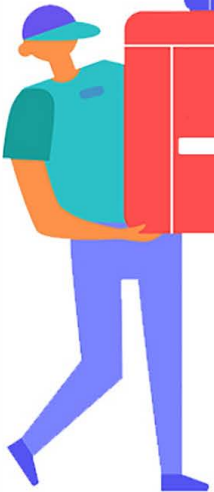


خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و ارسال رایگان

Medabook.com



مدابوک



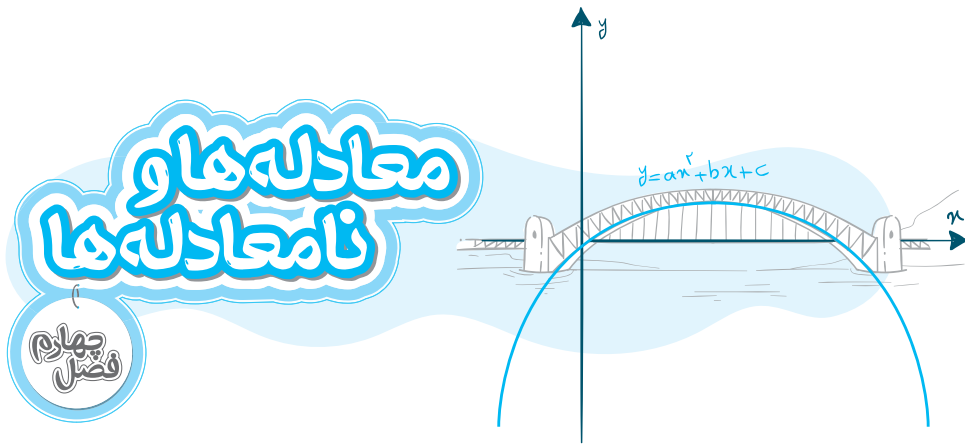
دریافت برنامه ریزی و مشاوره

از مشاوران رتبه برتر

هوش کنکوری آیدی نوین

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۴





درسنامه ۱

معادله درجه دوم

هر معادله‌ای که پس از ساده‌سازی به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) در بیاید یک معادله درجه دوم نامیده می‌شود.

روش‌های حل معادله درجه دوم

۱- روش تجزیه: برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به روش تجزیه، ابتدا به کمک اتحادها و فاکتورگیری عبارت $ax^2 + bx + c$ را تجزیه کرده و سپس از نکته مقابل جواب را می‌یابیم.

$$A \times B = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

مثال ۱۰۰۰ معادله $x^2 - 5x + 6 = 0$ را حل کنید.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \xrightarrow[\text{جمله مشترک}]{\text{اتحاد}} (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 \text{ یا } x-3=0 \Rightarrow x=3$$

پاسخ ✓

۲- روش ریشه‌گیری: ریشه‌گیری در سال‌های گذشته جزء روش‌های اساسی حل معادله مفسوب نمی‌شد، اما در سال دهم برای فودش کسی شده. به هر حال ریشه‌گیری فیلی روش فاضلی هم نیست. در حالت کلی بدانید اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (همون بزرگ‌تر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادله $x^2 = a$ برابرند با: $x = \sqrt{a}$ ، $x = -\sqrt{a}$.

مثال ۱۰۰۰ ریشه‌های معادله $(x-1)^2 = 4$ را بیابید.

$$(x-1)^2 = 2^2 \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} x-1=2 \Rightarrow x=3 \text{ یا } x-1=-2 \Rightarrow x=-1$$

پاسخ ✓ با ریشه‌گیری داریم:

۳- روش مربع کامل کردن: برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به روش مربع کامل کردن، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{\div a} x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

۱ اگر $a \neq 1$ ، کل معادله را بر a تقسیم می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

۲ جملات دارای x را سمت چپ نگه داشته و عدد ثابت را به سمت راست می‌بریم:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \xrightarrow{\text{مجدور}} \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

۳ مجدور نصف ضریب x را به طرفین معادله اضافه می‌کنیم:

۴ به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، سمت چپ تساوی را به صورت اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌نویسیم:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

۵ به کمک روش ریشه‌گیری، معادله را حل کرده و جواب را می‌یابیم.

مثال ۱۰۰۰ معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ را به روش مربع کامل کردن حل نمایید.

پاسخ ✓ با توجه به این‌که ضریب x برابر با ۱ می‌باشد، از انجام مرحله اول معاف هستیم. داریم:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow[\text{عدد ۲ را به سمت راست می‌بریم.}]{\text{مرحله (۲)}} x^2 - 3x = -2 \xrightarrow[\text{را به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم.}]{\text{مرحله (۳): مجدور نصف ضریب } x \text{ را}} x^2 - 3x + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = -2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = -2 + \frac{9}{4}$$

$$\xrightarrow[\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}]{\text{مرحله (۴)}} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \xrightarrow[\text{ریشه‌گیری}]{\text{مرحله (۵)}} \begin{cases} x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \\ x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

نکته بهتر است بدانید که عبارتی که برای تشکیل مربع کامل در معادله $x^2 + \frac{b}{a}x + c = 0$ اضافه می‌شود، $\frac{b^2}{4a^2} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ می‌باشد.

۴- روش فرمول کلی: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ عبارت $b^2 - 4ac$ را با نماد Δ نشان می‌دهند و به آن «دلتا» می‌گویند. جواب‌های معادله در صورت وجود از فرمول مقابل به دست می‌آید:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وضعیت جواب‌های معادله درجه دوم با توجه به علامت Δ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta > 0 \Rightarrow \text{معادله دو جواب حقیقی متمایز دارد. } x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 \Rightarrow \text{معادله فقط یک ریشه حقیقی (ریشه مضاعف) دارد. } x = -\frac{b}{2a} \\ \Delta < 0 \Rightarrow \text{با توجه به منفی شدن زیر رادیکال، معادله جواب حقیقی ندارد.} \end{array} \right.$$

مثال جواب‌های معادلات زیر را بیابید.

معادله، جواب حقیقی ندارد. $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(1) = 1 - 8 = -7 < 0$ \Rightarrow $a=2, b=1, c=1$ الف) $2x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(3)(2) = 49 - 24 = 25$ $a=3, b=-7, c=2$ ب) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2(3)} = \frac{7 \pm 5}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{6} = 2 \\ x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

مثال m را طوری تعیین کنید که معادله $-4x^2 - mx - 1 = 0$ دارای جواب‌های حقیقی یکسان باشد.

پاسخ اگر جواب‌های حقیقی معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ یکسان باشند (معادله ریشه مضاعف داشته باشد) باید $\Delta = 0$ باشد. پس داریم:

$$(-m)^2 - 4(-4)(-1) = 0 \Rightarrow m^2 - 16 = 0 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

دو نکته طلایی و مهم:

اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، $a + c = b$ باشد، آن‌گاه یکی از جواب‌ها برابر $x = -1$ و دیگری $x = -\frac{c}{a}$ می‌باشد.

مثال در معادله $12x^2 + 10x - 2 = 0$ ، چون $12 + (-2) = 10$ می‌باشد $(a + c = b)$ ، بدون حل معادله می‌توانیم بگوییم یکی از ریشه‌ها $x = -1$ و دیگری $x = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$ می‌باشد.

اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، جمع ضرایب معادله صفر شود $(a + c + b = 0)$ ، آن‌گاه یکی از جواب‌ها $x = 1$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ می‌باشد.

مثال در معادله $3x^2 + 5x - 8 = 0$ چون $3 - 8 + 5 = 0$ می‌باشد، پس بدون حل معادله می‌توانیم بگوییم یکی از جواب‌ها $x = 1$ و دیگری $x = -\frac{8}{3}$ می‌باشد.

سؤال دانش‌پژوه (ماندانا باغی): آقا ببخشید چرا به جای $a + b + c$ گفتین $a + c + b$ ؟ مگه فرقی دارن؟

پاسخ آفرین! نه فرقی نداره ولی آگه همیشه ما $a + c$ رو اول مناسب کنیم اون وقت راحت‌تر می‌تونیم بررسی کنیم که حالات ۱ و ۲ برای معادله برقرار هست یا نه و سرعتتون توی حل تست‌ها بالاتر می‌ره.

نکته در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر علامت $\frac{c}{a}$ منفی باشد، معادله همواره دو ریشه حقیقی دارد، زیرا در این حالت همیشه $\Delta > 0$ می‌شود. چون:

$$\Delta = b^2 - 4ac \xrightarrow{\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow ac < 0} b^2 - \underbrace{4ac}_{\text{منفی}} = b^2 + \underbrace{-4ac}_{\text{مثبت}} = b^2 + (\text{یک عدد مثبت}) > 0$$

مثال معادله $-2x^2 - 6x + 7 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

پاسخ چون $\frac{c}{a} = -\frac{7}{-2}$ عددی منفی است، پس معادله حتماً دو ریشه حقیقی دارد.

برگرفته از کتاب درسی

۱- مجموع جواب‌های معادله $(x-1)^2 = (1-\sqrt{3})^2$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $2+2\sqrt{3}$

۲- با اضافه کردن کدام عدد به طرفین معادله $x(x+\frac{1}{4}) = \frac{9}{4}$ معادله به روش مربع کامل حل می‌شود؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{16}$ (۳) $\frac{1}{64}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۳- در حل معادله $4x^2 + 5x - 3 = 0$ به روش مربع کامل، به تساوی $(x+n)^2 = m$ رسیده‌ایم. مقدار $n+8m$ کدام است؟

- (۱) $\frac{39}{2}$ (۲) ۳۹ (۳) $\frac{39}{8}$ (۴) $\frac{39}{4}$

برگرفته از کتاب درسی

۴- حاصل ضرب جواب‌های معادله $(3-x^2)^2 = 36$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۹ (۴) -۹

۵- معادله درجه دوم $x(2x-5) = a$ به ازای یک مقدار a ریشه مضاعف دارد. مقدار ریشه مضاعف کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۶- اگر در معادله درجه دوم $ax^2 - 12x + 9 = 0$ تفاضل دو ریشه برابر صفر باشد، یک ریشه این معادله کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۳

۷- در معادله درجه دوم $x^2 + bx + c = 0$ با شرط $b = c + 1$ ، یکی از ریشه‌های آن به کدام صورت زیر است؟

- (۱) $-c$ (۲) $2b - 1$ (۳) $\frac{b}{2}$ (۴) c

۸- کدام یک از مقادیر زیر، یکی از ریشه‌های معادله $15x^2 - 2x - 148 = 0$ می‌باشد؟

- (۱) $\frac{2}{15}$ (۲) $-\frac{2}{15}$ (۳) $-\frac{74}{75}$ (۴) $\frac{74}{75}$

۹- در مورد ریشه‌های معادله درجه دوم $(\sqrt{2}+1)x^2 - 2\sqrt{2}x + \sqrt{2} - 1 = 0$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) هر دو ریشه از $\frac{1}{4}$ کوچک‌ترند. (۲) هر دو ریشه از $\frac{1}{4}$ بزرگ‌ترند.

- (۳) یکی از ریشه‌ها از $\frac{1}{4}$ بزرگ‌تر و یکی از $\frac{1}{4}$ کوچک‌تر است. (۴) هر دو ریشه برابر $\frac{1}{4}$ هستند.

۱۰- اگر یکی از جواب‌های معادله درجه دوم $6ax^2 - 3(a+1)x - 36 = 0$ برابر ۳ باشد، جواب دیگر این معادله کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۱۱- معادله $x^2 - 5|x| - 14 = 0$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲- اگر $a > 0$ و معادلات $x^2 + 2x + a = 0$ و $x^2 - x - 2a = 0$ دارای یک ریشه مشترک باشند، این ریشه مشترک کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۳- ۴ برابر مربع عددی از ۱۲ برابر آن عدد، ۹ واحد کم‌تر است. معکوس آن عدد کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{5}{6}$

۱۴- عدد ۲۴ را به دو قسمت طوری تقسیم کرده‌ایم که حاصل ضرب آن‌ها ۱۴۳ شده است. قدرمطلق اختلاف دو عدد کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

برگرفته از کتاب درسی

۱۵- مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی ۹۲۵ است. مجموع این دو عدد کدام است؟

- (۱) ۴۱ (۲) ۴۳ (۳) ۴۵ (۴) ۴۷

برگرفته از کتاب درسی

۱۶- محیط و مساحت یک مستطیل به ترتیب ۵۴ متر و ۱۸۰ مترمربع است. طول آن چه قدر از عرض آن بیشتر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۷- طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای $2x+1$ ، $2x-1$ و x است ($x > 1$). طول ضلع متوسط آن کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۵ (۳) ۱۷ (۴) ۱۹

۱۸- علی از پدرش ۲۰ سال کوچک‌تر است. اگر ۶ سال دیگر حاصل ضرب سن علی و پدرش ۳۰۰ باشد، سن علی چه قدر است؟ برگرفته از کتاب درسی

- ۴ (۱) ۱۰ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴)

۱۹- فاصله هر طرف قالی از کنار دیوار یک اتاق مستطیل شکل، ثابت است. اگر مساحت اتاق ۲۴، محیط اتاق ۲۰ و محیط قالی ۱۲ باشد، مساحت قالی کدام است؟

برگرفته از کتاب درسی

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

درسنامه ۲

تعیین علامت دوجمله‌ای درجه اول

منظور از تعیین علامت یک عبارت جبری این است که مشخص کنیم این عبارت در چه فاصله‌ای از اعداد حقیقی، مثبت و در چه فاصله‌ای از اعداد حقیقی، منفی و در کجاها صفر می‌باشد.

۱) تعیین علامت عبارت درجه اول:

برای تعیین علامت عبارت درجه اول به صورت $P = ax + b$ ($a \neq 0$)، ابتدا عبارت را مساوی صفر قرار می‌دهیم و ریشه (جواب) آن را به دست می‌آوریم که به صورت مقابل می‌شود:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

| | | | |
|--------------|--------------------|----------------|--------------------|
| x | $x < -\frac{b}{a}$ | $-\frac{b}{a}$ | $x > -\frac{b}{a}$ |
| $P = ax + b$ | مخالف علامت a | ۰ | موافق علامت a |

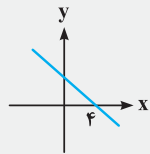
حال برای تعیین علامت از جدول روبه‌رو استفاده می‌کنیم:

مثال عبارت $P = 2x + 4$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ $a = 2 > 0$ ، بنابراین:

$$2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

| | |
|--------------|--|
| x | -2 |
| $P = 2x + 4$ | + (موافق علامت a) - (مخالف علامت a) |



مثال اگر m عددی طبیعی و نمودار عبارت $y = mx + n - 2 - 2x$ به صورت مقابل باشد، n کدام است؟

- ۱ (۱) ۶ (۲)
۴ (۳) ۲ (۴)

پاسخ گزینه (۲). ابتدا عبارت درجه اول را ساده کنیم:

$$y = mx + n - 2 - 2x = (m - 2)x + n - 2$$

با توجه به نمودار نتیجه می‌گیریم که $x = 4$ ریشه عبارت y است:

$$y(4) = 0 \Rightarrow (m - 2)(4) + n - 2 = 0 \Rightarrow 4m - 8 + n - 2 = 0 \Rightarrow 4m + n = 10 \quad (*)$$

از طرفی چون قبل از ریشه، نمودار بالای محور x ها (یعنی مثبت) است و می‌دانیم علامت y قبل از ریشه، مخالف علامت ضریب x است، پس $(m - 2)$ منفی است. بنابراین:

$$m - 2 < 0 \Rightarrow m < 2 \xrightarrow[\text{طبیعی}]{\text{عدد } m} m = 1 \xrightarrow{(*)} 4(1) + n = 10 \Rightarrow n = 6$$

نکته اگر بالا سر عبارات درجه اول $ax + b$ ، توان زوج، قدرمطلق یا رادیکال با فرجه زوج بیاید، دیگر هیچ جا در جدول، علامت منفی نخواهیم داشت.

مثال جدول تعیین علامت $(-4x + 8)^2$ و $|\frac{1}{3}x + 5|$ و $\sqrt{x - 1}$ را رسم کنید.

پاسخ

| | | | |
|---------------|--|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
| $(-4x + 8)^2$ | + | + | + |
| ریشه | $-4x + 8 = 0 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$ | | |

| | | | |
|----------------------|--|------|-----------|
| x | $-\infty$ | 10 | $+\infty$ |
| $ \frac{1}{3}x + 5 $ | + | + | + |
| ریشه | $-\frac{1}{3}x + 5 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x = 5 \xrightarrow{\times 3} x = 10$ | | |

| | | | |
|----------------|--|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| $\sqrt{x - 1}$ | غرف | + | + |
| ریشه | $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ قبل از $x = 1$ زیر رادیکال را منفی کرده پس غلط است. | | |

نکته اگر بالا سر عبارات درجه اول $ax + b$ ، توان فرد یا رادیکال با فرجه فرد بیاید، هیچ تأثیری در جدول تعیین علامت $ax + b$ نمی‌گذارد.

مثال جدول تعیین علامت $(5x - 10)^3$ یا $\sqrt[3]{5x - 10}$ مانند جدول تعیین علامت $P = 5x - 10$ به صورت زیر است:

| | | | |
|-----|-----------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
| P | - | + | + |

۲) تعیین علامت عبارات به فرم $\frac{ax+b}{cx+d}$ یا $(ax+b)(cx+d)$:

جدول تعیین علامت دو عبارت که در هم ضرب یا بر هم تقسیم می‌شوند، تفاوت خاصی با هم ندارند. این یعنی این‌که شما می‌توانید تقسیم دو عبارت را مثل ضرب آن‌ها تعیین علامت کنید. تنها تفاوت در این است که عبارت به ازای ریشهٔ مخرج تعریف نشده است.

سؤال دانش‌پژوه (بهرام ۴ پلپله): آقا یعنی شما می‌گید $۲ \div ۶$ ، همون ۶×۲ می‌شه!

پاسخ بهرام برو دهننو با مایع ظرف‌شویی بشور! بچه من گفتم علامت اونا یکی میشه نه جواب اونا! یعنی هم $۲ \div ۶$ ، علامتش مثبت میشه، هم ۶×۲ علامتش مثبت میشه.

مثال به ازای چه مقادیری از x عبارت $P = \frac{x+1}{2x-1}$ کوچک‌تر یا مساوی صفر است؟

پاسخ طبق آن‌چه گفته شده تعیین علامت P ، مثل تعیین علامت عبارت $(x+1)(2x-1)$ می‌باشد. فقط ریشهٔ مخرج نامعین است.

| | | | |
|------------------------|------|---------------|---|
| x | -1 | $\frac{1}{2}$ | |
| $x+1$ | - | + | + |
| $2x-1$ | - | - | + |
| $P = \frac{x+1}{2x-1}$ | + | - | * |

ریشهٔ صورت $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

ریشهٔ مخرج $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

به ازای $x = \frac{1}{2}$ عبارت نامعین می‌شود. بنابراین برای این‌که $\frac{x+1}{2x-1} \leq 0$ باشد، باید $\frac{1}{2} < x < -1$ قرار بگیرد.

نامعادلات کسری

برای حل چنین نامعادلاتی مراحل زیر را طی می‌کنیم:

مرحلهٔ اول: تمامی عبارات را به یک طرف نامعادله انتقال داده و با مخرج مشترک‌گیری و ساده‌سازی به یک نامعادله مانند $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$

یا $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ یا $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ و یا $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ می‌رسیم.

مرحلهٔ دوم: ریشه‌های $P(x)$ و $Q(x)$ را به دست آورده و سپس جدول تعیین علامت عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را رسم می‌کنیم.

مرحلهٔ سوم: با توجه به علامت نامعادله، محدودهٔ مناسبی از جدول را انتخاب می‌کنیم.

مثال مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x}{x-1} > 2$ کدام است؟

$$x < 1 \text{ یا } x > 2 \quad (۴)$$

$$x < 0 \text{ یا } x > 1 \quad (۳)$$

$$0 < x < 1 \quad (۲)$$

$$1 < x < 2 \quad (۱)$$

$$\frac{x}{x-1} > 2 \Rightarrow \frac{x}{x-1} - 2 > 0 \Rightarrow \frac{x-2x+2}{x-1} > 0 \Rightarrow \frac{-x+2}{x-1} > 0$$

پاسخ

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+2=0 \Rightarrow x=2 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x & 1 & 2 & \\ \hline -x+2 & + & + & - \\ x-1 & - & + & + \\ \hline P = \frac{-x+2}{x-1} & - & + & - \end{array} \Rightarrow 1 < x < 2 \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$

جواب

نامعادله‌های دوگانه و دستگاه نامعادله

برای حل نامعادلات دوگانهٔ $a \leq bx+c \leq d$ ، ابتدا طرفین نامعادله را با $(-c)$ جمع می‌کنیم و سپس طرفین نامعادله را به ضرب x (یعنی b) تقسیم می‌کنیم.

مثال نامعادلهٔ $۴ < 3x-2 < ۷$ را حل کنید.

$$۴ < 3x-2 < ۷ \xrightarrow{+2} ۶ < 3x < ۹ \xrightarrow{\div 3} ۲ < x < ۳$$

پاسخ

برای حل نامعادلات دوگانه به صورت $ax + b \leq cx + d \leq ex + f$ ، ابتدا دو نامعادله $ax + b \leq cx + d$ و $cx + d \leq ex + f$ را جداگانه حل کرده و سپس بین جواب‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم.

مثال نامعادله $4 - x < 2x - 2 < x + 1$ را حل کنید.

پاسخ

$$\begin{cases} 4 - x < 2x - 2 \Rightarrow 6 < 3x \Rightarrow 2 < x \\ 2x - 2 < x + 1 \Rightarrow x < 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 2 < x < 3$$

۲۰- جدول تعیین علامت مقابل، مربوط به کدام عبارت زیر است؟

| | |
|-------|----------------|
| x | $-\frac{3}{y}$ |
| عبارت | + - |

| | |
|---------------|---------------|
| $7x - 3$ (۲) | $7x + 3$ (۱) |
| $-7x - 3$ (۴) | $-7x + 3$ (۳) |

| | |
|-----|-------|
| x | a |
| P | + - |

۲۱- به ازای کدام مقدار برای a ، جدول تعیین علامت عبارت $P = 2ax + a^2 - 27$ به صورت مقابل است؟

| | | | |
|----------|---------|---------|----------|
| -3 (۴) | 2 (۳) | 3 (۲) | -2 (۱) |
|----------|---------|---------|----------|

| | |
|-----|-------|
| x | 0 |
| y | - + |

۲۲- اگر جدول تعیین علامت $y = ax + b + x + a$ به صورت مقابل باشد، کدام گزینه صحیح است؟

| | | | |
|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| $b > 1, a > 1$ (۴) | $b < 1, a > -1$ (۳) | $b > -1, a > 1$ (۲) | $b > 1, a > -1$ (۱) |
|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|

۲۳- در بازه $[x_0, +\infty)$ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ بالاتر از خط به معادله $y = 3(x-1)$ قرار نمی‌گیرد. کم‌ترین مقدار $f(x_0)$ کدام است؟

تجربی داخل ۸۲

| | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| 4 (۴) | 3 (۳) | 2 (۲) | 1 (۱) |
|---------|---------|---------|---------|

۲۴- اگر بازه $(-6, 1)$ ، مجموعه جواب نامعادله $\frac{3x+b}{ax-1} < 0$ باشد، مقدار $6a+b$ کدام است؟

| | | | |
|---------------------|--------------------|----------|----------|
| $-\frac{19}{6}$ (۴) | $-\frac{1}{6}$ (۳) | -4 (۲) | 24 (۱) |
|---------------------|--------------------|----------|----------|

۲۵- مجموعه جواب نامعادله $\frac{4x+7}{2x-1} > 5$ ، به کدام صورت است؟

| | | | |
|----------------------------|---------------------------|-------------|-----------------------|
| $-1 < x < \frac{1}{4}$ (۴) | $\frac{1}{4} < x < 2$ (۳) | $x < 2$ (۲) | $x > \frac{1}{4}$ (۱) |
|----------------------------|---------------------------|-------------|-----------------------|

تجربی داخل ۸۳

۲۶- مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-3}$ ، به کدام صورت است؟

| | | | |
|------------------|-----------------|-----------------|-------------|
| $-2 < x < 3$ (۴) | $2 < x < 3$ (۳) | $1 < x < 3$ (۲) | $x < 3$ (۱) |
|------------------|-----------------|-----------------|-------------|

۲۷- کسر $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$ در کدام فاصله زیر، همواره منفی است؟

| | | | |
|--------------------|--------------|--------------|--------------------|
| $(2, +\infty)$ (۴) | $(3, 4)$ (۳) | $(2, 3)$ (۲) | $(-\infty, 1)$ (۱) |
|--------------------|--------------|--------------|--------------------|

۲۸- مجموعه جواب نامعادله $-4x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x^2}\right) \geq -2x - \frac{1}{x} - 1$ با شرط $x > 0$ کدام است؟

| | | | |
|--------------|--------------------|--------------|--------------------|
| $(0, 3)$ (۴) | $[0, +\infty)$ (۳) | $(0, 3]$ (۲) | $[3, +\infty)$ (۱) |
|--------------|--------------------|--------------|--------------------|

۲۹- دنباله $a_n = \frac{2n-7}{5n-14}$ ، چند جمله منفی دارد؟

| | | | |
|-------------|---------|-------|-------|
| بی‌شمار (۴) | صفر (۳) | ۲ (۲) | ۱ (۱) |
|-------------|---------|-------|-------|

۳۰- حدود m برای آن‌که عبارت $\frac{m(m^2+m)}{m-2}$ همواره مثبت باشد، کدام است؟

| | | | |
|-------------|-----------------|----------------|-----------------|
| $m > 2$ (۴) | $1 < m < 2$ (۳) | $m \leq 2$ (۲) | $0 < m < 2$ (۱) |
|-------------|-----------------|----------------|-----------------|

۳۱- نامساوی $\frac{x^5|x+1|}{(x-1)^3(x+2)^2} < 0$ ، به ازای چه مقادیری از x برقرار است؟

| | | | |
|------------------|-------------|-----------------|-------------|
| $-1 < x < 0$ (۴) | $x < 0$ (۳) | $0 < x < 1$ (۲) | $x > 1$ (۱) |
|------------------|-------------|-----------------|-------------|

۳۲- جواب مشترک دو نامعادله $\frac{x^2-x}{2x-2} + \frac{x^2-x}{3x-3} < \frac{5}{6}$ و $\frac{x}{2} < \frac{1}{4} + \frac{x}{3}$ به کدام صورت است؟

| | | | |
|-------------|-----------------|-------------|-----------------|
| $x > 1$ (۴) | $1 < x < 3$ (۳) | $x < 1$ (۲) | $0 < x < 1$ (۱) |
|-------------|-----------------|-------------|-----------------|

۳۳- اگر $\frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}$ باشد، عبارت $1 - 6x$ در چه فاصله‌ای قرار دارد؟

- (۱) $[-3, 4]$ (۲) $[-4, 3]$ (۳) $(-3, 4]$ (۴) $(-4, 3]$

۳۴- مجموعه جواب نامعادله $3 < \frac{6-4x}{5} < 2$ کدام است؟

- (۱) $[-1, \frac{9}{4}]$ (۲) $(-\frac{9}{4}, -1)$ (۳) $(1, \frac{9}{4}]$ (۴) $(-\frac{9}{4}, 1)$

۳۵- مجموعه جواب نامعادله $3 + 4x < \frac{5-7x}{2} < 5 - 2x$ کدام است؟

- (۱) $(-\frac{1}{15}, \frac{5}{3})$ (۲) $(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{15})$ (۳) \emptyset (۴) $\mathbb{R} - [-\frac{5}{3}, -\frac{1}{15}]$

۳۶- دو سهمی به معادلات $y_1 = a(x+2)(x+3)$ و $y_2 = a'(x+2)(x+3)$ مفروض‌اند. اگر به ازای هر $x \in (-3, -2)$ $y_2 < y_1$ باشد،

کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $a < a'$ (۲) $a > a'$ (۳) $a < -a'$ (۴) $a > -a'$

۳۷- نمودار عبارت $y = x^3 - 4x^2 - x + 4, x > -1$ ، در بازه (a, b) زیر محور x ها است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۲

دوستانه

تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم $P = ax^2 + bx + c$

برای تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم $P = ax^2 + bx + c$ ، ابتدا عبارت را مساوی صفر قرار می‌دهیم و بر حسب علامت Δ ، سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای دو ریشه متمایز x_1 و x_2 می‌باشد. در این صورت برای تعیین علامت عبارت فوق از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

| | | |
|---------------------|-----------------|-----------------|
| x | x_1 | x_2 |
| $P = ax^2 + bx + c$ | موافق علامت a | مخالف علامت a |

اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای ریشه مضاعف $x_1 = -\frac{b}{2a}$ می‌باشد. در این صورت برای تعیین علامت عبارت فوق از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

| | |
|---------------------|-----------------|
| x | x_1 |
| $P = ax^2 + bx + c$ | موافق علامت a |

اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد. در این صورت برای تعیین علامت عبارت فوق از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

| | |
|---------------------|-----------------|
| x | |
| $P = ax^2 + bx + c$ | موافق علامت a |

مثال اشتراک مجموعه جواب نامعادله‌های $x^2 > -25$ و $x(x-5) \geq 6$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, -1) \cup (6, +\infty)$ (۲) \mathbb{R} (۳) $(-\infty, -1] \cup [6, +\infty)$ (۴) $[-1, 6]$

پاسخ گزینه (۳). ابتدا ظاهر نامعادله‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$x^2 > -25 \Rightarrow x^2 + 25 > 0, \quad x(x-5) \geq 6 \Rightarrow x^2 - 5x \geq 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 \geq 0$$

حال جدول تعیین علامت عبارات $x^2 + 25$ و $x^2 - 5x - 6$ را رسم می‌کنیم:

$$P(x) = x^2 + 25 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(25) = -100 < 0 \xrightarrow[\text{ضریب } x^2 \text{ مثبت}]{\text{ریشه حقیقی ندارد}} \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline P & & + & \end{array} \xrightarrow{P > 0} x \in \mathbb{R}$$

$$P(x) = x^2 - 5x - 6 = (x-6)(x+1) \xrightarrow[\text{ضریب } x^2 \text{ مثبت}]{\text{ریشه‌ها } -1 \text{ و } 6} \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -1 & 6 & +\infty \\ \hline P & & + & - & + \end{array} \xrightarrow{P \geq 0} x \in (-\infty, -1] \cup [6, +\infty)$$



حال اشتراک جواب‌ها را به کمک محور به دست می‌آوریم که برابر $(-\infty, -1] \cup [6, +\infty)$ می‌شود.

مثال معادله $a(x^2+1) + 2x(x+2) = 1$ ، به ازای کدام مقادیر a دارای ۲ جواب حقیقی متمایز است؟

$-2 \leq a \leq 3$ (۴) $-2 < a < 3$ (۳) $-3 \leq a \leq 2$ (۲) $-3 < a < 2$ (۱)

پاسخ گزینه (۱).

ابتدا ظاهر معادله را مرتب می‌کنیم: $a(x^2+1) + 2x(x+2) = 1 \Rightarrow ax^2 + a + 2x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow (a+2)x^2 + 4x + a - 1 = 0$
 حال برای آن که معادله دارای ۲ جواب حقیقی متمایز باشد، باید $\Delta > 0$ باشد. بنابراین:

$$4^2 - 4(a+2)(a-1) > 0 \Rightarrow 16 - 4(a^2 + a - 2) > 0 \stackrel{\div 4}{\Rightarrow} 4 - (a^2 + a - 2) > 0 \Rightarrow 4 - a^2 - a + 2 > 0$$

$$-a^2 - a + 6 > 0 \xrightarrow{\text{جهت عوض } x(-1)} \underbrace{a^2 + a - 6}_{(a+3)(a-2)} < 0 \xrightarrow{\text{ضریب } a^2 \text{ مثبت}} \begin{array}{c|cccc} a & -\infty & -3 & 2 & +\infty \\ \hline P & + & \downarrow & - & \downarrow & + \end{array} \Rightarrow -3 < a < 2$$

تذکره برای حل نامعادله‌ها حتماً باید بعد از ساده‌سازی، همه عبارت‌ها را یک طرف نامساوی برده و طرف دیگر نامساوی صفر باشد!

چهار حالت مهم نامعادله درجه دوم:

۱) اگر $ax^2 + bx + c > 0$ همواره $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد، باید نمودار تابع درجه دوم همواره بالای محور x ‌ها باشد (→) که در این صورت باید $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد.

۲) اگر $ax^2 + bx + c \geq 0$ همواره $a > 0$ و $\Delta \leq 0$ باشد، باید نمودار تابع درجه دوم زیر محور x ‌ها نرود (→ یا →) که در این صورت باید $a > 0$ و $\Delta \leq 0$ باشد.

۳) اگر $ax^2 + bx + c < 0$ همواره $a < 0$ و $\Delta < 0$ باشد، باید نمودار تابع درجه دوم همواره زیر محور x ‌ها باشد (→) که در این صورت باید $a < 0$ و $\Delta < 0$ باشد.

۴) اگر $ax^2 + bx + c \leq 0$ همواره $a < 0$ و $\Delta \leq 0$ باشد، باید نمودار تابع درجه دوم بالای محور x ‌ها نرود (→ یا →) که در این صورت باید $a < 0$ و $\Delta \leq 0$ باشد.

مثال اگر عبارت $(m-1)x^2 + (m-1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، m به کدام مجموعه تعلق دارد؟ **ریاضی داخل ۹۱**

\mathbb{R} (۴) \emptyset (۳) $(0, 1)$ (۲) $(1, 5)$ (۱)

پاسخ برای آن که عبارت مذکور همواره منفی باشد یعنی همواره داشته باشیم $(m-1)x^2 + (m-1)x + 1 < 0$ باید $\Delta < 0$ و $a < 0$ باشد. بنابراین:

$$(1) \text{ شرط } \Delta = b^2 - 4ac = (m-1)^2 - 4(m-1)(1) < 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4m + 4 < 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 - 4m + 4 < 0 \Rightarrow \underbrace{m^2 - 6m + 5}_{(m-5)(m-1)} < 0$$

$$\xrightarrow{\text{ضریب } m^2 \text{ مثبت}} \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & 1 & 5 & +\infty \\ \hline P & + & \downarrow & - & \downarrow & + \end{array} \Rightarrow m \in (1, 5)$$

(۲) شرط x^2 ضریب $< 0 \Rightarrow m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1$

اشتراک جواب‌های به دست آمده، \emptyset است. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

تعیین علامت عبارات جبری در حالت کلی

فرض کنید بخواهیم یک کسر بزرگ مانند $P = \frac{(x^2 - 5x - 6)(x^2 + 1)}{(x-1)^2(2x-4)}$ را تعیین علامت کنیم. برای این منظور مراحل زیر را طی می‌کنیم:

مرحله اول: ریشه‌های عبارات داخل پرانتزها را پیدا کرده و سپس آن‌ها را از کوچک به بزرگ در جدول قرار می‌دهیم و برای ریشه‌های عبارات صورت کسر صفر و برای ریشه‌های مخرج کسر علامت * (یعنی غیرقابل قبول) قرار می‌دهیم:

$$x^2 - 5x - 6 = (x-6)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 6, -1, \quad (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0^2 - 4(1)(1) = -4 < 0 \text{ ریشه ندارد}, \quad 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

جدول را به صورت مقابل می‌کشیم:

| | | | | | | |
|---|----|----|-----------|---|---|----|
| x | -∞ | -1 | 1 | 2 | 6 | +∞ |
| P | | ↓ | * | * | ↓ | |
| | | | ریشه ریشه | | | |
| | | | مخرج مخرج | | | |

مرحله دوم: حال علامت P را به ازای هر عدد دلخواهی که دوست دارید پیدا کنید. مثلاً به ازای $x = 0$ علامت P مثبت می‌شود:

$$P(0) = \frac{(0^2 - 5(0) - 6)(0^2 + 1)}{(0-1)^2(2(0) - 4)} = \frac{-6 \times 1}{1 \times (-4)} = \frac{6}{4} > 0$$

علامت جدول را مثبت قرار دهید.

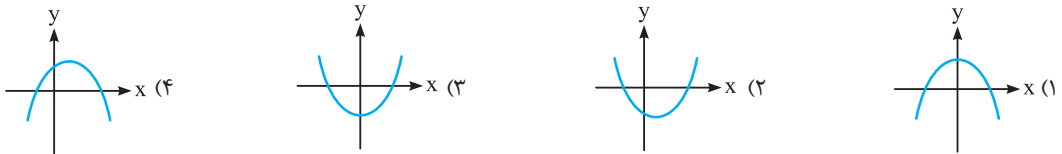
مرحله سوم: با عبور از ریشه‌ها علامت‌ها را عوض کنید به‌جز ریشه‌های عامل‌های با توان زوج مانند $(x-1)^2$ یا ریشه‌های داخل قدرمطلق

مانند $|x-1|$ که در این مثال علامت‌ها در جدول به صورت زیر درمی‌آیند:

| | | | | | | |
|---|-----------|----|---|---|---|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | 1 | 2 | 6 | $+\infty$ |
| P | | - | + | + | - | + |

ریشه مضاعف
عوض شد عوض نشد عوض شد عوض شد

۳۸- اگر جدول تعیین علامت سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت $\frac{x}{y} \begin{matrix} -2 & 2 \\ + & - & + \end{matrix}$ باشد، نمودار آن کدام است؟



۳۹- اگر جدول تعیین علامت سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل باشد، کدام گزینه صحیح است؟

| | |
|---|---|
| x | 0 |
| y | - |

(۲) $c = 0$ و $b = 0$ و $a < 0$

(۱) $a > 0$ و $b = 0$ و $c \neq 0$

| | |
|---|---|
| x | 3 |
| y | - |

(۴) $c = 0$ و $b \neq 0$ و $a < 0$

(۳) $a > 0$ و $c = 0$ و $b = 0$

۴۰- با توجه به جدول تعیین علامت عبارت $y = ax^2 + bx + c$ ، کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) طول رأس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ، ۳ است.
- (۲) نمودار سهمی بر محور X ها مماس بوده و زیر آن قرار دارد.
- (۳) بیشترین مقدار عبارت $ax^2 + bx + c$ برابر صفر است.
- (۴) نمودار سهمی محور Y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند.

۴۱- نامساوی $x^2 + 4 > 4x$

- (۱) به ازای همه مقادیر X برقرار است.
- (۲) به ازای هر مقدار به جز $x = 2$ برقرار است.
- (۳) فقط به ازای $2 < x < -2$ برقرار است.
- (۴) فقط به ازای $x > 2$ یا $x < -2$ برقرار است.

۴۲- عبارت $y = x^2 - 7x + 10$ ، با افزایش x از ۳ تا $+\infty$:

- (۱) ابتدا منفی است و سپس مثبت می‌شود.
- (۲) ابتدا مثبت است و سپس منفی می‌شود.
- (۳) همواره مثبت است.
- (۴) همواره منفی است.

تجربی داخل ۸۹

۴۳- مقادیر تابع $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 6$ در بازه (a, b) بزرگ‌تر از $\frac{7}{4}$ می‌باشد. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۴
- (۲) ۵
- (۳) ۵/۵
- (۴) ۶

۴۴- دنباله با جمله عمومی $a_n = n^2 - 10n + 16$ ، چند جمله منفی دارد؟

- (۱) ۴
- (۲) ۵
- (۳) ۶
- (۴) صفر

۴۵- نامساوی $\frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x} + 1} > 0$ به ازای چه مقادیری از x، همواره برقرار است؟

- (۱) $x \geq 2$
- (۲) $x < 0$ یا $x > 2$
- (۳) $0 < x < 2$
- (۴) $x > 2$

۴۶- مجموعه جواب نامعادله $(3x^2 + 7x - 6)\sqrt{x} \leq 0$ ، کدام است؟

- (۱) $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$
- (۲) $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$
- (۳) $-2 \leq x \leq \frac{2}{3}$
- (۴) $-1 < x < \frac{4}{3}$

۴۷- مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 3x + 2| \leq 0$ ، کدام است؟

- (۱) $[1, 2]$
- (۲) $\{0\} \cup [1, 2]$
- (۳) $[-2, -1]$
- (۴) $\{0\} \cup [-2, -1]$

۴۸- به ازای چه مقادیری از x ، نامساوی $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1} \geq 0$ همواره برقرار است؟

- (۱) همه مقادیر x (۲) $-1 < x < 1$ (۳) $x < 1$ (۴) $x \neq 1$

۴۹- حدود تغییرات x در نامعادله $(x^2 - 4x + 3) > (x^2 + x + 2)$ ، کدام است؟

- (۱) $x < 3$ یا $x > 1$ (۲) $1 < x < 3$ (۳) $x < -3$ یا $x > -1$ (۴) $-1 < x < 4$

۵۰- نخستین جمله دنباله $\left\{ \frac{n}{n^2 + 1} \right\}$ که کوچک‌تر از $1/10$ است، کدام می‌باشد؟

- (۱) جمله هشتم (۲) جمله نهم (۳) جمله دهم (۴) جمله یازدهم

تجربی داخل ۸۴

۵۱- مجموعه جواب نامعادله $2x > \frac{x-1}{x+1}$ ، کدام مجموعه است؟

- (۱) $\{x : x < -1\}$ (۲) $\{x : x > -1\}$ (۳) $\{x : -1 < x < 1\}$ (۴) $\{x : -2 < x < -1\}$

۵۲- مجموعه جواب نامعادله $(x+1)(x^2 + 2x - 2) > x + 1$ ، کدام است؟

- (۱) $x < 2$ یا $x > 2$ (۲) $x < -2$ یا $x > 2$ (۳) $-4 < x < -2$ (۴) $x > 1$ یا $-3 < x < -1$

۵۳- اگر مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{2x^2 + x + 1} \geq \frac{1}{x^2 + 1}$ بازه $[a, b]$ باشد، حاصل ab کدام است؟

- (۱) -1 (۲) 1 (۳) صفر (۴) 2

۵۴- مجموعه جواب نامعادله $\frac{3}{x-4} + \frac{5}{x+4} > \frac{8}{x^2-16}$ کدام است؟

- (۱) $(-4, +\infty) - [2, 4]$ (۲) $(-\infty, -4) \cup (2, 4)$ (۳) $(-4, +\infty) - [2, 4]$ (۴) $(-\infty, -4) - (2, 4)$

۵۵- مجموعه جواب نامعادله $\frac{3x^2 - 3x}{x^2 - 1} > 1$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - \{1\}$ (۲) \emptyset (۳) $\{x \mid x > 1\}$ (۴) $\{x \mid x < 1\}$

۵۶- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x - 8} > \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 3}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 2) \cup (3, 4)$ (۲) $(-4, \frac{17}{8}) \cup (3, +\infty)$ (۳) $(-\infty, -4) \cup (2, 3)$ (۴) $(-\infty, -4) \cup (\frac{17}{8}, 3)$

۵۷- به ازای چند عدد طبیعی x ، حاصل عبارت $\frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 3x + 2}$ کم‌تر از 1 می‌باشد؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۵۸- چند عدد به صورت $\frac{k}{2}$ که در آن k عددی صحیح است، در مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{1-x^2} \leq x^2 + x - \frac{1}{1-x^2}$ قرار دارد؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6

۵۹- اگر مساحت مستطیلی به اضلاع $(2-3x)$ و $(x-1)$ از مساحت مربعی به ضلع x بیشتر باشد، x در کدام بازه زیر می‌تواند قرار داشته باشد؟

- (۱) $0 < x < \frac{1}{2}$ (۲) $\frac{5}{2} < x < 5$ (۳) $\frac{3}{2} < x < 4$ (۴) $\frac{1}{2} < x < 2$

۶۰- فروش هفتگی S هزار واحد از یک نوع کالای مرغوب و جدید، t هفته بعد از معرفی به بازار از رابطه $S(t) = \frac{200t}{t^2 + 100}$ به دست

می‌آید. در چه بازه زمانی فروش هفتگی کالای معرفی شده 8 هزار واحد یا بیشتر در هر هفته است؟

- (۱) $[5, 10]$ (۲) $[5, 15]$ (۳) $[15, 20]$ (۴) $[5, 20]$

۶۱- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $2x^2 - mx - 3 = 0$ باشند، حدود m کدام باشد تا رابطه $x_1 < -1 < x_2$ برقرار شود؟

- (۱) $m < 2$ (۲) $m > 2$ (۳) $m < -2$ (۴) $m > -2$

۶۲- اگر جدول تعیین علامت عبارت $y = x^2 - bx + c$ به شکل مقابل باشد، مقدار $c + 2b$ کدام است؟

| | | | |
|-----|---|---|---|
| x | ۱ | ۲ | |
| y | + | - | + |

۱۰ (۴) ۸ (۳) ۶ (۲) ۴ (۱)

۶۳- اگر مجموعه جواب نامعادله $x^2 + bx + c < 0$ برابر $\{x \mid -1 < x < 2\}$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $2x < x^2 + 1 + b(x-1) + c$ کدام است؟

$(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ (۴) $(1, 3)$ (۳) $(-2, 3)$ (۲) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ (۱)

۶۴- اگر مجموعه جواب نامعادله $x^2 - 8x + c < 0$ را به صورت $|x + n| < 2$ بنویسیم، آن گاه $n + c$ کدام است؟

-12 (۴) ۸ (۳) ۱۲ (۲) -8 (۱)

۶۵- اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

$\{a : 1 < a < 5\}$ (۴) \emptyset (۳) $\{a : a < 1\}$ (۲) \mathbb{R} (۱)

۶۶- به ازای کدام مقادیر m ، عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$ ، برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟

$1 < m < 2/5$ (۴) $1 < m < 2$ (۳) $m > 2/5$ (۲) $m < -2$ (۱)

۶۷- به ازای کدام مقادیر m ، سهمی $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ ، همواره در زیر محور x ها است؟

$m > \frac{3}{2}$ (۴) $1 < m < \frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2} < m < 1$ (۲) $m < -\frac{1}{2}$ (۱)

۶۸- به ازای کدام مقادیر m ، نمودار سهمی $y = (m+2)x^2 - 2mx + 1$ همواره بالای محور x ها است؟

$-2 < m < -1$ (۲) $m > -2$ (۱)

$-1 < m < 2$ (۴) $-2 < m < 2$ (۳)

۶۹- به ازای کدام مقدار m ، نمودار سهمی $y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2$ همواره بالای محور x ها و مماس بر آن است؟

۳ (۴) $\frac{5}{2}$ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۲) -3 (۱)

۷۰- اگر نامساوی $\frac{mx^2 - \frac{m}{2}x - 3}{-x^2 - x - 1} \leq 3$ به ازای همه مقادیر x برقرار باشد، m کدام است؟

$-\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) -6 (۲) 6 (۱)

۷۱- نمودار $f = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ در بازه (a, b) پایین تر از خط به معادله $y = 2$ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

$+\infty$ (۴) ۸ (۳) ۶ (۲) ۴ (۱)

۷۲- به ازای کدام مقادیر a ، معادله درجه دوم $2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟

$3 < a < 4$ (۴) $2 < a < 6$ (۳) $a < 3$ یا $a > 4$ (۲) $a < 2$ یا $a > 6$ (۱)

۷۳- به ازای چه مقادیری از m منحنی درجه دوم $f(x) = mx^2 + 4x + m - 3$ محور x ها را در دو نقطه قطع می کند؟

$-4 < m < 1$ (۴) $-3 < m < 1$ (۳) $m \neq 0$ و $-1 < m < 4$ (۲) $-1 < m < 3$ (۱)

۷۴- اگر معادله درجه دوم $(m+2)x^2 + 4x + (m-1) = 0$ دارای جواب حقیقی باشد، مقادیر m کدام است؟

$m \neq -2$ و $-3 \leq m \leq 2$ (۴) $-2 \leq m \leq 2$ (۳) $1 \leq m \leq 2$ (۲) $-2 < m \leq 1$ (۱)

۷۵- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}m + 2 = 0$ فاقد ریشه حقیقی است؟

$-1 < m < 5$ (۴) $-2 < m < 4$ (۳) $-3 < m < 4$ (۲) $-3 < m < 5$ (۱)

۷۶- منحنی به معادله $y = (x-1)(x^2 - ax + a)$ محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می کند. مجموعه مقادیر a ، به کدام صورت است؟

$a > 4$ (۴) $0 < a < 4$ (۳) $0 < a < 2$ (۲) $-4 < a < 0$ (۱)

۷۷- اگر منحنی $y = (6+3x)(x^2 + bx + b)$ محور x ها را فقط در یک نقطه قطع کند، مجموعه مقادیر b ، کدام است؟

$(-\infty, 4]$ (۴) $(0, 4]$ (۳) $(0, 4)$ (۲) $(4, +\infty)$ (۱)

۷۸- خط به معادله $y = mx + 4$ با منحنی به معادله $y = -x^2 + 2x$ هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند. مجموعه مقادیر m کدام است؟ **تجربی خارج ۸۱**

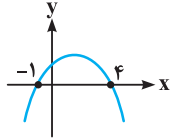
$$m < 0 \quad (1) \quad m > 4 \quad (2) \quad -1 < m < 4 \quad (3) \quad -2 < m < 6 \quad (4)$$

۷۹- منحنی به معادله $y = (2x+1)(x+8)$ با خطوط $y = mx$ نقطهٔ مشترک ندارد. مجموعه مقادیر m ، چگونه است؟ **ریاضی داخل ۸۸**

$$5 < m < 13 \quad (1) \quad 15 < m < 23 \quad (2) \quad 7 < m < 15 \quad (3) \quad 9 < m < 25 \quad (4)$$

۸۰- اگر رأس سهمی به معادله $y = x^2 + mx + 1$ در ربع سوم محورهای مختصات قرار داشته باشد، محدودهٔ m کدام است؟

$$-2 < m < 2 \quad (1) \quad m > 2 \quad (2) \quad m < -2 \quad (3) \quad m > 2 \text{ یا } m < -2 \quad (4)$$



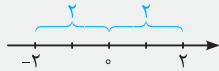
۸۱- اگر شکل مقابل، نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ باشد، مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x}{ax^2 + bx + c} > 0$ شامل

چند عدد صحیح نامنفی است؟

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \text{ بی‌شمار}$$

دستنامه ۴

نامعادلات قدرمطلق



می‌دانیم $|x|$ همان فاصلهٔ x از مبدأ، روی خط اعداد حقیقی است. به عنوان مثال، اعداد 2 و -2 هر دو فاصله‌شان از مبدأ 2 واحد است، پس می‌نویسیم $2 = |2| = |-2|$.

دو فرمول زیر در نامعادلات قدرمطلق خیلی مهم است. حتماً آن‌ها را به یاد داشته باشید:

$$|x| \leq a \xrightarrow{a > 0} -a \leq x \leq a$$

مثال: $|x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$

$$|x| \geq a \xrightarrow{a > 0} x \geq a \text{ یا } x \leq -a$$

مثال: $|x| \geq 2 \Rightarrow x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2$

در حالت کلی‌تر می‌تواند به جای x در فرمول‌های فوق، یک عبارت جبری قرار بگیرد.

$$|2x - 1| < 3 \xrightarrow{\text{فرمول (1)}} -3 < 2x - 1 < 3 \xrightarrow{+1} -2 < 2x < 4 \xrightarrow{:2} -1 < x < 2$$

مثال

اگر مجموعه جواب یک نامعادلهٔ قدرمطلق به صورت (a, b) باشد، آن نامعادله را می‌توان به صورت $\left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}$ نوشت.

اگر $(2, 4)$ مجموعه جواب یک نامعادلهٔ قدرمطلق باشد، آن نامعادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left| x - \frac{4+2}{2} \right| < \frac{4-2}{2} \Rightarrow |x - 3| < 1$$

اگر مجموعه جواب یک نامعادلهٔ قدرمطلق به صورت $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ باشد، آن نامعادله را می‌توان به صورت $\left| x - \frac{a+b}{2} \right| > \frac{b-a}{2}$ نوشت.

اگر $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ مجموعه جواب یک نامعادلهٔ قدرمطلق باشد، آن نامعادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left| x - \frac{4+2}{2} \right| > \frac{4-2}{2} \Rightarrow |x - 3| > 1$$

برگرفته از کتاب درسی

۸۲- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\left| 1 + \frac{3x}{4} \right| \leq \frac{5}{4}$ شامل کدام عدد زیر نیست؟

$$\frac{\sqrt{5}}{4} \quad (4)$$

$$\frac{-\sqrt{5}}{4} \quad (3)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

برگرفته از کتاب درسی

۸۳- مجموعه جواب نامعادلهٔ $|2x + 1| > 5$ کدام است؟

$$\mathbb{R} - [-3, 2] \quad (4)$$

$$\mathbb{R} - (-3, 2) \quad (3)$$

$$[-3, +\infty) \quad (2)$$

$$[-3, 2] \quad (1)$$

۸۴- مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x^2 - x - 4| > 2$ شامل چند عدد صحیح نمی‌باشد؟

$$4 \quad (4) \text{ بی‌شمار}$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۸۵- مجموعه جواب کدام نامعادله نادرست بیان شده است؟

$$|x + 2| > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

$$|x + 5| \leq 0 \Rightarrow x = -5 \quad (3)$$

$$|x - 1| < -3 \Rightarrow x \in \emptyset \quad (2)$$

$$|x| > -2 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

۸۶- مجموعه جواب نامعادله $x^2 + x + 2 < |x - 2|$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - (-2, 1]$ (۲) $\mathbb{R} - [-2, 0]$ (۳) $\mathbb{R} - (-1, 2)$ (۴) $\mathbb{R} - [-1, 2]$

۸۷- مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{x^2 - 6x + 9} < 36$ ، بازه (a, b) است. در این صورت $\frac{b-a}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۳۶ (۴) ۳۹

۸۸- مجموعه جواب نامعادله $\frac{|2x-1|-5}{|5x+7|+6} \geq 0$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - (-2, 3)$ (۲) $\mathbb{R} - (-3, 2)$ (۳) $\mathbb{R} - [-2, 3]$ (۴) $\mathbb{R} - [-3, 2]$

۸۹- مجموعه جواب نامعادله $||x+3|-2| < 1$ کدام است؟

- (۱) $[-2, 0) \cup (-4, -2)$ (۲) $(-2, 0) \cup (-6, -4)$ (۳) $(4, 6) \cup (0, 2)$ (۴) $(-3, -2) \cup (-6, -3)$

۹۰- اگر نامعادله $|\frac{2x-4}{3x-2}| > 2$ به ازای تمام x های متعلق به بازه (a, b) برقرار باشد، بزرگ‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{4}{3}$

مشابه تجربی داخل ۹۵

برگرفته از کتاب درسی

۹۱- بازه $(\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$ ، مجموعه جواب کدام نامعادله زیر است؟

- (۱) $|12x+1| < 5$ (۲) $|12x+1| < 10$ (۳) $|6x+1| < 5$ (۴) $|-12x-1| > 5$

برگرفته از کتاب درسی

۹۲- مجموعه $(-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$ ، مجموعه جواب کدام نامعادله است؟

- (۱) $|x-5| < 2$ (۲) $|x-4| > 1$ (۳) $|x-5| > 2$ (۴) $|x-4| < 1$



خرید کتاب‌های کنکور

با تخفیف ویژه

و ارسال رایگان

Medabook.com



پاسخ تشریحی

$$(x-1)^2 = (1-\sqrt{3})^2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 1-\sqrt{3} \Rightarrow x = 2-\sqrt{3} \\ x-1 = -(1-\sqrt{3}) \Rightarrow x-1 = -1+\sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع جوابها} = (2-\sqrt{3}) + \sqrt{3} = 2$$

در یک معادله درجه دوم، پس از آنکه معادله به صورت $x^2 + bx = c$ درآمد، برای حل به روش مربع کامل باید $(\frac{b}{2})^2$ را به طرفین معادله اضافه کنیم. در این تست داریم:

$$x^2 + \frac{x}{4} = \frac{y}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow (\frac{b}{2})^2 = \frac{1}{64}$$

پس باید $\frac{1}{64}$ رو به طرفین معادله اضافه کنیم.

سؤال دانش پژوه (ناصر افته پاری): آقا جوابهای معادله چی میشن؟

پاسخ به به! درود بر تو! یعنی ناصر جان تو اونقدر درسفون شری که می‌فوی اضافه کاری کنی؟ ببین جوابها اصلاً مهم نیستند و ما اصلاً لازم نیست دنبال اون باشیم ولی آگه دوست داری می‌تونم با ادامه دادن روشن مربع کامل اون رو پیدا کنی که $\frac{-1 \pm \sqrt{113}}{8}$ میشن.

$$4x^2 + 5x - 3 = 0 \xrightarrow{+3} x^2 + \frac{5}{4}x = \frac{3}{4} \quad (*)$$

حال باید مربع نصف ضریب x را به طرفین معادله (*) اضافه کنیم.

$$\Rightarrow x^2 + \frac{5}{4}x + (\frac{5}{8})^2 = \frac{3}{4} + (\frac{5}{8})^2 \Rightarrow (x + \frac{5}{8})^2 = \frac{3}{4} + \frac{25}{64} \Rightarrow (x + \frac{5}{8})^2 = \frac{48+25}{64} = \frac{73}{64}$$

با مقایسه جواب فوق با معادله $(x+n)^2 = m$ داریم:

$$n = \frac{5}{8}, m = \frac{73}{64} \Rightarrow n + 8m = \frac{5}{8} + \frac{73}{8} = \frac{78}{8} = \frac{39}{4}$$

$$((1-x^2)^2 - 3)^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} (1-x^2)^2 - 3 = +6 \Rightarrow (1-x^2)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} 1-x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = -2 & \times \\ 1-x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 & \checkmark \end{cases} \\ (1-x^2)^2 - 3 = -6 \Rightarrow (1-x^2)^2 = -3 & \times \end{cases}$$

پس حاصل ضرب جوابهای معادله برابر $(-2)(2) = -4$ است.

راه اول: مسأله از ما ریشه مضاعف معادله $x(2x-5) = a$ را می‌خواهد. ابتدا معادله را به صورت $2x^2 - 5x - a = 0$ نوشته و سپس از فرمول

$$\text{ریشه مضاعف استفاده می‌کنیم:} \quad \text{ریشه مضاعف} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2(2)} = \frac{5}{4}$$

راه دوم:

$$x(2x-5) = a \Rightarrow 2x^2 - 5x - a = 0 \xrightarrow{\Delta = 0 \text{ شرط ریشه مضاعف}} \Delta = (-5)^2 - 4(2)(-a) = 0 \Rightarrow 25 + 8a = 0 \Rightarrow a = -\frac{25}{8}$$

حال با به دست آمدن $a = -\frac{25}{8}$ ، معادله $2x^2 - 5x - a = 0$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + \frac{25}{8} = 0 \xrightarrow{\times 8} 16x^2 - 40x + 25 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} (4x-5)^2 = 0 \Rightarrow 4x-5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

فرض کنید ریشه‌های معادله x_1 و x_2 باشند. اگر تفاضل آن‌ها برابر صفر باشد، داریم:

$$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$$

$$\xrightarrow{ax^2 - 12x + 9 = 0} (-12)^2 - 4(a)(9) = 0 \Rightarrow 144 - 36a = 0 \Rightarrow 36a = 144 \Rightarrow a = \frac{144}{36} = 4$$

با قراردادن $a = 4$ در معادله $ax^2 - 12x + 9 = 0$ داریم:

$$4x^2 - 12x + 9 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} (2x-3)^2 = 0 \Rightarrow 2x-3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

می‌دانیم اگر $b = a + c$ باشد، در این حالت یکی از ریشه‌ها -1 و دیگری $-\frac{c}{a}$ می‌باشد. در معادله داده شده، $a = 1$ می‌باشد و داریم:

$$b = c + 1 \xrightarrow{b=a+c} x = -1 \text{ یا } x = -\frac{c}{a} = -\frac{c}{1} = -c$$

سؤال ۹ دانش‌پژوه (شوراء هره‌ری): آقا این سؤال برای کنکور کمی آسون نبود؟

پاسخ درود بر مؤلفین تست‌های کنکور! ببین این تست مربوط به تکنورهای قریم پوره و شاید اون زمان فیلی‌ها این نکته‌ها رو راحت نمی‌دونستن. الان بپه‌ها به فز پند مورد فاص فیلی باهوش تر شدن!

وقتی که ضرایب معادله درجه دوم خیلی بزرگ می‌شوند احساسی به افراد دست می‌دهد که نکند کلکی در کار باشد. بهتر است جمع ضرایب را

با هم چک کنیم:

$$a + c + b = 150 - 148 - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{c}{a} = -\frac{148}{150} = -\frac{74}{75}$$

با توجه به ظاهر کج و معوج معادله، احتمالاً شما هم باید متوجه شده باشید که کلکی در کار است. مشخص است که حل تست از راه‌هایی مثل تجزیه یا حتی روش کلی، کار راحتی به نظر نمی‌رسد. بهتر است جمع ضرایب را امتحان کنیم:

$$a + c + b = (\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} - 1) + (-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \Rightarrow x = 1, x = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$$

بهتر است ریشه دوم را گویا کنیم:

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2 + 1 - 2\sqrt{2}}{2 - 1} = 3 - 2\sqrt{2}$$

مشخص است که $3 - 2\sqrt{2}$ از $\frac{1}{4}$ کم‌تر است، زیرا $\sqrt{2} = 1/4$ و لذا داریم:

$$3 - 2\sqrt{2} \approx 3 - 2(1/4) = 0/2 < \frac{1}{4} = 0/5$$

پس یکی از ریشه‌ها بزرگ‌تر از $\frac{1}{4}$ و دیگری کوچک‌تر از $\frac{1}{4}$ می‌باشد.

ابتدا بهتر است از عدد ۳ فاکتور بگیریم تا کار ساده‌تر شود:

$$6ax^2 - 3(a+1)x - 36 = 0 \Rightarrow 3(2ax^2 - (a+1)x - 12) = 0 \Rightarrow 2ax^2 - (a+1)x - 12 = 0$$

چون یکی از جواب‌های معادله $x = 3$ است، پس این جواب در معادله صدق می‌کند:

$$2ax^2 - (a+1)x - 12 = 0 \xrightarrow{x=3} 2a(3)^2 - (a+1)(3) - 12 = 0 \Rightarrow 18a - 3a - 3 - 12 = 0 \Rightarrow 15a - 15 = 0 \Rightarrow a = 1$$

با بازنویسی معادله به ازای $a = 1$ داریم:

$$2(1)x^2 - (1+1)x - 12 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 12 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - x - 6) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -2$$

پس جواب دیگر $x = -2$ می‌باشد.

تمام نکته کار این‌جاست که x^2 را به صورت $|x|^2$ بنویسید و سپس $|x|$ را u بگیرید:

$$x^2 - 5|x| - 14 = 0 \xrightarrow{|x|^2 = x^2} |x|^2 - 5|x| - 14 = 0 \xrightarrow{|x|=u} u^2 - 5u - 14 = 0$$

$$\Rightarrow (u-7)(u+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 7 \xrightarrow{u=|x|} |x| = 7 \Rightarrow x = \pm 7 \\ u = -2 \Rightarrow |x| = -2 \end{cases}$$

پس جواب‌های معادله ۷ و -۷ هستند و معادله دو جواب دارد.

فرض کنید ریشه مشترک دو معادله $x = k$ باشد. پس $x = k$ در هر دو معادله صدق می‌کند. داریم:

$$x = k \Rightarrow \begin{cases} k^2 + 2k + a = 0 \\ k^2 - k - 2a = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{طرفین دو تساوی را}} 3k + 3a = 0 \Rightarrow 3k = -3a \Rightarrow k = -a$$

پس ریشه مشترک دو معادله $x = -a$ می‌باشد. با قراردادن $x = -a$ در یکی از معادلات، مثلاً در معادله $x^2 + 2x + a = 0$ ، داریم:

$$x = -a \Rightarrow (-a)^2 + 2(-a) + a = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

چون طبق فرض سؤال $a > 0$ می‌باشد، پس $a = 0$ قابل قبول نیست. به ازای $a = 1$ داریم:

$$x^2 + 2x + a = 0 \xrightarrow{a=1} x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

مثل همیشه فرض کنید عدد موردنظر x باشد. ۴ برابر مربع عدد، $4x^2$ و ۱۲ برابر آن عدد، $12x$ می‌شود. طبق صورت تست داریم:

$$12x - 4x^2 = 9 \Rightarrow 0 = 4x^2 - 12x + 9 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} (2x-3)^2 = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

۱۴ دو قسمت حاصل از عدد ۲۴ را x و $24 - x$ می‌نامیم. طبق صورت سؤال داریم:

$$(24 - x)x = 143 \Rightarrow 24x - x^2 - 143 = 0 \xrightarrow{\text{مرتب‌سازی}} -x^2 + 24x - 143 = 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2 - 24x + 143 = 0 \\ \Rightarrow (x - 11)(x - 13) = 0 \Rightarrow x = 11 \text{ یا } x = 13 \Rightarrow \text{قدرمطلق اختلاف دو عدد} = |13 - 11| = 2$$

۱۵ دو عدد صحیح متوالی را k و $k + 1$ می‌گیریم. داریم:

$$k^2 + (k + 1)^2 = 925 \Rightarrow k^2 + k^2 + 2k + 1 = 925 \Rightarrow 2k^2 + 2k - 924 = 0 \xrightarrow{\div 2} k^2 + k - 462 = 0$$

درست است که k^2 ، ضریب ۱ دارد، ولی پیدا کردن دو عدد که حاصل ضربشان ۴۶۲ و جمعشان ۱ شود کار آسانی نیست و بهتر است بدون چونه زدن، سراغ روش دلتا برویم:

$$\Delta = 1 - 4(1)(-462) = 1 + 1848 = 1849$$

سؤال دانش‌پژوه (شاهرخ شهری): آقا جذرگیری از ۱۸۴۹ خیلی سخت‌تره که! بهتر نیست شانسون رو توی همون روش استفاده از اتحاد یک جمله مشترک امتحان می‌کردیم؟

پاسخ درود بر شانس! درود بر صبر ایوب! پسر یه کم وایسا تا من روشم رو بگم بعداً که بر بود تو تا صبح به شانس بر من لغت بفرست! ارامه‌ای رو ببین. می‌دانیم $40^2 = 1600$ و $50^2 = 2500$. پس جواب جذر که قاعدتاً عددی صحیح باید باشد بین ۴۰ و ۵۰ و عددی فرد است. (چون عدد زوج به توان ۲، عددی زوج می‌شود.) با توجه به این که عدد ۱۸۴۹ به ۱۶۰۰ نزدیک‌تر از ۲۵۰۰ بوده و آخر عدد ۹ شده و می‌دانیم 43^2 به عدد ۹ ختم می‌شود، پس احتمالاً $\sqrt{1849} = 43$.

$$\text{امتحان می‌کنیم:} \quad 43 \times 43 = 1849 \Rightarrow k = \frac{-1 \pm 43}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{42}{2} = 21 \Rightarrow k + 1 = 22 \Rightarrow (k) + (k + 1) = 21 + 22 = 43 \\ k = -\frac{44}{2} = -22 \Rightarrow k + 1 = -21 \Rightarrow (k) + (k + 1) = -43 \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها، چون عدد ۴۳ در گزینه‌ها وجود ندارد، ۴۳ بدبخت سوخته و گزینه (۲) انتخاب می‌شود.

۱۶ اگر یکی از اضلاع مستطیل را x و دیگری را y بگیریم، داریم:

$$2(x + y) = 54 \Rightarrow x + y = 27 \Rightarrow y = 27 - x \quad (*) \\ x(27 - x) = 180 \Rightarrow 27x - x^2 = 180 \Rightarrow x^2 - 27x + 180 = 0$$

سعی می‌کنیم به کمک روش اتحاد جمله مشترک دو عدد بیابیم که جمعشان ۲۷- و ضربشان ۱۸۰ شود. این دو عدد ۱۵- و ۱۲- هستند. پس داریم:

$$x^2 - 27x + 180 = 0 \Rightarrow (x - 12)(x - 15) = 0 \Rightarrow x = 12 \text{ یا } x = 15$$

$$\begin{cases} x = 12 \Rightarrow y = 27 - 12 = 15 \\ x = 15 \Rightarrow y = 27 - 15 = 12 \end{cases} \Rightarrow \text{در هر دو حالت، اختلاف طول و عرض} = 3 - 12 - 15 \text{ می‌شود.} \quad (*)$$

سؤال دانش‌پژوه (امیر بندلو): آقا همیشه بگید چطور ۱۵- و ۱۲- رو حدس زدین! آخه این همه عدد ...

پاسخ سؤال فوبی بود. ببین به خاطر ۱۸۰ بود که من این روش رو انتخاب کردم. چون باید جمع دو عدد ۲۷- و ضرب آن‌ها ۱۸۰ بشه، یکی از اعداد باید آفرش صفر یا ۵ باشه. فوب ۲۰- و ۷- یا ۲۵- و ۲- علی‌رغم این که جمعشون ۲۷- میشه ولی ضربشون ۱۸۰ نمیشه، پس ۱۵- و ۱۲- رو امتحان کردم و به جواب رسیدم. شاید آگه عدد ۱۸۰ نبود بهتر بود از روش Δ بریم.

۱۷ تا اسم مثلث قائم‌الزاویه به میان می‌آید، نام مرحوم فیثاغورس می‌درخشد. (البته شاید هم از دست بعضی‌ها در گور بلرزدا) مشخص است که ضلع بزرگ‌تر (وتر) برابر $2x + 1$ می‌باشد، پس طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$x^2 + (2x - 1)^2 = (2x + 1)^2 \Rightarrow x^2 + 4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(x - 8) = 0 \Rightarrow x = 8$$

اگر از این مطلب که طراح آن قدر ذوق نداشته که حتی $x = 8$ را در بین گزینه‌ها قرار دهد که شاید کسی به اشتباه بیفتد بگذریم، داریم:

$$\text{ضلع متوسط} = 2x - 1 = 2(8) - 1 = 15$$

۱۸ سن فعلی علی را x و سن فعلی پدرش را y فرض می‌کنیم. چون علی از پدرش ۲۰ سال کوچک‌تر است. پس $x = y - 20$. از طرفی ۶ سال دیگر، سن علی $x + 6$ و سن پدرش $y + 6$ می‌شود که طبق فرض، حاصل ضرب سن‌ها در آن موقع برابر ۳۰۰ است. پس:

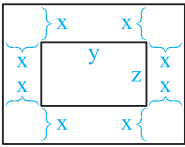
$$(x + 6)(y + 6) = 300 \xrightarrow{x = y - 20} (y - 20 + 6)(y + 6) = 300 \Rightarrow y^2 + 6y - 14y - 84 - 300 = 0 \Rightarrow y^2 - 8y - 384 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4(-384) = 64 + 1536 = 1600 \Rightarrow y = \frac{-(-8) \pm \sqrt{1600}}{2(1)} = \frac{8 \pm 40}{2} = \begin{cases} y = 24 & \checkmark \\ y = -16 & \times \end{cases}$$

پس $y = 24$ شده و لذا سن فعلی علی برابر $x = 24 - 20 = 4$ می‌شود.

۱۹

بزارید به شکل پراتون بگشیم که حسابی شیرفهم بشیر. فرض کنید:



$$\text{محیط قالی} = 12 \Rightarrow 2(y+z) = 12 \Rightarrow y+z = 6 \quad (*)$$

$$\text{محیط اتاق} = 20 \Rightarrow 2[(y+2x) + (z+2x)] = 20 \Rightarrow y+z+4x = 10 \xrightarrow{y+z=6} 6+4x = 10 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

هم چنین از رابطه (*) می توانیم Z را بر حسب Y بنویسیم:

$$y+z=6 \Rightarrow z=6-y \quad (**)$$

$$\text{مساحت اتاق} = 24 \Rightarrow (z+2x)(y+2x) = 24 \xrightarrow{x=1} (6-y+2)(y+2) = 24$$

$$\Rightarrow (8-y)(y+2) - 24 = 0 \Rightarrow 8y + 16 - y^2 - 2y - 24 = 0 \Rightarrow -y^2 + 6y - 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} y^2 - 6y + 8 = 0 \Rightarrow (y-4)(y-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=4 \xrightarrow{(**)} z=6-4=2 \\ y=2 \xrightarrow{(**)} z=6-2=4 \end{cases}$$

با توجه به این که Y طول قالی در نظر گرفته شده، $Y=4$ و $Z=2$ می باشند و داریم:

$$\text{مساحت قالی} = yz = 4 \times 2 = 8$$

| | |
|------------------|----------------|
| $\frac{x}{ax+b}$ | $\frac{-b}{a}$ |
| مخالفت علامت | موافق علامت |

جدول تعیین علامت عبارت $ax+b$ به صورت

۲۰

پس با توجه به جدول داده شده، $-\frac{3}{y}$ ریشه عبارت درجه اول بوده و چون سمت راست جدول موافق علامت a است، پس علامت ضریب X باید منفی باشد. تنها در گزینه های (۳) و (۴) ضریب X منفی است و از بین این دو گزینه $-\frac{3}{y}$ ریشه عبارت $3-7x$ می باشد. پس گزینه (۴) جواب است.

۲۱

با توجه به جدول تعیین علامت، a ریشه عبارت P می باشد. پس با قراردادن $x=a$ داریم:

$$2a(a) + a^2 - 27 = 0 \Rightarrow 2a^2 = 27 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

به ازای $a=3$ ، عبارت P به صورت $P=6x-18$ درمی آید و جدول تعیین علامت آن به صورت مقابل است:

| | |
|-----|---------------------|
| x | 3 |
| P | $- \quad \quad +$ |

به ازای $a=-3$ ، عبارت P به صورت $P=-6x-18$ درمی آید و جدول آن به صورت مقابل است:

| | |
|-----|---------------------|
| x | -3 |
| P | $+ \quad \quad -$ |

پس فقط به ازای $a=-3$ ، a جدول تعیین علامت به صورت جدول داده شده در صورت تست در می آید.سؤال دانش پژوه (تسبیه امیری): ببخشید چرا $a=3$ را قبول نکردید؟ به نظرم اونم درسته!

پاسخ نظر شما بسیار ممتنه ولی نادرسته! آگه به جدول صورت تست نگاه کنی، سمت چپ توی جدول مثبت ولی تو جدول ما برای $a=3$ سمت چپ منفیه. پس به ازای $a=3$ ما به جدول درست نمی رسیم.

۲۲

$$y = ax + b + \frac{x}{a} + a = (a+1)x + (b+a)$$

ابتدا عبارت داده شده را کمی مرتب می کنیم:

با توجه به جدول می فهمیم که اولاً $x=0$ ریشه معادله $(a+1)x + (b+a) = 0$ است. پس:

$$(a+1)(0) + (b+a) = 0 \Rightarrow b+a = 0 \Rightarrow a = -b \quad (**)$$

$$a+1 > 0 \Rightarrow a > -1 \quad (***)$$

ثانیاً: چون قبل از ریشه، علامت عبارت منفی است، پس ضریب X باید مثبت باشد:

$$a > -1 \xrightarrow{a=-b} -b > -1 \xrightarrow{\times(-1)} b < 1$$

با توجه به (*) و (***) داریم:

پس $a > -1$ و $b < 1$ است.

۲۳

با توجه به صورت سؤال وقتی نمودار f در بازه $[x_0, +\infty)$ بالاتر از خط قرار ندارد، پس نمودار f یا پایین تر از نمودار خط مفروض قرار دارد و یا هم ارتفاع با آن. به عبارت دیگر داریم:

$$f(x) \leq 3(x-1) \xrightarrow{f(x)=\frac{1}{3}x+2} \frac{1}{3}x+2 \leq 3x-3 \Rightarrow 2+3 \leq 3x-\frac{x}{3} \Rightarrow 5 \leq \frac{6x-x}{3} \xrightarrow{\times 3} 10 \leq 2\left(\frac{\Delta x}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 10 \leq \Delta x \xrightarrow{\div 5} 2 \leq x \text{ یا } x \in [2, +\infty) \Rightarrow \text{کمترین مقدار} = f(x_0 = 2) = \frac{1}{3}(2) + 2 = 3$$

۱ ۲۴

نکته اگر بازه (n, m) جواب نامعادله $\frac{ax+b}{cx+d} < 0$ یا $(ax+b)(cx+d) < 0$ باشد، آنگاه اولاً باید a و c (ضرائب x) هم‌علامت باشند، ثانیاً n و m ریشه‌های عبارات $ax+b$ و $cx+d$ هستند.

بازه $(-6, 1)$ ، مجموعه جواب نامعادله $\frac{3x+b}{ax-1} < 0$ است. پس طبق نکته بیان‌شده، 1 و -6 ریشه‌های عبارتهای $3x+b$ و $ax-1$ هستند. اما کدام عدد ریشه کدام عبارت است؟

پس دو حالت زیر را باید در نظر بگیریم:

$$\text{حالت (۱):} \begin{cases} \text{عدد } 1 \text{ ریشه } 3x+b \text{ باشد.} \\ \text{عدد } -6 \text{ ریشه } ax-1 \text{ باشد.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(1)+b=0 \Rightarrow b=-3 \\ a(-6)-1=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\text{حالت (۲):} \begin{cases} \text{عدد } 1 \text{ ریشه } ax-1 \text{ باشد.} \\ \text{عدد } -6 \text{ ریشه } 3x+b \text{ باشد.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1)-1=0 \Rightarrow a=1 \\ 3(-6)+b=0 \Rightarrow b=18 \end{cases}$$

از طرفی با توجه به نکته فوق، باید علامت ضرائب x در صورت و مخرج کسر یکسان باشد. چون ضریب x صورت کسر مثبت است، پس ضریب x مخرج هم باید مثبت باشد پس $a=1$ صحیح و $a=-\frac{1}{6}$ غلط است. بنابراین:

$$6a+b=6(1)+18=24$$

۳ ۲۵

$$\frac{4x+7}{2x-1} > 5 \Rightarrow \frac{4x+7}{2x-1} - 5 > 0 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک گیری}} \frac{4x+7-5(2x-1)}{2x-1} > 0 \Rightarrow \frac{4x+7-10x+5}{2x-1} > 0 \Rightarrow \frac{-6x+12}{2x-1} > 0$$

حال عبارت $P = \frac{-6x+12}{2x-1}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

| | | | |
|----------|---------------|-----|---|
| x | $\frac{1}{2}$ | 2 | |
| $-6x+12$ | + | + | - |
| $2x-1$ | - | + | + |
| P | - | + | - |

جواب

$$\begin{cases} -6x+12=0 \Rightarrow x=2 \\ 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین برای برقراری نامعادله فوق باید $\frac{1}{2} < x < 2$ باشد.

۲ ۲۶

راه اول: برای حل ابتدا عبارت سمت راست را به سمت چپ می‌بریم و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-3} \Rightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} > 0 \Rightarrow \frac{(x-3)-(x-1)}{(x-1)(x-3)} > 0 \Rightarrow \frac{x-3-x+1}{(x-1)(x-3)} > 0 \Rightarrow \frac{-2}{(x-1)(x-3)} > 0$$

حال با توجه به این‌که صورت کسر، عددی منفی است برای آن‌که کسر فوق، مثبت شود باید داشته باشیم:

$$(x-1)(x-3) < 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x=1, x=3$$

| | | | |
|--------------|-----|-----|---|
| x | 1 | 3 | |
| $x-1$ | - | + | + |
| $x-3$ | - | - | + |
| $(x-1)(x-3)$ | + | - | + |

جواب

(توجه کنید که در نامعادله $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-3}$ ، عبارات $\frac{1}{x-3}$ و $\frac{1}{x-1}$ در $x=3$ و $x=1$ تعریف نشده هستند.)

سؤال دانش‌پژوه (حسن بور بور): من برای حل، طرفین - وسطین کردم و به نامعادله $x-3 > x-1$ رسیدم.

پاسخ قبلی کار فطرتاکی کردی حسن! ما تو نامعادله‌ها حق نداریم عبارات رو طرفین - وسطین کنیم مگر در شرایطی که علامت هر دو عبارت کاملاً مشخص باشد. مثلاً یکیشون x^2+1 باشه که بگیریم همواره مثبت.

راه دوم (علی کنکوری): با امتحان کردن $x=0$ در نامعادله داده‌شده داریم:

$$\frac{1}{0-1} > \frac{1}{0-3} \Rightarrow -1 > -\frac{1}{3} \Rightarrow \text{نادرست}$$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۴) که مجموعه جواب آن‌ها شامل صفر است، جواب نیستند. به ازای $x=2$ داریم:

$$\frac{1}{2-1} > \frac{1}{2-3} \Rightarrow 1 > -1 \Rightarrow \text{درست}$$

گزینه (۳) نادرست و گزینه (۲) صحیح است. $\Rightarrow x=2$ در مجموعه جواب نامعادله هست. \Rightarrow درست $-1 > 1 \Rightarrow \frac{1}{2-1} > \frac{1}{2-3}$

۳ ۲۷

$$P = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} < 0$$

$$\begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 & \text{ریشه صورت} \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 & \text{ریشه صورت} \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 & \text{ریشه مخرج} \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 & \text{ریشه مخرج} \end{cases}$$

| x | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|-----|---|---|---|---|
| x-1 | - | + | + | + |
| x-2 | - | - | + | + |
| x-3 | - | - | - | + |
| x-4 | - | - | - | - |
| P | + | - | + | - |

جواب

$$\Rightarrow 1 < x < 2 \text{ یا } 3 < x < 4 = (1, 2) \cup (3, 4)$$

حال با توجه به این که گزینه (۳) به صورت (۳, ۴) می باشد، گزینه (۳) صحیح است.

$$-4x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \geq -2x - \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow -4x - \frac{4}{x} + 2x + \frac{1}{x} + 1 \geq 0 \Rightarrow -\frac{3}{x} + 1 \geq 0$$

۱ ۲۸

$$\Rightarrow \frac{x-3}{x} \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 3 & \\ \hline x-3 & - & - & + \\ \hline x & - & + & + \\ \hline P & + & - & + \end{array}$$

جواب

با توجه به شرط $x > 0$ در صورت سؤال، $x \geq 3$ یا به عبارتی $x \in [3, +\infty)$ جواب است.

۱ ۲۹

$$a_n = \frac{2n-7}{5n-14} < 0 \Rightarrow \begin{cases} 2n-7=0 \Rightarrow n=\frac{7}{2} & \text{ریشه صورت} \\ 5n-14=0 \Rightarrow n=\frac{14}{5} & \text{ریشه مخرج} \end{cases}$$

| n | ۷/۲ | ۱۴/۵ |
|-------|-----|------|
| 2n-7 | - | - |
| 5n-14 | - | + |
| 2n-7 | + | - |
| 5n-14 | - | + |

جواب

پس $\frac{14}{5} < n < \frac{7}{2} \Rightarrow 2/8 < n < 3/5$ چون $n \in \mathbb{N}$ ، این دنباله فقط یک جمله منفی به ازای $n=3$ دارد.

۲ ۳۰

$$P = \frac{m(m^2+m)}{m-2} > 0 \Rightarrow \frac{m^2(m^2+1)}{m-2} > 0$$

$$\begin{cases} m^2(m^2+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m^2=0 \Rightarrow m=0 & \text{عبارت نامنفی است} \\ m^2+1 \neq 0 & \text{عبارت همواره مثبت می باشد.} \end{cases} \\ m-2=0 \Rightarrow m=2 \end{cases}$$

| m | ۰ | ۲ |
|-------------------|---|---|
| m ² | + | + |
| m ² +1 | + | + |
| m-2 | - | - |
| P | - | + |

جواب

همواره نامنفی \rightarrow
همواره مثبت \rightarrow $\Rightarrow m > 2$

سؤال دانش پژوه (رومیثا مرآت): ببخشید آقا! می توانیم بگیریم چون صورت کسر $\frac{m^2(m^2+1)}{m-2}$ نامنفی پس برای این که کسر فوق

مثبت باشد، باید مخرج رو بزرگ تر از صفر بگیریم، یعنی: $m-2 > 0 \Rightarrow m > 2$ ، بعد دیگه جدول تعیین علامت نکشیم؟

پاسخ آره، اتفاقاً راه شما کوتاه تره.

۲ ۳۱

نکته ۱ همواره علامت عبارت هایی که توان زوج دارند، مانند $(x+2)^2$ و عبارت هایی که به صورت قدرمطلق هستند، مانند $|x+1|$ و عبارت هایی که زیر رادیکال با فرجه زوج هستند مانند $\sqrt{x+1}$ ، بزرگ تر یا مساوی صفر (نامنفی) هستند.

نکته ۲ وقتی یک عبارت با توان فرد در عبارتی دیگر ضرب شده است، توان فرد در تعیین علامت یک عبارت تأثیری ندارد. مثلاً تعیین علامت $(x+2)(x-1)^3$ همان تعیین علامت $(x+2)(x-1)$ می باشد.

بنابراین داریم:

$$P = \frac{x^5 |x+1|}{(x-1)^3 (x+2)^2} \Rightarrow \begin{cases} x^5=0 \Rightarrow x=0 \\ |x+1|=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

| x | -۲ | -۱ | ۰ | ۱ |
|--------------------|----|----|---|---|
| x ⁵ | - | - | - | + |
| x+1 | + | + | + | + |
| (x-1) ³ | - | - | - | + |
| (x+2) ² | + | + | + | + |
| P | + | + | + | - |

جواب

$\Rightarrow 0 < x < 1$

سؤال دانش‌پژوه (سعیده آزار): ببخشید! همیشه چون $(x+2)^2$ و $|x+1|$ همواره نامنفی‌اند، اونا رو اصلاً تو جدول ننویسیم و به

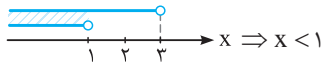
جاش $\frac{x^5}{(x-1)^3}$ رو تعیین علامت کنیم؟

پاسخ آره ولی هون اونارو نمی‌نویسی، باید هواسه به باهایی که صفر میشن باشه. در ضمن می‌تونن اصلاً $\frac{x}{x-1}$ رو تعیین علامت کنی.

هر کدام از نامعادلات را جداگانه حل نموده و سپس بین جواب‌های حاصل اشتراک می‌گیریم:

$$\frac{x}{2} < \frac{1}{2} + \frac{x}{3} \xrightarrow{\times 6} 6\left(\frac{x}{2}\right) < 6\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3}\right) \Rightarrow 3x < 3 + 2x \Rightarrow 3x - 2x < 3 \Rightarrow x < 3$$

$$\frac{x^2 - x}{2x - 2} + \frac{x^2 - x}{3x - 3} < \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{x(x-1)}{2(x-1)} + \frac{x(x-1)}{3(x-1)} < \frac{5}{6} \xrightarrow{x \neq 1} \frac{x}{2} + \frac{x}{3} < \frac{5}{6} \xrightarrow{\times 6} 3x + 2x < 5 \Rightarrow 5x < 5 \Rightarrow x < 1$$



پس جواب نهایی برابر است با:

ابتدا طرفین نامساوی $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3}$ را در -6 ضرب می‌کنیم که در این صورت جهت نامعادله عوض می‌شود؛ یعنی داریم:

$$-\frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3} \xrightarrow{\times (-6)} 3 > -6x \geq -4 \xrightarrow{+1} 4 > -6x + 1 \geq -3 \Rightarrow -3 \leq -6x + 1 < 4$$

بنابراین $(-6x + 1) \in [-3, 4)$.

$$2 \leq \frac{6-4x}{5} < 3 \xrightarrow{\times 5} 10 \leq 6-4x < 15 \xrightarrow{-6} 4 \leq -4x < 9 \xrightarrow{\div (-4)} -1 \geq x > -\frac{9}{4}$$

$$\Delta - 2x < \frac{\Delta - 7x}{2} < 3 + 4x \Rightarrow \begin{cases} 1) \Delta - 2x < \frac{\Delta - 7x}{2} \xrightarrow{\times 2} 10 - 4x < \Delta - 7x \Rightarrow 3x < -\Delta \Rightarrow x < -\frac{\Delta}{3} (*) \\ 2) \frac{\Delta - 7x}{2} < 3 + 4x \xrightarrow{\times 2} \Delta - 7x < 6 + 8x \Rightarrow -15x < 1 \xrightarrow{\div (-15)} x > -\frac{1}{15} (**) \end{cases}$$

پس جواب آخر، اشتراک جواب‌های (*) و (**) است که برابر \emptyset می‌شود.

$$x \in (-3, -2) \Rightarrow y_1 < y_2 \Rightarrow y_1 - y_2 > 0 \Rightarrow a(x+2)(x+3) - a'(x+2)(x+3) > 0$$

$$\Rightarrow (a - a')(x+2)(x+3) > 0 (*)$$

عبارت $(x+2)(x+3)$ را تعیین علامت می‌کنیم.

| | | | | |
|--------------------------|--------------|----|----|---|
| | x | -3 | -2 | |
| $x+2=0 \Rightarrow x=-2$ | $x+2$ | - | - | + |
| $x+3=0 \Rightarrow x=-3$ | $x+3$ | - | + | + |
| | $(x+2)(x+3)$ | + | - | + |

با توجه به جدول تعیین علامت در بازه $(-3, -2)$ ، عبارت $(x+2)(x+3)$ همواره منفی است. پس با توجه به (*) به ازای $x \in (-3, -2)$ داریم:

$$(a - a') > 0 \Rightarrow a - a' < 0 \Rightarrow a < a'$$

اگر به دنبال بازه (a, b) هستیم که در آن، نمودار عبارت $y = x^3 - 4x^2 - x + 4$ زیر محور x ‌ها قرار گیرد، پس باید ببینیم در کجا $y < 0$ می‌شود.

$$y = x^3 - 4x^2 - x + 4 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از اتحاد مزدوج}} y = (x-4)(x^2-1)(x+1)$$

حال عبارت را تعیین علامت می‌کنیم:

| | | | | |
|--------------------------|-------|----|---|---|
| | x | -1 | 1 | 4 |
| $x-4=0 \Rightarrow x=4$ | $x+1$ | - | + | + |
| $x-1=0 \Rightarrow x=1$ | $x-1$ | - | - | + |
| $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ | $x-4$ | - | - | + |
| | y | - | + | - |

همان‌طور که از جدول مشخص است y به ازای $x > -1$ ، در بازه $(1, 4)$ منفی می‌شود. (زیر محور x ‌ها قرار می‌گیرد.) لذا بیشترین

مقدار $b - a = 4 - 1 = 3$ می‌شود.

| | | |
|---|----|---|
| x | -2 | 2 |
| y | + | - |

از جدول مقابل متوجه می‌شویم که اولاً ریشه‌های معادله دو عدد قرینه هم 2 و -2 است. پس نمودار باید محور

x ‌ها را در 2 نقطه قرینه هم قطع کند. بنابراین گزینه‌های (2) و (4) غلطاند، زیرا محل‌های برخورد سهمی با محور

x ‌ها قرینه هم نیستند. ثانیاً چون علامت بین دو ریشه منفی و خارج دو ریشه مثبت است، پس نمودار سهمی در

محدوده بین ریشه‌ها باید زیر محور x ‌ها و در سایر نقاط بالای محور x ‌ها باشد، لذا گزینه (3) صحیح است.

۲ ۳۹

با توجه به جدول تعیین علامت متوجه می‌شویم که:

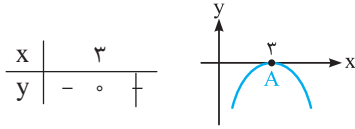
$$a(\circ)^2 + b(\circ) + c = \circ \Rightarrow \circ + \circ + c = \circ \Rightarrow c = \circ \quad (*)$$

(۱) معادله $ax^2 + bx + c = \circ$ ریشه مضاعف صفر دارد. پس:

$$b^2 - 4ac = \circ \stackrel{(*)}{\Rightarrow} b^2 - 4a(\circ) = \circ \Rightarrow b^2 = \circ \Rightarrow b = \circ$$

(۲) دلتای معادله $ax^2 + bx + c = \circ$ برابر صفر است. پس:(۳) چون علامت داخل جدول منفی است، پس ضریب x^2 منفی بوده یعنی $a < \circ$. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ با توجه به جدول داده‌شده به صورت مقابل است:

۴ ۴۰



همان‌طور که از نمودار مشخص است $x = 3$ طول رأس سهمی بوده (گزینه (۱) صحیح است) و نمودار بر محور x مماس بوده و همواره زیر آن قرار دارد (گزینه (۲) صحیح است) از طرفی نقطه $A(3, 0)$ رأس سهمی بوده که چون شاخه‌های نمودار رو به پایین است، عرض نقطه A یعنی صفر، بیشترین مقدار سهمی است. (گزینه (۳) صحیح است) اما با توجه به شکل، سهمی محور y را در بالای محور x اصلاً قطع نمی‌کند! پس گزینه (۴) غلط است.

۲ ۴۱

$$x^2 + 4 > 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 4 > \circ \Rightarrow (x - 2)^2 > \circ$$

اتحاد مربع دو جمله‌ای

نامعادله فوق به ازای همه مقادیر x به جز $x = 2$ برقرار است، بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

عبارت داده‌شده را تعیین علامت می‌کنیم. برای این منظور ابتدا ریشه‌ها را می‌یابیم:

۱ ۴۲

$$x^2 - 7x + 10 = \circ \Rightarrow (x - 5)(x - 2) = \circ \Rightarrow x = 5, x = 2$$

| | | |
|-------------------|-------|---|
| x | 2 | 5 |
| y = x^2 - 7x + 10 | + - | + |

با توجه به جدول تعیین علامت، y در بازه $[3, 5]$ منفی و در بازه $(5, +\infty)$ مثبت است. پس با افزایش x از ۳ تا $+\infty$ ، عبارت ابتدا منفی است و سپس مثبت می‌شود.

۴ ۴۳

$$f(x) > \frac{y}{x} \Rightarrow -\frac{1}{x}x^2 + 2x + 6 > \frac{y}{x} \stackrel{\text{همه}}{\Rightarrow} -x^2 + 4x + 12 > y \stackrel{\text{یه‌ور}}{\Rightarrow} \circ > y + x^2 - 4x - 12$$

$$\Rightarrow \circ > x^2 - 4x - 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 < \circ \Rightarrow (x - 5)(x + 1) < \circ$$

ریشه‌های عبارت $x^2 - 4x - 5$ با توجه به تجزیه فوق 5 و -1 هستند و ضریب x^2 مثبت است، پس جدول آن به صورت زیر است:

| | | | | |
|--------------|----|-------|---|----|
| x | -∞ | -1 | 5 | +∞ |
| x^2 - 4x - 5 | | + - | + | |

$$\xrightarrow[\text{می‌خواهیم}]{\text{منفی‌ها رو}} x \in (-1, 5) \Rightarrow a = -1, b = 5 \Rightarrow b - a = 5 - (-1) = 6$$

دقت: بازه $(-1, 5)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که در آن نامعادله $f(x) > \frac{y}{x}$ برقرار است. به عبارت دیگر نامعادله مذکور در هر بازه‌ای که زیرمجموعه بازه $(-1, 5)$ باشد نیز برقرار است مانند $(\frac{\circ}{a}, \frac{4}{b})$ یا $(\frac{1}{a}, \frac{2}{b})$... بنابراین a و b مقادیر مختلفی می‌توانند داشته باشند. بیشترین مقدار $b - a$ یعنی a و b از هم بیشترین فاصله ممکن را داشته باشند، پس باید بزرگ‌ترین بازه را انتخاب کنیم که همان $(-1, 5)$ است.

۲ ۴۴

$$n^2 - 10n + 16 < \circ; n^2 - 10n + 16 = \circ \Rightarrow (n - 8)(n - 2) = \circ \Rightarrow n = 2, n = 8$$

| | | |
|----------------|-------|---|
| n | 2 | 8 |
| n^2 - 10n + 16 | + - | + |

$$\Rightarrow 2 < n < 8 \Rightarrow n = 3, 4, 5, 6, 7$$

جواب

با توجه به جدول بالا در دنباله فوق، جملات a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 که پنج جمله می‌باشند، منفی هستند.

راه اول: ۴ ۴۵

$$P = \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x} + 1} > \circ; \begin{cases} x^2 - 2x = \circ \Rightarrow x(x - 2) = \circ \Rightarrow x = \circ, x = 2 \\ \sqrt{x} + 1 > \circ \Rightarrow \text{همواره برقرار است.} \end{cases}$$

| | | |
|-------------------------|-------|-------|
| x | 0 | 2 |
| x^2 - 2x | + - | + |
| √x + 1 | | + + |
| P = x^2 - 2x / (√x + 1) | | - + |

جواب

همواره مثبت \rightarrow

$\Rightarrow x > 2$

روش Δ'

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ هرگاه b عددی زوج باشد، به جای روش Δ می‌توان از روش Δ' استفاده نمود. استفاده از این روش سرعت محاسبه را بالا می‌برد. در این روش $b' = \frac{b}{2}$ بوده و داریم:

$$\Delta' = b'^2 - ac \Rightarrow x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}, \quad x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

مثال معادله $-x^2 + 8x + 48 = 0$ را به روش Δ' حل کنید.

$$b = 8 \Rightarrow b' = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \Delta' = b'^2 - ac = 16 - (-1)(48) = 16 + 48 = 64$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-4 + \sqrt{64}}{-1} = -4, \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{64}}{-1} = 12$$

پاسخ

$$\frac{n}{n^2+1} < 0/1 \Rightarrow \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{10} \xrightarrow{\text{چون طرفین نامعادله هر دو مثبت‌اند}} \frac{n^2+1}{n} > 10$$

با معکوس کردن آن‌ها جهت نامعادله عوض می‌شود.

$$\xrightarrow{\times n > 0} n^2+1 > 10n \Rightarrow n^2-10n+1 > 0; \quad n^2-10n+1 = 0 \xrightarrow{\text{زوج } b} \Delta' = \left(\frac{10}{2}\right)^2 - 1 = 24 \Rightarrow n = 5 \pm \sqrt{24}$$

Δ' روش

| | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| n | $5 - \sqrt{24}$ | $5 + \sqrt{24}$ |
| $n^2 - 10n + 1$ | + ↓ - | - ↓ + |

با توجه به این‌که n عددی طبیعی است و $4 < \sqrt{24} < 5$ ، لذا فقط می‌توان $n > 5 + \sqrt{24}$ را قبول کرد. در نتیجه:

$$n > 5 + \sqrt{24} \xrightarrow{\sqrt{24} = 4/...} n \geq 10 \Rightarrow \text{نخستین جمله مطلوب، جمله دهم است.}$$

$n \in \mathbb{N}$

راه اول: برای حل، عبارت سمت راست را به طرف دیگر می‌بریم و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x-1}{x+1} > 2x \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - 2x > 0 \Rightarrow \frac{x-1-2x(x+1)}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{x-1-2x^2-2x}{x+1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\underbrace{-2x^2 - x - 1}_P}{x+1} > 0; \quad \begin{cases} -2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(-2)(-1) = -7 \\ \text{با توجه به این‌که دلتای عبارت فوق منفی است و ضریب } x^2 \text{ یعنی عدد } (-2) \text{ نیز منفی است، این} \\ \text{عبارت همواره منفی است. بنابراین برای آن‌که کل کسر مثبت باشد باید مخرج کسر منفی باشد، یعنی:} \\ x+1 < 0 \Rightarrow x < -1 \end{cases}$$

| | | |
|-----------------|------|---|
| x | -1 | |
| $-2x^2 - x - 1$ | - | - |
| $x+1$ | - | + |
| P | + | - |

جواب $\Rightarrow x < -1$

سؤال؟ دانش‌پژوهان (بلال شریف‌زاده، رضا کاغذی، مسعود سهرهی): آقا، بریم از راه علی کنکوری حل کنیم؟

پاسخ؟ کنکور بیشتر فن و الان تو کنکور، بیشتر سؤال‌ها را بوری می‌دن که کم‌تر میشه این بوری بوابو پیدا کرد. ولی به قاطر این که شما فوب متویه این فن (فن علی کنکوری) شدید به نظر من باید ۳ امتیاز به قاطر اجرای فن و ۳ امتیاز هم به قاطر زیبایی اجرای فن بپتون بدن.

راه دوم (راه علی کنکوری): به ازای $x = -2$ در نامعادله داده شده داریم:

$$x = -2 \Rightarrow \frac{-2-1}{-2+1} > 2(-2) \Rightarrow 3 > (-4) \Rightarrow \text{درست} \Rightarrow x = -2 \text{ شامل } x = -2 \text{ است}$$

فقط گزینه (۱) است که در مجموعه جواب داده شده -2 را دارد.

برای حل ابتدا تمام جملات را به سمت چپ نامعادله می‌بریم:

$$\underbrace{(x+1)(x^2+2x-2)}_P - (x+1) > 0 \Rightarrow (x+1)[(x^2+2x-2)-1] > 0 \Rightarrow \underbrace{(x+1)(x^2+2x-3)}_P > 0$$

از $(x+1)$ فاکتور می‌گیریم.

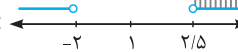
۲ ۶۶

برای آن که به ازای همه مقادیر x ، عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1 > 0$ باشد، باید $\Delta < 0$ (یا به طور مشابه $\Delta' < 0$) و ضریب x^2 مثبت باشد:

$$\begin{cases} m-1 > 0 \Rightarrow m > 1 \quad (I) \\ \Delta' < 0 \Rightarrow \frac{\Delta' = b'^2 - ac}{b' = \frac{b}{2}} \Rightarrow 3^2 - (m-1)(2m+1) < 0 \Rightarrow 9 - (2m^2 - m - 1) < 0 \\ \Rightarrow -2m^2 + m + 1 < 0 \end{cases}$$

ریشه‌ها: $m_1 = -2, m_2 = \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow -2m^2 + m + 1 < 0 \Rightarrow \frac{m}{-2m^2 + m + 1} \quad \begin{array}{c|c} -2 & \frac{5}{2} \\ + & - \end{array} \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > \frac{5}{2} \quad (II)$$

(I) \cap (II):  $\Rightarrow m > 2/5$

تذکره! چون ضریب x^2 ، بر حسب m است، باید وضعیت عبارت به ازای $m = 1$ نیز بررسی شود. به ازای $m = 1$ عبارت تبدیل به عبارت خطی $6x + 3$ می‌شود که همواره مثبت نیست.

۱ ۶۷

اگر نمودار همواره زیر محور x ها باشد، باید همواره $y < 0$ باشد. می‌دانیم اگر عبارت $y = ax^2 + bx + c$ همواره منفی باشد، آن‌گاه $a < 0$ و $\Delta < 0$ است. بنابراین:

$$(m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m < 0 \Rightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 3 - 4m(m-1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 3 - 4m^2 + 4m < 0 \end{cases} \quad (1)$$

پس کافی است ببینیم نامعادله $-4m^2 + 4m + 3 < 0$ به ازای کدام مقادیر m برقرار است و جواب این نامعادله را با $m < 1$ اشتراک بگیریم.

$$-4m^2 + 4m + 3 < 0 \Rightarrow \text{ریشه‌ها: } m = \frac{3}{2}, m = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m}{-4m^2 + 4m + 3} \quad \begin{array}{c|c} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ - & + \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{جواب} \\ \text{جواب} \end{array}$$

(2) مجموعه جواب: $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$

در نتیجه جواب نهایی به صورت زیر می‌شود:

$$(2) \cap (1) = [(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)] \cap (-\infty, 1) = (-\infty, -\frac{1}{2}) \Rightarrow m < -\frac{1}{2}$$

۴ ۶۸

اگر نمودار همواره بالای محور x ها باشد، باید همواره $y > 0$ باشد. می‌دانیم اگر عبارت $ax^2 + bx + c$ همواره مثبت باشد، آن‌گاه باید $\Delta < 0$ و $a > 0$ باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} a = m + 2 > 0 \Rightarrow m > -2 \\ \Delta' = m^2 - (m+2) < 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{m^2 - m - 2} \quad \begin{array}{c|c} -1 & 2 \\ + & - \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{جواب} \\ \text{جواب} \end{array}$$

ریشه‌ها: $m = -1, 2$

پس جواب نهایی برابر $\{m \mid m > -2\} \cap \{m \mid -1 < m < 2\} = \{m \mid -1 < m < 2\}$ می‌شود.

برای این که نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ بالای محور x ها و مماس بر آن باشد، باید $a > 0$ و $\Delta = 0$ باشد.

۳ ۶۹

$$y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow m - 2 > 0 \\ \Delta = 0 \Rightarrow 9 - 4(m-2)(m+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 2 \\ 9 - 4(m^2 - 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -4m^2 + 25 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m = \frac{5}{2}, m = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{5}{2}$$

۱ ۷۰

یادآوری عبارت $ax^2 + bx + c$ همواره مثبت و یا مساوی صفر است $(ax^2 + bx + c \geq 0)$ ، هرگاه داشته باشیم: $\Delta \leq 0$ و $a > 0$

چون عبارت $-x^2 - x - 1$ همواره منفی است (زیرا $\Delta = -3 < 0$ و $a = -1 < 0$)، حق طرفین - وسطین را داریم و جهت نامساوی را نیز تغییر

می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$\frac{mx^2 - \frac{m}{2}x - 3}{-x^2 - x - 1} \leq 3 \Rightarrow mx^2 - \frac{m}{2}x - 3 \geq 3(-x^2 - x - 1) \Rightarrow mx^2 - \frac{m}{2}x - 3 \geq -3x^2 - 3x - 3$$

$$\xrightarrow{\text{همه برن چپ}} mx^2 + 3x^2 - \frac{m}{2}x + 3x \geq 0 \Rightarrow (m+3)x^2 + (3 - \frac{m}{2})x \geq 0$$

حال برای آن‌که عبارت حاصل همواره مثبت یا مساوی صفر باشد، با توجه به یادآوری بیان شده باید دو شرط زیر هم‌زمان برقرار باشند:

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac = \left(3 - \frac{m}{2}\right)^2 - 4(m+3)(0) \leq 0 \Rightarrow \left(3 - \frac{m}{2}\right)^2 \leq 0 \xrightarrow[\text{ممکن است.}]{\text{فقط حالت تساوی}} \left(3 - \frac{m}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow 3 - \frac{m}{2} = 0 \Rightarrow \frac{m}{2} = 3 \Rightarrow m = 6 \\ a > 0 \Rightarrow m + 3 > 0 \Rightarrow m > -3 \end{cases}$$

که اشتراک دو جواب به دست آمده، $m = 6$ می‌باشد.

اگر نمودار f پایین‌تر از خط $y = 2$ باشد، یعنی باید داشته باشیم، $\frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} < 2$. داریم:

$$\frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 2x - 2(x^2 + 4)}{x^2 + 4} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 8}{(x^2 + 4)} < 0$$

| | | |
|--------------------------------|------|-----|
| x | -2 | 4 |
| $x^2 - 2x - 8$ | $+$ | $-$ |
| $x^2 + 4$ | $+$ | $+$ |
| $\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 4}$ | $+$ | $-$ |
| | جواب | |

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 4, x = -2$$

$$x^2 + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{معادله ریشه ندارد.}$$

بنابراین بازه $(-2, 4)$ جواب است، لذا بیشترین مقدار $b - a$ برابر $6 - (-2) = 8$ می‌شود.

معادله $2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0$ وقتی دارای دو ریشه حقیقی متمایز است، که $\Delta > 0$ باشد، بنابراین:

$$\Delta = a^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right)\left(a - \frac{3}{2}\right) > 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 3 > 0$$

حال باید عبارت $a^2 - 2a + 3$ را تعیین علامت کنیم:

$$a^2 - 2a + 3 = 0 \Rightarrow (a - 1)(a - 2) = 0 \Rightarrow a = 1, a = 2 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} a & 1 & 2 \\ \hline a^2 - 2a + 3 & + & - \end{array} \Rightarrow \text{گزینه (1) صحیح است.}$$

اگر منحنی درجه دوم f بخواهد محور x ها را در ۲ نقطه قطع کند، به عبارت دیگر بخواهد ۲ ریشه حقیقی متمایز داشته باشد، باید $\Delta > 0$ باشد. پس داریم:

$$\frac{a=m, b=4}{c=m-3} \Delta = 4^2 - 4(m)(m-3) > 0 \Rightarrow 16 - 4(m^2 - 3m) > 0 \xrightarrow{\div 4} 4 - m^2 + 3m > 0$$

$$\xrightarrow{\times (-1)} \frac{m^2 - 3m - 4}{(m-4)(m+1)} < 0 \xrightarrow{\text{ضریب مثبت}} \begin{array}{c|ccc} P & -\infty & -1 & 4 & +\infty \\ \hline & + & - & + & \end{array} \xrightarrow{\text{کجاها منفیه؟}} -1 < m < 4$$

از طرفی طبق فرض تست f ، تابعی درجه دوم است پس باید $m \neq 0$ باشد، لذا جواب $-1 < m < 4$ و $m \neq 0$ خواهد بود.

می‌دانیم شرط این‌که معادله درجه دوم دارای ریشه حقیقی باشد، این است که $\Delta \geq 0$ یا معادلاً هنگامی که ضریب x زوج است، $\Delta' \geq 0$.

$$\Delta' = \left(\frac{4}{2}\right)^2 - (m+2)(m-1) \geq 0 \Rightarrow 4 - (m^2 + m - 2) \geq 0 \Rightarrow -m^2 - m + 6 \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} m & -3 & 2 \\ \hline m^2 + m - 6 & + & - \end{array}$$

$$\xrightarrow{\times (-1)} m^2 + m - 6 \leq 0; \text{ حل معادله } m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow m = 2, m = -3$$

$$-3 \leq m \leq 2$$

دقت کنید! از آن‌جا که اگر ضریب x^2 صفر باشد، معادله داده‌شده در صورت مسأله، دیگر معادله درجه دوم نیست، لذا باید

ضریب x^2 یعنی $m + 2$ مخالف صفر باشد. بنابراین $m \neq -2$ و در نتیجه جواب نهایی به صورت $\{-3 \leq m \leq 2; m \neq -2\}$ می‌شود.

برای آن‌که معادله درجه دوم فاقد ریشه حقیقی باشد، باید $\Delta < 0$ باشد:

$$(m+1)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}m+2\right) < 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 - 4m - 16 < 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 15 < 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{array}{c|cc} m & -3 & 5 \\ \hline m^2 - 2m - 15 & + & - \end{array}$$

$$\Rightarrow -3 < m < 5$$

برای به دست آوردن طول محل تقاطع منحنی $y = (x-1)(x^2 - ax + a)$ با محور x ها، باید معادله $y = 0$ را حل کنیم.

$$(x-1)(x^2 - ax + a) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x^2 - ax + a = 0$$

با توجه به این‌که $x = 1$ قطعاً یک جواب معادله است، پس عبارت درجه دوم $x^2 - ax + a$ باید فاقد ریشه باشد تا

تنها یک ریشه داشته باشد. داریم:

$$x^2 - ax + a = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} a^2 - 4a < 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها: } a=0, a=4} \begin{array}{c|cc} a & 0 & 4 \\ \hline a^2 - 4a & + & - \end{array}$$

بنابراین $0 < a < 4$ باید باشد.

تذکره! به این نکته دقت کنید که اگر $x = 1$ ریشه مضاعف معادله $x^2 - ax + a$ باشد، در آن صورت باز هم y تنها در یک نقطه محور x ها را قطع می‌کند و باید a متناظر با این جواب را به دست آوریم. اما در این تست $x = 1$ ریشه معادله $x^2 - ax + a = 0$ نیست، زیرا به ازای $x = 1$ داریم: $x = 1 \Rightarrow 1^2 - a + a = 0 \Rightarrow 1 = 0$ غلط است. نمی‌تواند ریشه این معادله باشد. \Rightarrow غلط است.

سؤال دانش‌پژوه (مسعود سهرهی): آقا ما از این جریان $x = 1$ چیز زیادی متوجه نشدیم.

پاسخ باشه. به تست بعدی دقت کن.

$$(x^2 + bx + b) = 0 \Rightarrow x = -2, x^2 + bx + b = 0$$

۳ ۷۷

چون $x = -2$ ریشه معادله است، پس معادله $x^2 + bx + b = 0$ یا نباید ریشه داشته باشد یا این که $x = -2$ ریشه مضاعف آن باشد. اگر معادله ریشه نداشته باشد، داریم:

$$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4b < 0; b^2 - 4b = 0 \Rightarrow b = 0, b = 4$$

اما اگر $x = -2$ ریشه مضاعف معادله باشد، باید این ریشه در معادله $x^2 + bx + b = 0$ صدق کند. به ازای $x = -2$ داریم:

$$(-2)^2 + b(-2) + b = 0 \Rightarrow 4 - b = 0 \Rightarrow b = 4 \xrightarrow{b=4} x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0$$

بنابراین مجموعه جواب برابر است با: $(0 < b < 4) \cup \{b = 4\} \Rightarrow 0 < b \leq 4 \Rightarrow b \in (0, 4]$

سؤال دانش‌پژوه (سعیده آزار): همیشه بگید در حالت دوم چه اتفاقی افتاد؟ چه طور $b = 4$ هم جواب شد؟

پاسخ ببین، آکه $b = 4$ باشه داریم:

$$y = (x^2 + 4x + 4) = 3(x + 2)(x + 2) \Rightarrow y = 3(x + 2)^2$$

حالا قبول داری معادله $y = 3(x + 2)^2$ فقط در نقطه $x = -2$ محور x ها رو قطع می‌کنه؟

نقاط تقاطع دو منحنی از برابر قراردادن معادله‌های آن‌ها حاصل می‌شود، بنابراین حال که دو منحنی هیچ نقطه تقاطعی (مشترکی) ندارند، معادله حاصل از برابر قراردادن معادله آن‌ها نباید جوابی داشته باشد. داریم:

۴ ۷۸

$$-x^2 + 2x = mx + 4 \Rightarrow x^2 - 2x + mx + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + (m - 2)x + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{معادله نباید جواب داشته باشد}} (m - 2)^2 - 4(1)(4) < 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 - 16 < 0 \Rightarrow m^2 - 4m - 12 < 0$$

لذا $\Delta < 0$ است.

$$m^2 - 4m - 12 = 0 \xrightarrow{\text{حل معادله}} m = -2, m = 6 \Rightarrow \frac{m}{m^2 - 4m - 12} \mid \begin{array}{c} -2 \\ + \\ 6 \\ - \\ + \end{array} \Rightarrow -2 < m < 6$$

معادله حاصل از برابر قراردادن ضابطه‌های دو تابع نباید جوابی داشته باشد، لذا داریم:

۴ ۷۹

$$(2x + 1)(x + 8) = mx \Rightarrow 2x^2 + 17x + 8 - mx = 0$$

$$2x^2 + (17 - m)x + 8 = 0 \xrightarrow{\text{معادله جواب ندارد}} (17 - m)^2 - 4(2)(8) < 0 \Rightarrow 289 + m^2 - 34m - 64 < 0 \Rightarrow m^2 - 34m + 225 < 0$$

پس باید عبارت $m^2 - 34m + 225$ را تعیین علامت کنیم:

$$\Rightarrow m^2 - 34m + 225 = 0 \Rightarrow \Delta' = \left(\frac{-34}{2}\right)^2 - 225 = 289 - 225 = 64 \Rightarrow m = 17 + 8 = 25, m = 17 - 8 = 9$$

$$\frac{m}{m^2 - 34m + 225} \mid \begin{array}{c} 9 \\ + \\ 25 \\ - \\ + \end{array} \Rightarrow 9 < m < 25$$

سؤال دانش‌پژوه (شاهین راز): من معادله رو از راه Δ حل کردم ولی به دست آوردن جواب خیلی طول کشید.

پاسخ درود بر دلتا، ولی بهتره در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ وقتی که b زویه از روش Δ' که قبلاً اشاره شد، استفاده کنین.

توجه برای حل معادله $m^2 - 34m + 225 = 0$ می‌توان آن را به صورت $(m - 9)(m - 25) = 0$ نوشت. گرچه پیدا کردن دو عدد که حاصل جمع آن‌ها ۳۴ و حاصل ضربشان ۲۲۵ می‌شود دشوار است، اما گزینه‌ها این دو عدد را به ما معرفی می‌کنند! در بین گزینه‌ها تنها ۹ و ۲۵ هستند که مجموعشان ۳۴ می‌شود، پس می‌توان حدس زد که این دو عدد ۹ و ۲۵ باشند.

ابتدا مختصات رأس سهمی $y = x^2 + mx + 1$ را به دست می‌آوریم:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-m}{2} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادله}} y_S = \left(\frac{-m}{2}\right)^2 + m\left(\frac{-m}{2}\right) + 1$$

$$\Rightarrow y_S = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + 1 = \frac{-m^2}{4} + 1 = \frac{4 - m^2}{4}$$

با توجه به نمودار چون رأس سهمی در ربع سوم قرار دارد، پس $x_S < 0$ و $y_S < 0$. بنابراین:

$$x_S < 0 \Rightarrow \frac{-m}{2} < 0 \xrightarrow{\times(-2)} m > 0$$

$$y_S < 0 \Rightarrow \frac{4 - m^2}{4} < 0 \Rightarrow 4 - m^2 < 0 \Rightarrow \frac{m}{4 - m^2} \begin{array}{c|c} -2 & 2 \\ \hline - & + \end{array} \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > 2$$

حال بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$\Rightarrow \text{اشتراک: } m > 2$$

می‌خواهیم جواب نامعادله $\frac{x}{ax^2 + bx + c} > 0$ را بیابیم. با توجه به نمودار، جدول تعیین علامت زیر را رسم می‌کنیم:

| | | | |
|-----------------|------|-----|------|
| x | -1 | 0 | 4 |
| $ax^2 + bx + c$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| x | $-$ | $-$ | $+$ |
| x | $+$ | $-$ | $+$ |
| $ax^2 + bx + c$ | جواب | | جواب |

پس جواب نامعادله برابر $(-\infty, -1) \cup (0, 4)$ است که شامل سه عدد صحیح نامنفی ۱، ۲ و ۳ می‌باشد.

$$\left|1 + \frac{3x}{2}\right| \leq \frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq 1 + \frac{3x}{2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{7}{2} \leq \frac{3x}{2} \leq \frac{3}{2} \xrightarrow{\times \frac{2}{3}} -\frac{7}{3} \leq x \leq 1$$

از بین اعداد داده شده $1 > \frac{\sqrt{5}}{2}$ بوده و در بازه فوق نمی‌باشد.

$$|2x + 1| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 > 5 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2 \\ \text{یا} \\ 2x + 1 < -5 \Rightarrow 2x < -6 \Rightarrow x < -3 \end{cases}$$

با اجتماع گرفتن بین جواب‌های حاصل داریم:

$$\{x > 2\} \cup \{x < -3\} = \mathbb{R} - [-3, 2]$$

$$|x^2 - x - 4| > 2 \Rightarrow x^2 - x - 4 > 2 \text{ یا } x^2 - x - 4 < -2$$

حال هر کدام از نامعادلات فوق را جداگانه حل کرده و سپس بین جواب‌ها اجتماع می‌گیریم:

$$1) x^2 - x - 4 > 2 \Rightarrow x^2 - x - 6 > 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) > 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c} x & -2 & 3 \\ \hline x - 3 & - & - & + \\ x + 2 & - & + & + \\ \hline (x - 3)(x + 2) & + & - & + \end{array} \Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 3 \quad (*)$$

$$2) x^2 - x - 4 < -2 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c} x & -1 & 2 \\ \hline x - 2 & - & - & + \\ x + 1 & - & + & + \\ \hline (x - 2)(x + 1) & + & - & + \end{array} \Rightarrow -1 < x < 2 \quad (**)$$

حال برای محاسبه اجتماع دو جواب (*) و (**) از محور زیر استفاده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{اجتماع}} \text{جواب: } (-\infty, -2) \cup (-1, 2) \cup (3, +\infty)$$

جواب حاصل شامل اعداد صحیح $-2, -1, 2, 3$ نمی‌باشد.

بررسی گزینه‌ها:

۴ ۸۵

(۱) می‌دانیم $|x|$ همواره نامنفی است. پس همیشه از عدد منفی مانند -۲ بزرگ‌تر است. لذا مجموعه جواب نامعادله $|x| > -۲$ ، همهٔ اعداد حقیقی یعنی \mathbb{R} می‌شود.

(۲) عبارت $|x-۱|$ همواره نامنفی بوده و نمی‌تواند از یک عدد منفی مانند -۳ کوچک‌تر باشد، لذا مجموعه جواب نامعادله $|x-۱| < -۳$ تهی است.

(۳) عبارت $|x+۵|$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. پس در نامعادله $|x+۵| \leq ۰$ تنها حالت تساوی آن یعنی $|x+۵| = ۰$ می‌تواند رخ دهد که در این حالت $x = -۵$ می‌شود. پس:

$$|x+۵| \leq ۰ \Rightarrow |x+۵| = ۰ \Rightarrow x+۵ = ۰ \Rightarrow x = -۵$$

(۴) عبارت $|x+۲|$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. ما فقط x هایی را می‌خواهیم که به ازای آن‌ها $|x+۲| > ۰$ شود. پس جواب، همهٔ اعداد حقیقی می‌شود به جز $x = -۲$. زیرا به ازای $x = -۲$ ، عبارت $|x+۲|$ برابر صفر می‌شود که غلط است. پس:

$$|x+۲| > ۰ \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{-۲\}$$

لذا گزینهٔ (۴) جواب تست است.

۲ ۸۶

$$|x-۲| < x^2 + x + ۲ \Rightarrow \underbrace{-(x^2 + x + ۲)}_{(*)} < x - ۲ < \underbrace{x^2 + x + ۲}_{(**)}$$

حال هر کدام از نامعادله‌های (*) و (**) را جداگانه حل کرده و سپس بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$(*) : x - ۲ < x^2 + x + ۲ \Rightarrow x^2 + ۴ > ۰ \xrightarrow{\Delta = ۰^2 - 4(1)(4) = -۱۶ < ۰} \frac{x}{x^2 + ۴} \Big| \frac{+}{+} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$(**) : -(x^2 + x + ۲) < x - ۲ \Rightarrow -x^2 - x - ۲ < x - ۲ \Rightarrow ۰ < \underbrace{x^2 + ۲x}_{x(x+۲)}$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها: } ۰, -۲} \frac{x}{x^2 + ۲x} \Big| \frac{+}{+} \quad \frac{-۲}{-} \quad \frac{۰}{+} \Rightarrow x < -۲ \text{ یا } x > ۰$$

برای محاسبهٔ اشتراک جواب‌های دو نامعادله (*) و (**) از محور زیر استفاده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(**) \cap (*)} \xrightarrow{\text{محور}} x < -۲ \text{ یا } x > ۰ \Rightarrow x = \mathbb{R} - [-۲, ۰]$$

۳ ۸۷

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} < ۳۶ \Rightarrow \sqrt{(x-۳)^2} < ۳۶ \Rightarrow |x-۳| < ۳۶$$

$$\Rightarrow -۳۶ < x - ۳ < ۳۶ \xrightarrow{+۳} \underbrace{-۳۳}_a < x < \underbrace{۳۹}_b \Rightarrow \frac{b-a}{۲} = \frac{۳۹ - (-۳۳)}{۲} = \frac{۷۲}{۲} = ۳۶$$

در نامعادله $\frac{|۲x-۱|-۵}{|۵x+۷|+۶} \geq ۰$ عبارت مخرج کسر یعنی $|۵x+۷|+۶$ همواره مثبت است. پس برای آن‌که کل کسر مثبت یا صفر باشد، باید صورت کسر هم مثبت یا صفر باشد، داریم:

$$|۲x-۱|-۵ \geq ۰ \Rightarrow |۲x-۱| \geq ۵ \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۱ \geq ۵ \Rightarrow ۲x \geq ۶ \Rightarrow x \geq ۳ \\ \text{یا} \\ ۲x-۱ \leq -۵ \Rightarrow ۲x \leq -۴ \Rightarrow x \leq -۲ \end{cases}$$

پس مجموعه جواب برابر $\mathbb{R} - (-۲, ۳)$ است.

۲ ۸۹

$$||x+۳|-۲| < ۱ \Rightarrow -۱ < |x+۳|-۲ < ۱ \Rightarrow ۱ < |x+۳| < ۳$$

حال باید با دو قسمت کردن نامعادلهٔ فوق و در نهایت اشتراک‌گیری بین جواب‌های حاصل در هر قسمت، جواب نهایی را بیابیم.

$$|x+۳| > ۱ \Rightarrow \begin{cases} x+۳ > ۱ \Rightarrow x > -۲ \\ \text{یا} \\ x+۳ < -۱ \Rightarrow x < -۴ \end{cases} (*)$$

$$|x+۳| < ۳ \Rightarrow -۳ < x+۳ < ۳ \Rightarrow -۶ < x < ۰ (**)$$

با اشتراک‌گیری بین (*) و (**) داریم:

$$\{x > -۲ \text{ یا } x < -۴\} \cap \{-۶ < x < ۰\} = \frac{\text{محور}}{-۶ \quad -۴ \quad -۲ \quad ۰} = (-۲, ۰) \cup (-۴, -۴)$$

راه اول: ۲ ۹۰



$$|x| > a \xrightarrow{a > 0} x > a \text{ یا } x < -a$$

با توجه به یادآوری فوق داریم:

$$\left| \frac{2x-4}{3x-2} \right| > 2 \Rightarrow \frac{2x-4}{3x-2} > 2 \text{ یا } \frac{2x-4}{3x-2} < -2$$

حال کافی است هر کدام از نامعادله‌های حاصل را جداگانه حل نموده و بین جواب‌ها اجتماع بگیریم:

$$1) \frac{2x-4}{3x-2} > 2 \Rightarrow \frac{2x-4}{3x-2} - 2 > 0 \Rightarrow \frac{2x-4-2(3x-2)}{3x-2} > 0 \Rightarrow \frac{-4x}{3x-2} > 0 \xrightarrow{\text{با توجه به جدول تعیین علامت}} x \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$$

$$2) \frac{2x-4}{3x-2} < -2 \Rightarrow \frac{2x-4}{3x-2} + 2 < 0 \Rightarrow \frac{2x-4+2(3x-2)}{3x-2} < 0 \Rightarrow \frac{8x-8}{3x-2} < 0 \xrightarrow{\text{با توجه به جدول تعیین علامت}} x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله داده شده برابر $\left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right)$ می‌باشد. به عبارت دیگر نامعادله $\left| \frac{2x-4}{3x-2} \right| > 2$ به ازای تمام x ‌هایمتعلق به دو بازه $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ و $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ برقرار می‌باشد و چون طول بازه $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ بزرگ‌تر از طول بازه $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ می‌باشد، لذا با فرض $a = 0$ و $b = \frac{2}{3}$ ، به بزرگ‌ترین مقدار $b - a$ که برابر $\frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$ است، دست می‌یابیم.

راه دوم:



$$|x| > a \xrightarrow{a > 0} x^2 > a^2$$

با توجه به نکته فوق داریم:

$$\left| \frac{2x-4}{3x-2} \right| > 2 \Rightarrow \left(\frac{2x-4}{3x-2} \right)^2 > 2^2 \Rightarrow \frac{(2x-4)^2}{(3x-2)^2} > 4 \Rightarrow \frac{(2(x-2))^2}{(3x-2)^2} > 4 \Rightarrow \frac{4(x-2)^2}{(3x-2)^2} > 4$$

حال با فرض آن‌که $(3x-2)^2 \neq 0$ و در نتیجه $x \neq \frac{2}{3}$ ، طرفین نامعادله را در عبارت مثبت $(3x-2)^2$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \cancel{4}(x-2)^2 > \cancel{4}(3x-2)^2 \Rightarrow (x-2)^2 - (3x-2)^2 > 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} ((x-2) - (3x-2))((x-2) + (3x-2)) > 0$$

$$\Rightarrow (-2x)(4x-4) > 0 \Rightarrow -2x(4(x-1)) > 0 \Rightarrow -8x(x-1) > 0 \xrightarrow{\div(-8)} x(x-1) < 0 \xrightarrow{\text{با توجه به جدول تعیین علامت}} x \in (0, 1)$$

اما چون باید $x \neq \frac{2}{3}$ باشد، مجموعه جواب نامعادله برابر می‌شود با:

$$(0, 1) - \left\{ \frac{2}{3} \right\} \text{ یا } \left(0, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right)$$

ادامه حل مشابه روش اول است.

۱ ۹۱

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2} \xrightarrow{\substack{a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{3}}} \left| x - \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{2} \right| < \frac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \left| x - \frac{-3+2}{2} \right| < \frac{2+3}{2} \Rightarrow \left| x - \frac{-1}{2} \right| < \frac{5}{2} \Rightarrow \left| x + \frac{1}{2} \right| < \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{12x+1}{12} \right| < \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{|12x+1|}{12} < \frac{5}{2} \xrightarrow{\times 12} |12x+1| < 30$$

۲ ۹۲

$$(-\infty, \frac{3}{a}) \cup (\frac{5}{b}, +\infty) \Rightarrow \left| x - \frac{a+b}{2} \right| > \frac{b-a}{2} \Rightarrow \left| x - \frac{3+5}{2} \right| > \frac{5-3}{2} \Rightarrow |x-4| > 1$$

جمع بندی فصل چهارم

حل معادله درجه دوم به کمک روش کلی

با توجه به معادله $ax^2 + bx + c = 0$ داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac \xrightarrow{\Delta \geq 0} \text{جوابها } x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

نکته ۱ اگر در معادله فوق $a + b + c = 0$ باشد، بدون حل معادله می توان گفت یکی از جوابها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

نکته ۲ اگر در معادله فوق $a + c = b$ باشد، بدون حل معادله می توان گفت یکی از جوابها -۱ و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

دیدویی برای حل یک معادله درجه دوم، ابتدا باید دو نکته فوق را در مورد آن بررسی کنیم، اگر حل نشد، روش تجزیه و در نهایت اگر روش های فوق نتیجه نداد از روش کلی آن را حل کنیم. رعایت این ترتیب خیلی مهم است.

تعداد جوابهای معادله درجه دوم با توجه به علامت Δ

حالت های مختلف معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با توجه به علامت $\Delta = b^2 - 4ac$ ، به صورت زیر است:

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ معادله ریشه حقیقی ندارد **۳** $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ معادله، یک ریشه مضاعف دارد **۲** $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ معادله دو ریشه متمایز حقیقی دارد **۱**

وضعیت نمودار توابع f و g نسبت به هم

نمودار توابع f و g نسبت به هم سه حالت زیر را دارند:

۱ هم دیگر را قطع نمی کنند (هیچ اشتراکی با هم ندارند). در این حالت معادله $f = g$ ریشه ندارد.

۲ هم دیگر را قطع می کنند (با یکدیگر در یک یا چند نقطه اشتراک دارند). در این حالت معادله $f = g$ ، یک یا چند ریشه دارد.

۳ بر هم مماس هستند در این حالت معادله $f = g$ ریشه مضاعف دارد.

مثال حدود m را طوری تعیین کنید که معادله خطهای $y = x + m$ و $y = x^2 - 2x$ هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند.

پاسخ خودمانیم! خوب وقتی می گویند هیچ نقطه مشترکی ندارند، یعنی معادله تقاطع دو تابع نباید ریشه داشته باشد. پس ابتدا معادله تقاطع را تشکیل داده و سپس شرط ریشه نداشتن معادله را اعمال می کنیم:

$$\begin{cases} y_1 = x + m \\ y_2 = x^2 - 2x \end{cases} \xrightarrow{y_1 = y_2} \text{معادله تقاطع} \rightarrow x^2 - 2x = x + m \Rightarrow x^2 - 3x - m = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{شرط ریشه نداشتن} \rightarrow (-3)^2 - 4(1)(-m) < 0 \Rightarrow 9 + 4m < 0 \Rightarrow m < -\frac{9}{4}$$

چند نکته مهم:

۱ محل برخورد تابع f با محور x ها از حل معادله $f(x) = 0$ به دست می آید. مختصات هر نقطه روی محور x ها به صورت $(k, 0)$ می باشد.

۲ محل برخورد تابع f با محور y ها با قراردادن $x = 0$ در تابع $f(x)$ به دست می آید. مختصات هر نقطه روی محور y ها به صورت $(0, k)$ می باشد.

۳ اگر مختصات نقطه ای در ضابطه $y = f(x)$ صدق کند، آن گاه آن نقطه روی نمودار تابع $f(x)$ قرار دارد. مثلاً نقطه $A(1, 3)$ روی نمودار تابع

$$f(x) = x^2 + x + 1 \text{ قرار دارد، زیرا } f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

۴ اگر $A(x_A, y_A)$ محل تقاطع نمودار دو تابع f و g باشد، آن گاه مختصات این نقطه در ضابطه هر دو تابع صدق می کند.

۵ معادله نیمساز ربع اول و سوم به صورت $y = x$ و نیمساز ربع دوم و چهارم به صورت $y = -x$ می باشد.

مثال نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 3x + 2$ در چه نقاطی محورهای مختصات را قطع می‌کند؟ در چه نقاطی نیمساز ربع سوم را قطع می‌کند؟

پاسخ برای یافتن محل برخورد با محور x ها، باید معادله زیر را حل کنیم:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = 2 \Rightarrow \text{نقاط برخورد با محور } x \text{ها: } (1, 0), (2, 0)$$

برای یافتن محل برخورد با محور y ها باید به جای x در ضابطه تابع صفر قرار دهیم:

$$f(0) = 0^2 - 3(0) + 2 = 2 \Rightarrow \text{محل برخورد با محور } y \text{ها: } (0, 2)$$

برای یافتن محل تقاطع با نیمساز ربع سوم، باید معادله $x^2 - 3x + 2 = x$ را حل کنیم. دقت کنید در ربع سوم $x < 0$ می‌باشد. داریم:

$$x^2 - 3x + 2 = x \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{حل معادله}} x = 2 \pm \sqrt{2}$$

در ربع سوم $x < 0$ می‌باشد، اما هر دو مقدار $2 + \sqrt{2}$ و $2 - \sqrt{2}$ بزرگتر از صفر هستند. پس نمودار این تابع با نیمساز ربع سوم تقاطع ندارد.

← نامعادله و تعیین علامت

نامعادله درجه اول: روش حل: در این حالت اعداد را به یک سمت و متغیر را به سمت دیگر می‌بریم و آن را حل می‌کنیم.

$$\text{مثلاً: } 5x - 7 < 2 + x \Rightarrow 5x - x < 2 + 7 \Rightarrow 4x < 9 \Rightarrow x < \frac{9}{4}$$

نامعادله درجه دوم: روش حل: در این حالت ابتدا همه عبارات را به یک سمت آورده و پس از ساده‌سازی و به دست آوردن ریشه‌ها، به کمک جدول تعیین علامت، جواب را می‌یابیم. جدول تعیین علامت عبارت درجه دوم $P = ax^2 + bx + c$ به ضرب x^2 یعنی a وابسته بوده و بر حسب علامت Δ به یکی از صورت‌های زیر است:

| | | |
|-----|-----------------|-----------------|
| x | x_1 | x_2 |
| P | موافق علامت a | مخالف علامت a |

($\Delta > 0$; ریشه‌ها x_1 و x_2 که $x_1 < x_2$)

| | |
|-----|-----------------|
| x | $x_1 = x_2$ |
| P | موافق علامت a |

($\Delta = 0$; ریشه مضاعف)

| |
|-----|
| x |
| P |

($\Delta < 0$; ریشه حقیقی نداریم.)

مثال نامعادله $x^2 + x < 2$ را حل کنید.

پاسخ

$$x^2 + x < 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 < 0 \xrightarrow{\substack{x_1 = -2, x_2 = 1 \\ a > 0}} \frac{x}{x^2 + x - 2} \left| \begin{array}{c} -2 \\ 1 \end{array} \right. \Rightarrow \text{مجموعه جواب: } -2 < x < 1$$

نکته عبارات دارای **توان زوج** یا **قدرمطلق**، مانند $|x-1|$ و $(x-3)^4$ همواره **نامنفی** هستند.

روش حل نامعادلات کسری گویا: برای حل این نوع مسائل، ابتدا تمام عبارات را به یک سمت آورده و پس از مخرج مشترک گرفتن و ساده‌سازی به یک کسر می‌رسیم. حال با تعیین علامت عبارات صورت و مخرج و در نهایت علامت خود کسر، جواب را می‌یابیم.

$$\text{مثلاً: } \frac{x^2 - 6}{x} \leq -1 \xrightarrow{\substack{\text{همه را به} \\ \text{یک سمت می‌بریم.}}} \frac{x^2 - 6}{x} + 1 \leq 0 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک می‌گیریم}} \frac{(x+3)(x-2)}{x} \leq 0$$

| | | | |
|---------------|------|-----|-----|
| x | -3 | 0 | 2 |
| $x^2 + x - 6$ | + | - | - |
| x | - | - | + |
| P | - | + | - |

ریشه‌های صورت: $x = -3$ و $x = 2$
ریشه مخرج: $x = 0$

$\Rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup (0, 2)$

فرار از اشتباه: در حل نامعادلات حق طرفین - وسطین **نداریم**، مگر این‌که علامت عبارتهای مخرج دو طرف همواره معلوم باشد. مثلاً اگر $\frac{1}{x-2} > \frac{1}{x-1}$ غلط است که بگوییم $x-1 > x-2$.

دیدویژه از کلمات نترسید! بعضاً در برخی سؤالات تعیین علامت، طراحان کنکور صورت سؤال را به شکل پیچیده‌تری مطرح می‌کنند. مثلاً می‌گویند «اگر تابع f پایین‌تر از تابع g نباشد»، این عبارت، یعنی f همه‌جا بالاتر یا نهایتاً مساوی g است. در واقع، به زبان ریاضی یعنی $f \geq g$.

← معادلات و نامعادلات قدرمطلق خاص

📺 **پادآوری** قدرمطلق x به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

حالت‌های مهم معادلات و نامعادلات قدرمطلق:

$$|u| = a \stackrel{a \geq 0}{\implies} u = \pm a$$

مثلاً: $|x-1| = 2 \implies x-1 = \pm 2 \implies x = 3, -1$

$$|u| \leq a \stackrel{a \geq 0}{\implies} -a \leq u \leq a$$

مثلاً: $|x-2| \leq 4 \implies -4 \leq x-2 \leq 4 \implies -2 \leq x \leq 6$

$$|u| \geq a \stackrel{a \geq 0}{\implies} u \geq a \text{ یا } u \leq -a$$

مثلاً: $|x| \geq 2 \implies x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2$

📺 **دیدویژه** خواص ذکرشده در بالا حتی اگر به صورت مجزا در خود این بخش مورد سؤال واقع نشوند، در بخش‌های دیگر خیلی به کار می‌روند.

← حل نامعادلات قدرمطلق در حالت کلی

| روش ویژه حل نامعادله قدرمطلق در حالت کلی | مثال: نامعادله $ x-5 > 7$ را حل کنید. |
|--|---|
| (۱) ریشه‌یابی: ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها را بیابید. | $x-5=0 \implies x=5$ |
| (۲) بازبندی: با توجه به ریشه‌ها، بازبندی مناسب را انجام دهید. | $\begin{cases} x \geq 5 \\ x < 5 \end{cases}$ |
| (۳) تعیین علامت: با توجه به بازه‌ها، عبارات داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت کرده و قدرمطلق‌ها را برمی‌داریم. سپس نامعادلات را در هر بازه، جداگانه حل می‌کنیم. | $\begin{cases} \text{(I): } x \geq 5 \xrightarrow{ x-5 =x-5} 3x + (x-5) > 7 \implies 4x > 12 \implies x > 3 \quad (*) \\ \text{(II): } x < 5 \xrightarrow{ x-5 =-(x-5)} 3x - (x-5) > 7 \implies 2x > 2 \implies x > 1 \quad (**) \end{cases}$ |
| (۴) اشتراک و سپس اجتماع: جواب‌های به دست آمده در هر بازه را با بازه ابتدایی اشتراک می‌گیریم. در نهایت بین جواب‌های حاصل اجتماع می‌گیریم. | $\begin{aligned} \text{(I)} \cap (*) &\implies \{x \geq 5\} \cap \{x > 3\} \implies x \geq 5 \\ \text{(II)} \cap (**) &\implies \{x < 5\} \cap \{x > 1\} \implies 1 < x < 5 \end{aligned}$ <p style="text-align: center;">اجتماع $\implies x > 1$</p> |

📌 **تذکر** برای حل معادلات قدرمطلق در حالت کلی نیز مانند نامعادلات قدرمطلق، چهار مرحله فوق را طی کرده و جواب را می‌یابیم.

📺 **دیدویژه** یک نکته بسیار مهم! تا الان همه تست‌های کنکور مربوط به این بخش، با عددگذاری قابل حل بوده‌اند! تسلط در عددگذاری برای بچه‌های متوسط و حتی قوی خیلی خوب است.