فهرست

فصل ۱
تابع

درس ۱
توابع چندجمله‌ای و توابع صعودی و نزولی

در سال‌های دهم و یازدهم دیدید تابع f مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن مؤلفه‌های اول متمایزند. برای هر ورودی (x) فقط یک خروجی (y) به دست می‌آید و هر خط عمودی (موازی محور y) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعهٔ ورودی‌های تابع را دامنه و مجموعهٔ خروجی‌ها را برد می‌نامیم.

در این بخش اول با تابع‌های چندجمله‌ای آشنا می‌شویم.

هر تابع به شکل $f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰$ را یک چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامیم. دقت کنید که a_n نباید صفر باشد.

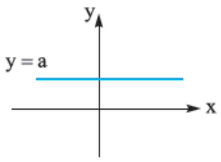
دامنهٔ تابع‌های چندجمله‌ای همیشه مجموعهٔ اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ است.

مثلاً این‌ها چندجمله‌ای هستند: $y=۱\,,\ y=\frac{۵x-۱}{۳}\,,\ y=\sqrt{۷}x^۲-۲x+۳\,,\ y=\frac{x^۵-\sqrt{۲}}{۲}$

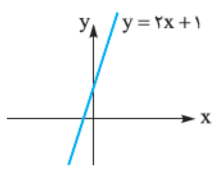
اما این‌ها چندجمله‌ای نیستند: $y=\frac{۱}{x}\,,\ y=\sqrt{x}\,,\ y=\frac{x^۲-۱}{x+۲}$

با بعضی از تابع‌های چندجمله‌ای قبلاً آشنا شدیم:

الف) چندجمله‌ای درجه‌صفر یا تابع ثابت به صورت $f(x)=a$ است. نمودارش یک خط افقی خواهد بود. دامنه‌اش $\mathbb{R}$ و بردش $\{a\}$ است. ببینید:

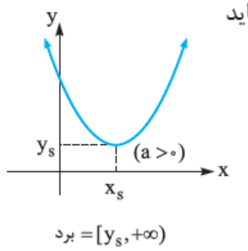


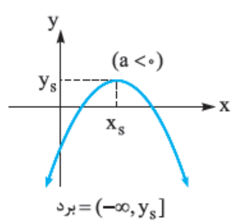
ب) چندجمله‌ای درجه‌اول یا تابع خطی، $f(x)=ax+b$ است $(a\neq ۰)$. نمودار آن یک خط مایل می‌شود و دامنه و بردش $\mathbb{R}$ هستند. این تابع‌ها همواره یک‌به‌یک هستند و ضابطهٔ وارون آن‌ها $f^{-۱}(x)=\frac{x-b}{a}$ است. (وارونشان هم خطی است.) ببینید:



پ) چندجمله‌ای درجه۲ یا سهمی، $f(x)=ax^۲+bx+c$ است (a نباید صفر شود). به یاد دارید که نمودارش به شکل سهمی بود.

خاطره رأس آن در $S(\frac{-b}{۲a},f(\frac{-b}{۲a}))$ قرار دارد.

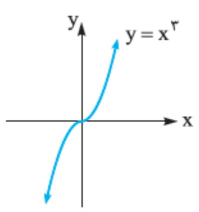




ت) چندجمله‌ای درجه‌سوم به صورت $f(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d$ معرفی می‌شود.

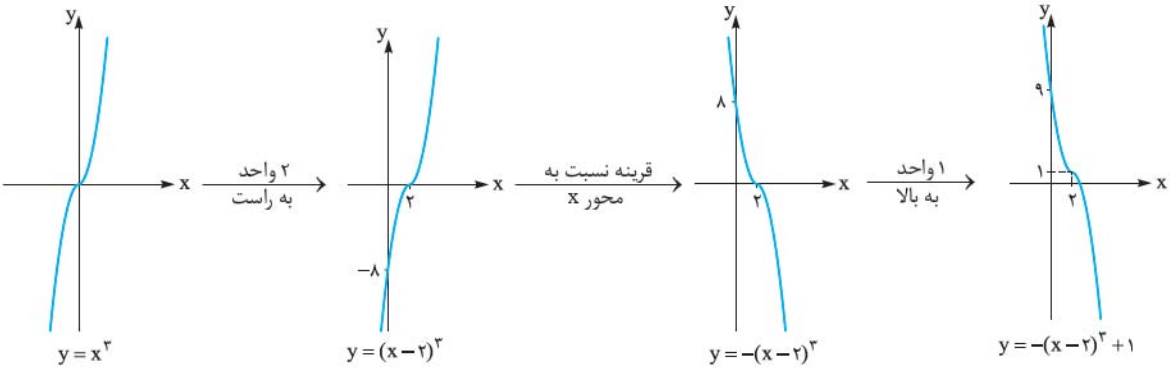
دامنه و برد آن همیشه $\mathbb{R}$ است. نمودار تابع $f(x)=x^۳$ را باید یاد بگیریم:

این تابع ۱به۱ است و وارون آن با ضابطهٔ $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$ معرفی می‌شود.

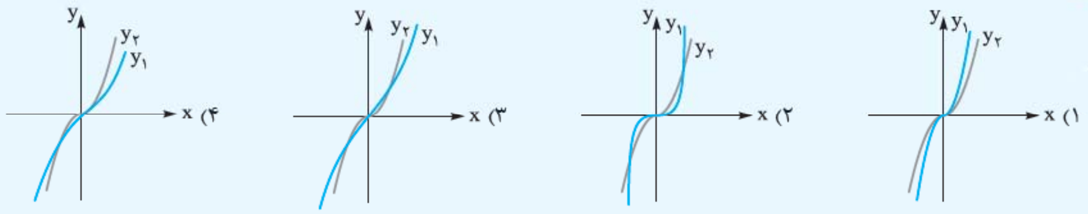


با استفاده از قوانین انتقال نمودار می‌توانیم شکل توابعی مثل $y=-(x-۲)^۳+۱$ را رسم کنیم. ببینید:

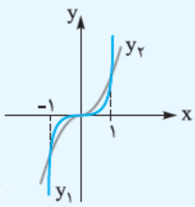
$$y=x^۳ \xrightarrow{\text{۲ واحد به‌راست}} y=(x-۲)^۳ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y=-(x-۲)^۳ \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y=-(x-۲)^۳+۱$$



تست در کدام شکل نمودار دو تابع $y_1 = x^3$ و $y_2 = x|x|$ نسبت به هم درست رسم شده‌اند؟



پاسخ گزینهٔ ۲ در بحث توان‌ها، در ریاضی دهم دیدیم که اعداد بین صفر و ۱، هر چه به توان بیشتری برسند، کوچک‌تر می‌شوند. پس در فاصلهٔ صفر تا ۱، مقدار x^3 از x^2 کم‌تر است یعنی در فاصلهٔ صفر تا ۱ باید $y_1 = x^3$ زیر $y_2 = x|x| = x^2$ باشد اما از ۱ به بعد مقدار x^3 از x^2 بیشتر می‌شود و y_1 بالاتر از y_2 قرار می‌گیرد.



با این توصیف، **۲** مناسب است.

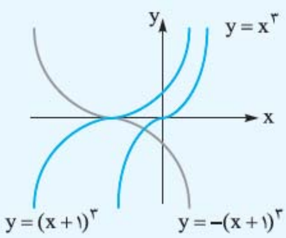
$$y_2 = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

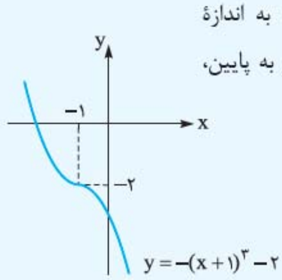
نمودارهای $y = x^3$ و $y = x|x|$ در سه نقطهٔ $(1,1)$ و $(0,0)$ و $(-1,-1)$ متقاطع‌اند.

تست منحنی نمودار تابع $y = -(x+1)^3 - 2$ وارون خود را در کدام ناحیه قطع می‌کند؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

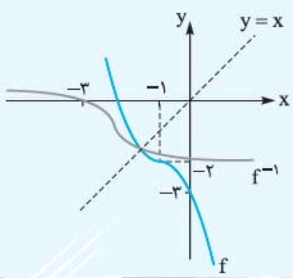
پاسخ گزینهٔ ۳ نمودار $y = -(x+1)^3 - 2$ با انتقال $y = x^3$ به اندازهٔ یک واحد به چپ، سپس قرینه نسبت به محور x و انتقال ۲ واحدی به پایین، رسم می‌شود:



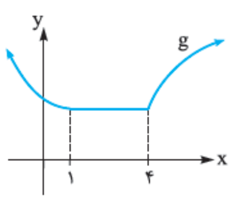


برای رسم وارون آن باید منحنی را نسبت به نیمساز نواحی اول و سوم قرینه کرد:

و با توجه به شکل، دو نمودار در یک نقطه روی نیمساز ناحیهٔ سوم متقاطع‌اند.



توابع صعودی و نزولی



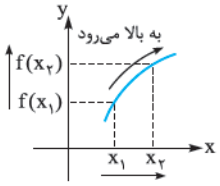
به نمودار مقابل دقت کنید:

وقتی x در دامنهٔ تابع افزایش می‌یابد، یعنی روی نمودار از چپ به راست حرکت می‌کنیم، روند تغییرات تابع بررسی می‌شود.

الف) اگر با افزایش x، مقدار y هم زیاد شود، با حرکت از چپ به راست روی نمودار، نقاط منحنی به بالا می‌روند.

یعنی با فرض $x_2 > x_1$ داریم: $f(x_2) > f(x_1)$

در این وضعیت می‌گوییم تابع اکیداً صعودی است.



دوتا ویژگی از تابع اکیداً صعودی یاد بگیرید:

۱ تابع حتماً یک‌به‌یک است و y تکراری ندارد.

۲ اگر از دو طرف نامساوی، تابع f را بزنیم یا از دو طرف نامساوی f بگیریم، جهت عوض نمی‌شود:

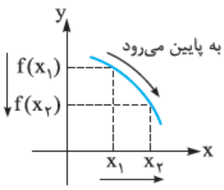
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

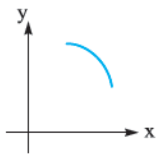
مثلاً تابع g در بالا، در بازهٔ $[4,+\infty)$ و البته هر زیرمجموعهٔ آن، اکیداً صعودی است.

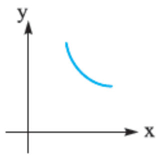
ب) اگر با افزایش x (حرکت از چپ به راست) مقدار y کاهش یابد (نقاط نمودار به پایین بروند) می‌گوییم تابع در آن بازه اکیداً نزولی است.

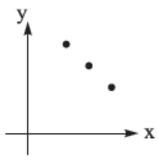
پس با فرض $x_2 > x_1$ داریم: $f(x_2) < f(x_1)$. تابع g در شکل بالا، در بازهٔ $(-\infty,+1]$ و هر زیرمجموعهٔ آن اکیداً نزولی است.

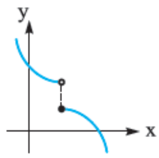
چند قیافهٔ تابع اکیداً نزولی را ببینید:











تمام این تابع‌ها در دامنهٔ خود اکیداً نزولی‌اند.

در مورد تابع اکیداً نزولی نیز همان دو ویژگی بیان می‌شوند:

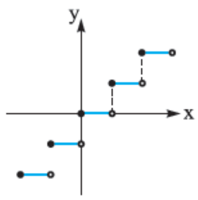
۱ تابع حتماً یک‌به‌یک است و y تکراری ندارد.

۲ با حذف f از دو طرف نامساوی یا f گرفتن از دو طرف، جهت عوض می‌شود یعنی: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

در اصطلاح می‌گوییم اگر f اکیداً صعودی باشد، تغییرات x و y هم‌جهت هستند. اما در تابع اکیداً نزولی، تغییر y در خلاف جهت تغییر x است.

پ) اگر تابع با افزایش x، ثابت بماند یا افزایش یابد، یعنی $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ آن را صعودی می‌نامیم. پس فرق صعودی و اکیداً صعودی این است که تابع صعودی می‌تواند دو نقطهٔ هم‌عرض داشته باشد و یک‌به‌یک نباشد.

مثلاً تابع g در فاصلهٔ $[1,4]$ یا $[2,5]$ یا ... صعودی است (و اکیداً صعودی نیست).

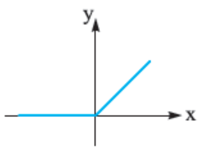


یک مثال عالی برای تابع صعودی، $y=[x]$ است که با افزایش x، مقادیر y ثابت مانده و یا زیاد می‌شوند:

$y=[x]$ صعودی است.

همچنین $y = x + |x|$:

$$y=\begin{cases} 2x & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



این تابع هم صعودی غیراکید است (گاهی ثابت می‌ماند).

ت) اگر با افزایش x، مقدار y کم شود یا ثابت بماند، می‌گوییم تابع نزولی است. پس شرط ریاضی تابع نزولی $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ است.

تابع g در شکل اول، روی بازهٔ $(-\infty,4]$ یا $(-5,2)$ یا ... نزولی است.

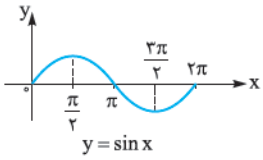
در این‌جا هم فرق نزولی و اکیداً نزولی، در امکان ثابت‌بودن مقدار تابع است. تابع نزولی می‌تواند yهای مساوی داشته باشد و یک‌به‌یک نشود.

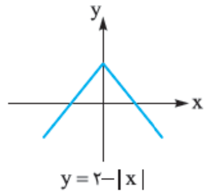
اگر تابع در بازه‌ای صعودی یا نزولی یا صعودی اکید یا نزولی اکید باشد، می‌گوییم در آن بازه اکیداً یکنوا است و اگر نزولی یا صعودی باشد می‌گوییم در آن بازه **یکنوا** است.

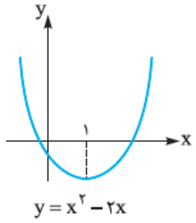
ث) اگر تابع در قسمت‌هایی از دامنه روند صعودی و در قسمت‌های دیگری روند نزولی داشته باشد، می‌گوییم نه صعودی است و نه نزولی.

این تابع‌ها یکنوا نیستند.

چندتا شکل غیریکنوا ببینید:







در $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$: اکیداً نزولی

در $(۰,\frac{\pi}{۲})$: اکیداً صعودی

در $(۰,\pi)$: غیریکنوا

در $(-\infty,۰)$: اکیداً صعودی

در $(۰,+\infty)$: اکیداً نزولی

در $\mathbb{R}$: غیریکنوا

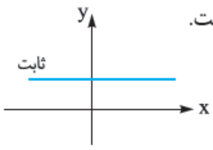
در $(-\infty,۱)$: نزولی اکید

در $(۱,+\infty)$: اکیداً صعودی

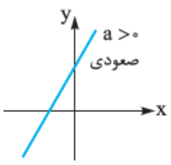
در $\mathbb{R}$: غیریکنوا

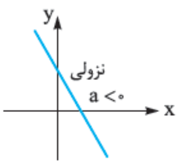
بررسی یکنوایی در تابع‌های مهم

۱ تابع ثابت $f(x)=c$: این تابع در کل دامنه‌اش هم صعودی و هم نزولی است؛ اما صعودی یا نزولی اکید نیست.

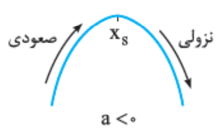


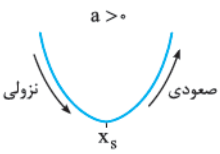
۲ تابع خطی $f(x)=ax+b$: اگر $a>۰$ باشد، صعودی و اگر $a<۰$ نزولی است.





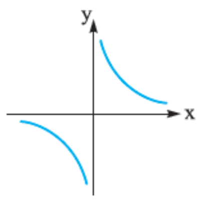
۳ تابع درجه‌دوم: تابع $y=ax^۲+bx+c$ در $\mathbb{R}$ یکنوا نیست اما در بازه‌های قبل از رأس و بعد از رأس سهمی یکنوا است.





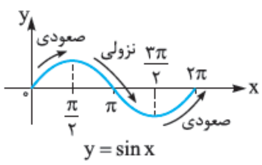
۴ تابع کسری $y=\frac{۱}{x}$: نمودار این تابع را بلدیم:

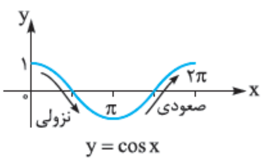
تابع در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است.



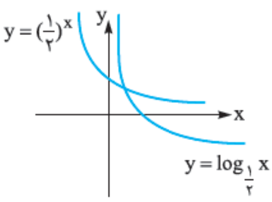
۵ تابع‌های $y=\sin x$ و $y=\cos x$:

نمودار این تابع‌ها در اصطلاح **نوسانی** است و در بازه‌های تکراری به طور متناوب صعودی و نزولی می‌شوند. ببینید:

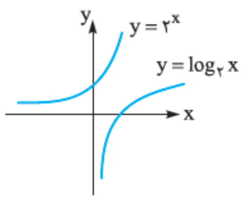




۶ تابع‌های نمایی و لگاریتمی $y=a^x$ و $y=\log_a x$ را می‌شناسیم.



وقتی $۰<a<۱$ باشد این تابع‌ها نزولی‌اند.



وقتی $a>۱$ باشد این تابع‌ها صعودی‌اند.

تست اگر $f=\{(۱,a-۱),(-۱,۲+۳a),(۲,۲a+۲)\}$ تابعی اکیداً صعودی باشد، مقادیر a در کدام بازه است؟

۱) $(-۲,۱)$
۲) $(-\frac{۲}{۳},۱)$
۳) $(-۳,-\frac{۳}{۲})$
۴) $(-\frac{۲}{۳},۲)$

پاسخ گزینهٔ ۳ باید با افزایش x، yها هم زیاد شوند. پس داریم:

x	y
-۱	$۲+۳a$
۱	$a-۱$
۲	$۲a+۲$

$$\underbrace{۲+۳a<a-۱}_{\text{الف}}\overbrace{\,<۲a+۲}^{\text{ب}}$$

(الف) $۲+۳a<a-۱ \Rightarrow ۲a<-۳ \Rightarrow a<-\frac{۳}{۲}$

(ب) $a-۱<۲a+۲ \Rightarrow -۳<a$

پس داریم: $-۳<a<-\frac{۳}{۲}$

تست به ازای کدام مقادیر a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=(۳a-a^۲)x+|۲x-۱|$ اکیداً صعودی است؟

۱) $(\frac{۳-\sqrt{۱۷}}{۲},۱)$ ۲) $(۲,\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲})$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(-۲,-۱)$

پاسخ گزینهٔ ۳ اول برای $x\geq\frac{۱}{۲}$ و $x<\frac{۱}{۲}$، قدرمطلق را برداریم:

$$x\geq\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x-۱\geq ۰ \Rightarrow f(x)=(۳a-a^۲)x+۲x-۱=(۳a-a^۲+۲)x-۱$$

$$x<\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x-۱<۰ \Rightarrow f(x)=(۳a-a^۲)x-(۲x-۱)=(۳a-a^۲-۲)x+۱$$

پس نمودار این تابع از دو نیم‌خط ساخته می‌شود برای اکیداً صعودی‌بودن باید شیب این دو نیم‌خط مثبت باشد یعنی:

$$\begin{cases}۳a-a^۲+۲>۰ \Rightarrow a^۲-۳a-۲<۰\\ ۳a-a^۲-۲>۰ \Rightarrow a^۲-۳a+۲<۰\end{cases}$$

a		$\frac{۳-\sqrt{۱۷}}{۲}$		$\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲}$	
$a^۲-۳a-۲$	+		−		+
			ج		

a		۱		۲	
$a^۲-۳a+۲$	+		−		+

با توجه به $\sqrt{۱۷}\simeq ۴/۱$ جواب دومی به صورت $(-۰/۵,۳/۵)$ و جواب اولی $(۱,۲)$ است که اشتراک آن‌ها می‌شود $(۱,۲)$.

چند نکته در مورد توابع ترکیبی

۱) اگر f و g هر دو صعودی باشند $f+g$ نیز صعودی است.

۲) اگر f و g هر دو نزولی باشند $f+g$ نزولی است.

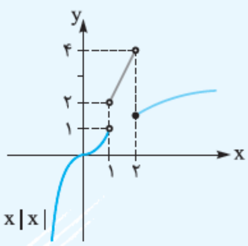
۳) اگر f صعودی و g نزولی باشد $f-g$ صعودی است.

۴) اگر f اکیداً صعودی و g صعودی باشد $f+g$ نیز اکیداً صعودی است.

تست تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x|x| & x<۱\\ ۲x & ۱<x<۲\\ \sqrt{x} & x\geq ۲\end{cases}$ در کدام‌یک از بازه‌های زیر یکنوا است؟

۱) $(۰,۲)$ ۲) $(۱,۲]$ ۳) $(۱,۳)$ ۴) $(-۱,۱)$

پاسخ گزینهٔ ۴ نمودار را ببینید:



تابع در $x=۱$ تعریف نمی‌شود، پس اجازه نداریم بازهٔ $(۰,۲)$ را انتخاب کنیم و ۱ درست نیست.

در فاصلهٔ $(۱,۲]$، به خاطر نقطهٔ $x=۲$، ابتدا صعود و در پایان نزول داریم.

در فاصلهٔ $(۱,۳)$ ابتدا تابع بالا و سپس پایین می‌رود.

اما در فاصلهٔ $(-۱,۱)$ تابع اکیداً صعودی و یکنوا است.

تست کدام تابع اکیداً یکنوا است؟

۱) $y=x[x]$ ۲) $y=x-[x]$ ۳) $y=x+[x]$ ۴) $y=۲x^۳-x^۲$

پاسخ گزینهٔ ۳ در گزینه‌های (۱) و (۴) تابع اکیداً یکنوا نیست؛ چون مثلاً $f(0)$ و $f(\frac{1}{2})$ هر دو برابر صفرند.

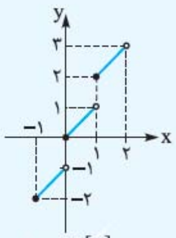
◄ در تابع اکیداً یکنوا y تکراری نداریم.

در مورد (۲) هم می‌دانیم مقدار تابع برای تمام xهای صحیح صفر است، پس این هم نیست.

اما نمودار (۳) را ببینید:

اکیداً صعودی است.

◄ $[x]$ صعودی و x اکیداً صعودی است، پس جمع آن‌ها اکیداً صعودی خواهد بود.



$y=x+[x]$

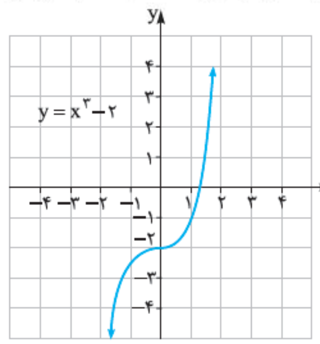
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- کدام‌یک از توابع زیر چندجمله‌ای از درجهٔ ۵ است؟

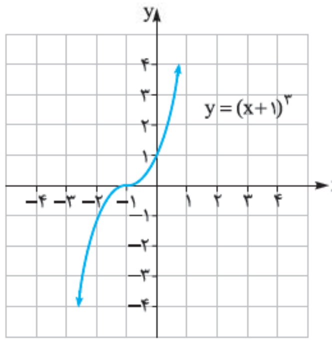
۱) $f(x)=5x+3$ ۲) $f(x)=x^5+x\sqrt{x}+3$ ۳) $f(x)=2x^5-4x^3+\sqrt{7}x$ ۴) $f(x)=\dfrac{x^7+x}{x^2}$

۲- با توجه به نمودار تابع $y=x^3$، کدام تابع درست رسم نشده است؟ *(کتاب درسی)*

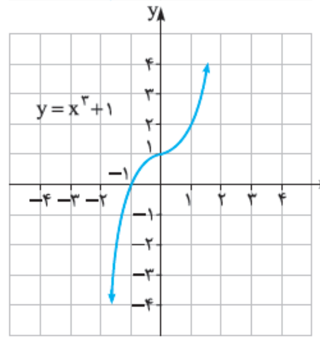
۱)



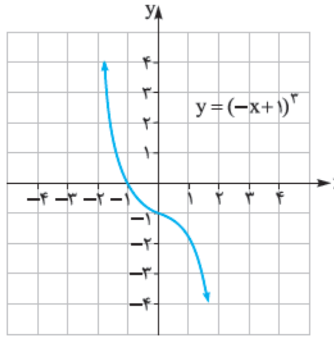
۲)



۳)

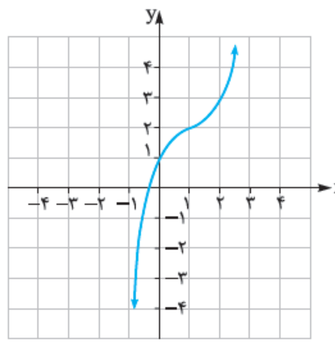


۴)

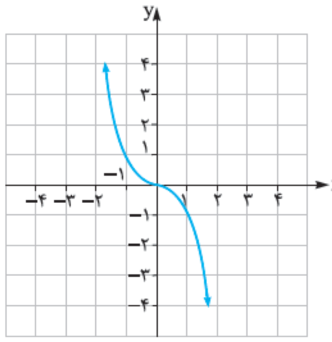


۳- نمودار تابع $y=(x-1)^3+2$ کدام است؟ *(کتاب درسی)*

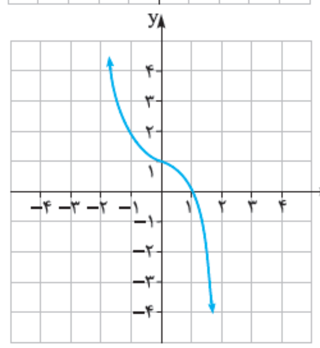
۱)



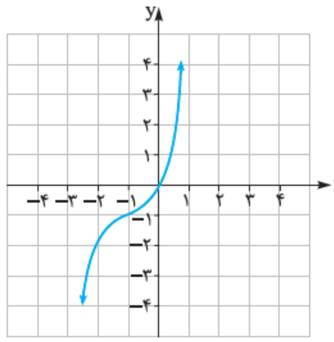
۲)



۳)



۴)



۴- در تابع $y=(x-۱)^۳-۱$، چند عدد صحیح در اشتراک برد و دامنهٔ این تابع قرار <u>ندارند</u>؟ *(کتاب درسی)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵- اشتراک بردهای توابع $f(x)=x^۳-۲$ و $g(x)=-(x-۲)^۳$ کدام است؟ *(تمرین کتاب درسی)*

۱) $(-۲,+\infty)$ ۲) $(-۲,۲)$ ۳) $(-\infty,-۲)$ ۴) $\mathbb{R}$

۶- بازه‌ای با بزرگ‌ترین طول که تابع $f(x)=x^۳$ بالاتر از تابع $g(x)=x^۲$ قرار <u>ندارد</u>، کدام است؟ *(کتاب درسی)*

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $(-\infty,۰]$ ۴) $(-\infty,۱]$

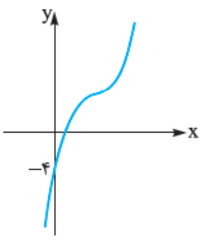
۷- نمودار تابع $y=x^۳-۳x^۲+۳x$ از کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات عبور <u>نمی‌کند</u>؟

۱) اول و سوم ۲) دوم و سوم ۳) سوم و چهارم ۴) دوم و چهارم

۸- به ازای چه مقادیری از h تابع $f(x)=x^۳+۶x^۲+۱۲x+h$ از ربع دوم عبور <u>نمی‌کند</u>؟

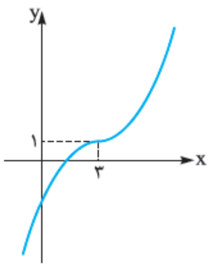
۱) $h\le ۰$ ۲) $h\ge ۰$ ۳) $h\le ۸$ ۴) $h\ge ۸$

۹- اگر نمودار تابع $f(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x+k$ به صورت مقابل باشد، $f(۳)$ کدام است؟



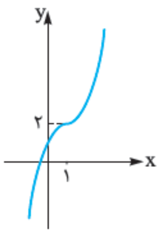
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۰- اگر نمودار تابع $f(x)=(x-m)^۳+h$ به شکل زیر باشد، تابع $g(x)=-(x-h)^۳+m$ از کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات عبور <u>نمی‌کند</u>؟



۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

۱۱- اگر نمودار تابع $f(x)=(x+a)(x^۲+bx+c)$ به صورت مقابل باشد، $ab+c$ کدام است؟

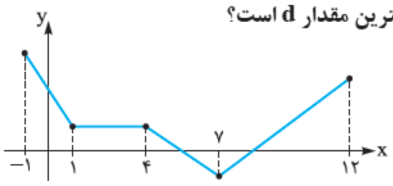


۱) ۱
۲) −۱
۳) ۳
۴) −۳

۱۲- کدام تابع نزولی است؟ *(کتاب درسی)*

۱) $y=x^۳-۳$ ۲) $y=x+۱$ ۳) $y=-x^۲+۴$ ۴) $y=-x+۳$

۱۳- تابع شکل زیر در بازهٔ $[a,b]$ نزولی و در بازهٔ $[c,d]$ صعودی است. بیشترین مقدار b چند برابر بیشترین مقدار d است؟



۱) $\frac{۷}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۲}{۷}$
۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۴}{۱۲}$

۱۴- کدام‌یک از توابع زیر اکیداً صعودی است؟ *(کتاب درسی)*

۱) $f(x)=|x|$ ۲) $f(x)=x^۲$ ۳) $f(x)=x+|x|$ ۴) $f(x)=x|x|$

۱۵- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x^۳|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$، چگونه است؟ *(خارج ۹۵)*

۱) نزولی ۲) صعودی ۳) وارون‌ناپذیر ۴) یک‌به‌یک

۱۶- تابع $f(x)=\sqrt{(x-۳)^۲+۱}$ چگونه است؟

۱) ابتدا صعودی و سپس نزولی ۲) ابتدا نزولی و سپس صعودی ۳) صعودی ۴) نزولی

۱۷- اگر تابع $f=\{(۱,۱),(۳,۶),(\sqrt{۲},m^۲-۲),(۱۰,۲۰)\}$ اکیداً صعودی باشد، حدود m شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۸- تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 1 \\ 1-x^2 & x\leq 0 \end{cases}$ چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) غیریکنوا ۴) هم صعودی و هم نزولی

۱۹- کدام‌یک از توابع زیر در دامنهٔ خود اکیداً صعودی نیست؟

۱) $f(x)=\frac{|x|}{x}+x$ ۲) $f(x)=2-|x-1|$ ۳) $f(x)=2x-|x-1|$ ۴) $f(x)=\begin{cases} -x^2 & x\leq 0 \\ x^2-1 & x>1 \end{cases}$

۲۰- دو تابع $y=x[x]$ و $y=x+|x|$ در کدام بازه اکیداً صعودی هستند؟

۱) $[0,1]$ ۲) $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ ۳) $[0,\frac{1}{2}]$ ۴) $[\frac{3}{2},\frac{7}{3}]$

۲۱- تابع $g(x)=|x-2|-|x-1|$ چگونه است؟

۱) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۲) ابتدا نزولی، سپس صعودی ۳) صعودی ۴) نزولی

۲۲- تابع $f(x)=|x|(x-1)$ در بازهٔ (a,b)، اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۳- تابع $y=|x-1|+|x+1|$ در کدام بازهٔ زیر صعودی است؟

۱) $[-2,+\infty)$ ۲) $[-\frac{1}{2},+\infty)$ ۳) $(-\infty,1]$ ۴) $(-\infty,\frac{3}{2})$

۲۴- تابع $f(x)=\frac{1}{|x|}$ مفروض است. در کدام‌یک از بازه‌های زیر برای هر x_1 و x_2 عضو این بازه رابطهٔ $f(x_1)>f(x_2) \Leftrightarrow x_1<x_2$ برقرار است؟

۱) $(-3,-1)$ ۲) $(-2,0)$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(0,1)$

۲۵- تابع $x>0$ و $f(x)=|x^2-2x|$ در بازهٔ (a,b) نزولی اکید است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۶- در تابع $y=\sin\frac{x}{2}$ در کدام بازه با افزایش طول نقاط، مقدار تابع کاهش نمی‌یابد؟

۱) $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ ۲) $[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ ۳) $[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}]$ ۴) $[\pi,\frac{5\pi}{2}]$

۲۷- کدام‌یک از توابع زیر یک‌به‌یک و غیریکنوا است؟ *(کتاب درسی)*

۱) $y=2^x-2$ ۲) $y=-\log_2 x+2$ ۳) $y=x^2$ ۴) $y=\frac{1}{x}$

۲۸- چندتا از عبارات زیر درست است؟

الف) اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f+g$ یک تابع ثابت است.

ب) اگر f صعودی اکید و g صعودی باشد، $f+g$ صعودی اکید است.

پ) اگر f صعودی اکید و g نزولی باشد، $f-g$ صعودی اکید است.

ت) اگر f تابعی صعودی اکید و g تابعی ثابت باشد، $f\times g$ اکیداً صعودی است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۹- اگر f یک تابع اکیداً نزولی بوده و $f(3)=0$ باشد. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

۱) $[0,3]$ ۲) $\mathbb{R}-(0,3)$ ۳) $(-\infty,3]$ ۴ $[3,+\infty)$

۳۰- کدام عبارت دربارهٔ تابع $f(x)=\begin{cases} -2x-3 & x<-4 \\ 3 & -4\leq x<2 \\ 3x-2 & x\geq 2 \end{cases}$ درست است؟ *(کتاب درسی)*

۱) یکنوا است. ۲) معکوس‌پذیر است. ۳) در بازهٔ $(-\infty,2]$ نزولی است. ۴) در بازهٔ $[-4,+\infty)$ صعودی است.

۳۱- به ازای کدام مقادیر x، نمودار تابع $y=4-x^2$ صعودی است؟

۱) $x>0$ ۲) $x<0$ ۳) $-2<x<2$ ۳) $-4<x<4$

۳۲- تابع $f(x)=3x^2-6x+2$ روی بازهٔ $[-1,2]$ چگونه است؟

۱) ابتدا صعودی سپس نزولی ۲) ابتدا نزولی سپس صعودی ۳) نزولی ۴) صعودی

۳۳- اگر تابع $f(x)=x^2-mx+3$ در بازهٔ $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد، محدودهٔ m کدام است؟

۱) $m=2$ ۲) $m=-2$ ۳) $m\leq 2$ ۴) $m\geq -2$

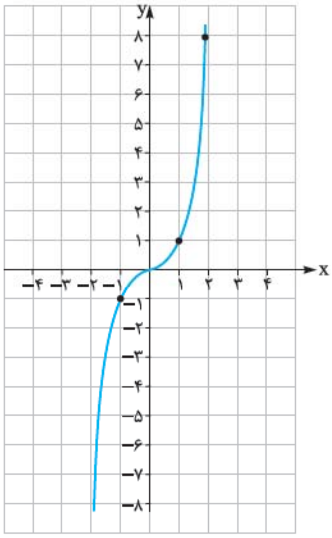
۱- **گزینهٔ ۳** چندجمله‌ای از درجهٔ ۵ یعنی بزرگ‌ترین توان x در چندجمله‌ای باید برابر ۵ باشد و از طرفی تمام xها دارای توان‌های صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشند. پس:

(۱) درست نیست چون از درجهٔ ۱ است.

(۲) درست نیست چون x با توان کسری یعنی $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ داریم.

(۳) درست است و (۴) هم درست نیست؛ چون در مخرج x^2 یعنی x^{-2} داریم.

۲- **گزینهٔ ۴** نمودار تابع $y=x^3$ به صورت مقابل است. برای رسم هر کدام از گزینه‌ها باید به ترتیب زیر عمل کرد.



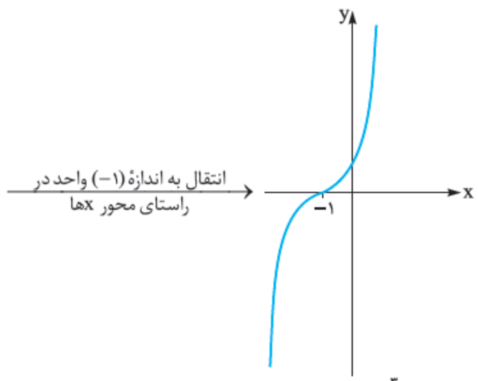
(۱) $y=x^3-2 \Leftarrow$ انتقال به اندازهٔ (-2) واحد در راستای محور yها

(۲) $y=(x+1)^3 \Leftarrow$ انتقال به اندازهٔ (-1) واحد در راستای محور xها

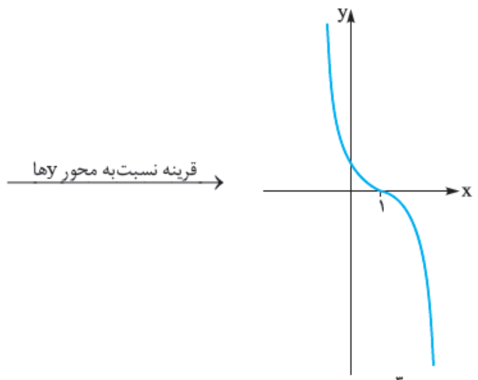
(۳) $y=x^3+1 \Leftarrow$ انتقال به اندازهٔ $(+1)$ واحد در راستای محور yها

(۴) $y=(-x+1)^3 \Leftarrow$ اول انتقال به اندازهٔ (-1) واحد در راستای محور xها و بعد قرینه نسبت به محور yها

با بررسی گزینه‌ها می‌بینیم که (۴) درست رسم نشده است:



$y=(x+1)^3$

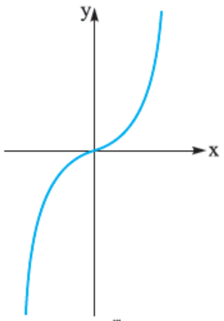


$y=(-x+1)^3$

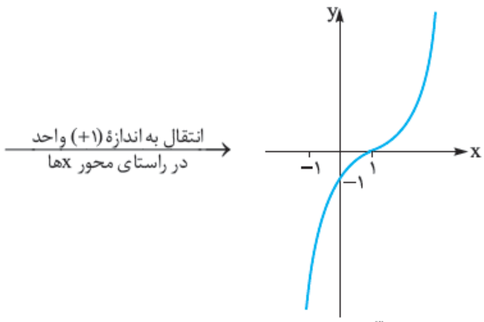
می‌توانیم با عددگذاری هم گزینه‌ها را کنترل کنیم مثلاً $x=1$ را قرار دهیم.

۳- **گزینهٔ ۱** **روش اول** در تابع $y=(x-1)^3+2$ نمودار شبیه x^3 است و اگر به جای x بگذاریم صفر، مقدار y می‌شود ۱؛ پس نمودار باید از $(0,1)$ بگذرد که فقط (۱) این‌طور است.

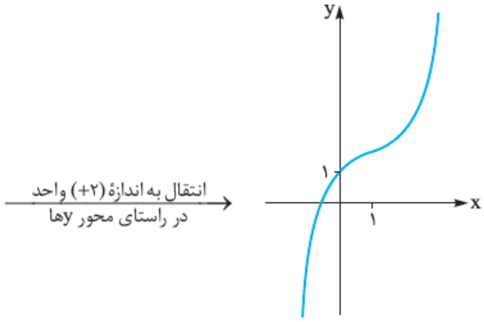
روش دوم نمودار $y=(x-1)^3+2$ را از روی نمودار $y=x^3$ رسم می‌کنیم:



$y=x^3$



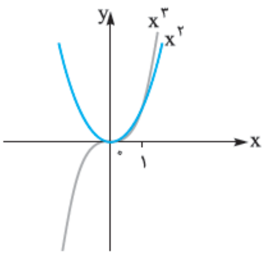
$y=(x-1)^3$



۴- **گزینهٔ ۱** می‌دانیم دامنه و برد تابع‌های چندجمله‌ای درجهٔ فرد همواره برابر $\mathbb{R}$ است، پس دامنه و برد تابع $y=(x-1)^3-1$ که از درجهٔ ۳ است برابر با $\mathbb{R}$ و اشتراک دامنه و برد (که آن هم می‌شود $\mathbb{R}$) شامل تمام اعداد صحیح است.

۵- **گزینهٔ ۴** می‌دانیم برد تابع $y=x^3$ برابر $\mathbb{R}$ یعنی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ است. حالا برد تابع f و g را تعیین می‌کنیم. نمودار تابع $f(x)=x^3-2$ با انتقال نمودار تابع $y=x^3$ به اندازهٔ (-2) واحد در راستای محور yها به دست می‌آید پس برد تابع f هم برابر $\mathbb{R}$ است، نمودار تابع $g(x)=-(x-2)^3$ با انتقال نمودار تابع $y=x^3$ به اندازهٔ دو واحد در راستای محور xها و سپس قرینه‌کردن نمودار نسبت به محور xها به دست می‌آید. پس برد تابع g نیز برابر $\mathbb{R}$ است پس اشتراک برد دو تابع f و g نیز برابر است با $\mathbb{R}$. (البته می‌توانستیم نمودار تابع f و g را رسم کنیم و به همین نتیجه برسیم.)

۶- **گزینهٔ ۴** نمودار دو تابع $f(x)=x^3$ و $g(x)=x^2$ را رسم می‌کنیم:

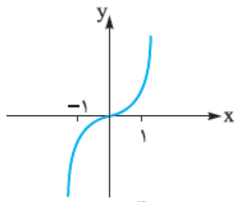


با توجه به شکل نمودار، تابع $f(x)=x^3$ در بازهٔ $(1,+\infty)$ بالای نمودار تابع $g(x)=x^2$ قرار می‌گیرد پس بازه‌ای که نمودار f بالاتر از نمودار g قرار ندارد برابر است با $(-\infty,1]$.

۷- **گزینهٔ ۴** برای رسم نمودار تابع $y=x^3-3x^2+3x$ سعی می‌کنیم ضابطهٔ تابع را ساده کنیم. با استفاده از اتحاد مکعب مجموع دوجمله‌ای یعنی $(a+b)^3$ داریم: $y-1=x^3-3x^2+3x-1$

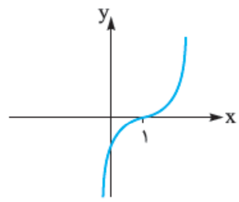
$$\Rightarrow y-1=(x-1)^3 \Rightarrow y=(x-1)^3+1$$

حالا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



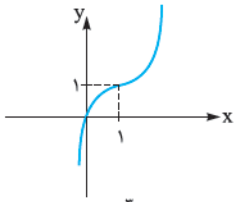
$y=x^3$

انتقال (+۱) واحد
در راستای محور xها



$y=(x-1)^3$

انتقال (+۱) واحد
در راستای محور yها



$y=(x-1)^3+1$

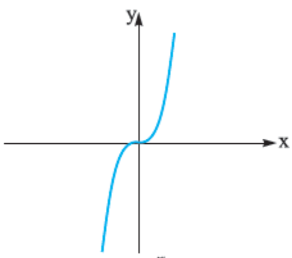
با توجه به شکل، نمودار تابع از ناحیه‌های اول و سوم دستگاه مختصات عبور می‌کند و از ناحیه‌های دوم و چهارم عبور نمی‌کند.

۸- **گزینهٔ ۱** اول ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=x^3+6x^2+12x+h=x^3+6x^2+12x+8-8+h$$

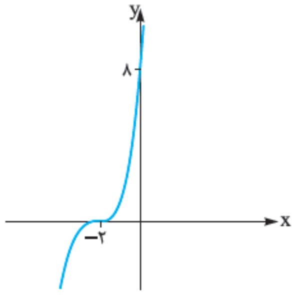
$$=(x+2)^3+h-8$$

حالا اگر نمودار تابع را رسم کنیم:



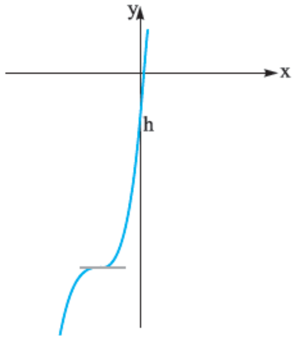
$y=x^3$

انتقال به اندازهٔ (−۲) واحد
در راستای محور xها



$y=(x+2)^3$

انتقال به اندازهٔ (h − ۸) واحد
در راستای محور yها

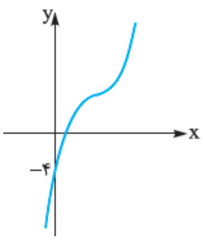


$y=(x+2)^3+h-8$

حالا با توجه به نمودار، برای این‌که نمودار تابع $y=(x+2)^3+h-8$، از ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات عبور نکند باید $h\le 0$ باشد.

۹- **گزینهٔ ۳** با توجه به نمودار داده‌شده، تابع از نقطهٔ $(0,-4)$ عبور می‌کند، پس داریم: $f(x)=x^3-6x^2+12x+k$

$$f(0)=-4 \Rightarrow k=-4$$

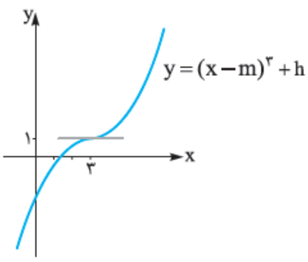


بنابراین $f(x)=x^3-6x^2+12x-4$، حالا برای پیداکردن مقدار $f(3)$ بهتر است ضابطه را کمی ساده‌تر کنیم:

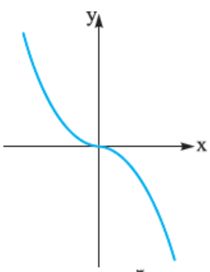
$$f(x)=x^3-6x^2+12x-8+4$$

$$=(x-2)^3+4 \Rightarrow f(3)=1^3+4=5$$

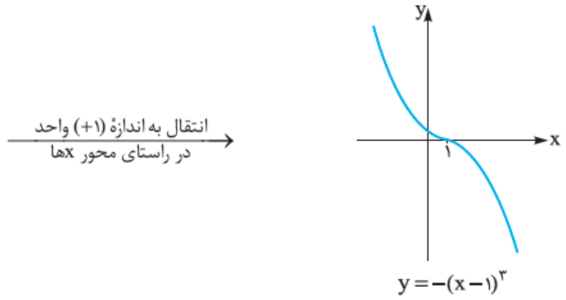
۱۰- **گزینهٔ ۳** با توجه به نمودار تابع $y=(x-m)^3+h$ داریم: $m=3$ و $h=1$.

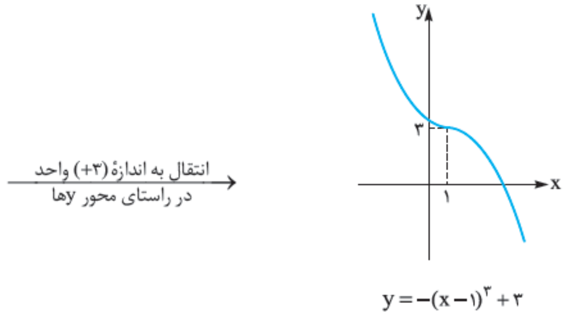


پس تابع $g(x)$ به صورت $g(x)=-(x-1)^3+3$ است. نمودار تابع $g(x)$ را رسم می‌کنیم:



$y=-x^3$





حالا با توجه به شکل، نمودار تابع $g(x)$ از ناحیهٔ سوم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.

۱۱- گزینهٔ ۳ با توجه به نمودار داده‌شده ضابطهٔ تابع $f(x)=(x-1)^3+2$ به شکل $f(x)=(x+a)(x^2+bx+c)$ باید باشد، پس داریم:

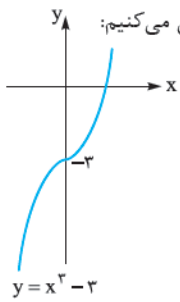
$$(x-1)^3+2=(x+a)(x^2+bx+c) \Rightarrow x^3-3x^2+3x-1+2$$
$$=x^3+bx^2+cx+ax^2+abx+ac \Rightarrow x^3-3x^2+3x+1$$
$$=x^3+(a+b)x^2+(ab+c)x+ac$$

حالا باید ضرایب جمله‌های هم‌درجه را مساوی قرار دهیم:

$$\begin{cases}1=1\\ a+b=-3\\ ab+c=3\\ ac=1\end{cases}$$

پس دیگر لازم نیست a، b و c را پیدا کنیم، داریم $ab+c=3$.

۱۲- گزینهٔ ۴ هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

① 

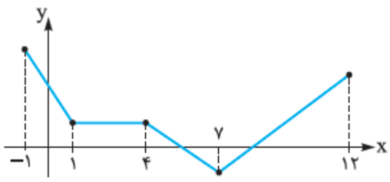
② $y=x+1 \Rightarrow$ خط با شیب مثبت $\Rightarrow$ صعودی

③ $y=-x^2+4$

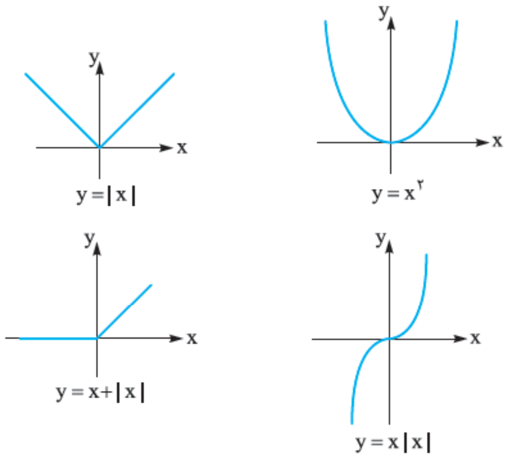
$\Rightarrow$ چون سهمی است و دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است، پس غیریکنوا است

④ $y=-x+3 \Rightarrow$ خط با شیب منفی $\Rightarrow$ نزولی

۱۳- گزینهٔ ۱ نمودار تابع در بازه‌های $[-1,1]$ و $[4,7]$ نزولی اکید و در بازهٔ $[1,4]$ ثابت است. پس تابع در بازهٔ $[-1,7]$ نزولی است، یعنی $[a,b]=[-1,7]$. نمودار تابع در بازهٔ $[7,12]$ صعودی است، پس $[c,d]=[7,12]$، بنابراین بیشترین مقدار b برابر ۷ و بیشترین مقدار d برابر ۱۲ است پس نسبت b به d برابر است با $\frac{7}{12}$.



۱۴- گزینهٔ ۴ نمودار هر کدام از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

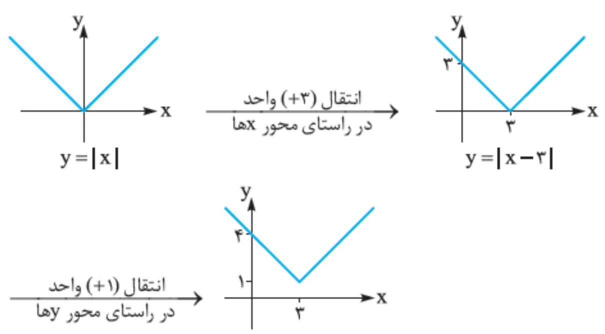


با توجه به نمودارها، تابع $y=x|x|$ صعودی اکید است.

۱۵- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $f(x)=|x^3|$ را رسم می‌کنیم:

پس تابع $y=|x^3|$ وارون‌ناپذیر است.

۱۶- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $f(x)=|x-3|+1$ را رسم می‌کنیم:



حالا با توجه به نمودار (از چپ به راست) تابع $f(x)$ ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

۱۷- گزینهٔ ۲ می‌دانیم در یک تابع اکیداً صعودی اگر x زیاد شود، y زیاد می‌شود؛ یعنی $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$، پس بهتر است زوج مرتب‌های تابع f را به ترتیب صعودی برحسب x مرتب کنیم:

$$f=\{(1,1),(\sqrt{2},m^2-2),(3,6),(10,20)\}$$

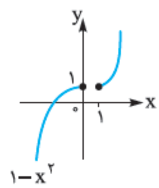
$x=\sqrt{2}$ بین $1<\sqrt{2}<3$ است. پس باید $f(1)<f(\sqrt{2})<f(3)$ باشد:

$$1<m^2-2<6 \Rightarrow 3<m^2<8 \Rightarrow \sqrt{3}<|m|<2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} < m < 2\sqrt{2} \Rightarrow m_{\text{مقدار صحیح}} = 2 \\ -2\sqrt{2} < m < -\sqrt{3} \Rightarrow m_{\text{مقدار صحیح}} = -2 \end{cases}$$

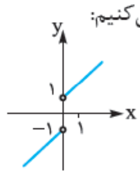
پس حدود m شامل دو عدد صحیح است.

۱۸- گزینهٔ ۱ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 1 \\ 1-x^2 & x\leq 0 \end{cases}$ را رسم می‌کنیم:

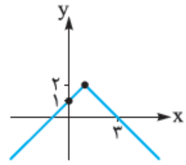


با توجه به نمودار هر کدام از شاخه‌های منحنی، صعودی اکید است اما کل تابع چون $f(0)=f(1)$ است صعودی می‌شود (اکید نیست).

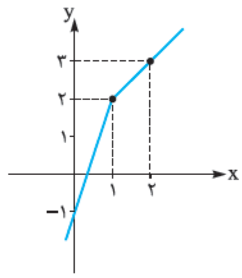
۱۹- گزینهٔ ۲ نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



$$f(x)=\frac{|x|}{x}+x=\begin{cases} 1+x & x>0 \\ -1+x & x<0 \end{cases}$$

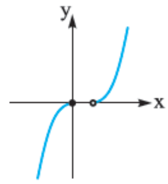


$$f(x)=2-|x-1|$$



$$f(x)=2x-|x-1|$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 1 \\ 3x-1 & x<1 \end{cases}$$

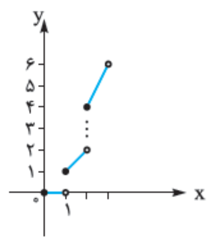


$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & x\leq 0 \\ x^2-1 & x>1 \end{cases}$$

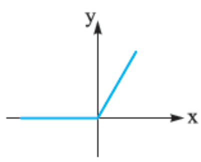
با توجه به نمودارها تابع $f(x)=2-|x-1|$ غیریکنوا است و بقیهٔ تابع‌ها صعودی اکید هستند.

۲۰- گزینهٔ ۴ نمودار هر دو تابع را در بازهٔ $[0,3)$ (بازه‌ای که شامل تمام گزینه‌ها باشد) رسم می‌کنیم:

$$y=x[x]=\begin{cases} 0 & 0\leq x<1 \\ x & 1\leq x<2 \\ 2x & 2\leq x<3 \end{cases}$$



$$y=x+|x|=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 2x & x\geq 0 \end{cases}$$

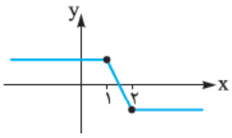


تابع $y=x+|x|$ به ازای $x\geq 0$ صعودی اکید است، پس فقط کافی است تابع $y=x[x]$ را بررسی کنیم. تابع $y=x[x]$ در بازهٔ $[0,1)$ ثابت است پس باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که شامل قسمتی از بازهٔ $[0,1)$ نباشد، یعنی بازهٔ $[\frac{3}{2},\frac{7}{3}]$.

۲۱- گزینهٔ ۴ نمودار تابع $g(x)=|x-2|-|x-1|$ را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x<1 \Rightarrow y=-x+2+x-1=1 \\ 1\leq x<2 \Rightarrow y=-x+2-x+1=-2x+3 \\ 2\leq x \Rightarrow y=x-2-x+1=-1 \end{cases}$$

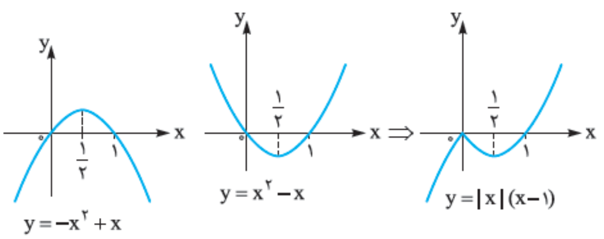
$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases} 1 & x<1 \\ -2x+3 & 1\leq x<2 \\ -1 & 2\leq x \end{cases}$$



تابع در بازهٔ $(-\infty,1]$ ثابت و در بازهٔ $[1,2]$ نزولی اکید و در بازهٔ $[2,+\infty)$ ثابت است. پس تابع در کل نزولی است.

۲۲- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=|x|(x-1)$ را رسم می‌کنیم:

$$\begin{matrix} x<0 \Rightarrow y=-x^2+x \\ x\geq 0 \Rightarrow y=x^2-x \end{matrix} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -x^2+x & x<0 \\ x^2-x & x\geq 0 \end{cases}$$



با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $[0,\frac{1}{2}]$ نزولی اکید است پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$ است.

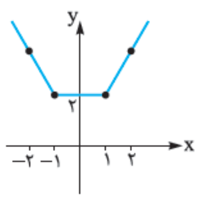
۲۳- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=|x-1|+|x+1|$ را رسم می‌کنیم:

$$x\leq -1 \Rightarrow y=-x+1-x-1=-2x$$

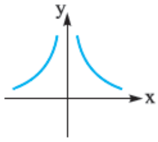
$$-1\leq x\leq 1 \Rightarrow y=-x+1+x+1=2$$

$$1\leq x \Rightarrow y=x-1+x+1=2x \Rightarrow y=\begin{cases} -2x & x\leq -1 \\ 2 & -1\leq x\leq 1 \\ 2x & 1\leq x \end{cases}$$

نمودار تابع در بازهٔ $[-1,1]$ ثابت و در بازهٔ $[1,+\infty)$ صعودی اکید است، پس تابع در بازهٔ $[-1,+\infty)$ صعودی است. حالا باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که زیرمجموعهٔ بازهٔ $[-1,+\infty)$ باشد که می‌شود $[-\frac{1}{2},+\infty)$.



۲۴- گزینهٔ ۴ عبارت «برای هر x_1 و x_2 عضو این بازه رابطهٔ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ برقرار باشد» یعنی می‌خواهیم بازه‌ای را پیدا کنیم که تابع در آن بازه نزولی اکید باشد. برای پیداکردن این بازه تابع را رسم می‌کنیم:

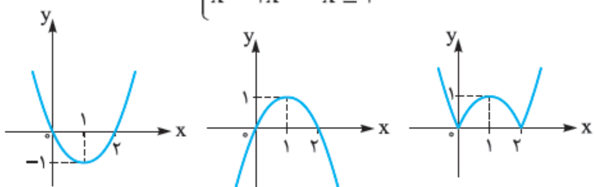


$f(x)=\frac{1}{|x|}$

با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(0,+\infty)$ نزولی اکید است پس باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که زیرمجموعهٔ این بازه باشد که می‌شود بازهٔ $(0,1)$.

۲۵- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $f(x)=|x^2-2x|$ را رسم می‌کنیم:

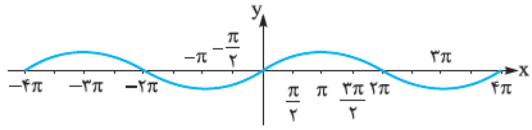
$$f(x)=|x^2-2x|=\begin{cases} x^2-2x & x\le 0 \\ -x^2+2x & 0\le x\le 2 \\ x^2-2x & x\ge 2 \end{cases}$$



$y=x^2-2x$ $\quad$ $y=-x^2+2x$

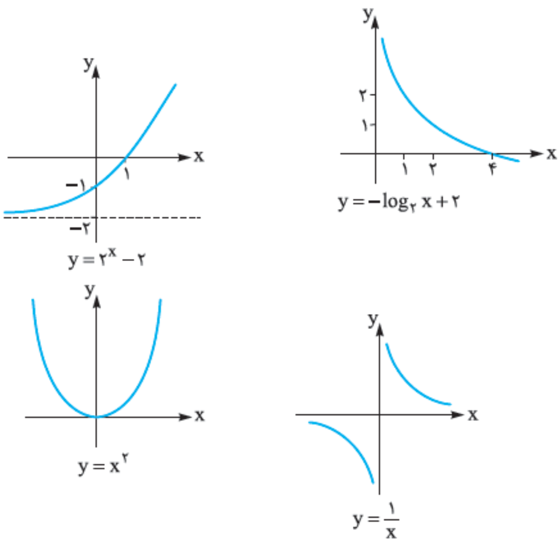
پس تابع در $(1,2)$ نزولی است و $b-a=2-1=1$.

۲۶- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=\sin\frac{x}{2}$ را با استفاده از نمودار تابع $y=\sin x$ رسم می‌کنیم. می‌دانیم برای رسم نمودار تابع $y=\sin\frac{x}{2}$ از روی نمودار تابع $y=\sin x$ باید نمودار را با ضریب ۲ منبسط کنیم:



حالا برای این‌که بازه‌ای را تعیین کنیم که با افزایش طول نقطه مقدار تابع کاهش نیابد، باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که تابع در هیچ قسمت آن نزولی نباشد؛ یعنی بازه‌ای که تابع در تمام آن صعودی باشد که می‌شود بازهٔ $[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$، یعنی ۲.

۲۷- گزینهٔ ۴ نمودار هر کدام از تابع‌ها را رسم می‌کنیم:



$y=2^x-2$ $\quad$ $y=-\log_2 x+2$ $\quad$ $y=x^2$ $\quad$ $y=\frac{1}{x}$

حالا با توجه به نمودارها، تابع $y=\frac{1}{x}$ غیریکنوا و یک‌به‌یک است.

۲۸- گزینهٔ ۲ از بین گزاره‌ها، (ب) و (پ) همواره درست است؛ چون اگر f صعودی اکید و g صعودی باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \\ x_1 > x_2 \Rightarrow g(x_1) \ge g(x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 > x_2$$

$$\Rightarrow (f+g)(x_1) > (f+g)(x_2)$$

برای نشان‌دادن نادرستی گزاره‌های دیگر مثال نقض می‌آوریم:

الف) اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f+g$ یک تابع ثابت است:

$$\left.\begin{array}{ll} f(x)=2x+3 & \text{صعودی} \\ g(x)=-x & \text{نزولی} \end{array}\right\} \Rightarrow (f+g)(x)=x+3 \ \text{صعودی}$$

ت) اگر تابع f صعودی اکید و g تابعی ثابت باشد، $f\times g$ صعودی اکید است:

$$\left\{\begin{array}{ll} f(x)=2x+3 & \text{صعودی اکید} \\ g(x)=-3 & \text{ثابت} \end{array}\right. \Rightarrow (f\times g)(x)=-6x-9 \ \text{نزولی اکید}$$

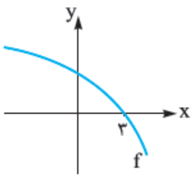
اگر توجه کنید دو گزارهٔ (ب) و (پ) در حقیقت یکسان‌اند:

ب) اگر f صعودی اکید و g صعودی باشد، $f+g$ صعودی اکید است.

پ) اگر f صعودی اکید و g نزولی باشد، $f-g$ صعودی اکید است.

بگویید چرا این دو گزاره یکسان‌اند؟!

۲۹- گزینهٔ ۱ f یک تابع نزولی اکید است و $f(3)=0$؛ پس اگر یک نمودار فرضی برای f رسم کنیم:



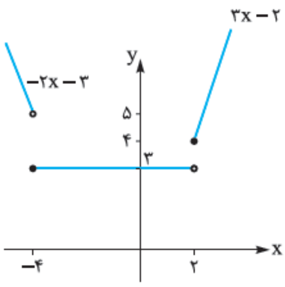
نتیجه می‌گیریم برای $x<3$ مقدار f مثبت و برای $x>3$ مقدار f منفی است. حالا برای پیداکردن دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$ عبارت $xf(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x		0		3		$+\infty$
$f(x)$	+		+		−	
x	−		+		+	
$xf(x)$	−		+		−	

$\Rightarrow 0\le x\le 3$

۳۰- گزینهٔ ۴ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

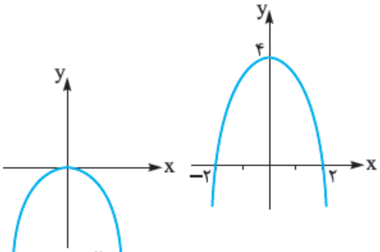
$$f(x)=\begin{cases} -2x-3 & x<-4 \\ 3 & -4\le x<2 \\ 3x-2 & x\ge 2 \end{cases}$$



حالا با توجه به نمودار می‌دانیم که تابع در بازهٔ $[-4,+\infty)$ صعودی است (در واقع در بازهٔ $[-4,2)$ ثابت و در بازهٔ $[2,+\infty)$ صعودی اکید است.)

۳۱- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=4-x^2$ را رسم می‌کنیم:

حالا با توجه به نمودار تابع در بازهٔ $(-\infty,0]$؛ یعنی $x\le 0$ صعودی است.

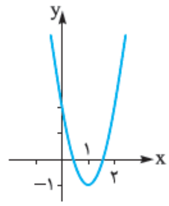


$y=-x^2$

۳۲- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $f(x)=3x^2-6x+2$ (که یک سهمی است) را رسم می‌کنیم: (یادمان هست که طول رأس سهمی از رابطهٔ $x=-\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید)

$$y=3x^2-6x+2$$

$$x_S=-\frac{-6}{2\times 3}=\frac{6}{6}\Rightarrow x=1\Rightarrow y=3-6+2=-1\Rightarrow S(1,-1)$$



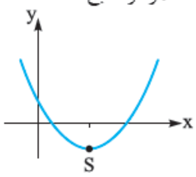
$x=0$ نقطهٔ برخورد با محور yها

$\Rightarrow y=2\Rightarrow A(0,2)$

حالا با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $[-1,1]$ نزولی و در بازهٔ $[1,2]$ صعودی است؛ پس تابع روی بازهٔ $[-1,2]$ ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

۳۳- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $f(x)=x^2-mx+3$ یک سهمی است

که مینیمم دارد



و نمودار تابع روی بازهٔ $[x_S,+\infty)$ صعودی اکید است: پس برای این‌که تابع روی بازهٔ $[1,+\infty)$ صعودی اکید باشد. باید $x_S\le 1$ باشد، پس:

$$-\frac{b}{2a}\le 1\Rightarrow \frac{m}{2}\le 1\Rightarrow m\le 2$$