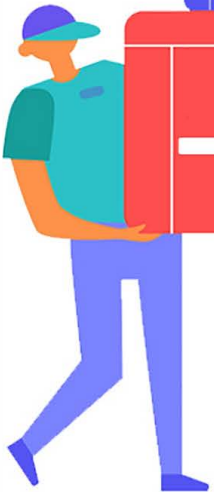


خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و ارسال رایگان

Medabook.com



مدابوک



دریافت برنامه ریزی و مشاوره

از مشاوران رتبه برتر

هوسه کنکوری آیدی نوین

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۴



بہ نام پروردگار مہربان

# ریاضیات تجربی کنکور

عباس اشرفی، سنور حریری



لقمہ طلایے



مہروماہ

# فهرست

- |     |        |                               |
|-----|--------|-------------------------------|
| ۷   | فصل ۱  | الگو و دنباله                 |
| ۱۸  | فصل ۲  | اتحادها و عبارتهای جبری       |
| ۲۶  | فصل ۳  | تعیین علامت و نامعادله        |
| ۳۷  | فصل ۴  | توانهای گویا (ریشه و رادیکال) |
| ۵۲  | فصل ۵  | هندسهٔ تحلیلی (خط)            |
| ۶۱  | فصل ۶  | معادلات گویا و گنگ            |
| ۷۱  | فصل ۷  | قدر مطلق                      |
| ۸۴  | فصل ۸  | جزء صحیح (براکت)              |
| ۹۱  | فصل ۹  | معادله و تابع درجهٔ دوم       |
| ۱۱۳ | فصل ۱۰ | مثلثات                        |
| ۱۴۲ | فصل ۱۱ | تابع                          |
| ۱۶۹ | فصل ۱۲ | توابع نمایی و لگاریتمی        |

۱۸۳ حد و پیوستگی فصل ۱۳

۲۰۹ مشتق فصل ۱۴

۲۳۰ کاربرد مشتق فصل ۱۵

۲۴۷ هندسه فصل ۱۶

۲۶۲ مقاطع مخروطی فصل ۱۷

۲۸۰ احتمال فصل ۱۸

۲۹۷ آمار فصل ۱۹

۳۰۷ پیوست: فرمول‌نامه

# فصل ۱۱

## تابع

وعدۀ ۱



### مفهوم تابع و صورت‌های مختلف نمایش آن

**یادآوری:** زوج مرتب: هر دوتایی مانند  $(a, b)$  را که در آن ترتیب مهم است، **زوج مرتب** می‌نامیم.  $a$  مؤلفه اول و  $b$  مؤلفه دوم نامیده می‌شود. برای تساوی دو زوج مرتب باید هم مؤلفه‌های اول و هم مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند.

$$(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a, y = b$$

**رابطه:** اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه باشند، هر رابطه از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$ ، مجموعه‌ای است شامل زوج مرتب‌هایی به صورت  $(a, b)$  که در آن مؤلفه اول  $(a)$  از مجموعه  $A$  و مؤلفه دوم  $(b)$  از مجموعه  $B$  انتخاب می‌شود.

**تابع:** یک تابع از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$ ، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از  $A$  دقیقاً یک عضو از  $B$  نسبت داده می‌شود. می‌توان چهار نمایش زیر را برای تابع در نظر گرفت:

۱. **نمایش نمودار پیکانی تابع:** یک رابطه که به صورت پیکانی از اعضای  $A$  به اعضای  $B$  نمایش داده می‌شود؛ این رابطه در صورتی تابع است که از هر عضو مجموعه  $A$  فقط یک پیکان خارج شده باشد.

۲. **نمایش زوج مرتبی تابع:** اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن، مؤلفه اول یکسان نداشته باشند.

۳. **نمایش هندسی تابع:** یک نمودار رسم شده در دستگاه مختصات را تابع می‌گوییم، هرگاه هر خط به موازات محور  $y$  ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۴. **نمایش ضابطه‌ای تابع:** در حالت کلی، ضابطه‌ای مانند  $y = f(x)$ ، در صورتی می‌تواند یک تابع باشد که به ازای هر  $x$ ، حداکثر یک مقدار برای  $y$  تولید کند.

**تست:** رابطه  $R = \{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$

به ازای کدام مقدار  $m$  یک تابع است؟ (تجربی خارج ۸۵)

- (۱) -۲  
(۲) -۱  
(۳) ۲  
(۴) هیچ مقدار  $m$

**پاسخ** گزینه «۲»

دو زوج مرتب  $(3, m+2)$  و  $(3, m^2)$  مؤلفه اول برابر دارند؛ پس باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز برابر باشد:

$$m^2 = m + 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 2 \xrightarrow[\text{در } R]{\text{جای گذاری}} R = \{(3, 4), (2, 1), (-2, 2), (2, 4)\} \\ \text{تابع نیست.} \\ m = -1 \xrightarrow[\text{در } R]{\text{جای گذاری}} R = \{(3, 1), (2, 1), (-2, -1), (-1, 4)\} \\ \text{تابع است.} \end{cases}$$

**چاشنی:** معمولاً برای **رد کردن تابع** بودن یک ضابطه، از **مثال**

**نقض** استفاده می‌کنیم، یعنی برای  $x$  عددی انتخاب می‌کنیم که به ازای آن دو یا چند مقدار متفاوت برای  $y$  به دست آید.

۲ **معمولاً** رابطه‌هایی که در آن‌ها  $y$ ، قدر مطلق، توان زوج، جزء صحیح یا تابع مثلثاتی دارد، تابع نیستند، مگر در حالت‌های خاص.



**تست:** کدام یک از روابط زیر معرف یک تابع است؟

$$y^2 + \sqrt{x + x^2} = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

$$(-1)^y = (-1)^x \quad (4)$$

$$2^{|x|} = 2^{|y|} \quad (3)$$

**پاسخ** گزینه «۲»

گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ را به کمک مثال نقض رد کرده و درستی گزینه ۲ را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینه «۱»}: x = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \quad \times$$

$$\text{گزینه «۲»}: \underbrace{y^2}_{\text{نامنفی}} + \underbrace{\sqrt{x + x^2}}_{\text{نامنفی}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \\ \sqrt{x - x^2} = 0 \Rightarrow x - x^2 = 0 \\ \Rightarrow x(1 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

نمایش به صورت زوج مرتب:  $\{(0, 0), (1, 0)\}$  ✓

$$\text{گزینه «۳»}: x = 1 \Rightarrow 2^1 = 2^{|y|} \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \quad \times$$

$$\text{گزینه «۴»}: x = 0 \Rightarrow (-1)^y = 1$$

از آن جایی که  $y$  هر عدد زوجی می‌تواند باشد، تابع نیست.

وعده ۲

**دامنه و برد تابع**



**دامنه:** بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که یک تابع در آن قابل تعریف است، دامنه تابع نامیده می‌شود.



دو تابع  $f$  و  $g$  برابرند، هرگاه:

۱ دامنه  $f$  و دامنه  $g$  با هم برابر باشند.

۲ برای هر  $x$  از این دامنه یکسان داشته باشیم:  $f(x) = g(x)$

🕒 **تست:** کدام یک از توابع زیر با تابع  $y = \log \frac{x-2}{x}$  برابر است؟

(تجربی خارج ۹۷)

$$\log \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} \quad (۲)$$

$$\log(x-2) - \log x \quad (۱)$$

$$۲ \log \sqrt{\frac{x-2}{x}} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \log \left( \frac{x-2}{x} \right)^2 \quad (۳)$$

**پاسخ** گزینه «۴»

دامنه تابع داده شده  $(2, +\infty) \cup (-\infty, 0)$  است؛ دامنه تک تک گزینه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\text{گزینه «۱»} : \begin{cases} x-2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow (2, +\infty) \quad \times$$

$$\text{گزینه «۲»} : \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} > 0 \Rightarrow (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) - \{-2\} \quad \times$$

$$\text{گزینه «۳»} : \left( \frac{x-2}{x} \right)^2 > 0 \Rightarrow (-\infty, +\infty) - \{0\} \quad \times$$

$$\text{گزینه «۴»} : \sqrt{\frac{x-2}{x}} > 0 \Rightarrow (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \quad \checkmark$$





حال نشان می‌دهیم ضابطه دو تابع با هم برابر است:

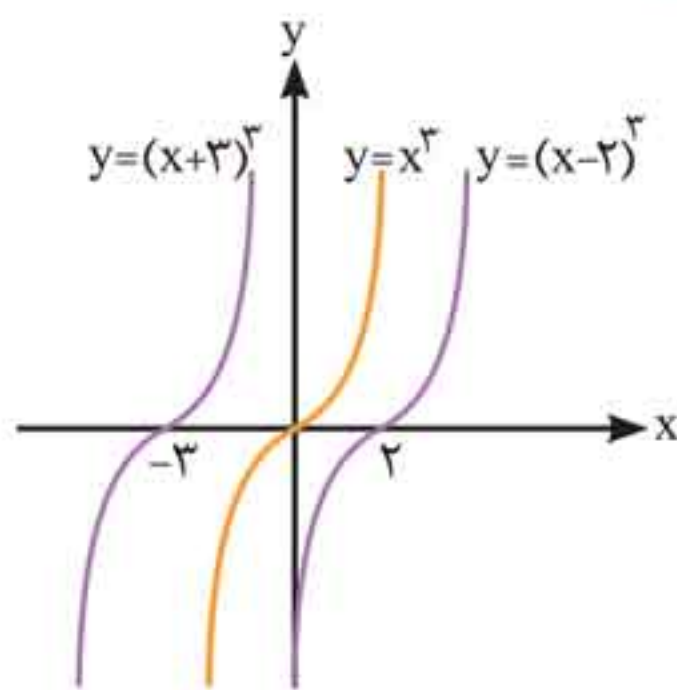
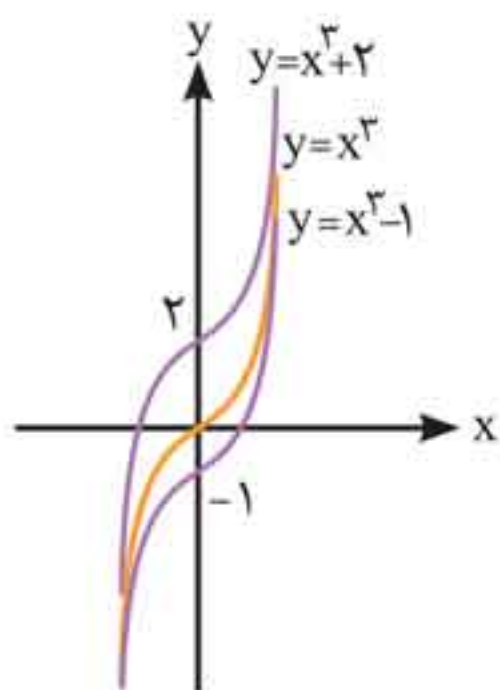
$$2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}} = 2 \log \left( \frac{x-2}{x} \right)^{\frac{1}{2}} = \log \frac{x-2}{x} \quad \checkmark$$

وعدۀ ۵

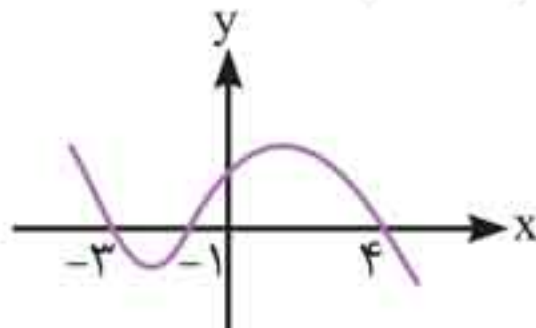
### رسم نمودار به کمک انتقال



- انتقال افقی:** برای رسم نمودار تابع  $y = f(x - k)$  و  $y = f(x + k)$  ( $k > 0$ ) از روی نمودار  $y = f(x)$ ، نمودار تابع  $f$  را  $k$  واحد به سمت راست (برای  $y = f(x - k)$ ) و  $k$  واحد به سمت چپ (برای  $y = f(x + k)$ ) انتقال می‌دهیم.
- انتقال عمودی:** برای رسم نمودار تابع  $y = f(x) + k$  و  $y = f(x) - k$  ( $k > 0$ ) از روی نمودار  $y = f(x)$ ، نمودار تابع  $f$  را  $k$  واحد به سمت بالا (برای  $y = f(x) + k$ ) و  $k$  واحد به سمت پایین (برای  $y = f(x) - k$ ) انتقال می‌دهیم.



**تست:** شکل زیر، نمودار تابع  $y = f(x - 2)$  است. دامنه تابع با ضابطه  $\sqrt{x f(x)}$  کدام است؟

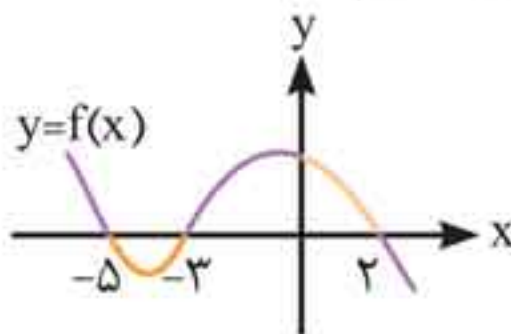


(۱)  $[-1, 1] \cup [0, 6]$       (۲)  $[-3, 1] \cup [0, 2]$

(۳)  $[-5, -3] \cup [-1, 2]$       (۴)  $[-5, -3] \cup [0, 2]$

**پاسخ** گزینه «۴»

برای رسم نمودار  $y = f(x)$ ، باید نمودار  $f(x - 2)$  را دو واحد به سمت چپ منتقل کنیم:



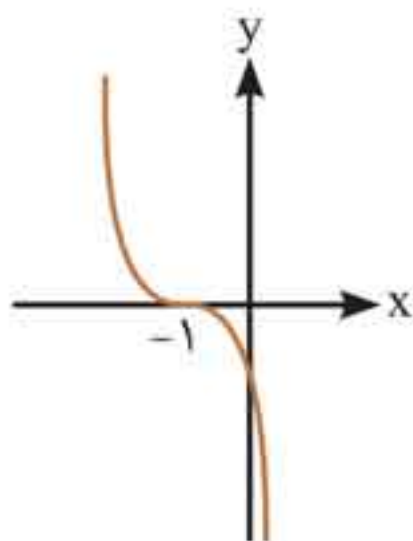
برای پیدا کردن دامنه تابع  $\sqrt{x f(x)}$ ، باید  $x f(x) \geq 0$  باشد.  $f(x) = y$  است؛ پس باید  $xy \geq 0$  باشد، یعنی  $x$  و  $y$  هر دو هم‌علامت‌اند که در ناحیه‌های اول و سوم این اتفاق می‌افتد؛ پس مجموعه طول بخش‌هایی از نمودار که در ربع اول و سوم قرار دارند، جواب مسئله است.  
 $D = [-5, -3] \cup [0, 2]$

**چاشنی:** مرکز تقارن تابع  $f(x) = x^3$ ، مبدأ مختصات است و اگر نمودار این تابع را  $a$  واحد در راستای افقی و  $b$  واحد در راستای قائم انتقال دهیم، مرکز تقارن تابع جدید نقطه  $(a, b)$  می‌شود.



**تست:** اگر نمودار تابع  $f(x) = -3x^3 + ax^2 + bx + c$  به

شکل زیر باشد،  $a$  کدام است؟



۶ (۱)

۹ (۲)

-۶ (۳)

-۹ (۴)

**پاسخ** گزینه «۴»

با توجه به نمودار، مرکز تقارن تابع  $f(x)$  نسبت به مرکز تقارن تابع  $y = x^3$ ، یک واحد به سمت چپ منتقل شده و با توجه به ضریب  $-3$  در  $-3x^3$ ، متوجه می‌شویم ضابطه تابع به فرم  $f(x) = -3(x - (-1))^3$  است؛ بنابراین:

$$f(x) = -3(x + 1)^3 = -3x^3 - 9x^2 - 9x - 3$$

از برابری ضابطه مربوط به فرض مسئله و ضابطه به دست آمده در بالا مقدار  $a$  (ضریب  $x^2$ )  $-9$  به دست می‌آید.

وعدۀ ۶

### انواع تقارن روی نمودار توابع

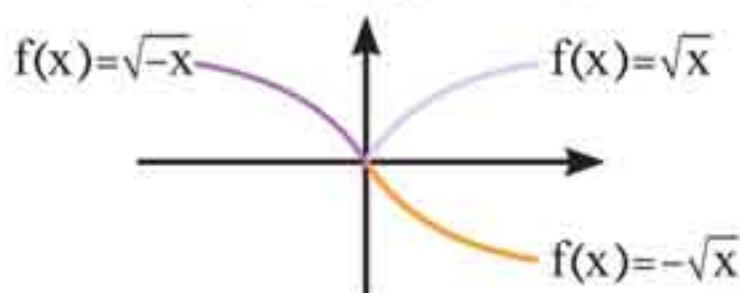


۱. رسم نمودار  $y = f(-x)$  از روی نمودار  $y = f(x)$ : نمودار

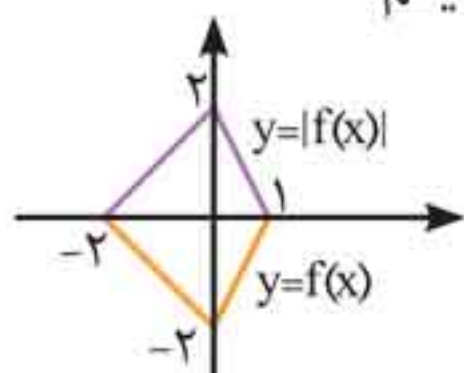
$y = f(x)$  را نسبت به محور  $y$  ها قرینه می‌کنیم.

۲. رسم نمودار  $y = -f(x)$  از روی نمودار  $y = f(x)$ : نمودار

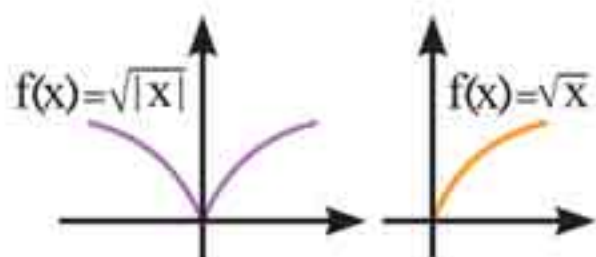
$y = f(x)$  را نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌کنیم.



۳. رسم نمودار  $y = |f(x)|$  از روی نمودار  $y = f(x)$ : بخشی از نمودار تابع  $y = f(x)$  را که در زیر محور  $x$  ها قرار دارد حذف کرده و قرینه آن را نسبت به محور  $x$  ها رسم می‌کنیم.



۴. رسم نمودار  $y = f(|x|)$  از روی نمودار  $y = f(x)$ : بخشی از نمودار تابع  $y = f(x)$  را که در سمت چپ محور  $y$  ها قرار دارد، حذف کرده و قرینه آن را نسبت به محور  $y$  ها در سمت چپ رسم می‌کنیم.



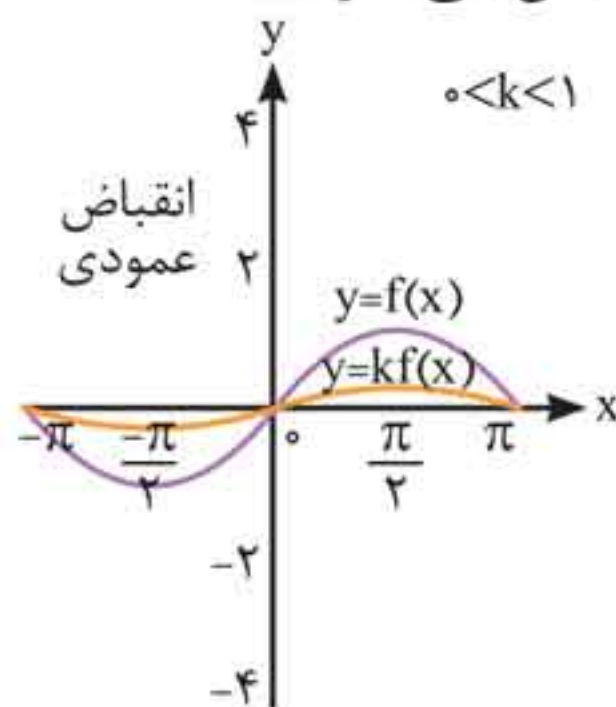
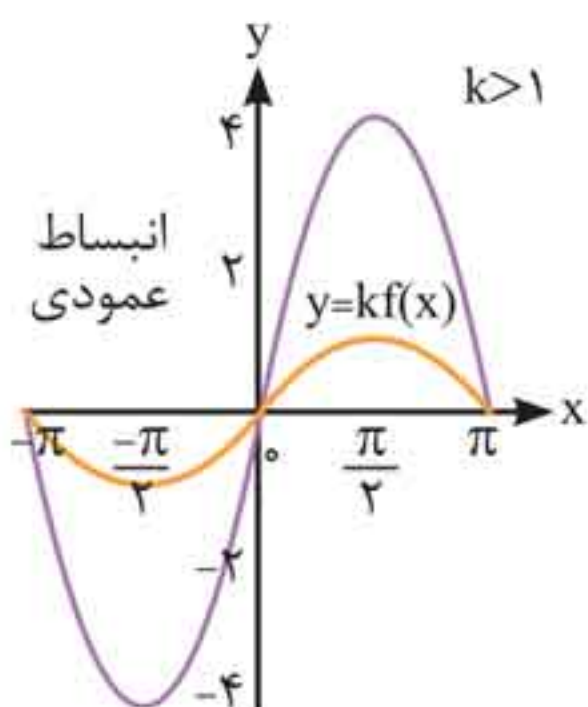
وعدۀ ۷

انبساط و انقباض نمودارها



۱.  $y = kf(x)$  (انبساط و انقباض عمودی): برای رسم نمودار  $y = kf(x)$  از روی نمودار  $y = f(x)$  با توجه به مقدار  $k$  حالت‌های زیر را داریم:
  - الف.  $k > 1$ : نمودار  $f(x)$  در امتداد محور  $y$  ها با ضریب  $k$  کشیده می‌شود. (انبساط عمودی)
  - ب.  $0 < k < 1$ : نمودار  $f(x)$  در امتداد محور  $y$  ها با ضریب  $k$  جمع می‌شود. (انقباض عمودی)

**پ.**  $k < 0$ : در این حالت ابتدا نمودار  $f(x)$  نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌شود، سپس با ضریب  $|k|$  به‌طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.



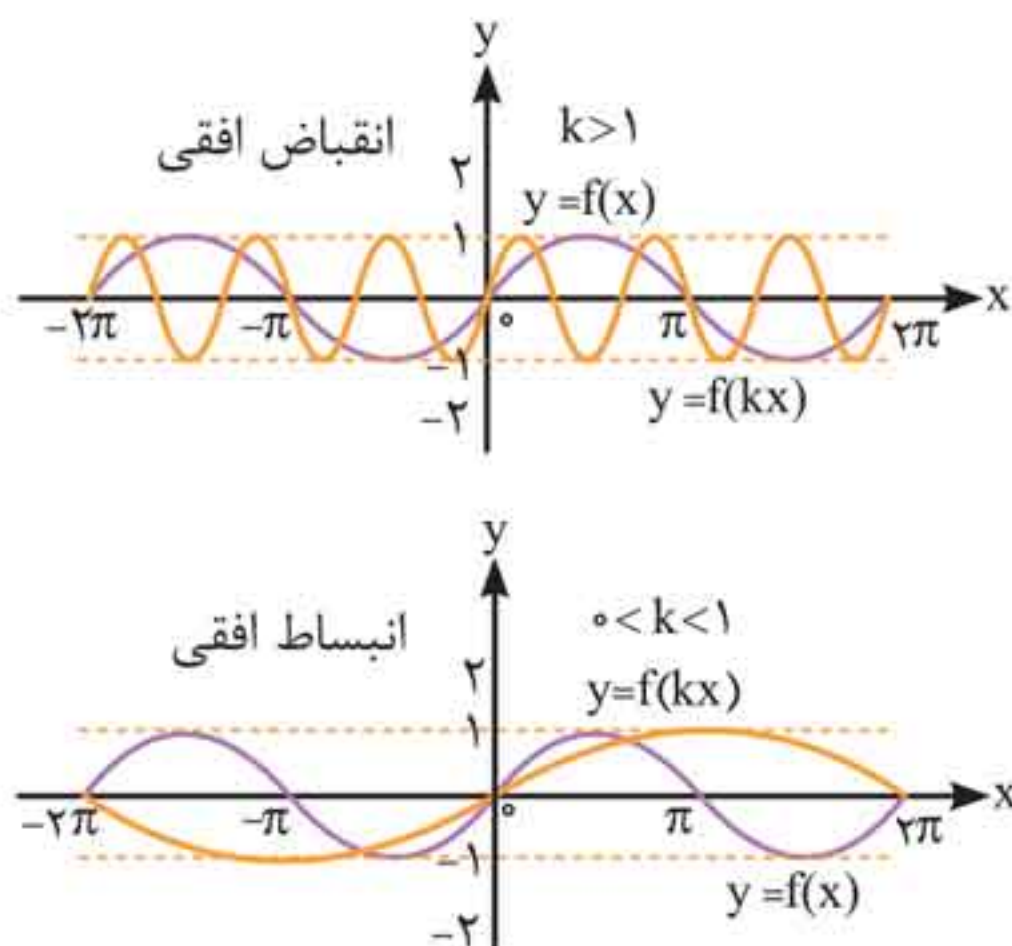
**تذکر:** دامنه تابع  $y = kf(x)$  همان دامنه تابع  $f(x)$  است، ولی برد آن الزاماً با برد  $f(x)$  یکی نیست.

**۲.  $y = f(kx)$  (انبساط و انقباض افقی):** برای رسم نمودار  $y = f(kx)$  از روی نمودار  $y = f(x)$  با توجه به مقدار  $k$  حالت‌های زیر را داریم:

**الف.  $k > 1$ :** نمودار  $f(x)$  در امتداد محور  $x$  ها با ضریب  $\frac{1}{k}$  جمع می‌شود. (انقباض افقی)

**ب.  $0 < k < 1$ :** نمودار  $f(x)$  در امتداد محور  $x$  ها با ضریب  $\frac{1}{k}$  کشیده می‌شود. (انبساط افقی)

**پ.**  $k < 0$ : در این حالت ابتدا نمودار  $f(x)$  نسبت به محور  $y$  ها قرینه می‌شود؛ سپس با ضریب  $|\frac{1}{k}|$  منبسط یا منقبض می‌شود.



**تذکر:** برد تابع  $y = f(kx)$  همان برد تابع  $f(x)$  است؛ ولی دامنه آن الزاماً با دامنه  $f(x)$  یکی نیست.

**چاشنی: ۱** رفتار  $x$ ، عوضی  $\odot$  است؛ یعنی برای رسم

نمودار  $f(2x)$ ،  $x$  ها را در  $\frac{1}{2}$  و برای رسم نمودار  $f(\frac{1}{2}x)$ ،  $x$  ها را در ۲ ضرب می کنیم.

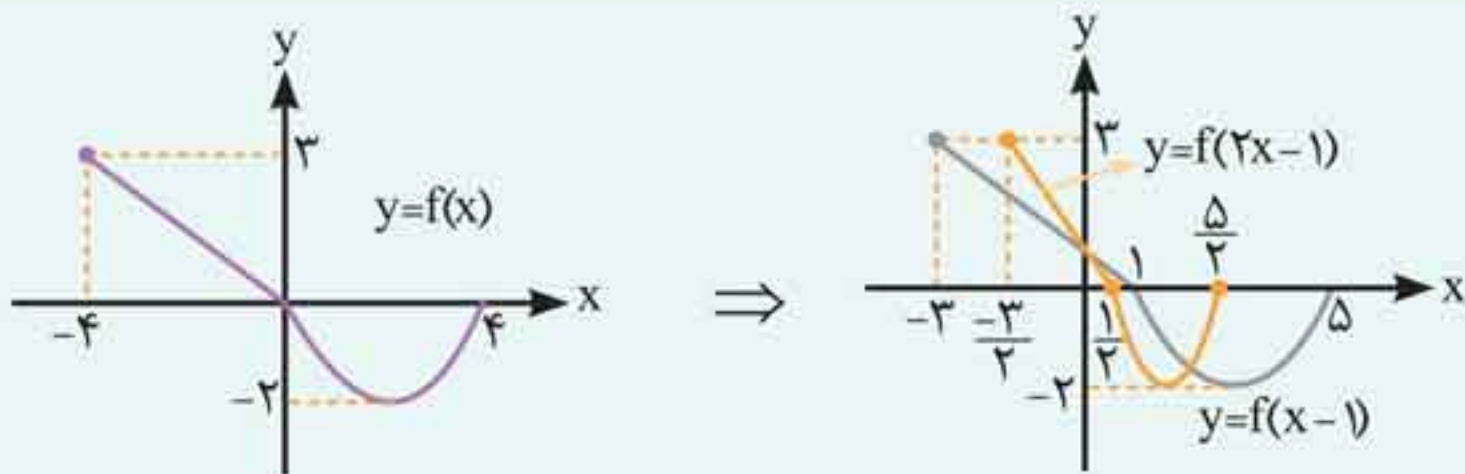
**۲** برای رسم نمودار  $y = f(ax + b)$  از روی نمودار  $y = f(x)$

ابتدا نمودار  $f(x)$  را  $b$  واحد به سمت راست یا چپ (با توجه به

علامت  $b$ ) منتقل می کنیم؛ سپس نمودار به دست آمده را با ضریب  $\frac{1}{a}$

منبسط یا منقبض می کنیم. برای نمونه، نمودار  $y = f(2x - 1)$  را از

روی نمودار  $y = f(x)$  رسم می کنیم:



**تست:** قرینه نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را نسبت به محور  $y$  ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف  $x$  های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

(تجربی خارج ۹۷)

- (۱) -۲
- (۲) ۰/۵
- (۳) ۱
- (۴) ۱/۵

**پاسخ** گزینه «۳»

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها: } x \rightarrow -x \\ \text{انتقال ۲ واحدی به سمت } x \text{ های مثبت: } x \rightarrow x - 2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow y = f(-(x - 2)) = \sqrt{-x + 2}$$

$$\Rightarrow y = f(-(x - 2)) = \sqrt{-x + 2}$$

ضابطه به دست آمده را با نیمساز ربع اول و سوم ( $y = x$ ) تلافی می‌دهیم:

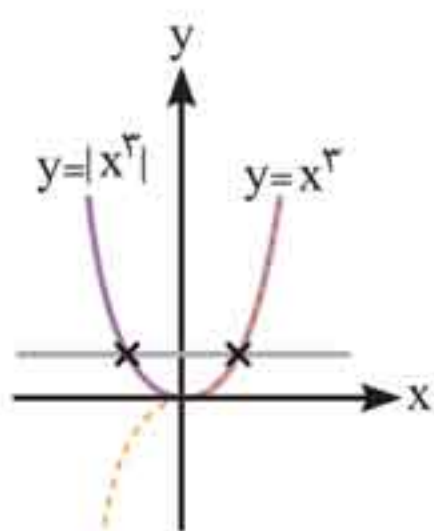
$$x = \sqrt{-x + 2} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \checkmark \\ x = -2 & \times \end{cases}$$

فقط  $x = 1$  در این معادله صدق می‌کند.

**تست:** تابع با ضابطه  $f(x) = |x^3|$ ، با دامنه  $\mathbb{R}$ ، چگونه است؟ (تجربی ۹۵)

(۱) نزولی (۲) صعودی (۳) وارون‌ناپذیر (۴) یک‌به‌یک  
**پاسخ** گزینه «۳»

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



از نمودار مشخص است که تابع یک‌به‌یک نیست؛ پس وارون‌ناپذیر است. این تابع در بازه  $(-\infty, 0]$  اکیداً نزولی و در بازه  $[0, +\infty)$  اکیداً صعودی است.

وعدۀ ۱۰

اعمال جبری روی توابع



اگر  $f$  و  $g$  دو تابع با دامنه‌های  $D_f$  و  $D_g$  باشند، در این صورت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آن‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ضابطه	تعریف دامنه
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$
$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x   g(x) = 0\}$





**چاشنی:** در توابعی که نمایش زوج مرتبی دارند، کافی است با توجه به دامنه عمل تعریف شده، عملیات خواسته شده را فقط روی عرض نقاط انجام دهیم.

**تست:** با توجه به توابع  $f$  و  $g$  مقدار  $\frac{2f(1) - 3g(3)}{(f \cdot g)(2) + 8}$  کدام است؟

$$f = \{(1, -2), (2, 3), (3, -4)\}$$

$$g = \{(1, -5), (2, -6), (3, 0)\}$$

$$\frac{3}{5} (4)$$

$$-\frac{2}{5} (3)$$

$$\frac{2}{5} (2)$$

$$-\frac{3}{5} (1)$$

پاسخ گزینه «۲»

$$f(1) = -2, g(3) = 0, f(2) = 3, g(2) = -6$$

$$(f \cdot g)(2) = f(2) \cdot g(2) = 3 \times (-6) = -18$$

$$\frac{2 \times (-2) - 3 \times 0}{-18 + 8} = \frac{-4}{-10} = \frac{2}{5}$$

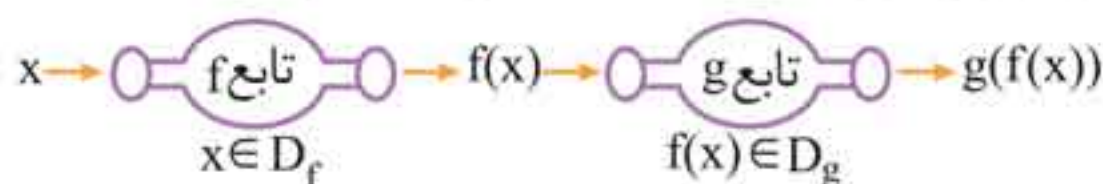
بنابراین:

وعدۀ ۱۱

ترکیب توابع



اگر  $f$  و  $g$  دو تابع باشند به طوری که اشتراک برد  $f$  و دامنه  $g$  غیرتهی باشد، تابع  $(g \circ f)(x)$  را به صورت  $(g \circ f)(x)$  نمایش می دهیم و آن را ترکیب  $g$  با  $f$  می نامیم.



**تست:** در تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & ; x > 3 \\ 2x + 3 & ; x \leq 3 \end{cases}$$

مقدار  $f(f(5)) + f(f(1))$  کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۶ (۱)      ۷ (۲)      ۸ (۳)      ۹ (۴)

**پاسخ** گزینه «۴»

از داخلی‌ترین پرانتز شروع به ساده کردن عبارت می‌کنیم:

$$f(5) = 5 - \sqrt{5+4} = 5 - 3 = 2$$

$$f(f(5)) = f(2) = 2(2) + 3 = 7$$

$$f(1) = 2(1) + 3 = 5 \Rightarrow f(f(1)) = f(5) = 2$$

$$f(f(5)) + f(f(1)) = 7 + 2 = 9$$

بنابراین:

**تست:** دو تابع  $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$

و  $g(x) = \frac{x}{x-1}$  مفروض‌اند. اگر  $f^{-1}(g(2a)) = 6$  باشد،  $a$  کدام

است؟ (تجربی ۹۶)

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)      ۵ (۵)

**پاسخ** گزینه «۲»

$f^{-1}(b) = 6$  را  $g(2a)$  فرض می‌کنیم؛ پس:

$$\Rightarrow (b, 6) \in f^{-1} \Rightarrow (6, b) \in f$$

با توجه به تابع  $f$  چون  $(6, 3) \in f$ ،  $b = 3$  است؛ بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} b = g(2a) \\ b = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow g(2a) = \frac{2a}{2a-1} = 3$$

$$\Rightarrow 6a - 3 = 2a \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$



**چاشنی:** برای به دست آوردن ضابطه تابع مرکب  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  کافی است هر کجا در ضابطه تابع  $f(x)$ ،  $x$  دیدیم، به جای آن، ضابطه  $g(x)$  را جایگزین کنیم.

**تست:** اگر  $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$  و  $g(x) = x+4$  باشند، جواب

معادله  $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$  کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱)  $-۷, -۱$     ۲)  $-۷, ۱$     ۳)  $۷, -۱$     ۴)  $۷, ۱$

**پاسخ** گزینه «۱»

$$(g \circ f)(x) = \frac{2x-1}{x+2} + 4 = \frac{6x+7}{x+2}$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{2(x+4)-1}{(x+4)+2} = \frac{2x+7}{x+6}$$

$$\frac{6x+7}{x+2} = \frac{2x+7}{x+6} \Rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0$$

$$\Rightarrow 4(x+1)(x+7) = 0 \Rightarrow x = -1, x = -7$$

**چاشنی:** هرگاه ضابطه‌های دو تابع  $(f \circ g)(x)$  و  $g(x)$  را در اختیار داشته باشیم و بخواهیم ضابطه تابع  $f(x)$  را محاسبه کنیم، از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم، به این ترتیب که:

۱)  $g(x)$  را  $t$  در نظر می‌گیریم:  $f(g(x)) = f(t)$

۲) با داشتن  $t = g(x)$ ،  $x$  را بر حسب  $t$  به دست می‌آوریم.

۳)  $t$  را در ضابطه  $(f \circ g)(x)$  جای‌گذاری کرده و  $f(t)$  یا همان  $f(x)$  را محاسبه می‌کنیم.

🕒 **تست:** اگر  $f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$  باشد، ضابطه  $f(x)$ ،

(تجربی خارج ۹۷)

برابر کدام است؟

(۲)  $x^2 - 2x - 1$

(۱)  $x^2 + x + 3$

(۴)  $x^2 - x + 1$

(۳)  $x^2 - 2x + 1$

**پاسخ** گزینه «۴»

$$2x - 3 = t \Rightarrow x = \frac{t + 3}{2}$$

$$f(t) = 4\left(\frac{t + 3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t + 3}{2}\right) + 13 = t^2 - t + 1$$

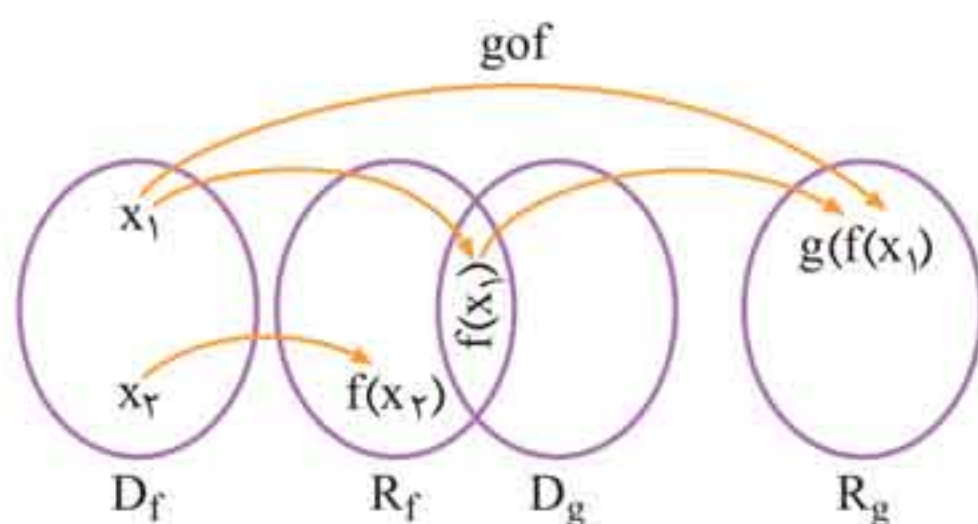
$$\Rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

**دامنه تابع مرکب:** دامنه تابع مرکب  $g \circ f(x)$ ، مجموعه  $x$  هایی

است که همزمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱  $x$  در دامنه  $f$  قرار داشته باشد.

۲  $f(x)$  در دامنه  $g$  قرار داشته باشد.



$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

# فصل ۱۵

## کاربرد مشتق

وعدۀ ۱

آهنگ تغییر



اگر نقاط  $A(x_1, f(x_1))$  و  $B(x_2, f(x_2))$  روی نمودار تابع  $y = f(x)$  قرار داشته باشند به نسبت تغییرات عرض‌های دو نقطه به تغییرات طول‌های آن‌ها، آهنگ متوسط تغییر تابع می‌گوییم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

اگر نقطه  $A(x_1, f(x_1))$  روی نمودار تابع  $y = f(x)$  قرار داشته باشد، آهنگ لحظه‌ای تغییر در این نقطه،  $f'(x_1)$  است.

**چاشنی:** آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر در یک نقطه با مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابر است.

**تست:** نقطه‌ای روی نمودار  $f(x) = \sqrt{x}$  در حال دور شدن از مبدأ است. آهنگ متوسط تغییرات تابع در بازه  $[0, 9]$  با آهنگ لحظه‌ای تغییرات در کدام نقطه برابر است؟

(۲)  $(1, 1)$

(۱)  $(4, 2)$

(۴)  $(\frac{4}{9}, \frac{2}{3})$

(۳)  $(\frac{9}{4}, \frac{3}{2})$

پاسخ گزینه «۳»

آهنگ متوسط تغییرات تابع را بین  $x_1 = 0$  و  $x_2 = 9$  محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(9) - f(0)}{9 - 0} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{0}}{9 - 0} = \frac{1}{3}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییرات تابع در نقطه  $x_0$  برابر  $f'(x_0)$  است؛ بنابراین:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{x_0} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{9}{4}$$

**تست:** آهنگ تغییرات لحظه‌ای تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  در یک بازه، از آهنگ تغییر متوسط آن در بازه  $[-8, 8]$  بیشتر است. بزرگ‌ترین بازه کدام است؟

$$(1) \left( \frac{-8}{3\sqrt{3}}, \frac{8}{3\sqrt{3}} \right) \quad (2) \left( \frac{-4}{3\sqrt{3}}, \frac{4}{3\sqrt{3}} \right)$$

$$(3) \left( \frac{-2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}} \right) \quad (4) \left( \frac{-1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}} \right)$$

پاسخ گزینه «۱»

آهنگ تغییر متوسط تابع را بین  $x_1 = -8$  و  $x_2 = 8$  به دست می‌آوریم:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(8) - f(-8)}{8 - (-8)} = \frac{\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{-8}}{8 - (-8)} = \frac{2 + 2}{16} = \frac{1}{4}$$

اگر آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطه  $x_0$  از  $\frac{1}{4}$  بیشتر باشد، باید مشتق تابع در این نقطه از  $\frac{1}{4}$  بزرگ‌تر باشد؛ بنابراین:



اگر در یک بازه از دامنه  $f$  مقدار  $f'$  موجود و مثبت (نامنفی) باشد، آن گاه  $f$  در آن بازه اکیداً صعودی (صعودی) است.  
اگر در یک بازه از دامنه  $f$  مقدار  $f'$  موجود و منفی (نامثبت) باشد، آن گاه  $f$  در آن بازه اکیداً نزولی (نزولی) است.

**تست:** بزرگ‌ترین بازه‌ی بازی که تابع  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  در آن اکیداً صعودی است، کدام است؟

(۱)  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  (۲)  $(-1, 1)$  (۳)  $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$  (۴)  $(-2, 2)$

پاسخ گزینه «۲»

از تابع پیوسته  $f(x)$  مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \frac{1(x^2 + 1) - 2x(x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

برای اکیداً صعودی بودن تابع، مشتق باید مثبت باشد؛ بنابراین:

$$1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

**تست:** تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x^3 + ax^2 + x$  همواره اکیداً صعودی است. تغییرات  $a$  کدام است؟

(۱)  $0 \leq a \leq 2$  (۲)  $-\sqrt{3} \leq a \leq 2$

(۳)  $|a| \leq \sqrt{3}$  (۴)  $|a| \leq 2$

پاسخ گزینه «۳»



چون تابع  $f$  اکیداً صعودی است، مشتق تابع باید همواره نامنفی باشد؛ بنابراین:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1 \geq 0$$

تابع درجه دوم، زمانی همواره نامنفی است که ضریب  $x^2$  آن مثبت و دلتای آن نامثبت باشد؛ یعنی:

$$\Delta \leq 0, \text{ ضریب } x^2 > 0$$

بنابراین:

$$\begin{cases} 4a^2 - 12 \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq 3 \Rightarrow |a| \leq \sqrt{3} \\ 3 > 0 \end{cases}$$

**چاشنی:** تابع کسری در هر بازه که شامل ریشه مخرج باشد، غیریکنواست.

برای نمونه ریشه‌های مخرج تابع  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ ،  $x = \pm 1$  است؛

بنابراین تابع در بازه‌هایی مانند  $(-2, 0)$  یا  $(-1, 3)$  یا هر بازه‌ای که شامل  $x = 1$  یا  $x = -1$  باشد، نه صعودی و نه نزولی است.

وعده ۳

نقطه بحرانی



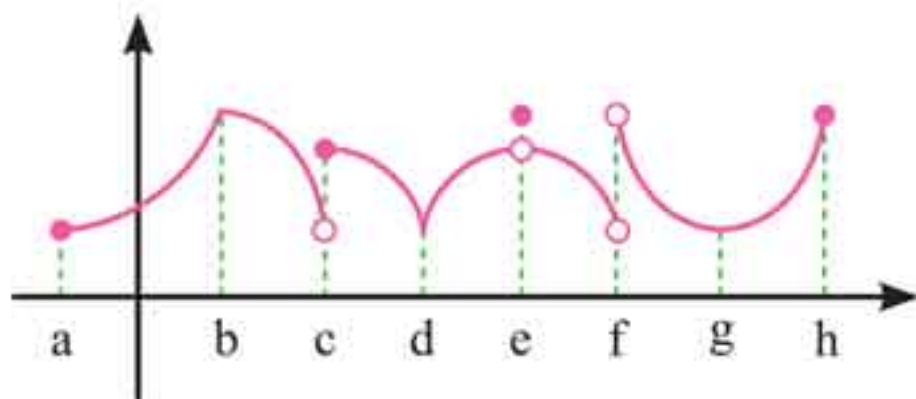
یک نقطه بحرانی برای تابع  $f$ ، نقطه‌ای به طول  $c$  از دامنه تابع  $f$  است، به طوری که مشتق تابع در  $x = c$  برابر صفر شود یا موجود نباشد.

**چاشنی:** نقاط ابتدا و انتهای بازه، نقاط بحرانی نیستند.



**تست:** اگر نمودار  $f$  به صورت زیر باشد، تابع چند نقطه

بحرانی دارد؟



(۱) سه

(۲) چهار

(۳) پنج

(۴) شش

**پاسخ** گزینه «۳»

a: نقطه ابتدای بازه است و بحرانی نیست.

b: نقطه گوشه‌ای است و مشتق ناپذیر و بحرانی است.

c: نقطه ناپیوستگی است و مشتق ناپذیر و بحرانی است.

d: نقطه بازگشت و مشتق ناپذیر و بحرانی است.

e: نقطه ناپیوستگی است و مشتق ناپذیر و بحرانی است.

f: جزء دامنه تابع نیست و بحرانی محسوب نمی‌شود.

g: در این نقطه مشتق صفر است و بحرانی است.

h: نقطه انتهای بازه است و بحرانی نیست.

در مجموع تابع  $f$ ، پنج نقطه بحرانی دارد.

**تست:** تعداد نقاط بحرانی تابع  $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x - 5$  کدام است؟

کدام است؟

(۱) یک

(۲) دو

(۳) سه

(۴) چهار

**پاسخ** گزینه «۲»

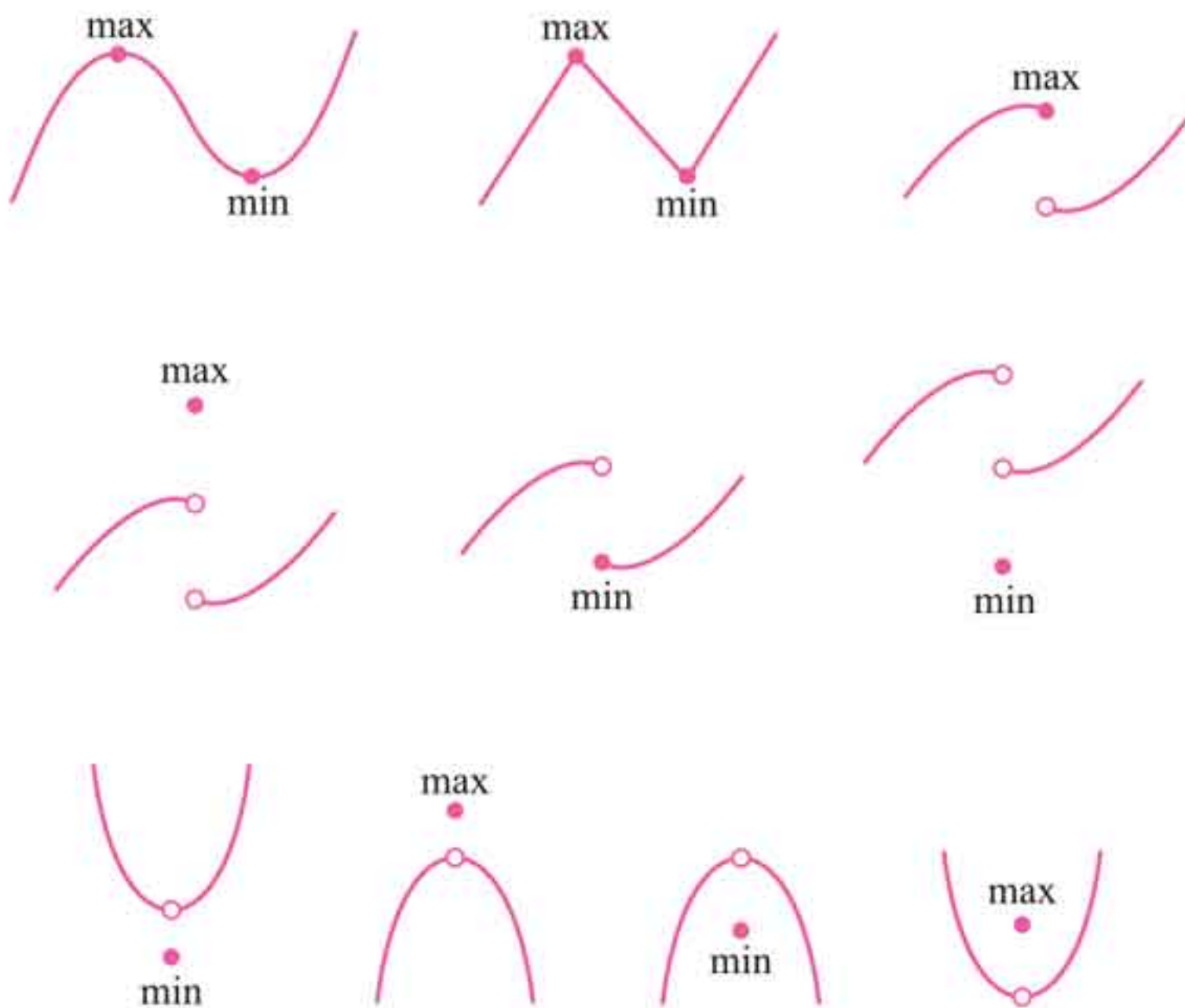


اگر  $f$  یک تابع و  $I \subseteq D_f$  یک همسایگی از نقطه  $c$  (بازه باز شامل نقطه  $c$ ) باشد که،

**الف** به ازای هر  $x$  متعلق به  $I$  داشته باشیم  $f(x) \leq f(c)$ ، در این صورت  $f(c)$  را یک ماکزیمم نسبی تابع  $f$  می‌نامیم.

**ب** به ازای هر  $x$  متعلق به  $I$  داشته باشیم  $f(x) \geq f(c)$ ، در این صورت  $f(c)$  را یک مینیمم نسبی تابع  $f$  می‌نامیم.

به زبان ساده‌تر اگر عرض نقطه‌ای نسبت به نقاط اطرافش کمتر یا مساوی باشد، به آن نقطه مینیمم نسبی و اگر بیشتر یا مساوی باشد، به آن نقطه ماکزیمم نسبی می‌گوییم. به شکل‌های زیر توجه کنید:





مقادیر تابع را در  $x = 1$  و  $x = -1$  به دست می آوریم:

$$f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(-1) = -\frac{1}{2}$$

تابع  $f$  همواره پیوسته است؛ پس مقدار بزرگ‌تر یعنی  $y = \frac{1}{2}$  مربوط به ماکزیمم نسبی است.

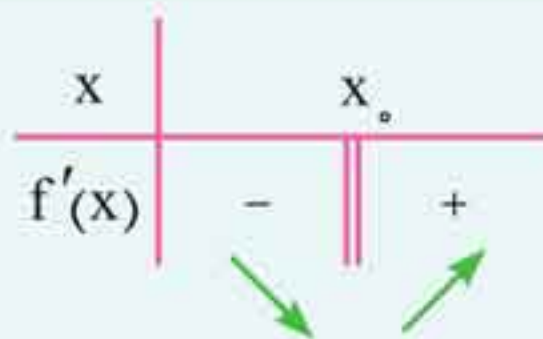
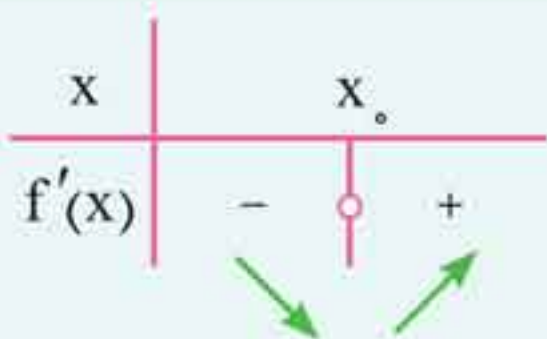
**تذکر:** دقت کنید که منظور از ماکزیمم یا مینیمم تابع، عرض آن است.

### ارتباط اکسترمم نسبی با مشتق

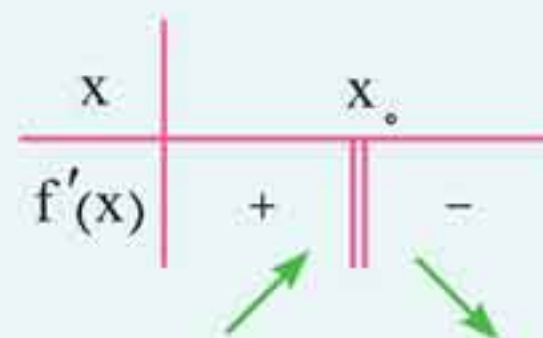
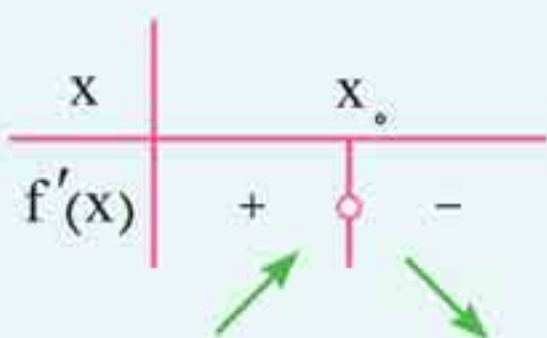
گفتیم که طبق قضیه فرما «هرگاه تابع  $f$  در نقطه‌ای به طول  $c$ ، ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و  $f'(c)$  موجود باشد، آن گاه  $f'(c) = 0$  است.» اما **عکس قضیه درست نیست**؛ یعنی ممکن است در نقطه‌ای از تابع مشتق پذیر  $f$ ، مشتق برابر صفر شود، ولی آن نقطه اکسترمم نسبی نباشد. مانند تابع  $f(x) = x^3$  که مشتق آن در  $x = 0$ ، برابر صفر است، ولی تابع در این نقطه اکسترمم نسبی ندارد.

**یادآوری:** برای اینکه تابع‌های پیوسته در نقطه‌ای اکسترمم نسبی (موضعی) داشته باشند، باید یکنوایی تابع، قبل و بعد از آن نقطه تغییر کند.

اگر جدول تغییر علامت مشتق یک تابع پیوسته در اطراف نقطه‌ای مانند  $x_0$  به یکی از صورت‌هایی که در صفحه بعد آمده باشد، آن نقطه مینیمم تابع است.



اگر جدول تغییر علامت مشتق یک تابع پیوسته در اطراف نقطه‌ای مانند  $x_0$  به یکی از صورت‌های زیر باشد، آن نقطه ماکزیمم تابع است.



**تست:** ماکزیمم نسبی تابع  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{59}{27}$       ۲)  $\frac{27}{59}$       ۳) صفر      ۴) ۱

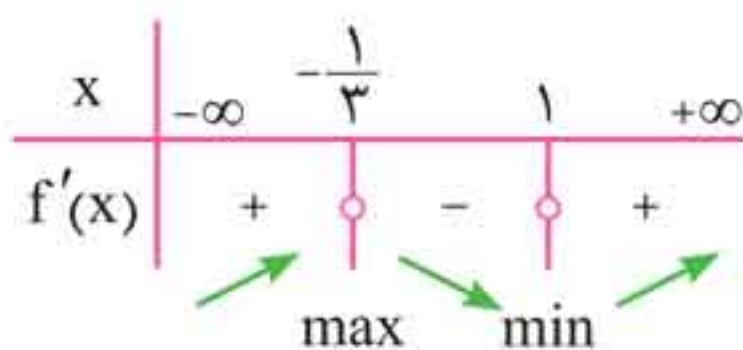
**پاسخ** گزینه «۱»

از تابع مشتق می‌گیریم و ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(3x - 3)(3x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

جدول تغییر علامت مشتق تابع را رسم می‌کنیم:



# پیوست فرمول‌نامه

## الگو و دنباله

۱ جمله عمومی دنباله حسابی:  $t_n = t_1 + (n-1)d$

۲ قدر نسبت دنباله حسابی با جملات  $t_m$  و  $t_n$  ( $n \neq m$ ):

$$d = \frac{t_n - t_m}{n - m}$$

۳ جمله عمومی دنباله هندسی:  $t_n = t_1 r^{n-1}$

۴ قدر نسبت دنباله هندسی با جملات  $t_m$  و  $t_n$  ( $n \neq m$ ):

$$r^{n-m} = \frac{t_n}{t_m}$$

## اتحادهای و عبارتهای جبری

۱ اتحاد مربع دو جمله‌ای  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

۲ اتحاد مزدوج  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

۳ اتحاد جمله مشترک  $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

۴ اتحاد مکعب دو جمله‌ای  $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

۵ اتحاد چاق و لاغر  $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

## تعیین علامت و نامعادله

$$A \geq B \xrightarrow[C \in \mathbb{R}]{+C} A + C \geq B + C$$

$$A \geq B \xrightarrow[C > 0]{\times C} CA \geq CB \quad A \geq B \xrightarrow[C < 0]{\times C} CA \leq CB$$



## مثلثات

۱ رابطه تبدیل رادیان و درجه:

$$\text{زاویه به رادیان} \rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \leftarrow \text{زاویه به درجه}$$

۲ در دایره‌ای به شعاع  $r$ ، طول کمان ( $l$ ) روبه‌رو به زاویه  $\theta$  (رادیان)

$$l = r \times \theta$$

برابر است با:

۳ مساحت مثلث ABC:

$$S = \frac{AB \times AC \times \sin A}{2} = \frac{BC \times BA \sin B}{2} = \frac{AC \times CB \sin C}{2}$$

۴ مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر نصف حاصل ضرب دو قطر در

سینوس زاویه بین آن‌هاست.

۵ اتحادهای مثلثاتی:

$$\text{الف} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{ب} \quad \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{پ} \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{ت} \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\text{ث} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{ج} \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\text{ح} \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

۶ معادلات مثلثاتی:

$$\text{الف} \quad \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ب} \quad \cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{پ} \quad \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

۴ حالت‌های تشابه دو مثلث:

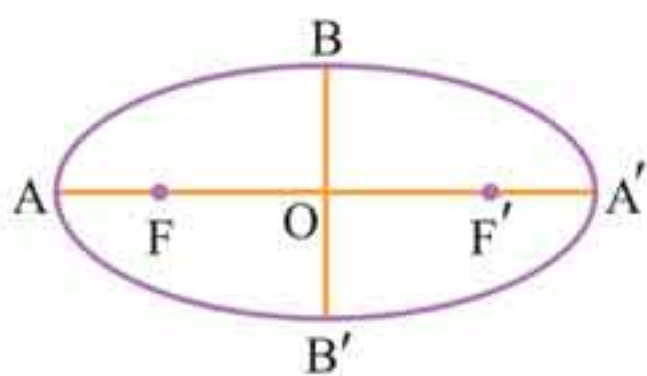
الف) تساوی دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر

ب) تناسب دو ضلع از مثلث‌ها و تساوی زاویه بینشان

پ) تناسب سه ضلع مثلث‌ها

## مقاطع مخروطی

۱ بیضی: مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت، برابر مقداری ثابت (۲a) است. به دو نقطه ثابت کانون‌های بیضی گفته می‌شود.



$$\text{قطر بزرگ} = 2a$$

$$\text{قطر کوچک} = 2b$$

$$\text{فاصله کانونی} = 2c$$

$$a^2 - b^2 = c^2 \quad e = \frac{c}{a} \quad (\text{خروج از مرکز}) \quad \text{وتر کانونی} = \frac{2b^2}{a}$$

۲ دایره: مجموعه نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت (مرکز دایره) مقداری ثابت (شعاع دایره) است. معادله استاندارد دایره‌ای به مرکز  $O(\alpha, \beta)$  و شعاع  $r$  به صورت  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$  است.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{معادله گسترده}$$

$$a^2 + b^2 - 4c > 0 \quad O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

## احتمال

۱ فاکتوریل:  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$

۲ تعداد جایگشت‌های  $r$  تایی از  $n$  شیء متمایز:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$



۳ ترکیب  $r$  شیء از  $n$  شیء متمایز:  $C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$

۴ مبانی احتمال:

الف  $A \subseteq S \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$       ب  $P(A') = 1 - P(A)$

پ  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad A, B \subseteq S$

ت  $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) \neq 0)$

ث  $A \text{ و } B \text{ مستقل اند.} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

۵ قانون احتمال کل: اگر  $A_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) ها زیرمجموعه‌هایی از  $S$  باشند که اجتماعشان  $S$  را می‌سازد و دوجه دو ناسازگارند، آن‌گاه داریم:

$$B \subseteq S, P(B) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i) P(A_i)$$

## آمار

۱ دامنه تغییرات:  $R = x_{\max} - x_{\min}$

۲ میانه: پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است، میانه می‌نامیم. ( $Q_2$ )

۳ میانگین:  $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$

۴ واریانس:  $\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + \dots + (x_N - \bar{X})^2}{N}$

۵ انحراف معیار: جذر واریانس را انحراف معیار می‌گوییم.

۶ ضریب تغییرات:  $cv = \frac{\sigma}{\bar{X}}$