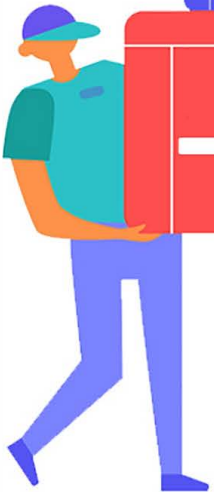


خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و ارسال رایگان

Medabook.com



مدابوک



دریافت برنامه ریزی و مشاوره

از مشاوران رتبه برتر

هوسه کنکوری آیدی نوین

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۴



سرشناسه: منصوری، میلاد / عنوان و نام پدیدآور: جمع بندی ریاضی تجربی /
مشخصات نشر: تهران، مهرماه نو، ۱۳۹۹ / مشخصات ظاهری: ۱۵۲۲۱ س.م /
شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۳۱۷-۵۸۸-۴ / وضعیت فهرست نویسی: فیپای مختصر /
شماره افزوده: گودرزی، محمد - کریمی خراسانی، کیان / شماره کتاب شناسی
ملی: ۹۷۸۰۳۱۷۰۵۸۸۰۴

جمع بندی

ریاضیات تجربی

مرور و جمع بندی کنکور در (۲۴) ساعت

ناشر	مهرماه نو
مؤلفان	میلاد منصوری، محمد گودرزی، کیان کریمی خراسانی
مدیر شورای تألیف	محمد حسین انوشه
مدیر گروه ریاضی	عباس اشرفی
مسئول ویراستاری	آزاده غنی فرد
ویراستاران علمی	آزاده غنی فرد، مهرانوش رضوی، وحید جعفری
نوبت و سال چاپ	چهارم، ۱۴۰۰
تیراژ	۲۰۰۰ نسخه
شابک	۹۷۸-۶۰۰-۳۱۷-۵۸۸-۴
قیمت	۷۹۰۰۰ تومان
مدیر تولید	مریم تاجداری
مدیر هنری	محسن فرهادی
طراح گرافیک	تایماز کاویانی
طراح جلد	حسین شیرمحمدی
مسئول تصویربرداری	مهدی منصوری
مدیر فنی	میلاد صفایی
صفحه آرا	مرجان سپهریان، پریسا حسینی، رویا طبسی، مرتضی یعقوبی
رسم تصاویر	مریم صابری برون
حروف چین	ربابه موسوی، مهناز ستاری، مجتبی حسینی



مهرماه

© کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر منطبق به انتشارات مهرماه نو می باشد. هرگونه برداشت از مطالب این کتاب بدون مجوز کتبی از ناشر، ممنوع بوده و پیگرد قانونی دارد.

نشانی: تهران، میدان انقلاب، خیابان
۱۲ فروردین، کوچه مینا، پلاک ۳۷
دفتر مرکزی: ۶۶۴۰۸۴۰۰
واحد فروش: ۶۶۴۰۸۴۰۳
روابط عمومی: ۶۶۹۶۸۵۸۹
فروش اینترنتی و تلفنی: ۶۶۳۷۹۳۱۱
پیامک: ۲۰۰۰۸۴۸۴

www.mehromah.ir



مثال از توضیحات قبل می‌فهمیم که $\sqrt{9} = 3$ است. اشتباه متداولی وجود دارد که $\sqrt{9}$ را برابر ± 3 می‌گیرند. چنین چیزی در ریاضی نداریم.

مثال به محاسبه‌های زیر دقت کنید:

$$1 \quad \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2} = |\sqrt{2}-2| = 2-\sqrt{2}$$

$$2 \quad \sqrt{(x+3)^2} = |x+3|$$

$$3 \quad \sqrt[3]{-27} = -3 \quad (\text{فرجه فرد، قدرمطلق نمی‌گیرد.})$$

$$4 \quad \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$$

$$5 \quad \sqrt[5]{x^{15}} = x^3$$

■ بنابراین می‌فهمیم که $\sqrt[n]{x}$ همواره نامنفی است. یعنی $\sqrt[n]{x} \geq 0$. این حقیقت، در آینده نزدیک، نقش مهمی را ایفا می‌کند.

دامنه رادیکال‌ها

اگر فرجه رادیکالی زوج باشد، عدد داخل رادیکال باید نامنفی باشد. یعنی در $\sqrt[n]{x}$ ، اگر n عددی زوج باشد، باید $x \geq 0$ باشد. اما اگر n فرد باشد، هیچ محدودیتی برای x نداریم و می‌تواند عددی منفی، مثبت یا صفر باشد.

■ آموختیم که هم خود $\sqrt[n]{x}$ نامنفی است، هم x داخل آن. بنابراین $\sqrt{x^2} = |x|$ است، اما $(\sqrt{x})^2 = x$ است، زیرا در این جا x حتماً نامنفی است (مهم).

مثال عدد $\sqrt{-7}$ بی‌معنی است. عدد $\sqrt{7}$ ، عددی مثبت است. عدد $-\sqrt{7}$ عددی بامعنی و منفی است. اگر فرجه فرد بود، در دسر کم‌تر بود، زیرا $\sqrt[3]{-7}$ بامعنی است و البته که عددی منفی است.

مثال دقت کنید که $\sqrt{-x}$ لزوماً بی‌معنی نیست. در واقع اگر $x \leq 0$ باشد، آن‌گاه $\sqrt{-x}$ بامعنی است. علاوه بر این‌ها، باید بتوانیم توان‌های مختلف اعداد را با هم مقایسه کنیم.

بدرفتاری توان‌ها

اگر $0 < a < 1$ باشد، آن‌گاه $1 < \sqrt[3]{a} < \sqrt{a} < a < a^2 < a^3 < \dots < 0$ است. اما اگر $a > 1$ باشد، آن‌گاه $1 > \sqrt[3]{a} > \sqrt{a} > a > a^2 > a^3 > \dots$ است.

مثال دقت کنید که چون $1 < \frac{1}{2} < 1$ است، پس $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \frac{1}{2} = \sqrt[2]{\frac{1}{2}}$ است. اما چون $3 > 1$ است، لذا $3\sqrt{3} = 3^{1/5} > 3^{1/25} = 3\sqrt[25]{3}$ است.

مثال اگر a عددی مثبت و $a > a^2$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(a-\sqrt{a})^2}$ را به دست آورید.

پاسخ دقت کنید که داریم:

$$\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(a-\sqrt{a})^2} = |a-1| + |a-\sqrt{a}|$$

از آن جا که a مثبت است و $a > a^2$ است، می‌فهمیم که در واقع $0 < a < 1$ است. در نتیجه $0 < a < \sqrt{a} < 1$ داریم:

■ حالا می‌توانید آزمون ۱ را حل کنید.

$$|a-1| + |a-\sqrt{a}| = 1-a + \sqrt{a}-a = 1+\sqrt{a}-2a$$

۲ اتحاد و تجزیه (۱)

■ دو اتحاد مهم، یعنی اتحاد مزدوج و اتحاد مربع دو جمله‌ای (اتحاد اول)، در مسائل مربوط به توان‌ها و رادیکال‌ها نقش مهمی دارند لذا موقتاً این دو اتحاد را مطالعه می‌کنیم و بعداً دوباره به توان‌ها و محاسبه کردن برمی‌گردیم.



■ در صورتی که دو عدد مزدوج دیدیم که برایمان آشنا نیستند، بهتر است به کمک اتحاد مزدوج، معکوس بودن آن‌ها را چک کنیم.

■ اعداد معکوس را برای قضیه مفید زیر نیاز داریم که در اکثر مسائل، محاسبات ما را به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد.

■ **قضیه اعداد معکوس:** اگر a و b دو عدد معکوس باشند، یعنی $ab = 1$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\textcircled{1} a^m b^n = a^{m-n} = b^{n-m} \quad \textcircled{2} a^n = b^{-n}, a^{-n} = b^n \quad \textcircled{3} \frac{a^m}{b^n} = a^{m+n}$$

مثال به نحوه محاسبه‌های زیر که عمدتاً براساس قضیه اعداد معکوس است، دقت کنید.

$$\textcircled{1} \frac{(2+\sqrt{3})^5 (2-\sqrt{3})^3}{\text{باینها معکوس هستند}} = (2+\sqrt{3})^{5-3} = (2+\sqrt{3})^2$$

$$\textcircled{2} \frac{(2+\sqrt{2})^{\frac{3}{4}} (2-\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}}{\text{باینها معکوس هستند}} = (2+\sqrt{2})^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}} = (2+\sqrt{2})^{\frac{1}{12}}$$

$$\textcircled{3} (2+\sqrt{3})^{\sqrt{2}+1} (2-\sqrt{3})^{\sqrt{2}-1} = (2+\sqrt{3})^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1} = (2+\sqrt{3})^2$$

$$\textcircled{4} \frac{(\sqrt{2}-1)^5}{(\sqrt{2}+1)^3} = (\sqrt{2}-1)^2$$

$$\textcircled{5} \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^1}{(2+\sqrt{3})^1}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$$

$$\textcircled{6} \sqrt{2+\sqrt{3}} \times \sqrt{2-\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} = (2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = (2+\sqrt{3})^0 = 1$$

■ در این جا نیز ممکن است که طراح، سؤال را در دو مرحله بیان کند.

تست اگر $A = (\sqrt{2}+1)^{\frac{2}{3}} \sqrt{\sqrt{2}-1}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sqrt{\frac{A}{\sqrt{A}}}$ برابر کدام است؟ (مشابه ریاض خارج ۹۳)

$$(1) (\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{6}} \quad (2) (\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{6}} \quad (3) (\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{18}} \quad (4) (\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{18}}$$

پاسخ گزینه «۳»

در ابتدا دقت کنید که $(\sqrt{2}+1)$ و $(\sqrt{2}-1)$ دو عدد معکوس هستند. بنابراین:

$$A = (\sqrt{2}+1)^{\frac{2}{3}} (\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{2}+1)^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = (\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{6}}$$

حالا سراغ محاسبه $\sqrt{\frac{A}{\sqrt{A}}}$ می‌رویم و سپس مقدار A را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{A}{\sqrt{A}}} = \sqrt{\frac{A^{\frac{1}{6}}}{A^{\frac{1}{12}}}} = \sqrt{A^{\frac{1}{6}-\frac{1}{12}}} = \sqrt{A^{\frac{1}{12}}} = \sqrt{A^{\frac{1}{12}}} = |A|^{\frac{1}{24}} \stackrel{A>0}{=} A^{\frac{1}{24}} = ((\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{4}} = (\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{24}}$$

۶. حاصل $\frac{2x^2 + |x| - 3}{x^2 - 1}$ برابر کدام است؟ (در اتحاد مزدوج، زیرکانه عمل کنید!)

(۱) $2x - 3$ (۲) $\frac{2|x| + 3}{|x| + 1}$ (۳) $\frac{2|x| - 3}{|x| - 1}$ (۴) $\frac{2|x| + 3}{|x| - 1}$

۷. حاصل $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ برابر کدام است؟ (محاسباتی-تکنیکی)

(۱) $\frac{2}{x(x+2)}$ (۲) $\frac{1}{x(x+1)}$ (۳) $\frac{3}{x(x+2)}$ (۴) $\frac{2}{x+2}$

۸. اگر $\frac{2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$ باشد، آن گاه $2a + b$ کدام است؟ (مفهومی-محاسباتی)

(۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۱ (۴) صفر

۹. اگر بخواهیم $x(x+1) + 3x + 3$ را به صورت مربع کامل در آوریم، حاصل برابر کدام گزینه می شود؟

(۱) $(x+2)^2 - 1$ (۲) $(x-2)^2 + 1$ (۳) $(x-2)^2 - 1$ (۴) $(x+2)^2 + 1$

۱۰. حاصل $(\sqrt{7-2\sqrt{10}} + \sqrt{7+2\sqrt{10}})\sqrt{20}$ برابر کدام است؟ (مشابه ریاضی ۹۳)

(۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) $4\sqrt{20}$ (۴) $6\sqrt{20}$



هایپر تست



۱. اگر $a = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$ باشد، آن گاه حاصل $\sqrt{a+\sqrt{3}} + \sqrt{a-\sqrt{3}}$ کدام است؟

(۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{2}$

۲. حاصل $(\sqrt{2}-1)^{\frac{4}{5}}(17+12\sqrt{2})^{\frac{5}{4}}$ برابر کدام است؟

(۱) $(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}}$ (۲) $(\sqrt{2}+1)^{\frac{7}{6}}$ (۳) $(\sqrt{2}-1)^{\frac{2}{3}}$ (۴) $(\sqrt{2}-1)^{\frac{3}{5}}$

۳. اگر $2^a = \sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{6}} - \sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}$ باشد، a کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۴. ساده شده عبارت $\frac{(x^2+x)^2 - 18(x^2+x) + 72}{(|x|-3)(|x|+3)}$ برابر کدام است؟

(۱) $x^2 - 2x - 8$ (۲) $x^2 + 2x + 8$ (۳) $x^2 + 2x - 8$ (۴) $x^2 - 2x + 8$



۵. اگر $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 7$ باشد، آن‌گاه $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ برابر کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

- (۱) ۴ (۲) -۱۸ (۳) ۲۰ (۴) -۳۶

۶. حاصل $\sqrt{x+8+4\sqrt{x+4}}$ به‌ازای $x = 2\sqrt{3}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3} + 1$ (۲) $\sqrt{3} + 2$ (۳) $\sqrt{3} + 3$ (۴) $\sqrt{3} + 4$

۷. اگر $\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} = 5$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{2}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x-1}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $5(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})$ (۲) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$
(۳) ۱۲۰ (۴) $2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})$

۸. اگر $-1 < a < 0$ باشد و $x = |a|^{\frac{2}{5}}$ و $y = |a|^{\frac{1}{3}}$ و $z = |a|^{\frac{5}{3}}$ باشند، آن‌گاه

- (۱) $x < y < z$ (۲) $z < y < x$ (۳) $y < x < z$ (۴) $z < x < y$

۹. فرض کنید $a = 2 + 2\sqrt{2}$ و $b = 2 - 2\sqrt{2}$ باشد. در این صورت، حاصل $(a+1)^{\frac{1}{2}} + (b+1)^{\frac{1}{2}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{2} - 1$ (۴) $\sqrt{2} + 1$

۱۰. کدام عامل در تجزیه عبارت $(x^6 + x^2)^2 - 8(x^6 + x^2) + 12$ دیده نمی‌شود؟

- (۱) $x^2 + 2$ (۲) $x^2 + 3$ (۳) $x^2 - 3$ (۴) $x^2 - 2$

پاسخ‌نامه تشریحی (۱)

۱. گزینه «۴»

$$2^{x+1} = 10 \Rightarrow 2^x \times 2^1 = 10 \Rightarrow 2^x = 5 \Rightarrow 4^x = 25 \Rightarrow 4^{x-1} = \frac{4^x}{4} = \frac{25}{4} = 6.25$$

۲. گزینه «۲»

$$5^x \times 5 = a \Rightarrow 5^x = \frac{a}{5}$$

از تساوی $5^{x+1} = a$ داریم:

$$\frac{3^x}{3} = b \Rightarrow 3^x = 3b$$

و از تساوی $3^{x-1} = b$ نیز داریم:

$$15^{x+1} = 15^x \times 15 = (5^x \times 3^x) \times 15 = \left(\frac{a}{5} \times 3b\right) \times 15 = 9ab$$

بنابراین:

۳. گزینه «۲»

$$\frac{18^2 \times 12^{-2}}{6^4 \times 16} = \frac{18^2}{12^2 \times 6^4 \times 16} = \frac{(3^2 \times 2)^2}{(2^2 \times 3)^2 \times 2^4 \times 3^4 \times 2^4}$$

$$= \frac{3^6 \times 2^2}{2^4 \times 3^2 \times 2^8 \times 3^4} = \frac{3^6 \times 2^2}{3^6 \times 2^{12}} = \frac{1}{2^9} = 2^{-9} = 2^{-9} \times 3^0$$

یعنی $a = -9$ و $b = 0$ است. پس $a + b = -9$ است.



معادلهٔ درجهٔ ۱

برای حل معادلهٔ درجهٔ یک، مجهول‌ها را به یک طرف انتقال می‌دهیم و عددها را به طرف دیگر می‌بریم

سپس به معادله‌ای به فرم $ax = b$ می‌رسیم که جواب آن $x = \frac{b}{a}$ است. ($a \neq 0$)

مثال به نحوهٔ حل معادله‌های درجهٔ ۱ زیر دقت کنید.

$$1 \quad 4x - 3 = 5 - x \Rightarrow 5x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{5}$$

$$2 \quad (\sqrt{2} + 1)^2 x = (\sqrt{2} - 1) \Rightarrow x = \frac{(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)^2} = (\sqrt{2} - 1)^4$$

$$3 \quad 4 - (2 - (4 - 2x)) = (x + 3) + 2(1 - x)$$

$$\Rightarrow 4 - (2 - 4 + 2x) = x + 3 + 2 - 2x$$

$$\Rightarrow 4 - (-2 + 2x) = -x + 5 \Rightarrow 4 + 2 - 2x = -x + 5 \Rightarrow 1 = x$$

نکته اگر به وضعیت کسر = کسر رسیدیم، باید طرفین وسطین کنیم. این قاعدهٔ مهم چنین است:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)} \Rightarrow A(x)D(x) = B(x)C(x)$$

ولی هر جا کسر داشتیم حتماً باید چک کنیم که جواب ما، مخرج را صفر نکند. کدام مخرج را؟ مخرج معادلهٔ اصلی سؤال. این نکته را در مثال‌های بعدی بررسی می‌کنیم. فعلاً چند طرفین وسطین ساده‌تر را حل کنیم.

مثال به نحوهٔ حل معادلات گویای زیر دقت کنید.

$$1 \quad \frac{3x}{x+1} = 2 \Rightarrow 3x = 2(x+1) \Rightarrow 3x = 2x + 2 \Rightarrow x = 2$$

$$2 \quad \frac{2x+1}{3} + \frac{x-1}{2} = \frac{4x+1}{2} + x + 2$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{2(2x+1) + 3(x-1)}{6} = \frac{4x+1+2(x+2)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4x+2+3x-3}{6} = \frac{4x+1+2x+4}{2} \Rightarrow \frac{7x-1}{6} = \frac{6x+5}{2} \Rightarrow 2(7x-1) = 6(6x+5)$$

$$\Rightarrow 14x - 2 = 36x + 30 \Rightarrow 22x = -32 \Rightarrow x = -\frac{32}{22} = -\frac{16}{11}$$

نکته اگر $x = a$ ریشهٔ یک معادله باشد (چه کسری، چه رادیکالی، چه درجهٔ ۱، چه درجهٔ ۲ و...)، آن‌گاه

این عدد در معادله صدق می‌کند.

مثال اگر $x = 2 + \sqrt{3}$ ریشه معادله $\frac{a}{x} = 2x + a$ باشد، آن گاه مقدار a را بیابید.

پاسخ با قراردادن $x = 2 + \sqrt{3}$ در معادله، داریم:

$$\frac{a}{2 + \sqrt{3}} = 2(2 + \sqrt{3}) + a \Rightarrow a(2 - \sqrt{3}) = 6 + 2\sqrt{3} + a \Rightarrow a(2 - \sqrt{3}) - a = 6 + 2\sqrt{3}$$

$$\xrightarrow[\text{فاکتورگیری}]{\text{از } a} a(2 - \sqrt{3} - 1) = 6 + 2\sqrt{3} \Rightarrow a(1 - \sqrt{3}) = 6 + 2\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow[\text{مخارج کردن}]{\text{گویا کردن}} a = -\frac{15 + 9\sqrt{3}}{2}$$

گاهی بعد از ساده کردن یک عبارت به معادله درجه یک می‌رسیم. خیلی مهم است که حواس مان به مخارج‌ها باشد.

مثال جواب‌های معادله $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 2x - 3$ را به دست آورید.

$$\xrightarrow[\text{پاسخ}]{\text{به کمک اتحاد جمله مشترک داریم:}} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)} = 2x - 3 \Rightarrow x - 1 = 2x - 3 \Rightarrow x = 2$$

اما $x = 2$ جواب قابل قبولی نیست، زیرا مخارج معادله اصلی سؤال را صفر می‌کند. باید بدانید که ساده کردن اصولی دارد و آن اصول را به درستی رعایت کنید:

نکته مهم اگر عبارتی را از دو طرف معادله‌ای ساده کردیم، باید آن عبارت را برابر صفر قرار دهیم و جواب یا جواب‌های آن را، در صورت وجود، به دست آوریم، یعنی:

$$A(x)B(x) = A(x)C(x) \Rightarrow A(x) = 0 \text{ یا } B(x) = C(x)$$

اما اگر عبارت در مخارج بود، ساده کردن آن از طرفین بلامانع است، ولی در پایان بررسی می‌کنیم که جواب مخارج را صفر نکند.

$$\frac{B(x)}{A(x)} = \frac{C(x)}{A(x)} \Rightarrow A(x) \neq 0, B(x) = C(x)$$

مثال معادله $2(x-2)(x-3)(x-4) = x(x-2)(x-3)$ را حل کنید.

پاسخ می‌خواهیم $(x-2)$ و $(x-3)$ را ساده کنیم. بنابراین باید ریشه‌های آن‌ها را هم در نظر بگیریم.

$$2(\cancel{x-2})(\cancel{x-3})(x-4) = x(\cancel{x-2})(\cancel{x-3}) \Rightarrow x-2=0 \text{ یا } x-3=0 \text{ یا } 2(x-4)=x \Rightarrow x=2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 8$$

بنابراین این معادله سه ریشه حقیقی متمایز دارد.

نکته ویژگی مهم عدد صفر: اگر حاصل ضرب چند عبارت برابر ۰ باشد، حداقل یکی از آن‌ها صفر است. یعنی

برای حل معادله $A(x)B(x)C(x) \dots = 0$ ، معادله‌های $A(x) = 0$ و $B(x) = 0$ و... را جداگانه حل می‌کنیم و در آخر کار از جواب‌ها اجتماع می‌گیریم. دقیقاً به خاطر همین قضیه است که تجزیه و اتحاد خیلی مفید است.

مثال معادله‌های زیر، با توجه به نکته فوق حل شده‌اند. آن‌ها را مطالعه بفرمایید.

۱ $(x^2 + 3x)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x(x+3)(x-1)(x+1) = 0$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ یا } x+3=0 \text{ یا } x-1=0 \text{ یا } x+1=0 \Rightarrow x \in \{0, -3, 1, -1\}$$

۲ $x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow (x+4)(x-3) = 0 \Rightarrow x+4=0 \text{ یا } x-3=0 \Rightarrow x \in \{-4, 3\}$



$$\textcircled{3} (x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0 \Rightarrow ((x^2 + x) - 12)((x^2 + x) - 6) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + x - 12)(x^2 + x - 6) = 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 3)(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x + 4 = 0 \text{ یا } x - 3 = 0 \text{ یا } x + 3 = 0 \text{ یا } x - 2 = 0 \Rightarrow x \in \{-4, 3, -3, 2\}$$

$$\textcircled{4} 7x^2 - 16x + 4 = 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک ضریب‌دار}} (x - 2)(7x - 2) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \text{ یا } 7x - 2 = 0$$

$$x \in \{2, \frac{2}{7}\}$$

$$\textcircled{5} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2 + 5\left(\frac{x+3}{x-1}\right) + 6 = 0 \Rightarrow \left(\frac{x+3}{x-1} + 3\right)\left(\frac{x+3}{x-1} + 2\right) = 0 \Rightarrow \frac{x+3}{x-1} + 3 = 0 \text{ یا } \frac{x+3}{x-1} + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4x}{x-1} = 0 \text{ یا } \frac{3x+1}{x-1} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x \in \{0, -\frac{1}{3}\}$$

در مورد شماره $\textcircled{5}$ دقت کنید که جواب‌های به‌دست آمده، هیچ‌کدام از مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند.

حل معادله قدرمطلق

اصل مطلب برای حل معادله $|A(x)| = B(x)$ ، راه‌حل کلی این است که معادله‌های $A(x) = B(x)$ و

$A(x) = -B(x)$ را حل کنیم و جواب‌های به‌دست آمده را چک کنیم. به‌عنوان مثال، فرض کنید بخواهیم

معادله $|2x - 1| = x + 2$ را حل کنیم. داریم:

$$|2x - 1| = x + 2 \Rightarrow 2x - 1 = x + 2 \text{ یا } 2x - 1 = -x - 2 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -\frac{1}{3}$$

حالا باید این جواب‌ها را در معادله چک کنیم. بعضی وقت‌ها جواب‌های اضافه به‌دست می‌آوریم. ریشه‌ها را در

معادله $|2x - 1| = x + 2$ قرار می‌دهیم و داریم:

$$x = 3 \Rightarrow |5| = 5 \quad \checkmark$$

$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \left|-\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3} \quad \checkmark$$

بنابراین هر دو جواب قابل قبول‌اند.

خوشبختانه در دو مورد بسیار رایج، حتی نیازی به چک کردن نداریم. یکی معادله‌های که دو طرف آن

قدرمطلق هستند، یعنی $|A(x)| = |B(x)|$ و دیگری معادله‌ای که یک طرف آن عددی نامنفی است. یعنی

با شرط $a \geq 0$ ، معادله $|A(x)| = a$ نیازی به چک کردن ندارد. مثلاً برای حل معادله $|x - 3| = 2$ ، داریم:

$$|x - 3| = 2 \Rightarrow x - 3 = 2 \text{ یا } x - 3 = -2 \Rightarrow x = 5, x = 1$$

در آخر این نکته بدیهی را فراموش نکنید: معادله $|A(x)| = b$ وقتی b عددی منفی باشد، جواب حقیقی ندارد.

مثال به نحوه حل معادلات قدرمطلق زیر دقت کنید:

$$\textcircled{1} |3x - 2| = 7 \Rightarrow 3x - 2 = 7 \text{ یا } 3x - 2 = -7 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -\frac{5}{3}$$

$$\textcircled{2} ||x - 2| - 5| = 3 \Rightarrow |x - 2| - 5 = 3 \text{ یا } |x - 2| - 5 = -3 \Rightarrow |x - 2| = 8 \text{ یا } |x - 2| = 2$$

$$\Rightarrow x - 2 = 8 \text{ یا } x - 2 = -8 \text{ یا } x - 2 = 2 \text{ یا } x - 2 = -2 \Rightarrow x \in \{10, -6, 4, 0\}$$

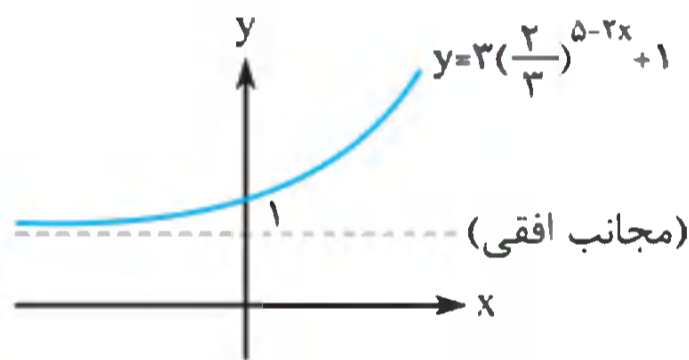


توابع نمایی

اصل مطلب

به تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ که در آن a عدد حقیقی ثابت و مثبتی است، که مخالف ۱ هم هست، تابع نمایی می‌گویند. یعنی $f(x) = a^x$ با شرط $a > 0$ و $a \neq 1$ ، یک تابع نمایی است. مثلاً $y = 3^x$ ، $y = (\frac{2}{3})^x$ و $y = (\sqrt{2} - 1)^x$ مثال‌هایی از تابع‌های نمایی‌اند.

■ تابع نمایی اگر $a > 1$ باشد، اکیداً صعودی است. ولی اگر $0 < a < 1$ باشد، اکیداً نزولی است. دامنه تابع نمایی \mathbb{R} و برد آن $(0, +\infty)$ است. نمودار تابع نمایی مجانب افقی دارد، یعنی خطی افقی که نمودار مدام به آن نزدیک می‌شود. این خط در حالت عادی $y = 0$ است. اما گاهی طراح مسئله، تابع نمایی را کمی تا قسمتی تغییر می‌دهد تا به صورت $f(x) = Aa^{bx+c} + B$ درآید. در این حالت مجانب افقی $y = B$ است و خط مهمی است. مثلاً مجانب افقی نمودار $y = 3(\frac{2}{3})^{5-2x} + 1$ ، خط $y = 1$ است (نقطه چین در شکل زیر).



در این تابع، یعنی $f(x) = Aa^{bx+c} + B$ برای تشخیص صعودی اکید یا نزولی اکید بودن نمودار، کافی است به علامت $A(a-1)b$ دقت کنیم. اگر علامت مثبت بود، تابع اکیداً صعودی است و اگر علامت منفی بود، تابع اکیداً نزولی است. با تشخیص خط مجانب افقی، صعودی یا نزولی بودن $f(x)$ و در آخر مقدار $f(0)$ ، نمودار $y = f(x)$ را می‌توانیم به راحتی رسم کنیم. هرچه نکته عجیب غریب در این باره هست را بی‌خیال می‌شویم و همین یک کار مهم را خوب تمرین می‌کنیم. به قول معروف: «روباه کارهای بسیاری بلد بود، اما خاریشت یک کار بزرگ بلد بود.»

مثال نمودار $y = 3 - 2(\frac{2}{3})^{4x+1}$ را رسم کنید.

پاسخ در سه مرحله و با یک ترتیب و الگوی مشخص، نمودار این تابع را رسم می‌کنیم.

(۱) اول مجانب افقی: خیلی ساده است: $y = 3$.

(۲) تعیین وضعیت یکنوایی: از آن جا که $-2(\frac{2}{3} - 1)(4) > 0$ ، پس با تابعی اکیداً صعودی طرفیم.

(۳) پیدا کردن $f(0)$ یعنی نقطه تلاقی با محور y ‌ها:

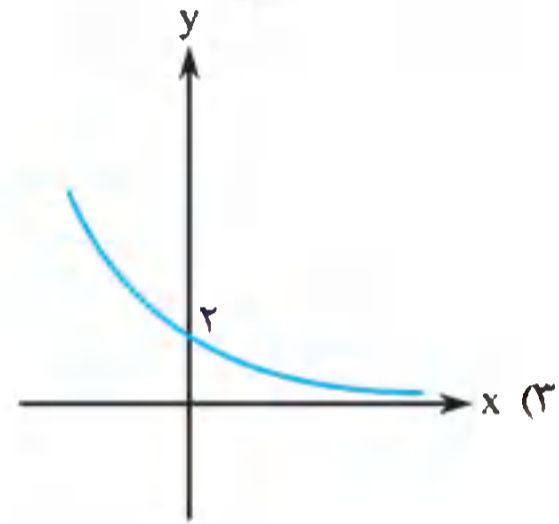
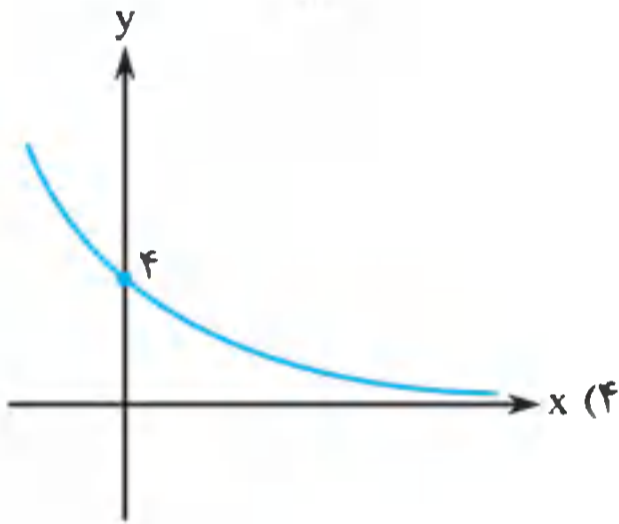
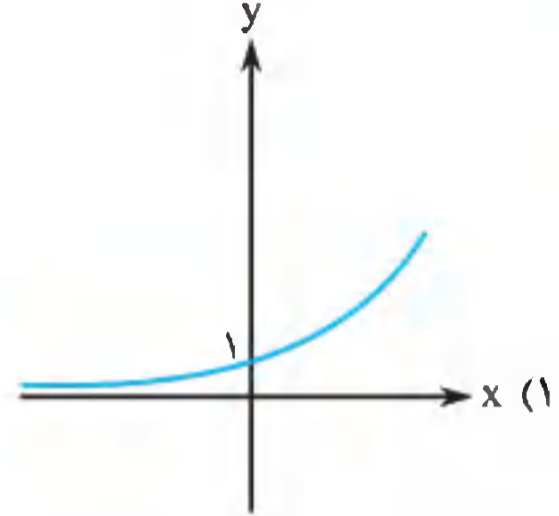
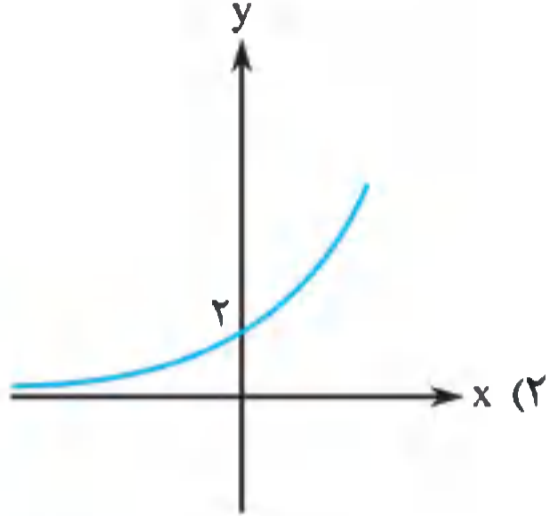
$$f(0) = 3 - 2(\frac{2}{3}) = \frac{5}{3}$$



هایپر تست



۱. نمودار تابع $y = 3a^{2-x}$ ، به ازای $a > 0$ ثابت، به کدام صورت نمی‌تواند باشد؟



۲. حاصل $\sqrt{3^{\log \sqrt{3} 5} + 5^{\log \sqrt{5} 12} + 12^{\log \sqrt{12} 3}}$ برابر کدام است؟

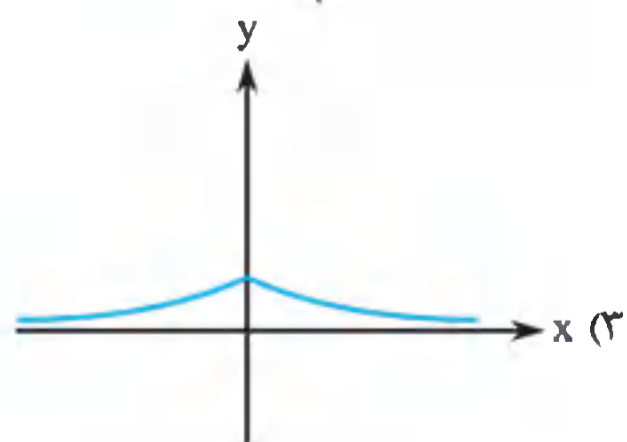
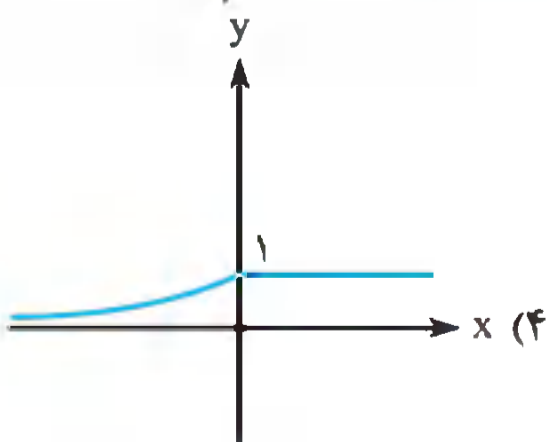
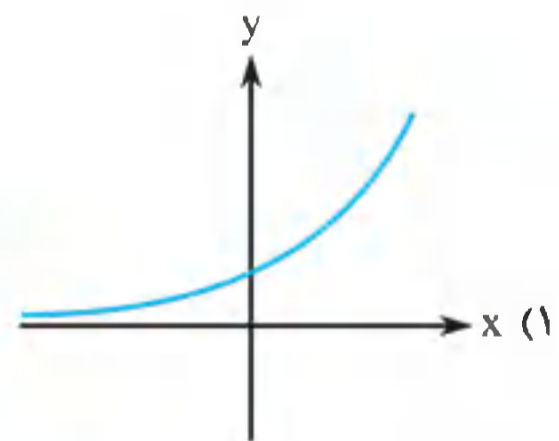
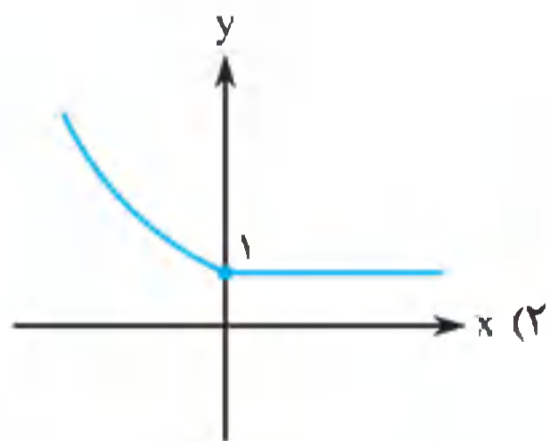
۱۵√۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۳ (۲)

√۱۵ (۱)

۳. نمودار تابع $y = 2^x \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ به کدام صورت است؟



۴. کدام بزرگ‌تر است؟ (زاویه بر حسب رادیان است.)

$\cot^{-1} \tan^{-1}$ (۴)

$\cot^{-1} \cot^{-1}$ (۳)

$\tan^{-1} \cot^{-1}$ (۲)

$\tan^{-1} \tan^{-1}$ (۱)



مقدمه

سلام به بچه‌های نازنین تجربی...

به کتاب جمع‌بندی ریاضی خوش آمدید. این یک کتاب «به دانش‌آموزان خود اهمیت‌دهنده» است و خیلی خوشحالیم که قرار است استرس این یکی درس‌تان را کم کنیم. این کتاب را برای کسانی نوشته‌ایم که نمی‌خواهند بی‌خیال بلندپروازی‌هایشان بشوند و «رسیدن به هدف» را حق خودشان می‌دانند، ولی در ریاضی به مشکل خورده‌اند و دنبال منبعی می‌گردند که مطالب مختلف این درس را جمع‌وجور کند. قصدمان این بوده است که به هر دانش‌آموزی که کتاب را می‌خواند، یک شانس خوب بدهیم، حتی اگر در این درس امیدش را از دست داده باشد. به همین دلیل، روی جنبه آموزشی کتاب حسابی کار شده است و به روال متداول کتاب‌های جمع‌بندی، فرض نکرده‌ایم که همه چیز را بلدید و دوتا فرمول بگوییم و دست از سرتان برداریم. نه! تصمیم گرفتیم که حتی اگر خواستیم اتحاد هم بگوییم، آن را یادتان بدهیم و چیزی فراتر از فرمول‌نامه و چکیده نکات باشیم.

■ یکی از ویژگی‌های ممتاز این کتاب، آزمون‌های میان‌وعده آن است. یعنی برای هر قسمت از درسنامه، آزمون مناسب آن قسمت طراحی شده است. این آزمون‌ها با وسواس چیده شده‌اند و تمام مطالب را برای شرایط عادی کنکور پوشش می‌دهند.

■ علاوه بر این، برای آن دسته از دانش‌آموزانی که آزمون‌های چالشی ولی در راستای کنکور می‌خواهند، آزمون‌های هایپر تست را قرار داده‌ایم. هایپر تست‌ها قرار نیست عیناً سؤال کنکور باشند، بلکه قرار است تا با مطالعه و تمرین آن‌ها، برای شرایط غیرمترقبه آماده شوید. اگر زمان کافی برای مطالعه ریاضی ندارید (ودلتان آمد 😊)، می‌توانید از این آزمون‌ها صرف‌نظر کنید. چون هایپر تست‌ها پهلوانی طراحی شده‌اند 😊. اگر بر هایپر تست‌ها تسلط پیدا کردید، برای درصد ۱۰۰ به جلسه کنکور بروید.

■ پاسخ‌نامه کلیدی هایپر تست‌ها و آزمون‌های جامع در انتهای کتاب موجود است. اما اگر پاسخ‌نامه تشریحی می‌خواهید، هیچ نگران نباشید. زیرا فایل pdf آن را می‌توانید با اسکن QR Code زیر، که در بنر هایپر تست تمام فصل‌ها نیز قرار داده شده است، از سایت انتشارات مهروماه به آدرس www.mehromah.ir دانلود کنید.



پاسخ‌ها را اینجا بخوانید! ←



۵. نمودارهای $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x}$ و $y = 3^x + \frac{8}{3}$ در نقطه A متقاطعند. فاصله نقطه A از نقطه $(-1, 1)$ کدام است؟

(ریاضی ۹۶)

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) 2 (۳) 2 (۴) $\sqrt{5}$

۶. نیمه عمر ماده‌ای ۲۰۰ سال و مقدار اولیه آن ۲۵۰۰ گرم است. پس از چند سال $156/25$ گرم از این ماده باقی می‌ماند؟

(۱) ۸۰۰ (۲) ۷۰۰ (۳) ۶۰۰ (۴) ۴۰۰

۷. جواب نامعادله $\log_{(2x-1)}(3x+4) < 0$ کدام است؟

(۱) $(\frac{1}{2}, 1) \cup (3, +\infty)$ (۲) $(1, \frac{3}{2}) \cup (3, +\infty)$ (۳) $(\frac{1}{2}, 1)$ (۴) $(3, +\infty)$

۸. اگر $\log_6 3 = a$ باشد، آن‌گاه حاصل $\log_{64} 3\sqrt{12}$ کدام است؟

(۱) $\frac{a+2}{6a-8}$ (۲) $\frac{a+3}{6a+8}$ (۳) $\frac{a-3}{8a-6}$ (۴) $\frac{a+3}{8a+6}$

۹. اگر $\log_{12}(a^2 + b) = 2 + \log_3 b = 2 + \log_2 a$ باشد، حاصل $\sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{a^2}}$ کدام است؟

(۱) ۴۲ (۲) ۱۸ (۳) ۱۲ (۴) ۲۴

(ریاضی ۹۵)

۱۰. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$ به کدام صورت است؟

(۱) $[-2, 0] \cup (3, 5]$ (۲) $[-2, 0] \cup (3, 5)$ (۳) $[-2, 3)$ (۴) $(0, 5]$

پاسخنامه تشریحی (۱)

۱. گزینه «۲»

اولاً $f(0) = \frac{1}{2}$ ، ثانیاً $\frac{1}{2} > \frac{1}{2}(-1)(-1) = \frac{1}{2}$ است، لذا $f(x)$ اکیداً صعودی است. در آخر $y = 0$ مجانب افقی $y = f(x)$ است، یعنی گزینه «۲» درست است.

۲. گزینه «۲»

$$2^{x^2-8} < 4^x \Rightarrow 2^{x^2-8} < 2^{2x} \Rightarrow x^2 - 8 < 2x \Rightarrow x^2 - 8 - 2x < 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 4 \Rightarrow \text{شامل ۵ عدد صحیح}$$

۳. گزینه «۲»

دقت کنید که طبق نمودار $f(-\frac{1}{3}) = 0$ و $f(0) = -2$ ، همین برای حل مسئله کافی است.

$$\begin{cases} f(-\frac{1}{3}) = 0 \\ f(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 + 2^{\frac{-a}{3}+b} = 0 \\ -4 + 2^b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{\frac{-a}{3}+b} = 4 = 2^2 \\ 2^b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{3} + b = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow b = 1, a = -3 \Rightarrow f(x) = -4 + 2^{-3x+1} \Rightarrow f(-\frac{5}{3}) = -4 + 2^6 = 60$$



مثال فرض کنید $f(x)$ تابعی صعودی و $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{3-x}$ و $h(x) = -2x^2 + 10$ باشد.

در این صورت $f(x)$ و $g(x)$ صعودی و $h(x)$ اکیداً نزولی است. بنابراین ترکیب آن؛ مثلاً $(g \circ h \circ f)(x)$ را می‌توان با ضرب $-1(+1)(-1)(+1) = -1$ به‌عنوان تابعی نزولی تشخیص داد.

مثال اگر $f(2-x)$ نزولی باشد، آن‌گاه درباره $f(x)$ چه می‌توان گفت؟

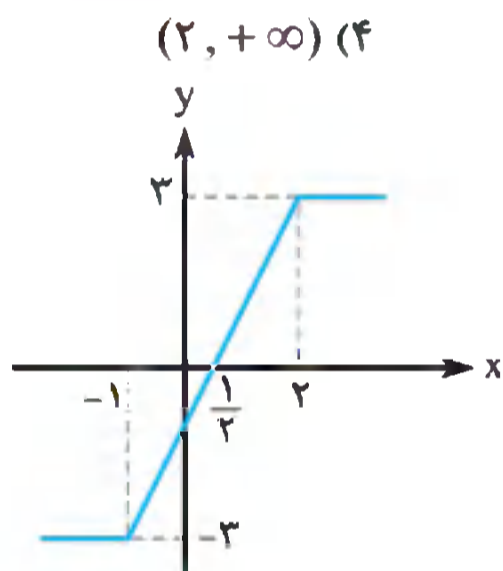
پاسخ دقت کنید که اگر تعریف کنیم $g(x) = 2-x$ ، آن‌گاه $g(x)$ تابعی نزولی است. از طرفی $f(2-x) = (f \circ g)(x)$ هم طبق فرض مسئله نزولی است. یعنی داریم: $(-1) = \square \times (-1)$ فوراً می‌فهمیم $\square = +1$ و لذا $f(x)$ تابعی صعودی است.

نکته برای بررسی یکنوایی توابع چند ضابطه‌ای، آن‌ها را رسم کنید. حتماً یادتان هست که قدرمطلق ذاتاً چند ضابطه‌ای است.

تست بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x+1| - |x-2|$ روی آن اکیداً صعودی

(تجربی خارج ۹۸)

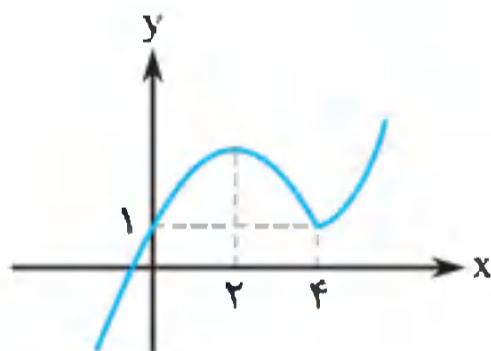
است، کدام است؟



(۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(-1, +\infty)$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(2, +\infty)$

پاسخ گزینه «۳» این همان دوست‌مان است. (تابع آبشاری) این تابع روی $[-1, 2]$ اکیداً صعودی است. البته ممکن است در کنکور بین گزینه‌ها بازه را به‌صورت باز بدهند $(-1, 2)$ که هیچ فرقی ندارد. (هردوتا را نمی‌دهند). بدیهی است که $f(x)$ در \mathbb{R} صعودی است، اما مسئله از ما اکیداً صعودی را خواسته است.

مثال تابع $f(x) = x|x-4| + 1$ روی بازه‌ای، اکیداً نزولی است. این بازه را بیابید و ضابطه $f(x)$ را در این بازه بنویسید.



$$f(x) = x|x-4| + 1 = \begin{cases} x(x-4) + 1 & ; x \geq 4 \\ -x(x-4) + 1 & ; x < 4 \end{cases}$$

بنابراین نمودار $y = f(x)$ چنین است:
(عدد ۲ طول رأس سهمی است)

بدیهی است که $f(x)$ روی بازه $(2, 4)$ اکیداً نزولی است و ضابطه آن روی این بازه:
 $f(x) = -x(x-4) + 1; 2 < x < 4$. می‌توانستید بازه را بسته بگذارید. این موضوع کاملاً دلخواه است.

■ امیدوارم خسته نباشید، چون آزمون (۳) خیلی خیلی عجله دارد که حلش کنید.

توابع ۱-۱ و تابع وارون

۴

سؤال آموزشی: فرض کنید $f(x) = x^2 + 1$ در این صورت از $f(a) = f(b)$ چه نتایج می‌گیریم؟

با قرار دادن a و b در ضابطه $f(x)$ داریم: $f(a) = f(b) \Rightarrow a^2 + 1 = b^2 + 1 \Rightarrow a = b$ یا $a = -b$

در واقع درباره توابع درجه ۲ نکته جالبی داریم:

نکته اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، آن گاه از $f(m) = f(n)$ نتیجه می‌گیریم که $m = n$ یا $m + n = -\frac{b}{a}$.

مثال فرض کنید $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$ باشد. معادله $f(2x+1) = f(x-2)$ را حل کنید.

پاسخ طبق نکته قبل درباره توابع درجه ۲، داریم:

$$f(2x+1) = f(x-2) \Rightarrow 2x+1 = x-2 \text{ یا } 2x+1+x-2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = -3 \text{ یا } x = -\frac{1}{6}$$

اصل مطلب درباره تابع درجه ۲ مانند $f(x)$ دیدیم که $f(a) = f(b)$ ما را به دو نتیجه می‌رساند. یکی $a = b$ و یک نتیجه دیگر. در واقع برای هر تابع مانند $f(x)$ ، از معادله $f(a) = f(b)$ حتماً نتیجه $a = b$ به دست می‌آید، اما گاهی ممکن است نتایج دیگری هم به دست بیاید. این وضعیت دوم، مورد علاقه ما نیست. ما به توابعی علاقه مندیم که $f(a) = f(b)$ فقط به نتیجه $a = b$ برسد. به این توابع، تابع‌های ۱-۱ (یک به یک) می‌گویند. باز هم از خوبی‌های کتاب مهر و ماه این است که جدول توابع ۱-۱ را، با مخلفات، تا دو صفحه دیگر تقدیم می‌کند. ولی قبل از هر چیز به یک مثال جانانه نیاز داریم.

مثال نشان دهید تابع $f(x) = \frac{x^3+1}{2x^3+1}$ ، تابعی ۱-۱ است.

پاسخ با $f(a) = f(b)$ شروع می‌کنیم و نشان می‌دهیم تنها نتیجه ممکن $a = b$ است:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{a^3+1}{2a^3+1} = \frac{b^3+1}{2b^3+1} \Rightarrow (a^3+1)(2b^3+1) = (b^3+1)(2a^3+1)$$

$$\Rightarrow 2a^3b^3 + a^3 + 2b^3 + 1 = 2a^3b^3 + b^3 + 2a^3 + 1 \Rightarrow b^3 = a^3 \Rightarrow b = a$$

بنابراین $f(x)$ واقعاً ۱-۱ است.

قبل از این که بتوانیم درباره وارون توابع، بحثی را آغاز کنیم، باید نکاتی را درباره برد توابعی که دامنه‌شان محدود شده است بگوییم. این همان نکته‌ای است که در بخش (۱) وعده کرده بودیم که به یادتان بیاوریم.

اصل مطلب فرض کنید $f(x)$ تابعی با دامنه $x \in [a, b]$ باشد (باز یا بسته بودن بازه مهم نیست). اگر $f(x)$ تابعی خطی $f(x) = ax + b$ ، رادیکالی $f(x) = a + \sqrt{bx + c}$ ، لگاریتمی $f(x) = \log(ax + b)$ یا نمایی $f(x) = a^{bx+c}$ باشد، برد آن با محاسبه $f(a)$ و $f(b)$ به راحتی به دست می‌آید.

مثال فرض کنید $f(x) = \sqrt{4x+1}$ ؛ $2 \leq x < 5$ باشد. در این صورت برد $f(x)$ را بیابید.

پاسخ چون ضابطه $f(x)$ ، ترکیبی از توابع خطی و رادیکالی است، برد با عددگذاری به دست می‌آید:

$$f(2) = \sqrt{9} = 3 \text{ و } f(5) = \sqrt{21}$$

بنابراین $R_f = [3, \sqrt{21})$ علت باز و بسته بودن بازه‌ها به عهده شما.

مثال فرض کنید $f(x) = 3 - 2^{x-1}$ با دامنه $D_f = [-1, 2)$ باشد، برد تابع $4f(x-1) + 3$ را بیابید.

پاسخ چون $f(x)$ نمایی است، پس برد $f(x)$ با عددگذاری به دست می‌آید:

$$\begin{cases} f(-1) = 3 - 2^{-2} = \frac{11}{4} \\ f(2) = 3 - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow R_{f(x)} = \left(1, \frac{11}{4}\right]$$

حالا با توجه به آنچه در بخش قبل آموختیم، داریم: $R_{4f(x-1)+3} = (4 \times 1 + 3, 4 \times \frac{11}{4} + 3) = (7, 14]$



نکته گاهی این قضیه در قالب تغییر متغیرهای $T = \sqrt{x}$ و $T = |x|$ و $T = a^x$ بیان می‌شود. دقت کنید که دو تغییر متغیر اول شرط $T \in [0, +\infty)$ و تغییر متغیر نمایی، شرط $T \in (0, +\infty)$ را ایجاد می‌کند.

مثال برد تابع $f(x) = 2^{|x|} + 1$ را به دست آورید.

پاسخ در این مسئله قدر مطلق آمده است، که مشکلیش با عددگذاری حل نمی‌شود. (عددگذاری فقط برد توابع خطی، رادیکالی، لگاریتمی و نمایی را حل می‌کند). اما در عوض نکته قبل را داریم که می‌گویید $T = |x| \geq 0$ را اعمال کنیم.

$$f(T) = 2^T + 1; T \in [0, +\infty)$$

$$\begin{cases} f(0) = 2^0 + 1 = 2 \\ f(+\infty) = 2^{+\infty} + 1 = +\infty \end{cases} \Rightarrow R_f = [2, +\infty)$$

حالا تابع نمایی است:

حالا می‌رسیم به بداخلاق‌ترین تابع دنیا، که همان تابع درجه ۲ است.

نکته برای محاسبه برد تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، وقتی $x \in [m, n)$ است، اول باید ببینیم که آیا طول رأس سهمی، یعنی $x_s = -\frac{b}{2a}$ در این بازه قرار دارد یا نه. اگر قرار نداشته باشد که خوش به حال ما. همان اول و آخر بازه را عددگذاری می‌کنیم. اما اگر $x_s = -\frac{b}{2a}$ در بازه دامنه قرار داشته باشد، علاوه بر اول و آخر بازه باید x_s را هم در $f(x)$ عددگذاری کنیم. سه عدد به دست می‌آوریم. به کمک کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین آن‌ها برد را تعیین می‌کنیم.

مثال برد تابع $f(x) = x^2 - 6x + 1; x \in [-1, 2)$ را به دست آورید.

پاسخ در این جا $x_s = -\frac{b}{2a} = 3 \notin D_f$. لذا فقط اول و آخر بازه را باید عددگذاری کنیم:

$$\begin{cases} f(-1) = 1 + 6 + 1 = 8 \\ f(2) = 4 - 12 + 1 = -7 \end{cases} \Rightarrow R_f = (-7, 8]$$

مثال برد تابع $f(x) = x^2 - 6x + 1; x \in [1, 4)$ را به دست آورید.

پاسخ در این جا $x_s = -\frac{b}{2a} = 3 \in [1, 4)$ است. لذا باید در عددگذاری‌ها شرکت کند:

$$\begin{cases} f(1) = 1 - 6 + 1 = -4 \\ f(3) = 9 - 18 + 1 = -8 \\ f(4) = 16 - 24 + 1 = -7 \end{cases} \Rightarrow R_f = [-8, -4]$$

دقت کنید که چون $3 \in [1, 4)$ است، پس بازه را از سمت $f(3) = -8$ بسته گذاشتیم. نیازی هم به حذف $f(4) = -7$ از برد نیست. نگران نباشید، -7 توسط عددی غیر از 4 ، در همین بازه به دست می‌آید (اگر شک دارید $f(2)$ را محاسبه کنید).

■ حالا آماده‌ایم تا تابع وارون را بیاموزیم. اولاً باید بدانید که فقط توابع $1-1$ وارون‌پذیر هستند. یعنی شرط وارون‌پذیری $1-1$ بودن تابع است. قبل از هر چیز فهرستی از توابع $1-1$ نیاز داریم.

نکته همه توابع اکیداً صعودی $1-1$ هستند. همه توابع اکیداً نزولی نیز $1-1$ هستند. لذا توابع نمایی $(y = a^{bx+c})$ ، خطی غیر ثابت $(y = ax + b)$ ، رادیکالی $(y = a \pm \sqrt{bx+c})$ ، لگاریتمی $(y = \log_c ax + b)$ و هموگرافیک $(y = \frac{ax+b}{cx+d})$ ، همه وارون‌پذیر هستند. ترکیب این توابع با یکدیگر نیز، تابعی $1-1$ ایجاد می‌کند.

◀ تابع درجه ۲، یعنی $f(x) = ax^2 + bx + c$ تابعی ۱-۱ نیست، مگر این که طراح دامنه آن را به نحو مناسبی محدود کند. این نحوه مناسب یعنی چه؟ یعنی تمام دامنه $f(x)$ یا قبل از رأس آن $x_s = -\frac{b}{2a}$ باشد یا بعد از رأس آن. به عبارتی برای ۱-۱ یا وارون پذیر بودن تابع درجه ۲ باید $D_f \subseteq [-\frac{b}{2a}, +\infty)$ یا $D_f \subseteq (-\infty, \frac{b}{2a}]$ باشد.

◀ برای بررسی ۱-۱ بودن توابع چندضابطه‌ای، بهترین کار رسم است.

◀ تابع $f(x) = ax + b$ با شرط $|a| > |b|$ وارون پذیر است در غیر این صورت وارون پذیر نیست. ($a, b \neq 0$)

مثال در این مثال همه توابع ۱-۱ مهم برای کنکور را می‌بینید.

- ۱ تابع هموگرافیک: $f(x) = \frac{3x+7}{x+3}$
- ۲ ترکیب خطی و رادیکالی: $f(x) = 3\sqrt{x+1} + 5$
- ۳ $f(x) = x^2 - 3x + 2; x \in [4, +\infty) \Rightarrow [4, +\infty) \subseteq [\frac{3}{2}, +\infty)$
- ۴ $f(x) = 5x + 3|x| \Rightarrow |5| > |3|$
- ۵ جمع دو تابع اکید صعودی $\Rightarrow f(x) = x^3 + 10x + 1$

نکته برای این که نشان دهیم تابعی ۱-۱ نیست، کافی است دو عدد متمایز x_1 و x_2 پیدا کنیم که $f(x_1) = f(x_2)$ باشد. معمولاً توابعی که x^2 یا $|x|$ دارند یا توابعی که جمع دو عبارت معکوس دارند، یک به یک نیستند.

مثال در این مثال توابعی غیر ۱-۱ را نوشته‌ایم و برای هر کدام اعدادی پیدا کردیم که ۱-۱ بودن را خراب می‌کنند. خوشبختانه زیاد با این تابع‌ها، کار نداریم.

- ۱ $f(x) = |x| \Rightarrow f(5) = f(-5) = 5 \quad x$
- ۲ $f(x) = x^2 - 4x \Rightarrow f(0) = f(4) = 0 \quad x$

البته کلاً توابع درجه ۲ بدون محدود کردن دامنه‌شان ۱-۱ نیستند.

- ۳ جمع دو عبارت معکوس $\Rightarrow f(x) = 2^x + 2^{-x} \Rightarrow f(1) = f(-1) = 2/5 \quad x$
- ۴ $f(x) = x + |x| \Rightarrow$ ۱-۱ نیست $\Rightarrow |a| = |b| = 1$ نکته گفته شده

اصل مطلب اگر $f(x)$ تابعی ۱-۱ باشد، آن گاه حتماً تابع وارون دارد. تابع وارون $f(x)$ را با $f^{-1}(x)$ نشان می‌دهیم. برای محاسبه $f^{-1}(x)$ قدم اول محاسبه برد $f(x)$ است. این مرحله حتماً باید همان اول انجام شود. برد $f(x)$ در واقع همان دامنه $f^{-1}(x)$ است. یعنی $R_f = D_f^{-1}$. در مرحله دوم با حل معادله $y = f(x)$ و به دست آوردن x بر حسب y ، ضابطه تابع معکوس را به دست می‌آوریم. قبلاً بارها این کار را انجام داده‌ایم.

مثال فرض کنید $f(x) = \frac{2x+1}{3}; x \in (1, 4]$ باشد. دامنه و ضابطه $f^{-1}(x)$ را بیابید.

پاسخ اول باید برد $f(x)$ را حساب کنیم. خوشبختانه $f(x)$ خطی است و برد آن با عددگذاری به دست می‌آید:

$$\begin{cases} f(1) = \frac{2+1}{3} = 1 \\ f(4) = \frac{8+1}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow R_f = (1, 3] = D_f^{-1}$$



حال کار ساده است. باید $y = \frac{2x+1}{3}$ را حل کنیم و x را به دست آوریم:

$$3y = 2x + 1 \Rightarrow 3y - 1 = 2x \Rightarrow \frac{3y-1}{2} = x \xrightarrow{\text{تغییر اسم متغیرها}} f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2}; x \in (1, 3]$$

مثال فرض کنید $f(x) = x^2 + 6x + 1; x > 1$ باشد. دامنه و ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست آورید.

پاسخ اول برد $f(x)$. از آن جا که $f(x)$ تابعی درجه ۲ است، باید طول رأس آن را به دست آوریم: $x_s = -3$ که خوشبختانه در بازه $(1, +\infty)$ ، که دامنه $f(x)$ است قرار ندارد. لذا برای محاسبه برد $f(x)$ کافی است

$$\begin{cases} f(1) = 1 + 6 + 1 = 8 \\ f(+\infty) = (+\infty) + (+\infty) + 1 = +\infty \end{cases} \Rightarrow R_f = (8, +\infty) = D_{f^{-1}}$$

به عنوان یک نکته اخلاقی، به یاد داشته باشید که در محاسبه ضابطه تابع معکوس یک تابع درجه ۲، بهترین کار مربع کامل کردن است (این را بزرگ بنویسید روی کاغذ، یک گوشه ذهن تان نگه دارید).

$$y = x^2 + 6x + 1 = (x+3)^2 - 8 \Rightarrow y + 8 = (x+3)^2 \Rightarrow \sqrt{y+8} = |x+3|$$

$$\xrightarrow{x>1} \sqrt{y+8} = x+3 \Rightarrow x = \sqrt{y+8} - 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+8} - 3; x \in (8, +\infty)$$

نکته اگر $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ باشد، آن گاه $R_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$ و البته $f^{-1}(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}$ است.

مثال وارون توابع زیر را به دست آورید:

$$1 \quad f(x) = \frac{4x+10}{3x-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2x-10}{-3x+4} = \frac{2x+10}{3x-4}$$

$$2 \quad f(x) = \frac{8-2x}{x+3} \Rightarrow f(x) = \frac{-2x+8}{x+3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x-8}{-x-2}$$

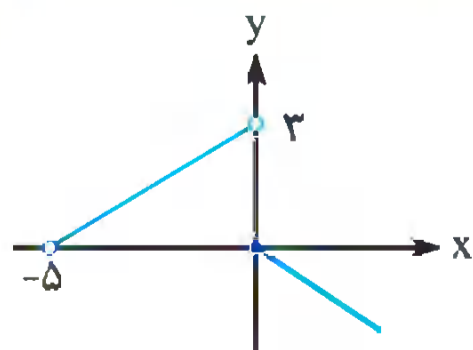
$$3 \quad f(x) = \log_r(x+1) - \log_r(x-1) \xrightarrow{\text{خواص log}} y = \log_r\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \Rightarrow 3^y = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\Rightarrow 3^y(x-1) = x+1 \Rightarrow 3^y x - 3^y - x - 1 = 0 \Rightarrow x(3^y - 1) = 3^y + 1 \Rightarrow x = \frac{3^y + 1}{3^y - 1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3^x + 1}{3^x - 1}$$

نکته از لحاظ ضابطه‌ای $(f \circ f^{-1})(x) = x$ و $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ است، اما در کمال تعجب این دو تابع برابر

نیستند، چون دامنه آن‌ها یکی نیست. در واقع: $D_{(f^{-1} \circ f)(x)} = D_{f(x)}$ ، $D_{(f \circ f^{-1})(x)} = D_{f^{-1}(x)} = R_{f(x)}$



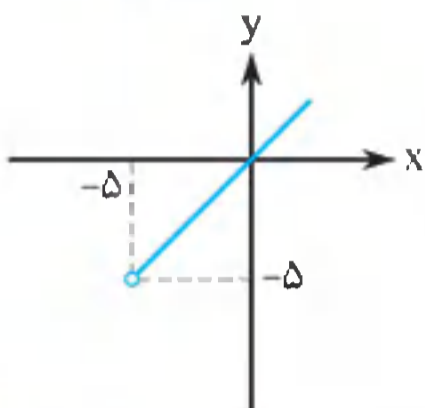
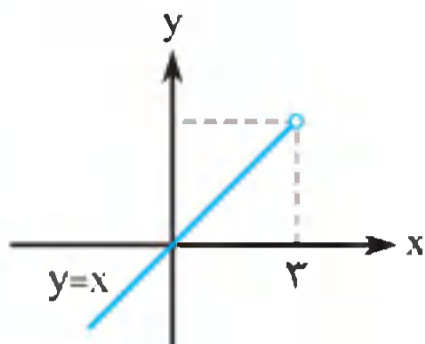
مثال نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع

$$y = (f \circ f^{-1})(x) \text{ به چه صورت است؟}$$

پاسخ در نمودار بدیهی است که $f(x)$ تابعی ۱-۱ است، زیرا هر خط

افقی نمودار $y = f(x)$ در حداکثر یک نقطه قطع می‌کند. پس

$y = f(x)$ وارون پذیر است و لذا سؤال بامعنی است.



از طرفی $D_f = (-5, +\infty)$ و $R_f = (-\infty, 3)$ لذا
 $y = (f \circ f^{-1})(x) = x ; x \in (-\infty, 3)$ است و بنابراین نمودار
 آن به صورت مقابل است:

دقت کنید که در همین مثال، نمودار $(f^{-1} \circ f)(x)$ به صورت زیر است:

نکته معادله $f^{-1}(\Delta) = \square$ معادل است با $\Delta = f(\square)$

مثال فرض کنید $f^{-1}(g(x)) = 8x + 10$ و $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد. در این صورت ضابطه $g(x)$ را بیابید.

پاسخ به کمک نکته اخیر داریم: $f^{-1}(g(x)) = 8x + 10 \Rightarrow g(x) = f(8x + 10) = 8x + 10 + \sqrt{8x + 10}$

نکته البته که معادله $f(\Delta) = \square$ هم با معادله $\Delta = f^{-1}(\square)$ معادل است. (f وارون پذیر است)

مثال فرض کنید $f(g(x)) = x^2 + 1$ و $f(x) = \frac{2x+1}{x+5}$ باشد. آن گاه ضابطه $g(x)$ را به دست آورید.

پاسخ

$$f(g(x)) = x^2 + 1 \Rightarrow g(x) = f^{-1}(x^2 + 1) \xrightarrow{f^{-1}(x) = \frac{\Delta x - 1}{-x + 2}} g(x) = \frac{\Delta(x^2 + 1) - 1}{-(x^2 + 1) + 2} = \frac{\Delta x^2 + 4}{-x^2 + 1}$$

مثال در همه مسائل زیر، ضابطه تابع خواسته شده را به دست آورید.

۱ $f^{-1}(g(x)) = x + 2 ; f(x) = x^2 + \sqrt{x} ; g(x) = ? \Rightarrow g(x) = f(x + 2) = (x + 2)^2 + \sqrt{x + 2}$

۲ $f^{-1}(2x + 1) = 3x ; f(x) = ?$

$$f^{-1}(2x + 1) = 3x \Rightarrow 2x + 1 = f(3x) \xrightarrow{\substack{T=3x \\ x=\frac{T}{3}}} f(T) = 2\left(\frac{T}{3}\right) + 1 \xrightarrow{\text{تغییر نام}} f(x) = \frac{2x}{3} + 1$$

به طور کلی اگر بخواهیم از $f(\Delta) = \square$ به ضابطه $f(x)$ برسیم باید از تغییر متغیر $T = \Delta$ استفاده کنیم. مورد بسیار مهم چنین سوالاتی مثال بعدی است.

مثال اگر $f(g(x)) = \sqrt{x} + 1$ و $f(x) = \frac{2x-3}{x+5}$ باشد، آن گاه $f(x)$ را به دست آورید.

پاسخ

$$f(g(x)) = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow f\left(\frac{2x-3}{x+5}\right) = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+5} = T \Rightarrow 2x-3 = Tx + 5T$$

$$\Rightarrow x(T-2) = -3-5T \Rightarrow x = \frac{-3-5T}{T-2} \Rightarrow f(T) = \sqrt{\frac{-3-5T}{T-2}} + 1 = \sqrt{\frac{5T+3}{2-T}} + 1$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر نام}} f(x) = \sqrt{\frac{5x+3}{2-x}} + 1$$



نکته برای پیدا کردن مقدار $f^{-1}(a)$ ، در واقع باید معادله $f(x) = a$ را حل کنیم. در حقیقت اگر فرض کنیم $f^{-1}(a) = x$ است، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم که $a = f(x)$.

تست فرض کنید $f(x) = x + \sqrt{x} + 3$ باشد. آن‌گاه $f^{-1}(9)$ کدام است؟ (مفهومی-محاسباتی)

۲ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)

پاسخ گزینه «۲» دقت کنید که در واقع داریم:

$$f^{-1}(9) = x \Rightarrow 9 = f(x) = x + \sqrt{x} + 3 \Rightarrow x + \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = -3 \text{ (غ قق)} \text{ یا } \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow f^{-1}(9) = 4$$

استفاده از این نکات می‌تواند در قالب مسائل برخورد دو نمودار مطرح شود.

مثال فرض کنید $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $x > 1$ باشد. در این صورت نمودار $y = f^{-1}(x)$ خط $y = x + 9$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟ (مشابه تجربی خارج ۹۹)

پاسخ اول معادله خط را استاندارد می‌کنیم:

$$y = \frac{x+9}{3}$$

اینک باید معادله خط $f^{-1}(x) = \frac{x+9}{3}$ را حل کنیم، که یعنی:

$$f\left(\frac{x+9}{3}\right) = x \Rightarrow \frac{x+9}{3} + \frac{3}{x+9} = x \Rightarrow 2x^2 + 9x - 90 = 0 \xrightarrow{\Delta} x_1 = \frac{-9 + \sqrt{801}}{4},$$

$$x_2 = \frac{-9 - \sqrt{801}}{4}$$

ما عمداً کاری کردیم که به اعداد غیرمعمول‌تری برسیم تا اهمیت دامنه روشن شود. در یک آزمونی با استاندارد کنکور به اعداد این مدلی زیاد برخورد نمی‌کنید. باری، دو جواب به دست آمدند، اما کدام قبول

است؟ در ابتدا سؤال گفته شده که $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $x > 1$. لذا مثلاً $f\left(\frac{1}{2}\right)$ نداریم اما $f(5)$ داریم. لذا برای

چک کردن x_1 و x_2 باید در معادله $f\left(\frac{x+9}{3}\right) = x$ ببینیم که مقدار $f\left(\frac{x_1+9}{3}\right)$ یا $f\left(\frac{x_2+9}{3}\right)$ تعریف می‌شوند یا نه:

$$x_1 = \frac{-9 + \sqrt{801}}{4} \Rightarrow f\left(\frac{x_1+9}{3}\right) = f\left(\frac{27 + \sqrt{801}}{12}\right)$$

بدیهی است که $\frac{27 + \sqrt{801}}{12} > 1$ است و لذا این جواب قابل قبول است. برای x_2 داریم:

$$x_2 = \frac{-9 - \sqrt{801}}{4} \Rightarrow f\left(\frac{x_2+9}{3}\right) = f\left(\frac{27 - \sqrt{801}}{12}\right)$$

که البته قابل قبول نیست، چون $\frac{27 - \sqrt{801}}{12} < 1$ است.

قدر این مثال را بدانید. همه اشتباهات رایج این فصل را یک‌جا پوشش داده است. لطف کنید دوبار بخوانید.

نکته اگر f و g دو تابع وارون‌پذیر باشند، آن‌گاه داریم: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. البته برعکس آن نیز صحیح است: $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$. این قضیه برای هر تعداد تابع درست است.

مثال با توجه به نکته قبل داریم:

۱ $(f \circ g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$

۲ $(f \circ g^{-1})^{-1} = g \circ f^{-1}$

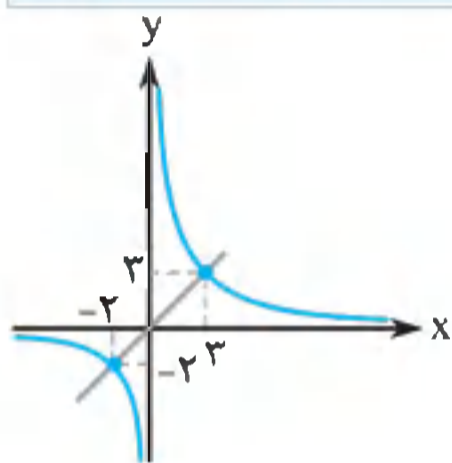
۳ $g^{-1} \circ f^{-1} \circ h = (h^{-1} \circ f \circ g)^{-1}$

مثال اگر $f(g^{-1}(x)) = x^2 + 1$ باشد، آن گاه $g(f^{-1}(x))$ را به دست آورید.

پاسخ دقت داریم که $g(f^{-1}(x))$ در واقع همان تابع وارون $f(g^{-1}(x))$ است. لذا کافی است تابع وارون

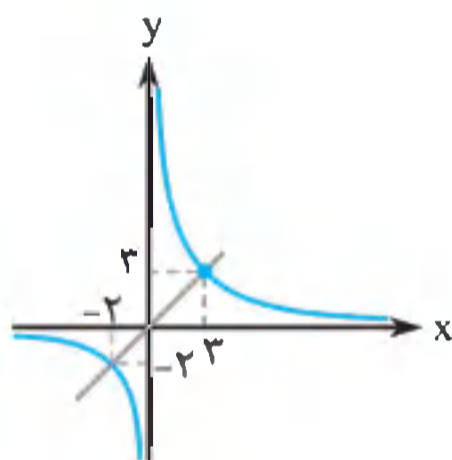
$y = x^2 + 1$ را به دست آوریم: $y = x^2 + 1 \Rightarrow y - 1 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y - 1} \Rightarrow g(f^{-1}(x)) = \sqrt{x - 1}$

نکته اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم، نمودار $y = f^{-1}(x)$ به دست می آید.



مثال با توجه به نمودار $y = f(x)$ در شکل مقابل، نمودار $y = f^{-1}(x)$ را رسم

کرده و دامنه تابع $g(x) = \sqrt{x - f^{-1}(x)}$ را محاسبه کنید.



پاسخ

از آن جا که خط داده شده از $(3, 3)$ و $(0, 0)$ می گذرد، می فهمیم که در واقع همان $y = x$ است. لذا با قرینه کردن نمودار $y = f(x)$ نسبت به این خط، داریم:

حالا دامنه $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ معادل $x - f^{-1}(x) \geq 0$ است. که یعنی

$x \geq f^{-1}(x)$ که باز هم یعنی مجموعه نقاطی که $y = x$ بالاتر یا مساوی

$y = f^{-1}(x)$ است که می شود: $[-2, 0) \cup [3, +\infty)$.

برای آزمون (۴) آماده‌اید. این آزمون ۱۵ سؤال دارد.

زوج مرتبها و توابع خاص

۵

اصل مطلب تابعها را می توان به صورت مجموعه‌ای از زوجهای مرتبی که مؤلفه‌های اول آنها متمایز است.

تعریف کرد. مثلاً مجموعه $f(x) = \{(1, 5), (2, 6), (3, 3)\}$ یک تابع است. معمولاً به جای این که بنویسیم

$(a, b) \in f(x)$ است، می نویسیم $b = f(a)$. مثلاً در مثال ما $f(1) = 5$ ، $f(2) = 6$ و $f(3) = 3$ است. در

واقع زوج مرتبهای تابع f ، فرم مشخصی دارند: $(x, f(x))$. لذا باید یادمان باشد مؤلفه اول، یک مؤلفه از

جنس داخل تابع $f(x)$ (یعنی دامنه f) و مؤلفه دوم از جنس بیرون تابع (یعنی برد f) است. لذا مؤلفه‌های

اول برعکس تأثیر می پذیرند و مؤلفه‌های دوم مستقیم تأثیر می پذیرند. مثلاً $2f(x) + 1$ فقط روی مؤلفه‌های

دوم تأثیر می گذارد و تأثیر آن هم مستقیم است. در مثال بالا $2f(x) + 1 = \{(1, 11), (2, 13), (3, 7)\}$

. همان طور که می بینید، کسی کاری به مؤلفه‌های اول ندارد. اما درباره $f(x + 2)$ ، مؤلفه‌های اول باید

تغییر کنند و این کار را برعکس انجام دهند. $f(x + 2) = \{(-1, 5), (0, 6), (1, 3)\}$. بدیهی است که

$y = 2f(x - 1) - 3$ روی هر دو مؤلفه تأثیر می گذارد. با هم به پیشواز مثال زیر می رویم.



۱۰. فرض کنید $f(x) = x^2 - 6x + 3$ باشد، معادله $f(x^2 + 2x) = f(4 - 3x)$ چند جواب حقیقی دارد؟
(نکته: تابع درجه ۲ را اوایل درسنامه گفتیم)

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) چهار
۱۱. اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(6) + g(12)$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۹)
(۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۱۲. اگر $f(x) = 2x - |2x|$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشد، برد تابع $g \circ f$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۹)
(از سومین نکته درسنامه همین بخش استفاده کنید. هر جا بخواهیم برد تابع مرکب را حساب کنیم، این نکته کار را تمام می‌کند)

(۱) $[0, 2)$ (۲) $[0, 3)$ (۳) $[0, 4)$ (۴) $[1, 5)$
۱۳. تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{1}{2x}$ بر دامنه $(0, +\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۹)

(۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) -1 (۴) $-\frac{1}{2}$
۱۴. فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(3) + g(15)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)
(۱) ۱۲ (۲) ۱۱ (۳) ۱۰ (۴) ۸

۱۵. اگر $f(x) = 3x + \sqrt{x}$ و $f^{-1}(g(x)) = x^2$ باشد، آن‌گاه ضابطه $g(x)$ کدام است؟
(۱) $y = 3x^2 + x$ (۲) $y = 3x^2 + |x|$ (۳) $y = 3x^2 - x$ (۴) $y = 3x^2 - |x|$

آزمون تستی (۵)





۱. حداقل چند عضو از $A = \{(1, 4), (1, 2), (3, 2), (4, 5)\}$ حذف کنیم، تا حاصل تابعی وارون‌پذیر باشد؟ (مباحثها را شناسایی کنید)

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه
۲. اگر $f = \{(2x + y, 3), (2x - y, 7), (1, 1)\}$ تابعی باشد که $f = f^{-1}$ است، آن‌گاه xy برابر کدام است؟
(۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ± 5 (۴) ± 10

۳. اگر $f(x + 1) = \{(2, 5), (1, 6), (4, 7)\}$ باشد، آن‌گاه $2f(x) - 3$ کدام است؟
(۱) $\{(1, 7), (0, 9), (3, 11)\}$ (۲) $\{(2, 7), (1, 9), (4, 11)\}$
(۳) $\{(3, 7), (2, 9), (5, 11)\}$ (۴) $\{(1, 4), (0, 4/5), (3, 2/5)\}$

۴. اگر $f = \{(1, 2), (3, 4), (4, 1), (5, 5)\}$ و $g(x) = \sqrt{x} + 1$ باشد، آن‌گاه مقدار a از معادله $f^{-1}(g(a)) = 1$ کدام است؟
(۱) $a = 1$ (۲) $a = 2$ (۳) $a = 3$ (۴) $a = 4$

۵. فرض کنید $f = \{(3, a + 6), (2, 3), (3, a^2), (2, b + 1)\}$ تابعی وارون‌پذیر باشد. در این صورت $a - b$ کدام است؟
(۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ± 1 (۴) -4 یا ۱

- همه مثال‌ها و سؤال‌ها با هدف آموزشی مطرح شده‌اند. مقابل خیلی از سؤال‌ها کلید واژه‌ای (مانند «تکنیکی» یا «مفهومی» یا ...) مشاهده می‌کنید. این کلید واژه‌ها، جنبه اصلی آن سؤال را نشان می‌دهند. هم‌چنین کنار تمام تست‌های موجود در درسنامه و پاسخ تست‌های مربوط به آزمون‌های جامع، آیکن‌های  قرار داده‌ایم که درجه سختی تست را از طریق کم و زیاد شدن آنتن نشان می‌دهند. (زیاد شدن آنتن به معنای افزایش درجه سختی سؤال است.)
- کنار بعضی از مسائل کتاب آیکن  قرار دارد. این‌ها مسائلی هستند که می‌توانید با اسکن QR Cod زیر، فیلم آموزشی آن‌ها را در سایت مهروماه ببینید.



فیلم‌ها را اینجا ببینید! 

- صفحه‌ای در اینستاگرام، مخصوص این کتاب ساخته‌ایم. دانش‌آموزان می‌توانند با جستجوی **advansity – math** با مؤلفین کتاب در ارتباط باشند. در این صفحه، هر هفته یک مسابقه ریاضی از یک فصل کتاب خواهیم داشت.

تقدیر و تشکر

- چه قدر تقدیر و تشکر کتاب نوشتن در مهروماه به دل آدم می‌نشیند. وقتی مدیر نازنینی مثل آقای احمد اختیاری داشته باشید، مدیر تألیف کاردان و دلسوزی مانند استاد محمدحسین انوشه نصیب‌تان شود و مدیر گروه کل و کارشناسی به نام استاد عباس اشرفی کنارتان باشد، حسابی از کارت‌ان لذت می‌برید. ما هم سعی کرده‌ایم این حس خوب‌مان را در کیفیت کتاب نشان دهیم.
- بزرگوارانی در مراحل مختلف تألیف این کتاب حامی ما بوده‌اند. بیش از همه مایلیم مراتب قدردانی خود را به مهندس عادل احمدنژاد تقدیم کنیم. حیف که زبان ما از بیان ارزش تلاش‌های دلسوزانه و روحیه علمی این دوست فرهیخته‌مان قاصر است.
- این کتاب مرهون زحمات دوستان ما در گروه ویراستاری، به‌ویژه سرکار خانم آزاده غنی‌فرد است. همکاری و نظرات ارزشمند جناب آقای احسان لعل در این کتاب، در موارد زیادی راهگشا بوده است و جا دارد که زحمات ایشان قدردانی کنیم.
- مدیر تولید گرامی انتشارات سرکار خانم مریم تاجداری، مدیر فنی جناب آقای میلاد صفایی و صفحه‌آرایان کتاب خانم‌ها مرجان سپهریان، پریسا حسینی و رویا طبسی و جناب آقای مرتضی یعقوبی، عزیزانی هستند که برای این کتاب سنگ تمام گذاشتند. مهدی منصوری عزیز، فیلم‌بردار نازنین مهروماه است که تهیه محتوای ویدئویی این اثر بدون کمک و همکاری ایشان غیرممکن بود. هم‌چنین از مدیر محترم سایت مهروماه، جناب آقای امیر انوشه و واحد روابط عمومی به‌ویژه جناب آقای عماد ولدی بی‌نهایت سپاسگزاریم.



۶. نقطه $(1, 6)$ روی نمودار تابع خطی $y = f(x)$ قرار دارد. اگر نمودار $y = f^{-1}(x)$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کند، آن‌گاه حاصل $f(2) + f(4)$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۷. اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ و $g = \{(2, 4), (3, 1), (4, 7), (5, 5), (6, 4)\}$ باشد، آن‌گاه $f + g \circ f^{-1}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\{(3, 8), (4, 6)\}$ (۲) $\{(3, 5), (4, 6), (2, 5)\}$
(۳) $\{(3, 5), (2, 6)\}$ (۴) $\{(3, 8), (2, 6)\}$

۸. فرض کنید $f = \{(1, 2a + b), (2, b + c), (4, c + 3)\}$ تابع همانی باشد. در این صورت $a + b - c$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۲

۹. اگر ورودی ماشین $f \rightarrow g \rightarrow$ خروجی $f \rightarrow$ ورودی، مقدار a و خروجی آن b باشد، کدام رابطه صحیح است؟

- (۱) $f(g(a)) = b$ (۲) $g(f(a)) = b$ (۳) $g(f(b)) = a$ (۴) $f(g(b)) = a$

۱۰. اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1, 2), (6, 5), (5, 12)\}$ باشند، آن‌گاه مقدار a از معادله $g(f(a)) = 5$ و مقدار b از معادله $g^{-1}(f(b)) = 5$ کدام است؟

- (۱) $b = 4, a = 1$ (۲) $b = 9, a = 4$ (۳) $a = 6, b = 12$ (۴) $b = 12, a = 6$



هایپر تست



۱. اگر $1 < x < 2$ ؛ $f(x + a) = 3x + b$ باشد و دامنه تابع $f\left(\frac{x}{2}\right)$ بازه $(3, c)$ و برد تابع $f(x - 1) + 1$ بازه $(5, d)$ باشد، آن‌گاه $a + b + c + d$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) $12/5$ (۳) $14/5$ (۴) ۱۶

۲. اگر $f^2(x) + f(x) = 3x$ باشد، و $g(x)$ معکوس تابع $f(x)$ باشد، آن‌گاه $g(1) + g(2)$ برابر کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{9}{5}$ (۴) ۱

۳. فرض کنید $f = \{(a, 2), (2, b), (3, c)\}$ باشد. اگر $f(x - 1) = f^{-1}(x) + 1$ باشد، آن‌گاه abc کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۴. تابع $f(x) = |x| \left| \frac{1}{x} \right|$ با دامنه $D_f = (0, +\infty)$ مفروض است. اگر نمودار $y = f(x)$ و خط $y = 3x + a$ دو

نقطه تلاقی داشته باشند، فاصله این دو نقطه کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$

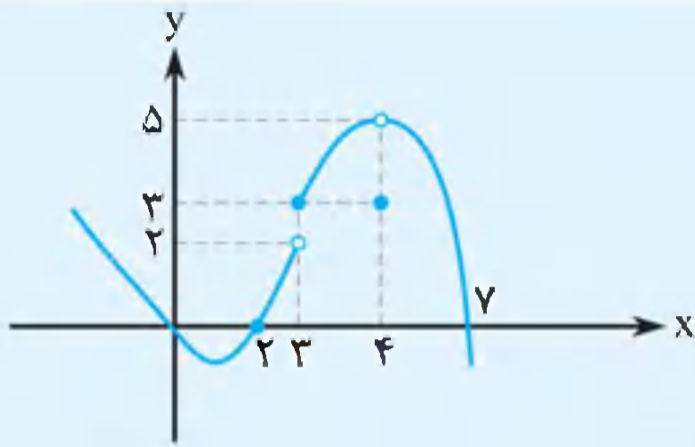
۵. اگر $f = \{(1, 9), (2, 4), (3, 5)\}$ و $g(x) = x + 2$ باشد، آن‌گاه $\frac{f^2 - g^2}{f - g}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\{(1, 12), (2, 8), (3, 10)\}$ (۲) $\{(1, 15)\}$
(۳) $\{(1, 15), (2, 8)\}$ (۴) $\{(1, 12)\}$



مفهوم حد

۱



اصل مطلب نمودار $y = f(x)$ را در نظر بگیرید.

به این نمودار، در حوالی $x = 3$ توجه کنید. اولاً بدیهی است که $f(3) = 3$ است. اما اگر مقادیر x ، اعدادی بسیار نزدیک به ۳ ولی کم‌تر از آن باشند، آن‌گاه مقادیر تابع $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می‌شوند. ولی همین که x به ۳ می‌رسد، ناگهان نمودار $f(x)$ در یک پرش صعودی، به نقطه $(3, 3)$ فرار می‌کند.

عدد ۲، که مقدار تابع در حال نزدیک شدن به آن است را حد چپ $f(x)$ در $x = 3$ می‌گویند و به صورت $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$ می‌نویسند. چرا می‌گوییم حد چپ؟ چون داریم با مقادیر کوچک‌تر از ۳ به سمت

۳ حرکت می‌کنیم. علامت منهای بالای ۳، نشانه همین است. در همین مسئله اگر با مقادیر بیشتر از ۳ به سمت $x = 3$ حرکت کنیم، نمودار $y = f(x)$ هم به سمت نقطه‌ای با عرض ۳ حرکت می‌کند.

این را چنین می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3$. همواره و برای هر عددی مانند a ، مقایسه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ بسیار مهم است. در این مثال‌ها $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 = f(3)$ اما $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$ است.

به‌طور کلی، اگر $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ باشد، می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x = a$ حد دارد و مقدار

این حد L است. به زبان ریاضی می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، حالا ممکن است که $L = f(a)$ باشد یا

$L \neq f(a)$. حالت ایده‌آلی که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ باشد، نام خاصی دارد: در این حالت می‌گوییم تابع $f(x)$

در نقطه $x = a$ پیوسته است. لذا برای حدداشتن، کافی است حد چپ و حد راست با هم برابر باشند. اما

برای پیوسته‌بودن، باید حد چپ و حد راست برابر و هر دو برابر با مقدار تابع در آن نقطه باشند. مثلاً در

همین نمودار ما، واضح است که $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 5$ است. این در حالی است که $f(4) = 3$

است. لذا $f(x)$ در $x = 4$ حد دارد و مقدار این حد ۵ است، اما پیوسته نیست. ولی در $x = 3$ اصلاً حد

ندارد (و بنابراین عمراً پیوسته هم نیست). مجدداً همین تابع را در $x = 2$ بررسی می‌کنیم. بدیهی است

که $f(2) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$. چه اتفاق خوبی! حالا دیگر $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ است و

بنابراین $f(x)$ در $x = 2$ پیوسته است. واقعیت این است که هر نموداری در نقاط عادی و معمولی خودش

پیوسته است، اما اگر نمودار $y = f(x)$ در $x = a$ دچار قطعی یا پرش شود (مانند $x = 3$ در مثال ما)،

آن‌جا اصلاً حد ندارد و در نقاطی که توخالی و توپر بالا و پایین هم باشد (مثل $x = 4$ در مثال ما)، حد

دارد ولی پیوسته نیست. تقریباً همه فصل را خواندیم. از این‌جا به بعد، همین حرف‌ها را تشریح می‌کنیم.

فهرست

۷	فصل ۱: توان و اتحاد	
۳۷	فصل ۲: معادله‌ها	
۶۵	فصل ۳: نامعادله و تعیین علامت	
۸۷	فصل ۴: معادله خط و سهمی	
۱۱۹	فصل ۵: مثلثات	
۱۵۹	فصل ۶: توابع پله‌ای و جزء صحیح	
۱۷۱	فصل ۷: توابع نمایی و لگاریتمی	
۱۹۷	فصل ۸: تابع	
۲۴۹	فصل ۹: مشتق (۱)	
۲۶۱	فصل ۱۰: حد و پیوستگی	
۲۸۷	فصل ۱۱: مشتق (۲)	
۲۹۹	فصل ۱۲: کاربرد مشتق	
۳۱۹	فصل ۱۳: مجموعه و دنباله	
۳۳۳	فصل ۱۴: هندسه	
۳۷۱	فصل ۱۵: مقاطع مخروطی	
۳۹۵	فصل ۱۶: آمار و احتمال	
۴۲۳	پیوست	

همدل سوخته ما به لاله زار گریخت
تحمل نفس سرد روزگار نداشت



این کتاب و شب نخواستن هایش، از صمیم جان تقدیم می شود به

اسطوره بزرگ زندگی مان

«استاد محمد رضا شجریان»

توان و اتحاد

- فصل اول درباره توان، ریشه‌ها، اتحادها و تجزیه است.
- این فصل پیش‌نیاز ۷۰ درصد مطالب این کتاب است و یادگیری اصولی آن ضرورت دارد.
- میزان دشواری این فصل، ۶ از ۱۰ است. این فصل را باید مستمر بخوانید. یعنی برنامه مطالعاتی این فصل نباید یک روز در میان باشد. به طور معمول، مدت زمان لازم برای مطالعه این فصل، ۳ روز متوالی و روزانه ۹۰ دقیقه است.
- با مطالعه این فصل، کارتان در فصل‌های بعدی واقعاً ساده‌تر می‌شود.
- در جدول زیر، تعداد تست‌های مستقیم و غیرمستقیمی که از این فصل در کنکورهای ۹۸ و ۹۹ رشته تجربی آمده است را آورده‌ایم.

سال	مستقیم	غیرمستقیم
۹۸ داخل	صفر	۵
۹۸ خارج	صفر	۶
۹۹ داخل	۱	۷
۹۹ خارج	۱	۶

سؤال مستقیم این فصل در کنکور ۹۹ مسئله‌ای ترکیبی و دشوار بود. مسائل غیرمستقیم مربوط به این فصل ساده‌تر بودند. در جدول بالا، صرفاً مسائلی را به عنوان مسائل غیرمستقیم آورده‌ایم که وابستگی آن‌ها به این فصل خیلی جدی است. احتمالاً قانع شده‌اید که فصل مهمی را در پیش رو داریم. تعداد آزمون‌های این فصل ۴ آزمون ۱۰ سؤالی است که با حل آن‌ها بر همه مطالب فصل مسلط می‌شوید. یک آزمون جانانه ۱۰ سؤالی هم برای دانش‌آموزان ممتاز طراحی کرده‌ایم (هایپر تست) که استاندارد بالایی دارد. با هم شروع می‌کنیم.





توان و قواعد آن

ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار با پایه یکسان

نکته اگر دو عدد توان‌دار که پایه یکسانی دارند در هم ضرب شوند، پایه را می‌نویسیم و توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$1 \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$$

قاعده مشابهی در تقسیم داریم:

$$2 \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; a \neq 0$$

روابط دیگری که همراه با دو رابطه بالا مدام مورد استفاده قرار می‌گیرد، روابط مهم زیر هستند:

$$3 \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$4 \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}; a > 0$$

مثال عبارت‌های زیر به کمک قاعده‌های بالا محاسبه شده‌اند. به نحوه محاسبه‌ها دقت کنید. عددهای بالای علامت تساوی، شماره قاعده‌ای هستند که در آن مرحله استفاده کرده‌ایم.

$$1 \quad 2^5 \times 4^7 \stackrel{(3)}{=} 2^5 \times (2^2)^7 \stackrel{(3)}{=} 2^5 \times 2^{14} \stackrel{(1)}{=} 2^{19}$$

$$2 \quad x^3 \sqrt{x^2} \stackrel{(4)}{=} x^3 \times x^{\frac{2}{2}} \stackrel{(1)}{=} x^{3+\frac{2}{2}} = x^{\frac{17}{2}}$$

$$3 \quad a^2 \sqrt{\frac{1}{a}} \stackrel{(4)}{=} a^2 \times \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^2}{a^{\frac{1}{2}}} \stackrel{(2)}{=} a^{2-\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{2}}$$

$$4 \quad 8^2 \times 16^5 \stackrel{(3)}{=} (2^3)^2 \times (2^4)^5 = 2^6 \times 2^{20} \stackrel{(1)}{=} 2^{26}$$

$$5 \quad \sqrt{a} \sqrt{a} \stackrel{(4)}{=} \sqrt{a \times a^{\frac{1}{2}}} \stackrel{(1)}{=} \sqrt{a^{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{a^{\frac{3}{2}}} \stackrel{(4)}{=} a^{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$$

توان‌های منفی

اگر a عددی حقیقی و مخالف صفر باشد، داریم:

$$1 \quad a^0 = 1$$

$$2 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$3 \quad \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

مثال به نحوه محاسبه عبارت‌های توانی زیر دقت کنید.

$$1 \quad (2 + \sin x)^0 = 1$$

$$2 \quad \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2 \times 2^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{2^{-\frac{3}{2}}} = 2^{-\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}} = 2^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2^3}}$$

$$\textcircled{3} \sqrt[5]{a^2 \sqrt{a^2}} \times \left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[5]{a \times a^{\frac{2}{2}} \times a^{\frac{2}{2}}} = \sqrt[5]{a^{1+\frac{2}{2}} \times a^{\frac{2}{2}}} = \sqrt[5]{a^{\frac{5}{2}} \times a^{\frac{2}{2}}} = a^{\frac{5}{2} \times \frac{2}{5}} \times a^{\frac{2}{2} \times \frac{2}{5}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{2}{5}}$$

$$= a^{\frac{1}{2} + \frac{2}{5}} = a^1 = a$$

$$\textcircled{4} \sqrt[5]{a^6 \sqrt{\frac{1}{a}}} = \sqrt[5]{a \times \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[5]{a \times a^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt[5]{a^{1-\frac{1}{2}}} = \sqrt[5]{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{a}$$

در مسائل مربوط به این قسمت، طراحان کنکور به محاسبه‌های دمرحله‌ای خیلی علاقه‌مندند.

(ریاضی ۹۸)

تست اگر $A = \sqrt[5]{4^2 \sqrt{16}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}$ باشد، حاصل $(2A)^{-\frac{1}{2}}$ کدام است؟

۱ (۴)

۰ / ۷۵ (۳)

۰ / ۵ (۲)

۰ / ۲۵ (۱)

پاسخ گزینه «۲» ابتدا مقدار A را تا جایی که می‌توانیم ساده می‌کنیم:

$$A = \sqrt[5]{4^2 \sqrt{16}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[5]{4 \times 4^2 \times 2^2} = \sqrt[5]{4^2 \times 2^2} = 4^{\frac{2}{5}} \times 2^{\frac{2}{5}} = 4^{\frac{2}{5} + \frac{2}{5}} = 4^{\frac{4}{5}} = (2^2)^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}}$$

$$= 2^{\frac{2}{5} \times \frac{4}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}} = 2^{\frac{2}{5} + \frac{4}{5}} = 2^{\frac{6}{5}} = 2^{\frac{6}{5}} = 2^{\frac{6}{5}}$$

$$\text{حالا } (2A)^{-\frac{1}{2}} = (2 \times 4)^{-\frac{1}{2}} = (2^3)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$$

■ کمی که تجربه‌مان بالاتر برود، می‌توانیم بعضی از مراحل محاسبات را ساده‌تر انجام دهیم و بعضی مراحل را هم در ذهن انجام دهیم. قاعده‌ای که بسیار استفاده می‌شود، ساده کردن توان و فرجه یک عبارت رادیکالی است.

ساده کردن توان و فرجه

$$k n \sqrt[n]{a^k m} = n \sqrt[n]{a^k m}$$

اگر $a > 0$ باشد، آن‌گاه داریم:

مثال به نحوه انجام محاسبه‌های زیر دقت کنید:

$$\textcircled{1} \sqrt[10]{4^5} = \sqrt{4} = 2$$

$$\textcircled{2} \sqrt[5]{a^{\frac{5}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

$$\textcircled{3} \sqrt[3]{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \quad (a > 0 \text{ است.})$$

ادغام رادیکال‌ها

اگر $a \geq 0$ باشد، آن‌گاه:

$$m \sqrt[n]{n \sqrt{a}} = mn \sqrt[n]{a}$$

این قانون برای چند رادیکال متوالی هم برقرار است.

مثال با استفاده از نکات قبل، عبارت‌های زیر را ساده می‌کنیم.

$$\textcircled{1} \sqrt[3]{a \sqrt{a}} = \sqrt[3]{a \times a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

$$\textcircled{2} \sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}} = \sqrt[3]{\sqrt{a}}$$

$$\textcircled{3} (\sqrt{a})^{\frac{2}{3}} = (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{6}} = a \sqrt{a}$$



همه ما بارها $a^m \times a^n = a^{m+n}$ را مشاهده کرده‌ایم. اما در بعضی مسائل باید برعکس نگاه کنیم. یعنی از $a^{m+n} = a^m \times a^n$ یا $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$ استفاده کنیم. این مسائل تیپ مشخصی دارند که در مثال‌های زیر آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

مثال اگر $2^{x+1} = 6$ باشد، آن‌گاه حاصل 8^x را به دست آورید.

پاسخ توجه می‌کنیم که $2^{x+1} = 2^x \times 2^1$ است و همین، کلید حل این مسئله است:

$$2^x \times 2 = 6 \Rightarrow 2^x = 3 \xrightarrow{\text{توان } 3} (2^x)^3 = 3^3 \Rightarrow 8^x = 27$$

(مفهومی)

تست اگر $2^x = 3$ و $3^y = 5$ و $5^z = 8$ باشد، آن‌گاه xyz کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ گزینه «۳» به جای xyz می‌خواهیم 2^{xyz} را حساب کنیم. پس z و y و x را در توان نگه می‌داریم.

$$2^{xyz} = (2^x)^{yz} = 3^{yz} = (3^y)^z = 5^z = 8 = 2^3 \Rightarrow 2^{xyz} = 2^3 \Rightarrow xyz = 3$$

تمرین در روش بالا توانستیم با محاسبه 2^{xyz} مسئله را حل کنیم. شما همین مسئله را با محاسبه 3^{xyz} حل کنید.

حالا مثال و تست بالا را با هم ترکیب می‌کنیم. تست زیر از هر جهت جالب است.

(مفهومی)

تست اگر $2^{x+1} = 18$ و $3^{y+1} = 12$ باشد، آن‌گاه xy کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ گزینه «۴» می‌دانیم که:

$$\begin{cases} 2^{x+1} = 18 \\ 3^{y+1} = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x \times 2 = 18 \\ 3^y \times 3 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 9 \\ 3^y = 4 \end{cases}$$

و حالا از تجربه تست قبل می‌دانیم که بهتر است 2^{xy} را حساب کنیم:

$$2^{xy} = (2^x)^y = 9^y = (3^2)^y = (3^y)^2 = 4^2 = 16 = 2^4 \Rightarrow 2^{xy} = 2^4 \Rightarrow xy = 4$$

در رابطه با این فصل، خیلی مهم است که بتوانیم به محاسبات توانی و رادیکالی سروسامان دهیم. برای این منظور، اغلب با اعدادی سروکار خواهیم داشت که باید به نحو مناسبی تجزیه شوند. در جدول زیر، همه اعداد توان‌دار مهمی که باید بلد باشید را آورده‌ایم.

$256 = 2^8$	$128 = 2^7$	$64 = 2^6$	$32 = 2^5$	$16 = 2^4$	$8 = 2^3$	$4 = 2^2$	توان‌های ۲
					$1024 = 2^{10}$	$512 = 2^9$	
			$243 = 3^5$	$81 = 3^4$	$27 = 3^3$	$9 = 3^2$	توان‌های ۳
				$625 = 5^4$	$125 = 5^3$	$25 = 5^2$	توان‌های ۵
$196 = 14^2$	$169 = 13^2$	$144 = 12^2$	$121 = 11^2$	$100 = 10^2$	$49 = 7^2$	$36 = 6^2$	مربع‌های کامل
						$225 = 15^2$	