ شود، به دست آید:	$3^3 \equiv 5 \xrightarrow{\times 3} 3^4 \equiv 15 \equiv 4 \xrightarrow{\times 3} 3^5 \equiv 12 \equiv 1$

🍏 گاهی اوقات می‌توانیم به جای ضرب کردن طرفین هم‌نهشتی، طرفین را به توان برسانیم. به مثال زیر و میان‌بر آن دقت کنید:

فرض کنید می‌خواهیم کوچک‌ترین توان از ۲ را پیدا کنیم که باقی‌مانده آن برابر «۱» شود

1 کوچک‌ترین توان ۲ را که در حوالی ۲۵ قرار دارد در پیمانه ۲۵ کوچک می‌کنیم:	$2^5 \equiv 7$
2 چون باقی‌مانده ۱ یا -۱ نشد، طرفین را در توانی از ۲ ضرب می‌کنیم تا طرف دوم به حوالی ۲۵ برسد:	$2^5 \times 2^5 \equiv 7 \times 7 \equiv 49 \equiv 24 \equiv 3$
3 مجدداً این کار را ادامه می‌دهیم تا اولین توان از ۲ که در پیمانه ۲۵ برابر ۱ شود به دست آید:	$2^5 \times 2^5 \equiv 3 \times 3 \equiv 9 \equiv -1 \Rightarrow (2^{10} \equiv -1)^2 \Rightarrow 2^{20} \equiv 1$

🍏 گاهی در فرآیند یافتن کوچک‌ترین توان شاید بتوان میان‌برهایی هم زد مثلاً در همین مثال به صورت زیر هم می‌شد عمل کرد:

$$2^{25} \equiv 7 \Rightarrow (2^5 \equiv 7)^2 \Rightarrow 2^{10} \equiv 49 \equiv -1 \Rightarrow 2^{20} \equiv 1$$

🍏 برای پیدا کردن باقی‌مانده تقسیم a^n بر m باید مراحل زیر را طی کنیم:

- 1 ابتدا توانی از a مانند a^b را پیدا می‌کنیم که باقی‌مانده آن بر m برابر ۱ شود یعنی:
- 2 باقی‌مانده n را بر b پیدا می‌کنیم [یعنی $n = bq + r$] و n را بر حسب b مرتب می‌کنیم:
- 3 در انتها a^r را در پیمانه m کوچک می‌کنیم تا به عددی صحیح و کوچک‌تر از m برسیم.

فرض کنید می‌خواهیم باقی‌مانده 5^{59} را بر ۱۱ پیدا کنیم.

1 ابتدا توانی از ۵ را پیدا می‌کنیم که باقی‌مانده آن بر ۱۱ برابر ۱ شود:	$5^2 \equiv 3 \xrightarrow{\times 5} 5^3 \equiv 15 \equiv 4 \xrightarrow{\times 5} 5^4 \equiv 20 \equiv -2 \xrightarrow{\times 5} 5^5 \equiv -10 \equiv 1$
2 با توجه به این که $5^5 \equiv 1$ باید باقی‌مانده 5^{59} را بر ۵ حساب کنیم:	$5^9 \equiv 1 \times 5^4 + 4 \Rightarrow 5^{59} \equiv 5^{11 \times 5 + 4} \equiv (5^5)^{11} \times 5^4 \equiv 1 \times 5^4$
3 باقی‌مانده 5^4 را بر ۱۱ پیدا می‌کنیم:	$5^4 \equiv 5^2 \times 5^2 \equiv 3 \times 3 \equiv 9$

🍏 در محاسبه باقی‌مانده a^n بر m پس از پیدا کردن $a^b \equiv 1$ گاهی اوقات بعد از این که باقی‌مانده n را بر b به دست می‌آوریم عدد نسبتاً بزرگی حاصل می‌شود. در این موارد بهتر است a^r را به چند قسمت خرد کنیم و باقی‌مانده‌های هر قسمت را جداگانه حساب کرده و در هم ضرب کنیم.

می‌خواهیم باقی‌مانده تقسیم 7^{45} بر ۱۳ را به دست آوریم.

1 ابتدا توانی از ۷ را پیدا می‌کنیم که باقی‌مانده آن بر ۱۳ برابر ۱ باشد:	$7^2 \equiv 10 \xrightarrow{\times 7} 7^3 \equiv 70 \equiv 5 \Rightarrow 7^6 \equiv 25 \equiv -1 \Rightarrow 7^{12} \equiv 1$
2 با توجه به این که $7^{12} \equiv 1$ باید باقی‌مانده تقسیم 7^{45} را بر ۱۲ پیدا می‌کنیم:	$45 = 3 \times 12 + 9 \Rightarrow 7^{45} \equiv 7^{3 \times 12 + 9} \equiv (7^{12})^3 \times 7^9 \equiv 7^9$
3 حال باید 7^9 را در پیمانه ۱۳ ساده کنیم:	$7^9 \equiv 7^6 \times 7^3 \equiv (-1) \times 5 \equiv -5 \equiv 8$



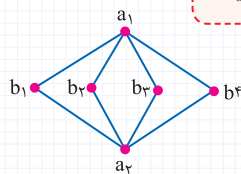


۲۷۰

عدد احاطه‌گری

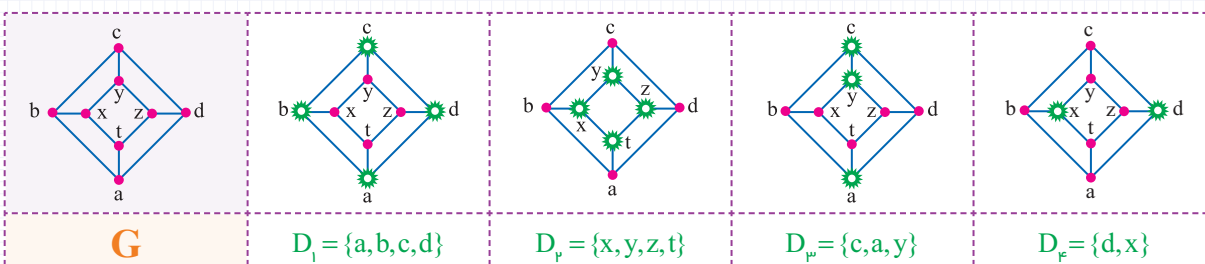
در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه‌های احاطه‌گری را که کمترین تعداد عضو را دارند، **مجموعه احاطه‌گر مینیمم** می‌نامند. تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را **عدد احاطه‌گری گراف G** می‌نامیم و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

گاهی اوقات برای راحتی، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از گراف G را یک **γ -مجموعه** می‌گویند.



گراف شکل مقابل را در نظر بگیرید. مجموعه $D_1 = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ یک **مجموعه احاطه‌گر** محسوب می‌شود اما این مجموعه، مجموعه احاطه‌گر مینیمم نیست. با کمی دقت متوجه می‌شویم که مجموعه $D'_1 = \{a_1, a_2\}$ یک **مجموعه احاطه‌گر مینیمم** یا اصطلاحاً یک **γ -مجموعه** است و در نتیجه $\gamma(G) = 2$ است.

گراف G را در نظر بگیرید مجموعه‌های $D_1 = \{a, b, c, d\}$ ، $D_2 = \{x, y, z, t\}$ ، $D_3 = \{c, a, y\}$ ، $D_4 = \{d, x\}$ هر کدام یک **مجموعه احاطه‌گر** محسوب می‌شوند. اما مجموعه‌هایی مانند $D_5 = \{c, t\}$ یا $D_6 = \{d, x\}$ یک **مجموعه احاطه‌گر مینیمم** یا اصطلاحاً یک **γ -مجموعه** هستند و در نتیجه $\gamma(G) = 2$ است.



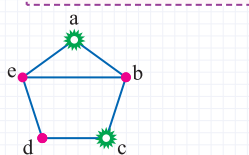
$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{p}{\Delta + 1} \right\rceil$$

اگر G یک گراف p رأسی با ماکزیمم درجه Δ باشد و $\gamma(G)$ عدد احاطه‌گری گراف G باشد، آن‌گاه:

عدد احاطه‌گری در بسیاری از گراف‌ها از جمله C_n ، P_n و تمام گراف‌های ∞ -منتظم و 1 -منتظم و مکمل تمام این گراف‌ها و همچنین

تمام گراف‌های که رأس فول یا نیم فول دارند از رابطه $\gamma(G) = \left\lceil \frac{p}{\Delta + 1} \right\rceil$ به دست می‌آید.

نماد $\lceil x \rceil$ به معنای سقف عدد x است و نشان دهنده کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر و یا مساوی x است. مثلاً: $\lceil 3/2 \rceil = 2$ ، $\lceil 5 \rceil = 5$



گراف مقابل را در نظر بگیرید. با توجه به قضیه فوق می‌توان گفت که $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{5}{4} \right\rceil = 2$. از طرفی به سادگی معلوم است که $D = \{a, c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است؛ بنابراین عدد احاطه‌گری این گراف دقیقاً ۲ است و نمی‌تواند کمتر از ۲ باشد.

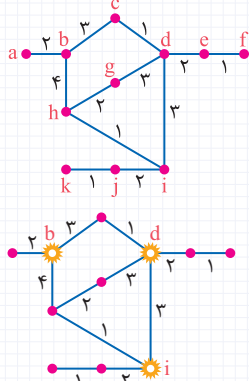
گراف مقابل، گراف نظیر با نقشه یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین آن روستاها و مسافت بین آن‌هاست. اگر بخواهیم چند مدرسه در برخی از روستاها احداث کنیم به‌طوری که فاصله هر روستا از نزدیک‌ترین

مدرسه بیش از ۴ کیلومتر نباشد حداقل چند مدرسه باید احداث کرد؟

۲ (۱)

۴ (۳)

حداقل ۳ مدرسه باید در مناطق b, d, i احداث شود:

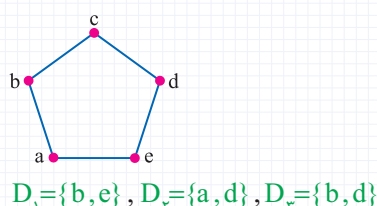


گراف مقابل چند γ -مجموعه متمایز فاقد رأس C دارد؟

۲ (۱)

۵ (۴)

در این گراف γ -مجموعه‌های فاقد رأس C عبارتند از:



جزوه حل‌الین





۲۷۳

عدد احاطه‌گری در گراف‌های که رأس فول یا نیمه فول دارند

در گراف‌هایی که رأس فول وجود دارد، یعنی $\Delta = p-1$ است، عدد احاطه‌گری برابر با $\gamma(G) = 1$ است و آن رأس به تنهایی یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است.

نمونه‌هایی از مجموعه احاطه‌گر مینیمم در گراف‌هایی که رأس فول دارند

$D = \{v_1\}$	$D = \{v_4\}$	$D = \{v_1\}$	$D = \{v_1\}$

بدیهی است که اگر گراف دارای چندین رأس فول باشد، هر کدام از آن رأس‌ها به تنهایی یک مجموعه احاطه‌گر محسوب می‌شوند.

در گراف G از مرتبه ۶ مجموع درجه تمام رئوس برابر ۳۰ است، عدد احاطه‌گری این گراف کدام است؟

$$\sum \deg v_i = 2q = 30 \Rightarrow q = 15$$

مجموع درجه رئوس در هر گراف ساده دو برابر تعداد یال‌هاست بنابراین:

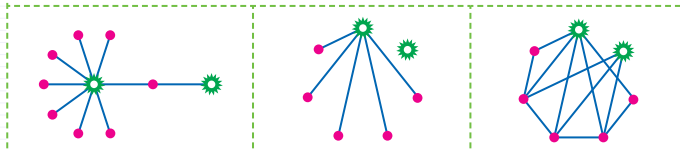
حال گرافی با ۶ رأس و ۱۵ یال یک گراف کامل است که همه رأس‌های آن فول است. بنابراین عدد احاطه‌گری آن ۱ است.

دو نتیجه از قبل

در گراف T_n [درخت ستاره‌ای] عدد احاطه‌گری برابر $\gamma(T_n) = 1$ است.	در گراف K_n [گراف کامل]، عدد احاطه‌گری برابر $\gamma(K_n) = 1$ است.
مجموعه احاطه‌گر رأس مرکزی است.	مجموعه احاطه‌گر هر رأس دلخواه است.

در گراف‌هایی که رأس فول وجود ندارد اما رأس نیمه فول وجود دارد، یعنی $\Delta = p-2$ است، عدد احاطه‌گری برابر با $\gamma(G) = 2$ است.

نمونه‌هایی از مجموعه احاطه‌گر مینیمم در گراف‌هایی که رأس نیمه فول دارند



در گرافی با درجه رئوس ۷، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱ عدد احاطه‌گری برابر با --- است.

۱ (۲)

۵ (۴)

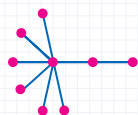
چون گراف یک رأس فول دارد عدد احاطه‌گری آن برابر $\gamma(G) = 1$ است.

عدد احاطه‌گری گراف مقابل برابر با --- است.

۳ (۲)

۴ (۴)

مرتبه گراف برابر ۹ است و یکی از رأس‌های گراف از درجه ۷ است که نیمه فول محسوب می‌شود، بنابراین عدد احاطه‌گری گراف $\gamma(G) = 2$ است.



جزوه
طالبان





۲۷۴

عدد احاطه‌گری در گراف‌های منتظم

1 عدد احاطه‌گری در گراف‌های ۰-منتظم مرتبه n برابر $\gamma(\overline{K}_n) = n$ است		2 عدد احاطه‌گری در گراف‌های ۱-منتظم مرتبه n برابر $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ است.	
$\gamma(G)=4$	$\gamma(G)=5$	$\gamma(G)=4$	$\gamma(G)=7$
مجموعه احاطه‌گر مینیمم یک مجموعه شامل تمام رأس‌هاست.		در مجموعه احاطه‌گر مینیمم، از هر دو رأس مجاور، یک رأس حضور دارد	

کمترین مقدار برای عدد احاطه‌گری یک گراف ۲-منتظم برابر $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ است و در حالتی به دست می‌آید که گراف ۲-منتظم مرتبه n به صورت C_n رسم شود. [البته در برخی از حالت‌های دیگر نیز ممکن است به همین عدد برسیم]. جدول زیر برای گراف ۲-منتظم مرتبه ۹ رسم شده است:

کمترین عدد احاطه‌گری در گراف ۲-منتظم مرتبه ۹			
$\gamma(G)=3$	$\gamma(G)=3$	$\gamma(G)=4$	$\gamma(G)=3$
• کمترین مقدار برای عدد احاطه‌گری گراف‌های فوق $\left\lceil \frac{9}{3} \right\rceil = 3$ است که در C_9 و همچنین بعضی از شکل‌های دیگر رخ می‌دهد.			

بزرگ‌ترین مقدار برای عدد احاطه‌گری یک گراف ۲-منتظم در حالتی به دست می‌آید که بخش‌های از گراف به شکل چهار ضلعی یا (یعنی C_4) ترسیم شده باشد. [البته در برخی از حالت‌های دیگر نیز ممکن است به همین عدد برسیم]. جدول زیر برای گراف ۲-منتظم مرتبه ۱۲ رسم شده است:

بیش‌ترین عدد احاطه‌گری در گراف ۲-منتظم مرتبه ۱۲			
$\gamma(G)=4$	$\gamma(G)=5$	$\gamma(G)=6$	$\gamma(G)=4$
• بیش‌ترین عدد احاطه‌گری برابر با ۶ است و در حالتی که گراف به شکل چند چهار ضلعی رسم شده است، به دست آمده.			

عدد احاطه‌گری در گراف‌های ۳-منتظم و گراف‌های منتظم با درجه رئوس بزرگ‌تر بستگی به شکل گراف دارد و الگوی مشخص و قابل پیش‌بینی ندارد. ❖ عدد احاطه‌گری کدام یک از گراف‌های زیر در همه حالات یکسان است؟

- (۱) ۲-منتظم مرتبه ۹
(۲) ۲-منتظم مرتبه ۱۰
(۳) ۲-منتظم مرتبه ۸
(۴) ۲-منتظم مرتبه ۱۲
- ۲ عدد احاطه‌گری گراف ۲-منتظم مرتبه ۱۰ به هر شکلی که رسم شود برابر با ۴ خواهد شد.



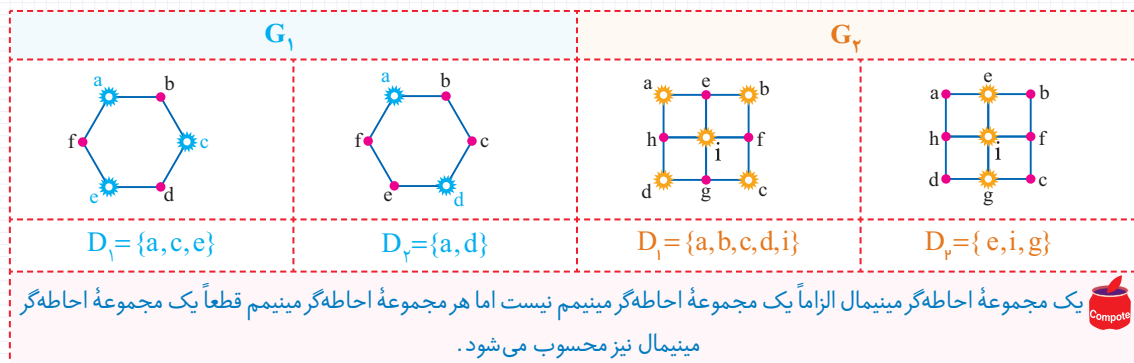


۲۷۸

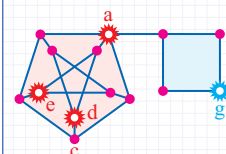
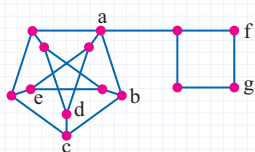
مجموعه احاطه‌گر مینیمال

یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش [یعنی هر رأس دلخواه] دیگر احاطه‌گر نباشد، **احاطه‌گر مینیمال** می‌نامیم.

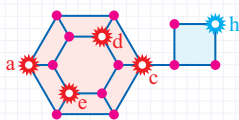
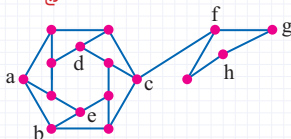
در گراف G_1 مجموعه $D_1 = \{a, c, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است چون با حذف هر کدام از عضوهای a یا c یا e ، مجموعه D_1 دیگر احاطه‌گر نخواهد بود. ولی D_1 یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم نیست اما مجموعه $D_2 = \{a, d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است که یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال نیز محسوب می‌شود. حال به گراف G_2 نگاه کنید، در این گراف مجموعه $D_1 = \{a, b, c, d, i\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است اما یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم نیست. اما مجموعه $D_2 = \{e, i, g\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم و در عین حال مینیمال است؛ بنابراین در این گراف $\gamma(G) = 3$ است.



(داخل - ۹۸)



(خارج - ۹۸)



کدام مجموعه برای گراف روبه‌رو، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است؟

- ۱) $\{a, c, e, g\}$ ۲) $\{a, d, e, g\}$
 ۳) $\{a, b, d, e\}$ ۴) $\{a, d, e, f\}$

این گراف از اتصال گراف پترسن و گراف C_4 به دست آمده است و مجموعه $\{a, d, e, g\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است که مینیمال نیز محسوب می‌شود.

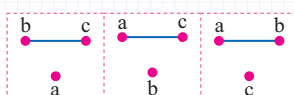
کدام مجموعه، برای گراف روبه‌رو، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است؟

- ۱) $\{a, b, c, d, h\}$ ۲) $\{b, c, e, d, g\}$
 ۳) $\{a, c, e, d, h\}$ ۴) $\{a, c, e, d, g\}$

این گراف از اتصال یک گراف همیلتنی نوع دوم و یک گراف C_4 به دست آمده است و مجموعه $\{a, c, e, d, h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است که مینیمال نیز محسوب می‌شود.

چند گراف با رؤس $V = \{a, b, c\}$ وجود دارد که مجموعه احاطه‌گر مینیمال دو عضوی غیر یکتا داشته باشد؟

- ۱) ۶ ۲) ۲
 ۳) ۳ ۴) ۴

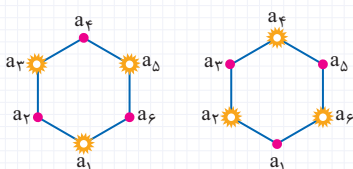


تنها سه گراف مطابق شکل وجود دارد:

گراف C_2 چند مجموعه احاطه‌گر مینیمال سه عضوی دارد؟

- ۱) ۲ ۲) ۲
 ۳) ۳ ۴) بیش از ۳

این گراف دارای ۲ مجموعه احاطه‌گر مینیمال سه عضوی به صورت مقابل است:



اگر بخواهیم **تعداد اعداد n رقمی** با ارقام داده شده را پیدا کنیم، n جای خالی در نظر می‌گیریم و خانه‌ها را طبق اصول زیر می‌کنیم.

اصول عدد نویسی

۱ اگر مسئله محدودیت یا شرطی برای یک خانه قائل شده بود، اول آن را پر می‌کنیم

۲ خانه‌ها معمولاً از سمت چپ به راست پر می‌شوند و اگر تکرار ارقام مجاز نباشد، در هر مرحله یک واحد از تعداد ارقام کم می‌شود.

۳ واضح است که رقم سمت چپ هیچ عددی صفر نیست.

۴ اگر گفته نشود با چه رقم‌هایی باید عدد بنویسیم، بدیهی است که مجازیم از هریک از ارقام {۰, ۱, ۲, ..., ۹} استفاده کنیم.

اگر صحبتی در رابطه با مجاز بودن تکرار ارقام نشد، **تکرار ارقام مجاز است**. البته گاهی با بیان جملات زیر به طور غیرمستقیم در مسئله تکرار را غیرمجاز می‌کنند:

- با کنار هم قرار گرفتن ارقام ...
- تعداد اعدادی که هیچ دو رقم آن شبیه هم نیست ...
- با ارقام عدد ... یک عدد می‌نویسیم ...
- تعداد جایگشت‌های موجود با ارقام ...

در سؤالات ساختن عدد، اگر صحبت از ویژگی‌هایی مانند **فرد**، **زوج** و **مضرب ۵** و ... به میان آمده بود که برای خانه سمت راست محدودیت ایجاد می‌کند، ابتدا تکلیف آن را مشخص می‌کنیم و سپس طبق روال گذشته به سراغ سایر خانه‌ها می‌رویم.

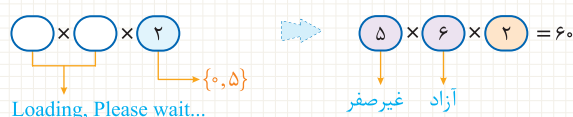
تعداد اعداد فرد سه رقمی کدام است؟

ابتدا خانه سمت راست را پر می‌کنیم سپس به سراغ اولین خانه سمت چپ می‌رویم:



تعداد اعداد سه رقمی مضرب ۵ با ارقام {۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵} کدام است؟

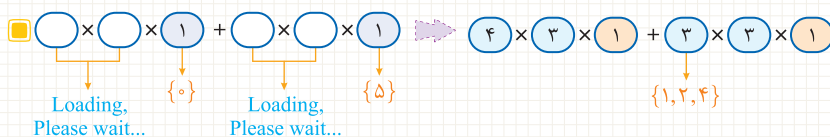
ابتدا خانه سمت راست را پر می‌کنیم سپس به سراغ اولین خانه سمت چپ می‌رویم:



در ساختن تعداد اعداد زوج یا مضرب ۵ بدون تکرار ارقام هنگامی که صفر نیز جزو ارقام داده شده است، مسئله باید به دو قسمت تقسیم شود و جواب‌ها را جمع کنیم، این دو قسمت عبارتند از:

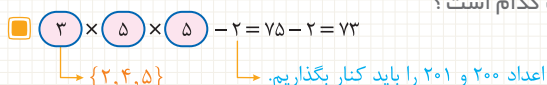
۱ محاسبه تعداد اعدادی که رقم سمت راست آن‌ها صفر است. ۲ محاسبه تعداد اعدادی که رقم سمت راست آن‌ها صفر نیست.

تعداد اعداد سه رقمی مضرب ۵ با ارقام {۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵} که ارقام آن متمایز باشند، کدام است؟



اگر بخواهیم تعداد اعداد بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از عددی را حساب کنیم، معمولاً روی خانه سمت چپ محدودیت‌هایی به وجود می‌آید که باید آن‌ها را لحاظ کنیم. [البته ممکن است ریزه‌کاری‌های دیگری نیز وجود داشته باشد که باید آن‌ها را در هنگام محاسبه در نظر بگیریم.]

تعداد اعداد سه رقمی بزرگ‌تر از ۲۰۱ که با ارقام {۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵} می‌توان نوشت کدام است؟



جزوه
خلاصه



۳۱۲

توزیع اشیاء مشابه در ظرف‌های متمایز

تعداد راه‌های توزیع n شیء کاملاً مشابه در k ظرف متمایز [یا ساختن یک دسته گل شامل n شاخه از k نوع گل متفاوت]

فرض کنیم x_1 شیء در ظرف اول و x_2 شیء در ظرف دوم و ... x_k شیء در ظرف k ام [یا x_1 شاخه گل از نوع اول و x_2 شاخه گل از نوع دوم و ... x_k شاخه گل از نوع k ام] باشد، آن‌گاه باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ را پیدا کنیم که برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

STOP این معادله به **آماره اینشتین** شهرت دارد و منظور از اعداد صحیح و نامنفی، اعداد صحیح بزرگ‌تر مساوی صفر است.

❖ به چند طریق می‌توان ۵ پرتقال را در ۳ سبد قرار داد؟

❑ فرض کنیم x_1 پرتقال در سبد اول، x_2 پرتقال در سبد دوم و x_3 پرتقال در سبد سوم قرار گیرد. حال جمع این پرتقال‌ها باید ۵ شود؛ [یکی از حالت‌ها در شکل زیر نمایش داده شده است]. بنابراین داریم:



$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{1 \times 2} = 21$$

❖ به چند طریق می‌توان یک دسته گل شامل ۶ شاخه از ۳ نوع گل مختلف ساخت؟

❑ فرض کنیم x_1 شاخه از نوع اول، x_2 شاخه از نوع دوم و x_3 شاخه از نوع سوم انتخاب شده باشد. در این صورت باید جمع این شاخه‌گل‌ها برابر ۶ باشد بنابراین:



$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{1 \times 2} = 28$$

❖ به چند طریق می‌توان ۸ کبوتر را در سه لانه متمایز قرار داد؟

❑ فرض کنیم x_1 کبوتر در لانه اول و x_2 کبوتر در لانه دوم و x_3 کبوتر در لانه سوم قرار بگیرد، در این صورت خواهیم داشت:



$$x_1 + x_2 + x_3 = 8 \Rightarrow \text{تعداد راه‌ها} = \binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45$$

🍏 میوه‌ها [سیب، پرتقال، گلابی، موز و ...] و همچنین حیوانات [کبوتر، گنجشک، گاو، گوسفند و ...] و مواردی نظیر آن‌ها را مشابه در نظر می‌گیریم، اما انسان‌ها را همواره متمایز فرض می‌کنیم.

تعداد جواب‌های صحیح و مثبت [جواب‌های طبیعی] معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

🍏 این مسئله معادل با این است که بخواهیم n پرتقال را بین k نفر توزیع کنیم به طوری که به هر کدام از افراد حداقل یک پرتقال برسد. برای ساده‌تر شدن حل معادله، ابتدا به هریک از افراد یک پرتقال می‌دهیم و $n - k$ پرتقال باقی‌مانده را طبق روال قبل بین افراد توزیع می‌کنیم.

❖ به چند طریق می‌توان ۱۰ پرتقال را بین ۴ نفر توزیع کرد به طوری که به هریک از افراد حداقل یک پرتقال برسد؟

❑ ابتدا به هریک از افراد یک پرتقال می‌دهیم [که اگر بعداً هیچ پرتقالی به آن‌ها نرسد هیچ مشکلی پیش نیاید]، حال ۶ پرتقال باقی‌مانده را بین افراد توزیع می‌کنیم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 - 1 - 1 - 1 - 1 = 6 \Rightarrow \binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 84$$

❖ به چند طریق می‌توان از میان ۳ نوع گل، یک دسته گل شامل ۷ شاخه ساخت، به طوری که از همه گل‌ها در دسته گل استفاده شود؟

❑ ابتدا از هر نوع گل یک شاخه برمی‌داریم، حال باید یک دسته گل شامل ۴ شاخه گل بسازیم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 7 - 1 - 1 - 1 = 4 \Rightarrow \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

$$\binom{n-1}{k-1}$$

🍏 به طور کلی تعداد جواب‌های طبیعی [صحیح و مثبت] معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با:

جزوه
حالا



۳۳۳

کاربرد مربع‌های لاتین

🍎 کاربرد مربع لاتین در مسائل برنامه‌ریزی است، مثلاً برنامه‌ریزی برای n نفر در n مکان مختلف و n زمان مختلف که هر کدام از افراد در هر مکان و در هر زمان دقیقاً یک بار حضور داشته باشند.

🍀 اگر بخواهیم برای ۳ مدرس x, y, z در سه کلاس A, B, C در ۳ جلسه اول و دوم و سوم در یک روز هفته برنامه‌ریزی کنیم به طوری که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک بار تدریس کند ۱۲ برنامه‌ریزی مختلف وجود دارد که هر کدام یک مربع لاتین 3×3 هستند، بعضی از این برنامه‌ریزی‌ها به صورت زیر است:

	A	B	C
اول	x	y	z
دوم	z	x	y
سوم	y	z	x

✓

	A	B	C
اول	y	z	x
دوم	x	y	z
سوم	z	x	y

✓

	A	B	C
اول	z	y	x
دوم	y	x	z
سوم	x	z	y

✓, ...

🍏 طبیعی است که اگر مربع برنامه‌ریزی لاتین نباشد، برنامه‌ریزی اشتباه خواهد بود.

🍌 به دو مربع زیر نگاه کنید و دلایل اشتباه بودن برنامه‌ریزی برای مدرسین را توضیح دهید.

	A	B	C
اول	x	y	z
دوم	y	z	x
سوم	x	y	z

❌

	A	B	C
اول	x	y	x
دوم	y	z	y
سوم	z	x	z

❌

📌 در مربع ۱ معلم z اصلاً به کلاس A نرفته یا معلم y اصلاً به کلاس C نرفته و در مربع ۲

در جلسه اول مدرس x هم‌زمان در کلاس A و C باید حضور داشته باشد و مدرس z نیز

در جلسه سوم هم‌زمان باید در دو کلاس A و C حضور داشته باشد.

🔢 در یک روز هفته برای ۳ مدرس در ۳ کلاس متمایز در ۳ جلسه متوالی به چند طریق، می‌توان برنامه تدریس تعیین کرد؟

(خارج - ۹۸)

۹ (۲)

۶ (۱)

۱۸ (۴)

۱۲ (۳)

🔢 برای برنامه‌ریزی نیاز به یک مربع لاتین 3×3 است و از آن‌جا که ۱۲ مربع لاتین 3×3 وجود دارد بنابراین به ۱۲ طریق می‌توان برنامه تدریس برای این ۳ مدرس در ۳ کلاس متمایز در ۳ جلسه متوالی تعیین کرد.

🔢 به چند طریق می‌توان در یک روز هفته برای ۳ مدرس x, y, z در سه کلاس A, B, C در ۳ جلسه متوالی برنامه‌ریزی کرد به طوری که مدرس x در

(مشابه خارج - ۹۸)

جلسه اول در کلاس A تدریس کند؟

۳ (۲)

۲ (۱)

۶ (۴)

۴ (۳)

🔢 اگر یک درایه از یک مربع لاتین 3×3 معلوم باشد، ۴ مربع لاتین قابل تصور است، که در ۲ تای آن‌ها اعداد روی قطر اصلی یکسان است و در ۲ تای دیگر اعداد روی قطر فرعی یکسان است.

🔢 به چند طریق می‌توان در یک روز هفته برای ۳ مدرس x, y, z در سه کلاس A, B, C در ۳ جلسه متوالی برنامه‌ریزی کرد به طوری که برنامه

(مشابه خارج - ۹۸)

جلسه اول برای این ۳ مدرس به صورت زیر باشد؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

🔢 اگر یک سطر یا یک ستون از مربع لاتین 3×3 معلوم باشد، دو مربع لاتین قابل تصور است، که در یکی از آن‌ها اعداد روی قطر اصلی یکسان است و در دیگری اعداد روی قطر فرعی یکسان است.

🔢 به چند طریق می‌توان در یک روز هفته برای ۳ مدرس x, y, z در سه کلاس A, B, C در ۳ جلسه متوالی برنامه‌ریزی کرد به طوری که برنامه

(مشابه خارج - ۹۸)

مدرس x برای کلاس‌های A, B, C معلوم باشد؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

🔢 اگر جایگاه یکی از اعداد در مربع لاتین مشخص شده باشد (مثلاً بدانی که «۱» در کدام خانه‌ها قرار گرفته است) دو مربع لاتین 3×3 با این شرایط قابل تصور است.

جزوه
حلالتی

ویژگی‌های مربع‌های لاتین هم‌دسته و غیر هم‌دسته 3×3

دسته دوم مربع‌های لاتین با درایه‌های قطر فرعی یکسان

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

دسته اول مربع‌های لاتین با درایه‌های قطر اصلی یکسان

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

1 مربع‌های غیر هم‌دسته متعامد هستند.

2 مربع‌های هم‌دسته با هم متعامد نیستند.

3 مربع‌های غیر هم‌دسته با جایگشت به یکدیگر قابل تبدیل نیستند.

4 مربع‌های هم‌دسته از اعمال جایگشت روی اعضای هم به دست می‌آیند.

هر مربع لاتین 3×3 با ۶ مربع لاتین دیگر متعامد است، بنابراین ۳۶ جفت مربع لاتین متعامد 3×3 مختلف وجود دارد.

قضایای تعامد

1 اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند، هر مربعی که با جایگشت روی اعضای B به دست آید با مربع A متعامد است.

مربع‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ متعامدند، بنابراین مربع A با مربع $B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ نیز متعامد است زیرا B_1 با جایگشت $[1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3]$ از روی مربع B به دست آمده است.

2 اگر A یک مربع لاتین $n \times n$ باشد، با اعمال هر جایگشت دلخواه روی اعضای A قطعاً مربع لاتینی غیر متعامد با A به دست می‌آید.

مربع لاتین $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. با اعمال جایگشت $[3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3]$ به مربع لاتین $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ می‌رسیم و معلوم است که A_1 با A متعامد نیست.

3 اگر A یک مربع لاتین 3×3 باشد با تعویض جای دو سطر یا دو ستون از A قطعاً مربعی متعامد با A به دست می‌آید و اگر A یک مربع لاتین از مرتبه ۴ یا بیشتر باشد، با تعویض جای دو سطر یا دو ستون از A قطعاً مربعی غیر متعامد با A به دست می‌آید.

در مربع لاتین $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ با تعویض سطر دوم و سوم به مربع $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ می‌رسیم که A و A_1 متعامد هستند.

در مربع لاتین $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ با تعویض سطرهاى دوم و سوم به مربع $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ می‌رسیم که با مربع A غیر متعامد است، زیرا در خانه‌های رنگ شده از مربع A رقم ۴ قرار دارد و در همین خانه‌ها از مربع A_1 ارقام متمایز ۱، ۲، ۳، ۴ را مشاهده نمی‌کنیم.

تعداد مربع‌های لاتین متعامد با مربع لاتین مقابل کدام است؟

(داخل - ۹۸)

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

- ۲ (۱)
۳ (۴)
۴ (۳)

4 مربع لاتین داده شده با ۶ مربع لاتین دیگر که اعداد روی قطر اصلی آن‌ها یکسان است، متعامد است.

چند جفت مربع متمایز متعامد به شکل مقابل می‌توان یافت؟

۳		
		۳

و

		۳
	۳	

- ۲ (۱)
۴ (۲)
۶ (۳)
۱۲ (۴)

2 می‌دانیم تعداد مربع‌های لاتینی که همه اعداد روی قطر اصلی یا قطر فرعی آن‌ها برابر ۳ باشد، دو تا است. که هر مربع لاتینی که اعداد روی قطر اصلی آن ۳ است، با دو مربع لاتین دیگری که همه اعداد روی قطر فرعی آن برابر ۳ است، متعامد می‌باشد. پس ۴ جفت مربع لاتین با شکل‌های گفته شده وجود دارد.

جزوه
حسابی