خرید کتاب های کنکور
با تخفیف ویژه
و
ارسال رایگان
Medabook.com
مدابوک
دریافت برنامه ریزی و مشاوره
از مشاوران رتبه برتر
موسسه کنکوری آیدی نوین
۰۲۱ ۲۸۴۲۵۴

کتاب کنکور

ریاضی پایا جامع

(دهم . یازدهم . دوازدهم)

از مجموعه **مرشد**

رشته علوم تجربی

حمیدرضا بیات

سعید بیاتی

مرتضی خمامی ابدی

کیان کریمی خراسانی

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمه

به‌نام خداوند جان و خرد

کزین برتر اندیشه برنگذرد

دانش‌آموزان عزیز، داوطلبان کنکور

نظام آموزشی بار دیگر تغییر کرد، به سال پایانی خود یعنی کلاس دوازدهم رسید و نگرانی‌ها آغاز شد! ما هم به سهم خود در انتشارات مبتکران تلاش می‌کنیم نگرانی‌های شما را با تألیف و انتشار کتاب‌های مناسب کاهش دهیم. مخصوصاً نگرانی‌های آن دسته از دانش‌آموزان که اصرار دارند رتبه‌های عالی را در کنکور سراسری به‌دست آورند و در بهترین رشته‌ها و بهترین دانشگاه‌ها پذیرفته شوند. اگر شما جزو این دسته از افراد هستید که به رتبه پایین راضی نمی‌شوید مطالعه «**کتاب‌های کنکور مرشد**» را از دست ندهید.

تغییرات کتاب‌های ریاضی نظام جدید آن‌چنان فاحش است که عملاً کتاب‌های کنکور گذشته قابل استفاده نیست. برای تألیف کتاب «**ریاضی جامع پایا**» از مجموعه «**مرشد**» مؤلفان محترم، کتاب‌های نظام جدید را با کتاب‌های نظام قدیم خط به خط مطابقت داده‌اند و مفاهیمی را که حذف و اضافه شده‌اند با دقت فراوان استخراج کرده‌اند. این حذف‌ها و اضافه‌ها نشان می‌دهند که نظام جدید از روی چه نکاتی تأکید خود را برداشته و بر چه نکاتی تأکید بیشتری می‌کند و نگرش طراحان سؤالات کنکور آینده چگونه خواهد بود.

در این کتاب تجربه چندین ساله مؤلفان و دقت نظر آنها را در تشخیص تغییر نگرش طراحان نظام آموزشی، در انتخاب تست از کنکورهای قدیمی و تألیف تست‌های جدید مشاهده خواهید کرد.

مؤلفان «**ریاضی جامع مرشد**»، پس از ارائه درس‌نامه، بانک سؤال کاملی را در اختیار شما قرار می‌دهند که شامل پرسش‌های چهارگزینه‌ای کنکور، مسائل معتبر ریاضی و پرسش‌های تألیفی است. این پرسش‌ها به فصل‌ها و بخش‌های مختلف طبقه‌بندی شده‌اند. مطالعه پاسخ‌نامه تشریحی همراه با نکته‌های کلیدی و آموزنده، موفقیت شما را در کنکور تسهیل خواهد کرد.

در پایان وظیفه خود می‌دانیم از مؤلفان محترم این کتاب، آقایان:

حمیدرضا بیات، سعید بیاتی، مرتضی خمامی ابدی و کیان کریمی خراسانی و دبیر محترم مجموعه مهندس هادی عزیززاده که کتاب زیر نظر ایشان تألیف شده است، سپاسگزاری کنیم.

همچنین از خانم‌ها سپیده خداوردی (حروفچین و صفحه‌آرا)، نسرین صفری، بهاره خدامی (گرافیست‌ها) و مینا هرمزی (طراح جلد) بسیار سپاسگزاریم و برای همهٔ این عزیزان آرزوی موفقیت می‌کنیم.

انتشارات مبتکران

فهرست

فصل اول:
تابع

مقدمات تابع

زوج مرتب

- به دوتایی مانند (a,b) یک زوج مرتب می‌گویند.
- a مؤلفهٔ اول و b مؤلفهٔ دوم است.
- $(a,b) \neq (b,a)$ به عبارتی ترتیب مهم است.
- اگر $(a,b)=(c,d)$، آنگاه $a=c$ و $b=d$ است.

تست: **اگر زوج مرتب $(۲a+۲b\ ,\ ۷a-۴)$ با زوج مرتب $(۱۰,۳)$ برابر باشد، حاصل ab کدام است؟**

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

$$(۲a+۲b,۷a-۴)=(۱۰,۳) \Rightarrow \begin{cases} ۷a-۴=۳ \\ ۲a+۲b=۱۰ \end{cases} \Rightarrow a=۱\ ,\ b=۴ \Rightarrow ab=۴$$

رابطه

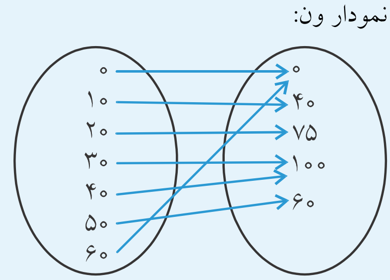
- خیلی از پدیده‌های اطراف ما با یکدیگر ارتباط دارند. برای مثال پدیدهٔ رشد با زمان در ارتباط است.
- این رابطه‌ها را می‌توان با مجموعه ای از زوج‌های مرتب، جدول، نمودار ون یا نمودار مختصاتی نمایش داد.

مثال: **جدول زیر ارتفاع پرواز یک پرنده از سطح زمین را در طی ۱ دقیقه نشان می‌دهد. این رابطه را با زوج‌های مرتب، نمودار ون و نمودار مختصاتی نشان دهید.**

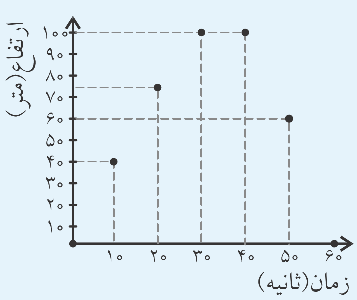
زمان (ثانیه)	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰
ارتفاع (متر)	۰	۴۰	۷۵	۱۰۰	۱۰۰	۶۰	۰

پاسخ: زوج مرتب: $\{(۰,۰),(۱۰,۴۰),(۲۰,۷۵),(۳۰,۱۰۰),(۴۰,۱۰۰),(۵۰,۶۰),(۶۰,۰)\}$

نمودار ون:



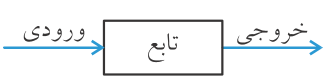
نمودار مختصاتی:



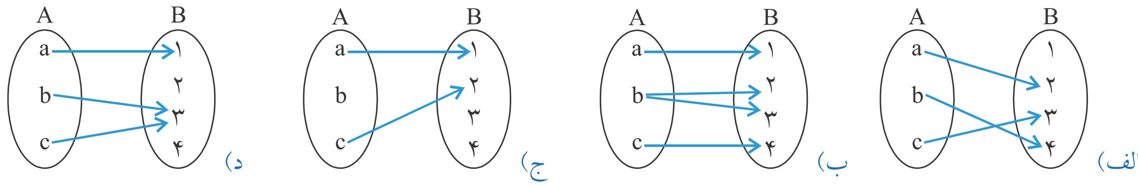
مفهوم تابع

تعریف: یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نظیر می‌شود.

نکته: تابع به عنوان ورودی و خروجی: **به عبارتی اگر عضوی که از A انتخاب می‌شود را «ورودی» بنامیم و عضوی که از B انتخاب می‌شود را «خروجی» بنامیم. زمانی یک رابطه، تابع است که به ازای یک ورودی فقط یک خروجی وجود داشته باشد.**



تست: چند تا از نمودارهای زیر یک تابع از A به B را مشخص می‌کند؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته: روش تشخیص تابع بودن از روی نمودار ون: **اگر از یک عنصر از مجموعهٔ اولی (دامنه) به‌مجموعهٔ دوم (بُرد) دو پیکان یا بیش‌تر خارج شود یا پیکانی خارج نشده باشد، آن رابطه تابع نیست.**

گزینهٔ (الف) تابع هست چون از هر عضو مجموعهٔ اول دقیقاً یک پیکان خارج شده است.
گزینهٔ (ب) تابع نیست چون از b دو پیکان خارج شده است.
گزینهٔ (ج) تابع نیست چون از b پیکانی خارج نشده است.
گزینهٔ (د) تابع هست چون از هر عضو مجموعهٔ اول دقیقاً یک پیکان خارج شده است.

نکته: تابع به عنوان زوج مرتب: **اگر یک رابطه به صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این مجموعه تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مؤلفهٔ اول برابر نباشند.**

برای مثال رابطهٔ A تابع است و رابطهٔ B تابع نیست. $A=\{(۱,۲),(۳,۴),(۵,۴)\}$

وجود زوج‌های مرتب $(۱,۲)$ و $(۱,۳)$ نشان می‌دهد که B تابع نیست $B=\{(۱,۲),(۳,۴),(۵,۴),(۱,۳)\} \Rightarrow$

مثال: a را طوری به‌دست آورید که رابطهٔ $A=\{(۱,۲),(۳,۲a),(۳,a-۷)\}$ تابع باشد.

پاسخ:

$$\left.\begin{matrix}(۳,۲a)\\(۳,a-۷)\end{matrix}\right\} \Rightarrow ۲a=a-۷ \Rightarrow a=-۷$$

تست: اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۲,۳,۴\}$ در این صورت چند تا از روابط زیر تابعی از A به B می‌باشد؟

الف) $f_۱=\{(۱,۲),(۳,۳)\}$ ب) $f_۲=\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۲)\}$ ج) $f_۳=\{(۱,۳),(۲,۴),(۱,۲)\}$

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

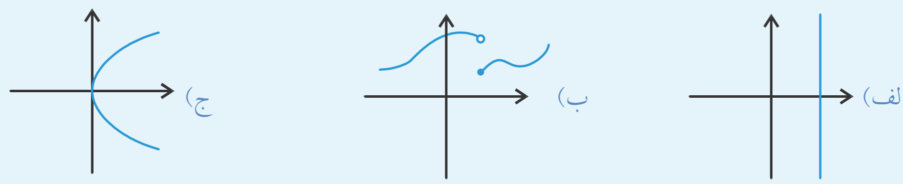
پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته: روش تشخیص تابع بودن از روی زوج مرتب: **اگر تک تک اعضای دامنه در مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها وجود نداشته باشند و یا اینکه مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب یکسان باشد ولی مؤلفه‌های دوم یکسان نباشد، آن رابطه تابع نیست.**

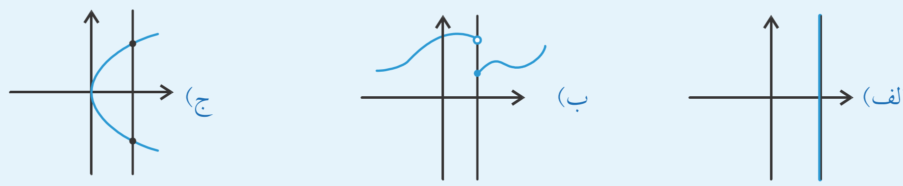
گزینهٔ (الف) تابع نیست. زیرا اعضای دامنه $A=\{۱,۲,۳\}$ هستند ولی زوج مرتبی با مؤلفهٔ اول ۲ وجود ندارد و این یعنی رابطهٔ $f_۱$ به عضو ۲ از مجموعهٔ A هیچ عضوی از مجموعهٔ B را نسبت نمی‌دهد.
گزینهٔ (ب) تابع است. چون هر دو شرط تابع بودن را داراست.
گزینهٔ (ج) تابع نیست. زیرا مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب $(۱,۲)$ و $(۱,۳)$ یکسان هستند در صورتی که مؤلفه‌های دوم آنها یکسان نیست.

نکته: تشخیص تابع بودن از روی نمودار مختصاتی: **اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار یک تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.**

مثال: تابع بودن و یا تابع نبودن هر کدام از نمودارهای زیر را مشخص کنید.



پاسخ: نمودارهای (الف) و (ج) تابع نیستند و نمودار (ب) تابع است.



تابع نیست — تابع است — تابع نیست

دامنه و برد توابع از روی جدول، زوج مرتب، نمودار ون و نمودار مختصاتی

زوج مرتب

نکته: دامنه و برد توابع از روی جدول: مجموعهٔ همهٔ مقادیری که در قسمت بالایی جدول قرار گرفته‌اند را دامنهٔ تابع می‌گویند و مجموعهٔ همهٔ مقادیری که در قسمت پائینی جدول قرار گرفته‌اند را برد تابع می‌گویند.

مثال: دامنه و برد تابع زیر را از روی جدول آن بنویسید.

ورودی	۱	۲	۳	۴
خروجی	۳	۲	۳	۲

پاسخ: برد تابع $=\{۲,۳\}$ و دامنهٔ تابع $=\{۱,۲,۳,۴\}$

نکته: دامنه و برد توابع از روی زوج مرتب: مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های اول زوج مرتب تشکیل‌دهندهٔ یک تابع را دامنه و مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تشکیل‌دهندهٔ یک تابع را برد تابع می‌نامند.

مثال: دامنه و برد تابع زیر را از روی زوج مرتب‌های آن بنویسید.

$$f=\{(۱,۲),(۳,۴),(۵,۴)\}$$

پاسخ: برد تابع f $=R=\{۲,۴\}$ و دامنهٔ تابع f $=D=\{۱,۳,۵\}$

تست: مجموع عضوهای مجموعهٔ برد تابع $f=\{(۱,۲),(a,۲b+۱),(۳,۵),(۱,a-۱)\}$ کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۵   ۳) ۶   ۴) ۷

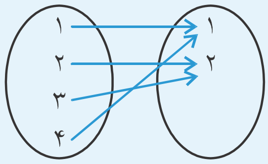
پاسخ: گزینهٔ ۴

f تابع است. بنابراین باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} a-۱=۲ &\Rightarrow a=۳ \\ ۲b+۱=۵ &\Rightarrow b=۲ \end{aligned} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} f=\{(۱,۲),(۳,۵)\} \Rightarrow \text{برد } R_f=\{۲,۵\} \Rightarrow \text{مجموع اعضا}=۲+۵=۷$$

نکته: دامنه و برد توابع از روی نمودار ون: مجموعهٔ همهٔ عضوهای مجموعهٔ اول که پیکان‌ها از آن خارج می‌شوند را دامنه و مجموعهٔ همهٔ عضوهای مجموعهٔ دوم را برد می‌نامند.

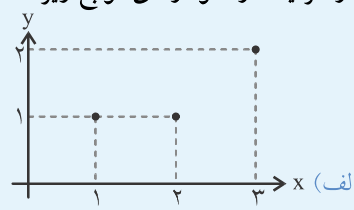
مثال: دامنه و برد تابع زیر را از روی نمودار وِن آن بنویسید.

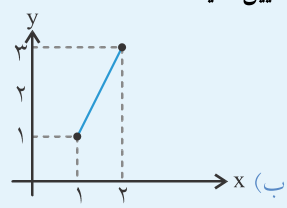


پاسخ: دامنه تابع $= \{۱,۲,۳,۴\}$ و برد تابع $= \{۱,۲\}$

نکته: دامنه و برد توابع از روی نمودار: تصویر نمودار روی محور xها را **دامنه** و تصویر نمودار روی محور yها را **برد** می‌نامند.

مثال: در هر یک از نمودارهای توابع زیر دامنه و برد را تعیین کنید.



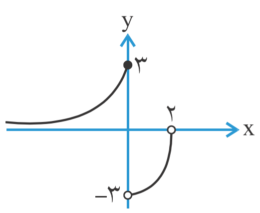


پاسخ:

الف) دامنه $= \{۱,۲,۳\}$ و برد $= \{۱,۲\}$

ب) دامنه $= \{x \mid ۱ \le x \le ۲\} = [۱,۲]$ و برد $= \{x \mid ۱ \le x \le ۳\} = [۱,۳]$

تست: اگر نمودار تابع **f** به شکل روبه‌رو باشد، برد تابع **f** کدام است؟



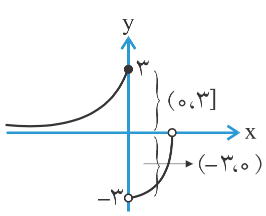
۱) $(-\infty,۳]$

۲) $(-۳,۳]$

۳) $\mathbb{R}-(۳,+\infty)$

۴) $(-۳,۰)\cup(۰,۳]$

پاسخ: گزینهٔ ۴



$(-۳,۳]-\{۰\}=(-۳,۰)\cup(۰,۳]$

ضابطه

مثال: با توجه به جدول زیر f(۱)، f(۲)، f(۳) و f(۴) را به‌دست آورید.

x	۱	۲	۳	۴
f(x)	۲	۴	۶	۸

پاسخ:

$f(۱)=۲\ ,\ f(۲)=۴\ ,\ f(۳)=۶\ ,\ f(۴)=۸$

توجه کنید تمام خروجی‌های بالا، دو برابر ورودی هستند. این تابع را می‌توان به صورت مقابل هم نمایش داد:
$$\begin{cases} f(x)=۲x \\ x\in\{۱,۲,۳,۴\} \end{cases}$$

نکته: گاهی اوقات یک تابع را می‌توان برحسب یک عبارت جبری از یک متغیر نمایش داد. این‌گونه نمایش تابع را نمایش جبری یا ضابطهٔ تابع می‌نامند.

برای مثال $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ تابعی است که از ورودی یک واحد کم می‌کند و سپس ریشهٔ سوم آن را می‌گیرد.

برای مثال همهٔ نمایش‌های مقابل، نمایش جبری به حساب می‌آیند. $f(x)=\sqrt{x}+|x|$ ، $f(x)=\dfrac{۲x+۱}{۳x-۲}$ ، $f(x)=x^۳$ ، $f(x)=x-۲$

مثال: اگر $f(x)=x^۲$ باشد، مقدار $f(۲)$ و $f(f(۲))$ را به‌دست آورید.

پاسخ: $f(x)=x^۲ \xrightarrow{x=۲} f(۲)=۲^۲=۴ \Rightarrow f(f(۲))=f(۴)=۴^۲=۱۶$

نکته: تشخیص تابع نبودن از روی ضابطه: اگر به جای متغیر x عددی قرار دهیم که به ازای آن دو مقدار برای y به‌دست آید، نتیجه می‌گیریم که ضابطهٔ داده شده مربوط به تابع نیست.

مثال: نشان دهید که ضابطه‌های زیر مربوط به تابع نیست.

الف) $|x|+|y|=۲$ ب) $x=y^۲$ ج) $x^۲y=۰$

پاسخ:

الف) $|x|+|y|=۲ \xrightarrow{x=۱} |۱|+|y|=۲ \Rightarrow |y|=۱ \Rightarrow y=\pm۱ \rightarrow$ تابع نیست

به ازای $x=۱$، $y=\pm۱$ به‌دست آمده است، پس ضابطه مربوط به تابع نیست.

ب) $x=y^۲ \xrightarrow{x=۱} ۱=y^۲ \Rightarrow y=\pm۱ \rightarrow$ تابع نیست

ج) $xy^۲=۰ \xrightarrow{x=۰} ۰\times y^۲=۰ \Rightarrow y\in(-\infty,+\infty) \rightarrow$ تابع نیست

در این ضابطه اگر $x=۰$ باشد y می‌تواند هر عددی از مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، پس ضابطه مربوط به تابع نیست.

تست: مساحت یک مربع (S) به عنوان تابعی از محیط آن مربع (P) کدام است؟

۱) $S(P)=\dfrac{P^۲}{۱۶}$ ۲) $S(P)=\dfrac{P}{۱۶}$ ۳) $S(P)=\dfrac{P^۲}{۴}$ ۴) $S(P)=\dfrac{P}{۴}$

پاسخ: گزینه ۱

اگر طول ضلع مربع a باشد داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S=a^۲ \\ \dfrac{P}{۴}=a \end{array}\right\} \Rightarrow S=\left(\dfrac{P}{۴}\right)^۲=\dfrac{P^۲}{۱۶}$$

مقداردهی در توابع

نکته: تابع را می‌توان به عنوان یک ماشین درنظر گرفت که ورودی می‌گیرد و خروجی تحویل می‌دهد.

$$\xrightarrow{\text{ورودی}} \boxed{\text{تابع}} \xrightarrow{\text{خروجی}} \quad \text{یا} \quad \xrightarrow{x} \boxed{f} \xrightarrow{f(x)}$$

مثال: اگر در ماشین شکل مقابل، ورودی ۱ باشد خروجی را به‌دست آورید.

$$\xrightarrow{x} \boxed{x^۲+۲x+۱} \xrightarrow{f(x)}$$

پاسخ: $f(۱)=۱^۲+۲+۱=۴$

مثال: اگر $f=\{(۲,۳),(-۱,۴),(۳,۵)\}$، آنگاه $f(f(۲))$ را به‌دست آورید.

پاسخ: $f(۲)=۳ \Rightarrow f(f(۲))=f(۳)=۵$

تست: اگر $f(x)=۳+\sqrt{۲x}$، آنگاه $f(۸)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۶)

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۳

$$f(x)=۳+\sqrt{۲x}\Rightarrow f(۸)=۳+\sqrt{۲\times ۸}=۳+\sqrt{۱۶}=۳+۴=۷$$

توابع همانی و ثابت

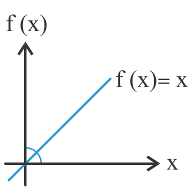
تعریف: تابع همانی: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو در دامنه دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، آن تابع را همانی می‌نامند. $R_f=D_f$.

مثال: اگر تابع $f\{(۳,b-a),(۲,b+a),(۱,۱)\}$ همانی باشد، a و b را به‌دست آورید.

پاسخ: چون تابع f همانی است مؤلفه‌های اول و دوم همهٔ زوج‌های مرتب یکی هستند.

$$\left.\begin{aligned}(۳,b-a)&\to ۳=b-a\\(۲,b+a)&\to ۲=b+a\end{aligned}\right\}\Rightarrow b=\frac{۵}{۲}\ ,\ a=-\frac{۱}{۲}$$

تذکر: ضابطهٔ تابع همانی را به صورت $f(x)=x$ نشان می‌دهیم.



نکته: نمودار تابع همانی، نیمساز ربع اول یا سوم دستگاه مختصات و یا بخشی از آن است.

نکته: دامنه و برد تابع همانی $f(x)=x$ همهٔ اعداد حقیقی است. $D_f=R_f=\mathbb{R}$

تست: اگر جدول مقابل مربوط به یک تابع همانی باشد، مقدار $\frac{a+b+c}{d}$ کدام است؟

x	a+۲	b	۳	$d^۲+۲d$
f(x)	−۹	$\lvert -۶\rvert$	$\sqrt{c}$	−۱

۱) −۴ ۲) ۴

۳) −۵ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

در یک تابع همانی $f(x)=x$ است.

$$f(a+۲)=-۹\Rightarrow a+۲=-۹\Rightarrow a=-۱۱\quad ,\quad f(b)=|-۶|\Rightarrow b=|-۶|=۶\Rightarrow b=۶$$

$$f(۳)=\sqrt{c}\Rightarrow ۳=\sqrt{c}\Rightarrow c=۹$$

$$f(d^۲+۲d)=-۱\Rightarrow d^۲+۲d=-۱\Rightarrow d^۲+۲d+۱=۰\Rightarrow (d+۱)^۲=۰\Rightarrow d=-۱\Rightarrow \frac{a+b+c}{d}=\frac{-۱۱+۶+۹}{-۱}=\frac{۴}{-۱}=-۴$$

تعریف: تابع ثابت: تابعی است که برد آن تنها شامل یک عضو است.

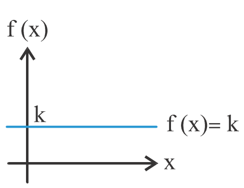
مثال: اگر تابع $f=\{(-۲,۳),(۲,a+b),(۴,a-b)\}$ ثابت باشد، b و a را به‌دست آورید.

پاسخ: چون تابع f ثابت است. همهٔ مؤلفه‌های دوم برابر با ۳ هستند.

$$\left.\begin{aligned}(۴,a-b)&\to a-b=۳\\(۲,a+b)&\to a+b=۳\end{aligned}\right\}\Rightarrow a=۳\ ,\ b=۰$$

نکته: ضابطهٔ تابع ثابت را به صورت $f(x)=k$ (با فرض $k\in\mathbb{R}$) نشان می‌دهیم.

برای مثال $f(x)=۰$، $f(x)=۲$ و $f(x)=-۲$ توابعی ثابت هستند.



نکته: نمودار تابع ثابت خطی موازی محور xها و یا بخشی از آن است.

نکته: دامنهٔ تابع ثابت $f(x)=k$ همهٔ اعداد حقیقی است و برد آن عدد ثابت k است. $R_f=\{k\}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

توابع خطی

تعریف: هر تابع که بتوان آن را به شکل $f(x)=ax+b$ نمایش داد، یک **تابع خطی** نامیده می‌شود.

مثال: طول قطر یک مربع را به صورت تابعی از ضلع آن بنویسید. نشان دهید که این تابع، خطی است.

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} x = \text{طول ضلع مربع} \\ \sqrt{۲}\,x = \text{قطر مربع} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{f(x)}_{\text{قطر مربع}} = \sqrt{۲}\,\underbrace{x}_{\text{ضلع مربع}}$$

$f(x)=\underbrace{\sqrt{۲}}_{a}x+\underbrace{۰}_{۰} \to$ $f(x)$ یک تابع خطی برحسب x است.

مثال: ضابطهٔ تابعی که از نقاط $(-۴,۳)$ و $(۰,-۳)$ می‌گذرد را به‌دست آورید. سپس $f(۱)$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax+b \xrightarrow{(-۴,۳)} ۳=a(-۴)+b \Rightarrow -۴a+b=۳ \\ f(x)=ax+b \xrightarrow{(۰,-۳)} -۳=a(۰)+b \Rightarrow b=-۳ \end{array}\right\} \Rightarrow a=-\frac{۶}{۴}=-\frac{۳}{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} a=-\frac{۳}{۲} \\ b=-۳ \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=-\frac{۳}{۲}x-۳ \xrightarrow{x=۱} f(۱)=-\frac{۳}{۲}-۳=-\frac{۹}{۲}$$

نکته: برای به‌دست آوردن برد یک تابع خطی مانند $f(x)=ax+b$، اگر دامنه $[m,n]$ باشد کافی است $f(m)$ و $f(n)$ را به‌دست بیاوریم. برد برابر با $[f(m),f(n)]$ و یا $[f(n),f(m)]$ است.

تذکر: دامنهٔ f را با D_f و برد f را با R_f نشان می‌دهیم.

مثال: برد توابع خطی زیر را در بازهٔ دامنهٔ $[۱,۳]$ به‌دست آورید.

الف $f(x)=۲x-۱$ **ب** $f(x)=-x+۲$

پاسخ:

الف $f(x)=۲x-۱ \xrightarrow{D_f=[۱,۳]} f(۱)=۱\ ,\ f(۳)=۵ \Rightarrow R_f=[۱,۵]$

ب $f(x)=-x+۲ \xrightarrow{D_f=[۱,۳]} f(۱)=۱\ ,\ f(۳)=-۱ \Rightarrow R_f=[-۱,۱]$

نکته: دامنه و برد یک تابع خطی در حالت کلی $\mathbb{R}$ است.

$$f(x)=ax+b \Rightarrow D_f=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R} \quad , \quad R_f=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

تست: اگر f یک تابع خطی باشد به‌طوری که $f(x)+f(\frac{۱}{x})=\frac{x^۳+۸x^۲+x}{۲x^۲}$، مقدار $f(-۶)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

تابع خطی به صورت $f(x)=ax+b$ است. پس:

$$f(\frac{۱}{x})=a(\frac{۱}{x})+b \Rightarrow f(x)+f(\frac{۱}{x})=ax+b+a(\frac{۱}{x})+b \Rightarrow a(x+\frac{۱}{x})+۲b=\frac{x^۳+۸x^۲+x}{۲x^۲}=\frac{۱}{۲}x+۴+\frac{۱}{۲x}=\frac{۱}{۲}(x+\frac{۱}{x})+۴$$

$$\Rightarrow a=\frac{۱}{۲} \quad , \quad ۲b=۴ \Rightarrow b=۲ \Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}x+۲ \Rightarrow f(-۶)=-۱$$

توابع چند جمله‌ای

- $f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+...+a_۱x+a_۰$ یک **تابع چندجمله‌ای** برحسب متغیر x در حالت کلی است.

- دامنهٔ $f(x)$ مجموعهٔ اعداد حقیقی است $D_f = \mathbb{R}$.
- اگر n فرد باشد، برد $f(x)$ برابر با مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

مثال: اگر $f(x) = x^3 + x^2 + x + a$ و $f(1) = 4$ باشد؛ $f(-1)$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + a \xrightarrow{x=1} f(1) = 1+1+1+a = 4 \Rightarrow a = 1 \rightarrow f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \xrightarrow{x=-1} f(-1) = -1+1-1+1 = 0$$

مثال: دامنه و برد تابع $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$D_f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \quad , \quad R_f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

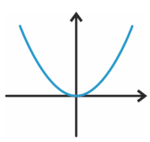
تابع درجه دوم

ـ ضابطهٔ یک تابع درجه دوم در حالت کلی به‌صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ است، که در آن a، b و c اعداد حقیقی ثابتی هستند و $a \neq 0$ است.

– دامنه این تابع $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی) و برد آن زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ می‌باشد.

– به منحنی نمایش این تابع سهمی گفته می‌شود که با توجه به علامت a به یکی از دو حالت مقابل است:

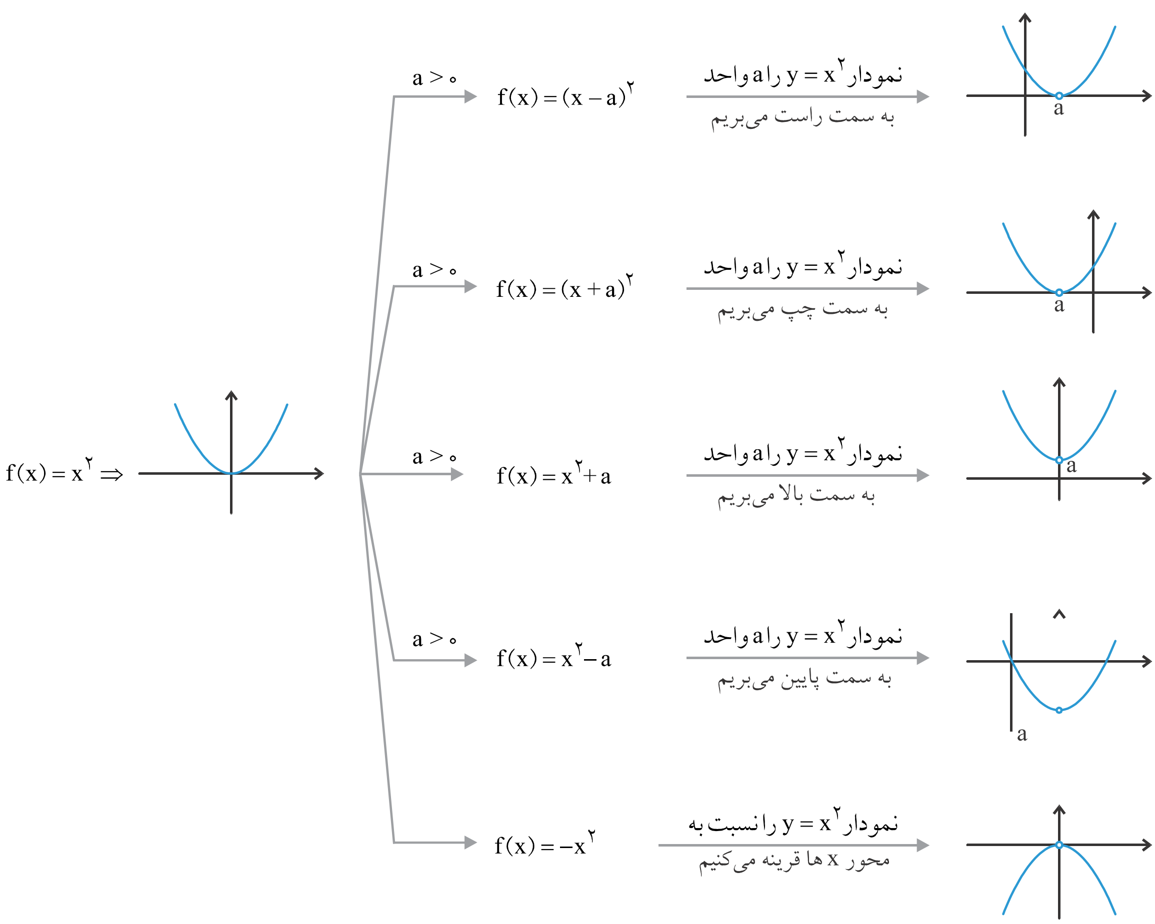
ساده‌ترین تابع درجه دوم، تابع $f(x) = x^2$ است و نمودارش به صورت مقابل است:



– دامنه این تابع $\mathbb{R}$ و برد آن اعداد حقیقی نامنفی است.

$$D_f = \mathbb{R} \quad , \quad R_f = [0, +\infty)$$

رسم منحنی تابع درجه دوم به کمک انتقال تابع $f(x) = x^2$:



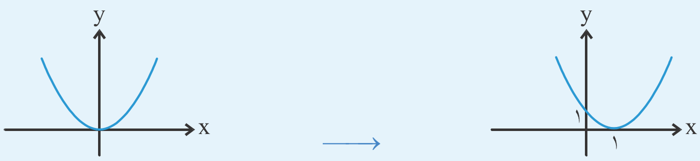
مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید. سپس دامنه و برد هر کدام را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^2+1$ ب) $f(x)=(x-1)^2$ ج) $f(x)=-(x+1)^2+1$

پاسخ: الف) نمودار $f(x)=x^2$ را یک واحد به بالا انتقال دهید.

$D_f=\mathbb{R}\quad,\quad R_f=[1,+\infty)$

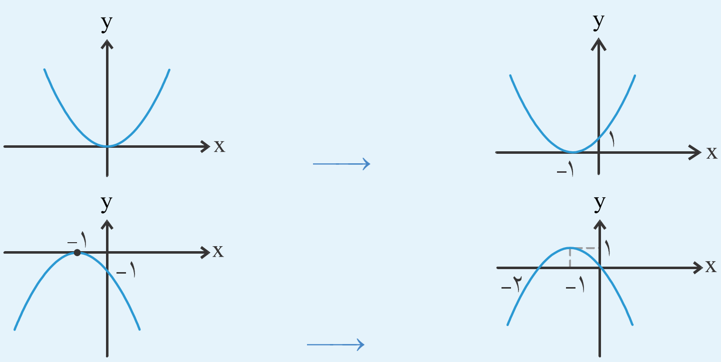
ب) نمودار $f(x)=x^2$ را یک واحد به راست انتقال دهید.



$D_f=\mathbb{R}\quad,\quad R_f=[0,+\infty)$

ج) نمودار $f(x)=x^2$ را یک واحد به چپ انتقال دهید.

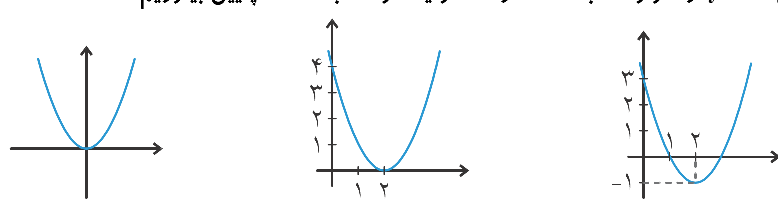
- سپس نسبت به محور xها قرینه کنید.
- در نهایت یک واحد به بالا انتقال دهید.



$D_f=\mathbb{R}\quad,\quad R_f=(-\infty,1]$

نکته: ضابطهٔ تابع درجهٔ دوم $y=ax^2+bx+c$ را می‌توان به صورت $y=a(x-x_0)^2+y_0$ نیز نوشت که با توجه به این معادله به کمک انتقال می‌توان نمودار تابع را رسم کرد مثلاً در تابع $f(x)=x^2-4x+3$ داریم: $f(x)=x^2-4x+4-1=(x-2)^2-1$

برای رسم نمودار این تابع باید نمودار تابع $y=x^2$ را دو واحد به سمت راست و یک واحد به سمت پایین بیاوریم:



$y=x^2 \longrightarrow y=(x-2)^2 \longrightarrow y=(x-2)^2-1$

تست: به ترتیب با کدام انتقال‌های زیر می‌توان از نموداری با ضابطهٔ $y=x^2+4x+3$ به نمودار $y=x^2+4$ رسید؟

۱) ۳ واحد به پایین و ۴ واحد به راست
۲) ۲ واحد به راست و ۵ واحد به بالا
۳) ۳ واحد به پایین و ۴ واحد به چپ
۴) ۲ واحد به چپ و ۵ واحد به بالا

پاسخ: گزینهٔ ۲

$y=x^2+4x+3=x^2+4x+4-1=(x+2)^2-1$

۲ واحد به راست: $x\to x-2 \Rightarrow y=(x-2+2)^2-1=x^2-1$

۵ واحد به بالا: $y\to y-5 \Rightarrow y-5=x^2-1 \Rightarrow y=x^2+4$

تابع قدرمطلق

تعریف: تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می‌کند، **تابع قدرمطلق** نامیده می‌شود. تابع قدرمطلق را با $f(x)=|x|$ نمایش می‌دهند.

تذکر: تابع قدرمطلق را می‌توان به صورت مقابل نشان داد: $f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$

مثال: اگر دامنهٔ تابع $f(x)=|x|$ مجموعهٔ $\{-1,0,1\}$ باشد برد $f(x)$ را به‌دست آورید.

پاسخ: $f(x)=|x| \quad , \quad f(-1)=|-1|=1 \quad , \quad f(0)=|0|=0 \quad , \quad f(1)=|1|=1 \Rightarrow R_f=\{0,1\}$

تست: اگر $f(x)=|x|+|x-1|$، حاصل $f(\sqrt{3}-1)+f(\sqrt{2}-1)$ کدام است؟ (آزاد تجربی ۹۱)

۱) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

$$\left.\begin{aligned} f(\sqrt{3}-1)&=|\sqrt{3}-1|+|\sqrt{3}-1-1|=|\sqrt{3}-1|+|\sqrt{3}-2| \xrightarrow{\sqrt{3}\simeq 1/7} \sqrt{3}-1+2-\sqrt{3}=1 \\ f(\sqrt{2}-1)&=|\sqrt{2}-1|+|\sqrt{2}-1-1|=|\sqrt{2}-1|+|\sqrt{2}-2| \xrightarrow{\sqrt{2}\simeq 1/4} \sqrt{2}-1+2-\sqrt{2}=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(\sqrt{3}-1)+f(\sqrt{2}-1)=1+1=2$$

مثال: وقتی $1<x<3$ ضابطهٔ تابع $f(x)=|x-1|+|x-3|$ را به صورت یک تابع ثابت بنویسید.

پاسخ:

$$\left.\begin{aligned} 1<x<3 &\Rightarrow x-1>0 \Rightarrow |x-1|=x-1 \\ 1<x<3 &\Rightarrow x-3<0 \Rightarrow |x-3|=3-x \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x)=|x-1|+|x-3|=\cancel{x}-1+3-\cancel{x}=2 \xrightarrow{1<x<3} f(x)=2$$

نکته: صورت چندضابطه‌ای تابع $f(x)=|x-a|$ به صورت مقابل است: $f(x)=|x-a|=\begin{cases} x-a & x\geq a \\ a-x & x<a \end{cases}$

مثال: تابع $f(x)=|x-1|$ را به صورت چندضابطه‌ای بنویسید.

پاسخ: $f(x)=\begin{cases} x-1 & x\geq 1 \\ 1-x & x<1 \end{cases}$

نکته: اگر بخواهیم تابعی مانند $f(x)=|2x-1|$ را به یک تابع چندضابطه‌ای تبدیل کنیم:

- ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق را به‌دست می‌آوریم: $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$
- ضابطهٔ تابع را به ازای $x \geq$ ریشهٔ قدرمطلق و $x <$ ریشهٔ قدرمطلق به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned} x\geq \tfrac{1}{2} &\Rightarrow |2x-1|=2x-1 \\ x<\tfrac{1}{2} &\Rightarrow |2x-1|=-2x+1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & x<\frac{1}{2} \end{cases}$$

مثال: تابع‌های زیر را به صورت چندضابطه‌ای بنویسید.

الف) $f(x)=-|2x+1|+2$ ب) $f(x)=x+|x|$

پاسخ:

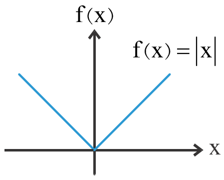
الف) $2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned} x\geq -\tfrac{1}{2} &\Rightarrow |2x+1|=2x+1 \Rightarrow f(x)=-|2x+1|+2=-(2x+1)+2 \Rightarrow f(x)=-2x+1 \\ x<-\tfrac{1}{2} &\Rightarrow |2x+1|=-2x-1 \Rightarrow f(x)=-|2x+1|+2=-(-2x-1)+2 \Rightarrow f(x)=2x+3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -2x+1 & x\geq \frac{-1}{2} \\ 2x+3 & x<-\frac{1}{2} \end{cases}$$

ب

$$x = 0$$
$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = x + |x| = x + x \Rightarrow f(x) = 2x \\ x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = x + |x| = x - x \Rightarrow f(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

نکته: نمودار تابع $f(x) = |x|$ به صورت روبه‌رو است. هر کدام از نیم‌خط‌ها نیمسازهای ناحیه‌ها هستند.



نکته: دامنهٔ $f(x) = |x|$ اعداد حقیقی است و برد آن، اعداد حقیقی نامنفی است.

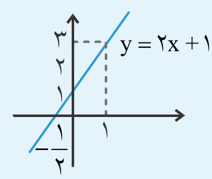
$$D_f = \mathbb{R} \quad , \quad R_f = [0, +\infty)$$

رسم نمودار $f(x) = |ax + b|$

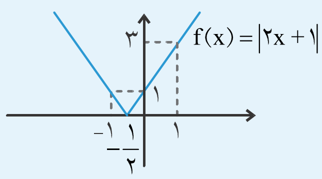
- خط $ax + b$ را رسم می‌کنیم.
- قسمت‌های بالای محور xها را نگه می‌داریم.
- قسمت‌های پایین محور xها را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

مثال: نمودار $f(x) = |2x + 1|$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا نمودار $y = 2x + 1$ را رسم می‌کنیم. نمودار $y = 2x + 1$ از نقاط $(0,1)$ و $(1,3)$ عبور می‌کند.



با استفاده از نمودار $y = 2x + 1$، نمودار $f(x) = |2x + 1|$ را رسم می‌کنیم.



انتقال نمودار $|x|$ $(a > 0)$

- برای رسم نمودار $|x - a|$ کافی است نمودار $|x|$ را به اندازهٔ a واحد به سمت راست انتقال دهیم.
- برای رسم نمودار $|x + a|$ کافی است نمودار $|x|$ را به اندازهٔ a واحد به سمت چپ انتقال دهیم.
- برای رسم نمودار $|x| + a$ کافی است نمودار $|x|$ را به اندازهٔ a واحد به سمت بالا انتقال دهیم.
- برای رسم نمودار $|x| - a$ کافی است نمودار $|x|$ را به اندازهٔ a واحد به سمت پایین انتقال دهیم.

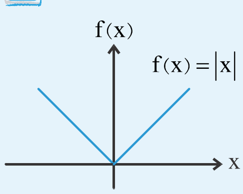
قوانین بالا برای هر تابع مانند $f(x)$ هم برقرار است.

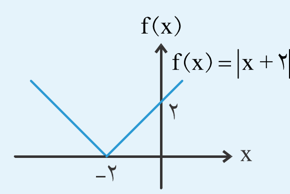
مثال: نمودارهای تابع‌های زیر را رسم کنید:

الف $f(x) = |x - 1|$ **ب** $f(x) = |x + 2|$ **ج** $f(x) = |x| + 2$

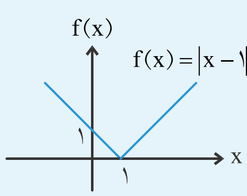
د $f(x) = |x| - 1$ **هـ** $f(x) = |x - 1| + 2$

پاسخ: ابتدا نمودار $f(x) = |x|$ را رسم می‌کنیم. سپس این نمودار را انتقال می‌دهیم.

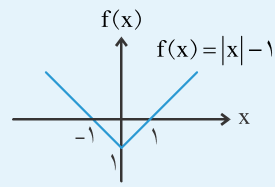




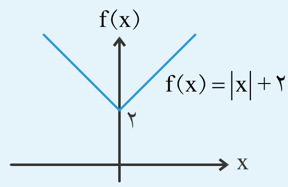
ب (نمودار $f(x) = |x|$ را دو واحد به چپ انتقال می‌دهیم)



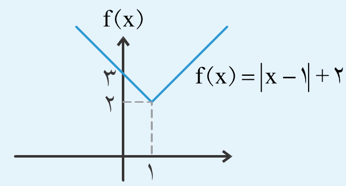
الف (نمودار $f(x) = |x|$ را یک واحد به راست انتقال می‌دهیم)



د (نمودار $f(x)=|x|$ را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم)



ج (نمودار $f(x)=|x|$ را دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم)



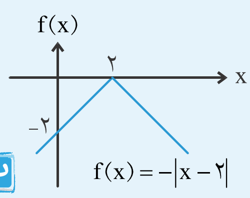
ه (نمودار $f(x)=|x|$ را یک واحد به راست و سپس دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم)

- برای رسم نمودار $-|x|$، کافی است نمودار $|x|$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.
- برای رسم نمودار $-f(x)$، کافی است نمودار $f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

مثال: نمودارهای زیر را رسم کنید:

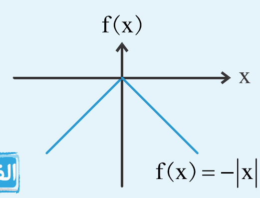
الف **$f(x)=-|x|$**　　　ب **$f(x)=-|x-۲|$**

پاسخ: ابتدا نمودار $f(x)=|x|$ را دو واحد به راست انتقال می‌دهیم و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.



ب

(نمودار $f(x)=|x|$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم)



الف

تست: نمودار تابع $y=|x-۴|-۱$ محورهای مختصات را در چند نقطه قطع می‌کند؟ *(آزاد تجربی ۸۹)*

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) صفر　　۴) ۳

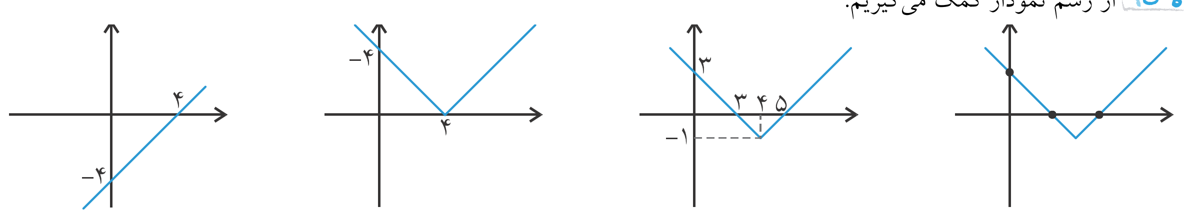
پاسخ: گزینهٔ ۴

راه‌حل ۱ مختصات نقطه‌های برخورد با محورها را پیدا می‌کنیم:

- محل برخورد با محور xها: $y=۰ \Rightarrow |x-۴|-۱=۰ \Rightarrow |x-۴|=۱ \Rightarrow x-۴=۱ \text{ یا } -۱ \Rightarrow x=۵ \text{ یا } ۳ \Rightarrow \begin{bmatrix}۳\\۰\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۵\\۰\end{bmatrix}$
- محل برخورد با محور yها: $x=۰ \Rightarrow y=|۰-۴|-۱ \Rightarrow y=۴-۱=۳ \Rightarrow \begin{bmatrix}۰\\۳\end{bmatrix}$

پس در کل، در سه نقطه محورها را قطع می‌کند.

راه‌حل ۲ از رسم نمودار کمک می‌گیریم:



$y=x-۴$ → $y=|x-۴|$ → $y=|x-۴|-۱$ → ۳ تا نقطه

مثال: تابع $f(x)$ به صورت $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\geq ۲ \\ ۴ & -۲<x<۲ \\ -۲x & x\leq -۲ \end{cases}$ تعریف می‌شود.

الف تابع را توصیف کنید.

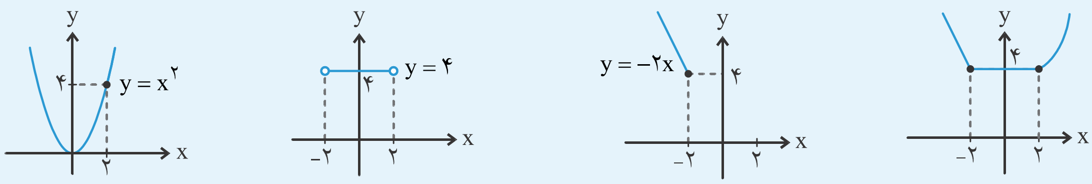
ب نمودار تابع را رسم کنید.

ج از روی نمودار، دامنه و برد تابع را به‌دست آورید.

د حاصل $f(\sqrt{۵})+f(\sqrt{۳})-f(-۵)$ را به‌دست آورید.

پاسخ: **الف** برای $x\geq ۲$ تابع همان سهمی $y=x^{۲}$ است. برای $-۲<x<۲$ تابع ثابت $y=۴$ است و برای $x\leq -۲$ تابع با نمودار خط $y=-۲x$ برابر است.

ب



$(x\geq ۲)$ $(-۲<x<۲)$ $(x\leq -۲)$ $\Rightarrow$

ج $D_f=\mathbb{R}$, $R_f=[۴,+\infty)$

د
$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{۵}>۲\Rightarrow f(\sqrt{۵})=(\sqrt{۵})^{۲}=۵ \\ -۲<\sqrt{۳}<۲\Rightarrow f(\sqrt{۳})=۴ \\ -۵<-۲\Rightarrow f(-۵)=(-۲)\times(-۵)=۱۰ \end{array}\right\}\Rightarrow f(\sqrt{۵})+f(\sqrt{۳})-f(-۵)=۵+۴-۱۰=-۱$$

تست: اگر تابع $f(x)=|۲x-۲|-|x+۳|$ را به صورت چندضابطه‌ای بنویسیم، کدام را خواهیم داشت؟

۱) $f(x)=\begin{cases} x-۵ & x\geq ۱ \\ -۳x-۱ & -۳\leq x<۱ \\ ۵-x & x<-۳ \end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases} ۵-x & x\geq ۱ \\ ۳x+۱ & -۳\leq x<۱ \\ x-۵ & x<-۳ \end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases} x-۵ & x\geq ۱ \\ ۳x-۱ & -۳\leq x<۱ \\ ۵-x & x<-۳ \end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases} ۵-x & x\geq ۱ \\ -۳x-۱ & -۳\leq x<۱ \\ x-۵ & x<-۳ \end{cases}$

پاسخ: گزینه ۱

مسئله را در سه حالت بررسی می‌کنیم:

۱ $x<-۳\Rightarrow \left.\begin{array}{l}|۲x-۲|=۲-۲x \\ |x+۳|=-x-۳\end{array}\right\}\Rightarrow |۲x-۲|-|x+۳|=۲-۲x-(-x-۳)=۵-x$

۲ $-۳\leq x<۱\Rightarrow \left.\begin{array}{l}|۲x-۲|=-۲x+۲ \\ |x+۳|=x+۳\end{array}\right\}\Rightarrow |۲x-۲|-|x+۳|=-(۲x-۲)-(x+۳)=-۳x-۱$

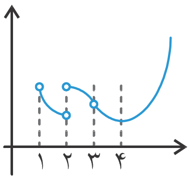
۳ $x\geq ۱\Rightarrow \left.\begin{array}{l}|۲x-۲|=۲x-۲ \\ |x+۳|=x+۳\end{array}\right\}\Rightarrow |۲x-۲|-|x+۳|=(۲x-۲)-(x+۳)=x-۵$

ویژگی‌های قدرمطلق

ویژگی	مثال
۱ $\lvert a\rvert=\lvert -a\rvert$	$\lvert -۵\rvert=\lvert ۵\rvert$
۲ $\lvert a-b\rvert=\lvert b-a\rvert$	$\lvert ۳-۵\rvert=\lvert ۵-۳\rvert$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۷۴۳. در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است. عبارت کدام گزینه درست نیست؟ (کتاب درسی)



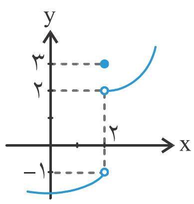
۱) تابع در $x=۱$ حد راست دارد.

۲) تابع در $x=۲$ حد ندارد.

۳) تابع در $x=۳$ حد ندارد.

۴) مقدار تابع در $x=۴$ برابر با حد تابع در $x=۴$ است.

۷۴۴. شکل مقابل نمودار تابع f است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) + ۲\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) - f(۲)$ کدام است؟



۱) -۲

۲) ۰

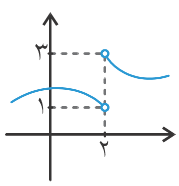
۳) -۳

۴) ۴

۷۴۵. در تابع $f(x)=\sqrt{۴-x}$ کدام گزینه درست نیست؟

۱) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۲$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=۰$ ۳) $\lim\limits_{x\to ۴^-} f(x)=۰$ ۴) $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=۱$

۷۴۶. نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x+۱)$ کدام است؟



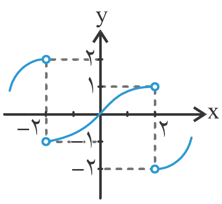
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) وجود ندارد

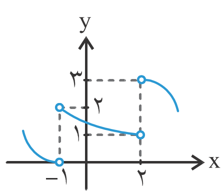
۷۴۷. نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(-x)$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲

۳) -۱ ۴) -۲

۷۴۸. نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(۱-x)$ کدام است؟



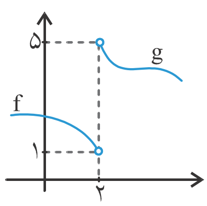
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۰

۷۴۹. در شکل روبه‌رو نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. به ازای کدام مقدار a تابع $h(x)=\begin{cases} f(x)+a & x<۲ \\ g(x)-a & x>۲ \end{cases}$ در $x=۲$ حد دارد؟



۱) -۲ ۲) ۰

۳) ۲ ۴) ۴

۷۵۰. اگر $f(x)=\begin{cases} ۱ & x<۰ \\ -۱ & x>۰ \end{cases}$، $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) -۱

۷۵۱. در تابع $f(x)=۲+\dfrac{|x-۱|}{x-۱}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) موجود نیست

۷۵۲. تابع با ضابطه $f(x)=x+\frac{|x|}{x}$ را در نظر می‌گیریم، حد راست این تابع چقدر از حد چپ این تابع در $x=۰$ بیش‌تر است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

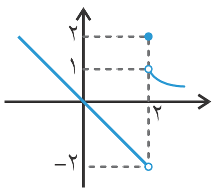
۷۵۳. حد تابع $f(x)=\begin{cases}۲x-۴ & x>۳\\ x^۲-۳x+۲ & x<۳\end{cases}$ وقتی که $x\to ۳$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) وجود ندارد.

۷۵۴. در تابع $f(x)=\left[\frac{x}{۲}\right]$ حاصل $\lim_{x\to ۲^-} f(x)+\lim_{x\to ۲^+} f(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۰ ۴) ۲

۷۵۵. در شکل مقابل نمودار تابع f رسم شده است. حاصل $\lim_{x\to ۲^+} f(x)+\lim_{x\to ۲^-} f(x)+f(۲)$ کدام است؟

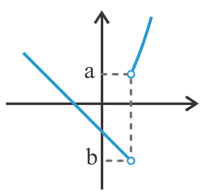


۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۷۵۶. در تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲-۴x+۵ & x>۲\\ ۱-x & x\le ۲\end{cases}$، حاصل $\dfrac{\lim_{x\to ۲^+} f(x)}{\lim_{x\to ۲^-} f(x)}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۷۵۷. نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x>۱\\ -x-۱ & x<۱\end{cases}$ به شکل مقابل است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟



۱) $-\frac{۳}{۲}$

۲) -۲

۳) $-\frac{۵}{۲}$

۴) -۳

۷۵۸. تابع $f(x)=\begin{cases}۳-x & x>۱\\ a & x<۱\end{cases}$ را داریم. به ازای کدام مقدار a، حد تابع در $x=۱$ موجود است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۷

۷۵۹. در تابع $f(x)=\begin{cases}۲ & x\in\mathbb{Z}\\ x & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\end{cases}$، حاصل $\lim_{x\to ۳^-} f(x)+\lim_{x\to ۱^+} f(x)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) ۴

۷۶۰. حاصل حد چپ تابع $f(x)=\frac{x}{[x^۲]-۱}$ در نقطهٔ $x=\sqrt{۲}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $-\sqrt{۲}$ ۴) وجود ندارد

۷۶۱. حاصل $\lim_{x\to ۱^+}\left[x-x^۲\right]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) -۱ ۴) -۲

۷۶۲. حاصل $\lim_{x\to ۰} x+\frac{|x|}{x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) -۱ ۴) وجود ندارد

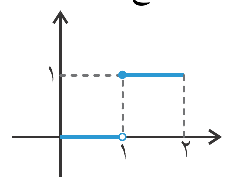
۷۶۳. حاصل $\lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۲-۴}{x-۲}+\lim_{x\to ۱^-}\frac{|x-۱|}{x-۱}$ کدام است؟

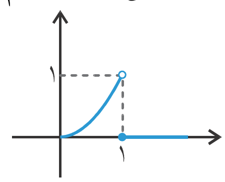
۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

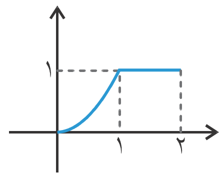
۷۶۴. می‌دانیم a عددی صحیح است. با فرض $f(x)=x-[x]$، حاصل $\lim_{x\to a^+} f(x)-\lim_{x\to a^-} f(x)$ کدام است؟

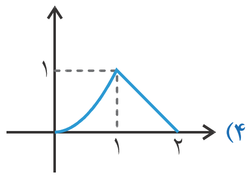
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۷۶۵. نمودار تابع $f(x)=x^{2}(1-[x])$ در همسایگی ۱ شبیه کدام گزینه است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


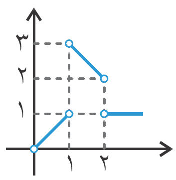
۷۶۶. حاصل $\lim\limits_{x\to 1} x[x]$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۰
۴) وجود ندارد

۷۶۷. حاصل $\lim\limits_{x\to 0} [x]\cdot[x+1]$ کدام است؟

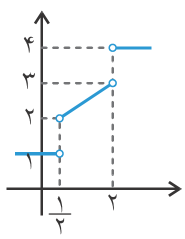
۱) ۱
۲) ۱-
۳) ۰
۴) وجود ندارد

۷۶۸. نمودار تابع f به شکل مقابل است. حاصل $\dfrac{\lim\limits_{x\to 1^+} f(1+x)}{\lim\limits_{x\to 1^-} f(1+x)}$ کدام است؟



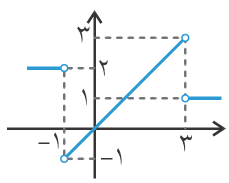
۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۱
۳) ۲
۴) $\frac{3}{2}$

۷۶۹. نمودار تابع f به شکل مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$ کدام است؟



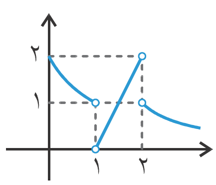
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۷۷۰. نمودار تابع f به شکل مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x-1)$ و $\lim\limits_{x\to 1^+} f(2x+1)$ به ترتیب کدام است؟



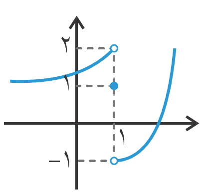
۱) ۲ و ۳
۲) ۱- و ۳
۳) ۲ و ۱
۴) ۱- و ۱

۷۷۱. اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-} f(f(x))$ کدام است؟



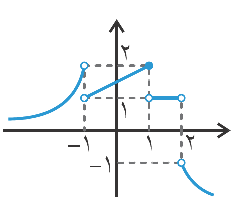
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۰
۴) وجود ندارد

۷۷۲. نمودار تابع f به شکل مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to 0} f(|x|+1)$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۱-
۴) وجود ندارد

۷۷۳. در شکل مقابل نمودار تابع f رسم شده است. کدام گزینه درست نیست؟



۱) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x-1)=f(1)$
۲) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
۳) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
۴) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} |f(x)|$

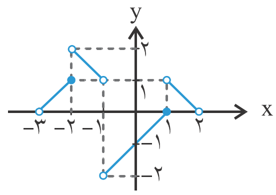
۷۷۴. در تابع $f(x)=۴x-x^{۲}$، حاصل $\left[\lim\limits_{x\to ۲} f(x)\right]$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) وجود ندارد

۷۷۵. در تابع $f(x)=۲x-x^{۲}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}[f(x)]$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) -۱ ۴) وجود ندارد

۷۷۶. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to -۲^{-}} f(|x|-۳)$ کدام است؟



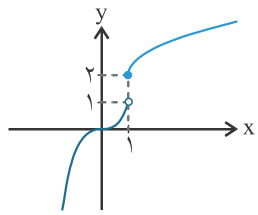
۱) ۱

۲) -۲

۳) -۱

۴) صفر

۷۷۷. اگر نمودارتابع $y=f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to -۱}\left(f(۲x^{۲}-۱)+f(۳-۲x^{۲})\right)$ کدام است؟



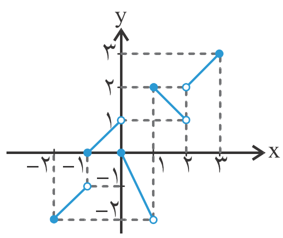
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) وجود ندارد

۷۷۸. اگر نمودار $y=f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to -۱^{-}}[f(-x^{۲}+۲)]$ کدام است؟



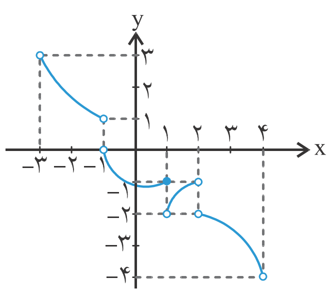
۱) ۰

۲) -۱

۳) ۲

۴) -۲

۷۷۹. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ مطابق شکل مقابل باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to -۲^{+}} f([x^{۲}]-۲)+\lim\limits_{x\to -۲^{+}} f(|x^{۲}-۲|)$ کدام است؟



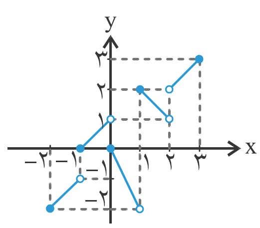
۱) -۴

۲) -۳

۳) -۱

۴) -۲

۷۸۰. اگر نمودار $f(x)$ به صورت زیر باشد، قدرمطلق تفاضل حد چپ و راست تابع $f(|x+۱|+[-۲x])$ در نقطهٔ $x=-۱$ کدام است؟



۱) صفر

۲) ۱

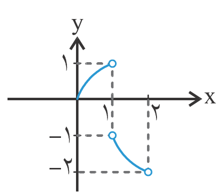
۳) ۲

۴) ۳

۷۸۱. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ مطابق شکل مقابل باشد، حاصل

$$\left(\lim_{x\to ۱^{+}}[|f(x)|]+\lim_{x\to ۱^{+}}|[f(x)]|\right)-\left(\lim_{x\to ۱^{-}}[|f(x)|]+\lim_{x\to ۱^{-}}|[f(x)]|\right)$$

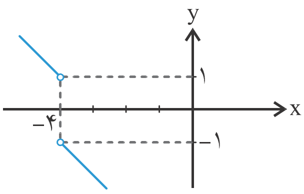
کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۲ ۴) ۱

۷۸۲. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x^۲-۳x-۲)$ کدام است؟

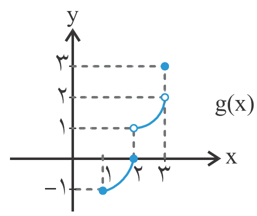


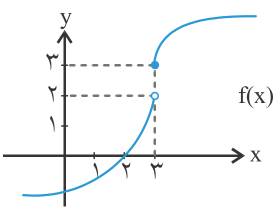
۱) -۴
۲) -۱
۳) ۱
۴) وجود ندارد

۷۸۳. اگر $f(x)=\dfrac{|x-۲|}{x-۲}$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(f(x))$ کدام است؟

۱) صفر　۲) ۱　۳) -۱　۴) وجود ندارد

۷۸۴. اگر نمودارهای $y=f(x)$ و $y=g(x)$ مطابق شکل‌های زیر باشند، مقدار $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)+\lim\limits_{x\to ۳^-} g(f(x))$ کدام است؟





۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

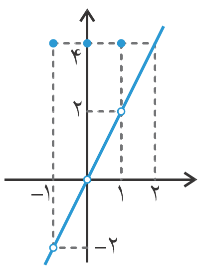
۷۸۵. اگر $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=a$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=b$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x^۲-۲x)+\lim\limits_{x\to ۲^+} f(۴-x^۲)$ کدام است؟

۱) $۲a$　۲) $۲b$　۳) $a+b$　۴) صفر

۷۴۰. گزینه۲

$x^{۲} = |x| \Rightarrow x = -۱, ۰, ۱$

پس نمودار $y = f(x)$ به شکل مقابل می‌شود. با توجه به نمودار داریم:



$\lim\limits_{x \to ۰} f(x) = ۰$

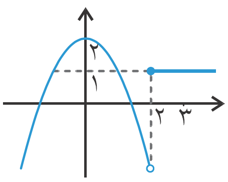
$\lim\limits_{x \to -۱} f(x) = -۲$

$\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = ۴$

۷۴۱. گزینه۱

با توجه به نمودار تابع، $\lim\limits_{x \to ۳} f(x) = ۱$ است.

در شکل حد $۲ - x^{۲}$ در $x = a$ باید برابر با ۱ باشد، پس حاصل $۲ - x^{۲}$ باید برابر با ۱ باشد:



$۲ - x^{۲} = ۱ \Rightarrow x^{۲} = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$

۷۴۲. گزینه۲

هر گزینه را بررسی می‌کنیم:

در گزینهٔ ۱: در $x = ۱$ تعریف نشده ولی حد دارد.

در گزینهٔ ۲: در $x = ۱$ تعریف شده ولی حد ندارد.

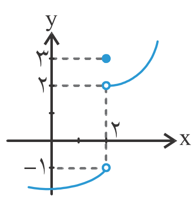
در گزینهٔ ۳: در $x = ۱$ تعریف نشده و حد ندارد.

در گزینهٔ ۴: در $x = ۱$ تعریف شده و حد دارد.

۷۴۳. گزینه۳

تابع در $x = ۳$ حد دارد ولی در نقطهٔ $x = ۳$ تعریف نشده است.

۷۴۴. گزینه۳

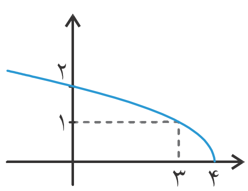


$\lim\limits_{x \to ۲^{+}} f(x) = ۲$

$\lim\limits_{x \to ۲^{-}} f(x) = -۱$

$f(۲) = ۳ \Rightarrow \lim\limits_{x \to ۲^{+}} f(x) + ۲\lim\limits_{x \to ۲^{-}} f(x) - f(۲) = ۲ + ۲(-۱) - ۳ = -۳$

۷۴۵. گزینه۲



دامنهٔ تابع به صورت $(-\infty, ۴]$ است، پس $\lim\limits_{x \to ۴^{+}} f(x)$ وجود ندارد، پس $\lim\limits_{x \to ۴} f(x)$ وجـود نـدارد، بقیـهٔ گزینه‌ها درست هستند.

۷۴۶. گزینه۳

$x \to ۱^{+} \Rightarrow ۱ + x \to ۲^{+}$

پس:

$\lim\limits_{x \to ۱^{+}} f(۱ + x) = \lim\limits_{x \to ۲^{+}} f(x) = ۳$

به کمک نمودار، حاصل حد راست تابع در $x = ۲$ به دست آمده است.

۷۴۷. گزینه۳

$x \to ۲^{-} \Rightarrow x < ۲ \Rightarrow -x > -۲ \Rightarrow -x \to -۲^{+}$

پس:

$\lim\limits_{x \to ۲^{-}} f(-x) = \lim\limits_{x \to -۲^{+}} f(x) = -۱$

به کمک نمودار، حاصل حد راست تابع در $x = -۲$ به دست آمده است.

۷۴۸. گزینه۴

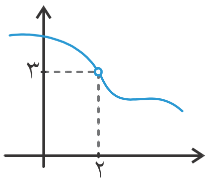
$x \to ۲^{+} \Rightarrow -x \to -۲^{-} \Rightarrow ۱ - x \to -۱^{-}$

پس:

$\lim\limits_{x \to ۲^{+}} f(۱ - x) = \lim\limits_{x \to -۱^{-}} f(x) = ۰$

به کمک نمودار، حاصل حد چپ تابع در $x = -۱$ به دست آمده است.

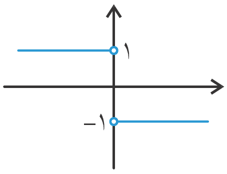
۷۴۹. گزینهٔ ۳



اگر نمودار f را ۲ واحد به بالا و نمودار g را ۲ واحد به پایین انتقال دهیم، شکل مقابل به دست می‌آید. به ازای $a=2$ داریم:

$$h(x)=\begin{cases} f(x)+2 & x<2 \\ g(x)-2 & x>2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} h(x)=\lim_{x\to 2^+} h(x)=3$$

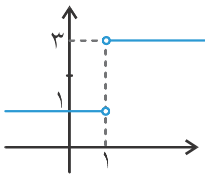
۷۵۰. گزینهٔ ۴



با توجه به نمودار تابع، داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-1$$

۷۵۱. گزینهٔ ۴



$$x>1 \Rightarrow \frac{|x-1|}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}=1 \quad , \quad x<1 \Rightarrow \frac{|x-1|}{x-1}=\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$$

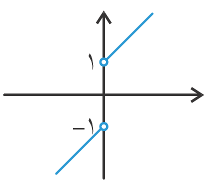
$$f(x)=2+\frac{|x-1|}{x-1} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} 3 & x>1 \\ 1 & x<1 \end{cases}$$

نمودار تابع به شکل مقابل می‌شود.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=3 \quad , \quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=1$$

چون حد چپ و راست در $x=1$ برابر نیستند، پس در $x=1$ حد وجود ندارد.

۷۵۲. گزینهٔ ۴



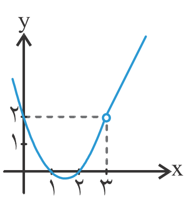
$$x>0 \Rightarrow \frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1 \quad , \quad x<0 \Rightarrow \frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1$$

$$f(x)=x+\frac{|x|}{x} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ x-1 & x<0 \end{cases}$$

نمودار تابع به شکل مقابل است. پس:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} f(x)=1 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)-\lim_{x\to 0^-} f(x)=2$$

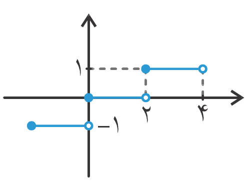
۷۵۳. گزینهٔ ۱



نمودار تابع به شکل روبه‌رو است. با توجه به شکل داریم:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=2 \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x)=2$$

۷۵۴. گزینهٔ ۱



نمودار تابع $f(x)=\left[\frac{x}{2}\right]$ به شکل مقابل است.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=1 \quad , \quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=0$$

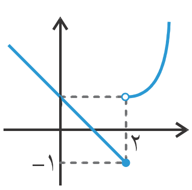
پس پاسخ مسئله ۱ است.

۷۵۵. گزینهٔ ۱

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x)=-2 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=1 \\ f(2)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)+\lim_{x\to 2^+} f(x)+f(2)=1$$

۷۵۶. گزینهٔ ۱

نمودار تابع f به شکل مقابل است:



$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^+} f(x)=1 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\lim_{x\to 2^+} f(x)}{\lim_{x\to 2^-} f(x)}=-1$$

۷۵۷. گزینهٔ ۲

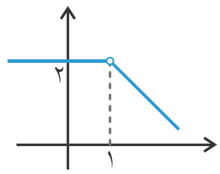
حاصل عبارت‌های $\lim\limits_{x\to ۱^+} x^۲$ و $\lim\limits_{x\to ۱^-}(-x-۱)$ به کمک رسم نمودار به‌دست می‌آیند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=a\\ \lim\limits_{x\to ۱^+} x^۲=۱\end{array}\right\}\Rightarrow a=۱$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=b\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} (-x-۱)=-۲\end{array}\right\}\Rightarrow b=-۲$$

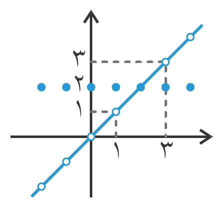
$$\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{-۲}{۱}=-۲$$

۷۵۸. گزینهٔ ۲



باید نمودار تابع به شکل مقابل باشد تا تساوی $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ برقرار باشد. بنابراین $a=۲$ پاسخ مسئله است.

۷۵۹. گزینهٔ ۴



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=۳\\ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۱\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)+\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۴$$

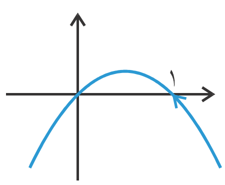
۷۶۰. گزینهٔ ۴

دامنهٔ تابع را به‌دست می‌آوریم. مقادیر x را که مخرج ۰ می‌شود را پیدا می‌کنیم:

$$\left[x^۲\right]-۱=۰\Rightarrow\left[x^۲\right]=۱\Rightarrow ۱\le x^۲<۲\Rightarrow ۱\le x<\sqrt{۲}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\left[۱,\sqrt{۲}\right)$$

با توجه به دامنه، حد چپ تابع در $x=\sqrt{۲}$ وجود ندارد، زیرا x در آن فاصله در دامنه وجود ندارد.

۷۶۱. گزینهٔ ۳



نمودار $y=x-x^۲$ را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار، هنگامی که x از راست به ۱ میل می‌کند، حاصل $x-x^۲$ به ۰ میل می‌کند ولی مقدار آن از ۰ کمتر است.

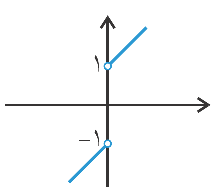
$$x\to ۱^+\Rightarrow -۱<x-x^۲<۰\Rightarrow\left[x-x^۲\right]=-۱\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱^+}\left[x-x^۲\right]=-۱$$

۷۶۲. گزینهٔ ۴

ضابطهٔ تابع $f(x)=x+\frac{|x|}{x}$ و نمودارش را در همسایگی ۰ بررسی می‌کنیم. این همسایگی را $(-۱,۱)$ در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l}۰<x<۱\Rightarrow |x|=x\Rightarrow x+\frac{|x|}{x}=x+۱\\ -۱<x<۰\Rightarrow |x|=-x\Rightarrow x+\frac{|x|}{x}=x-۱\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x+۱ & ۰<x<۱\\ x-۱ & -۱<x<۰\end{cases}$$

پس نمودار تابع به شکل مقابل می‌شود. برای حدهای چپ و راست داریم:



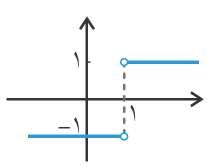
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۱\\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-۱\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)\ne \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)$$

پس در $x=۰$ حد ندارد.

۷۶۳. گزینهٔ ۴

فرض می‌کنیم $f(x)=\frac{|x-۱|}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{x^۲-۴}{x-۲}$. تابع f را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

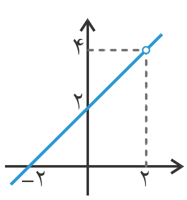
$$f(x)=\begin{cases}۱ & x>۱\\ -۱ & x<۱\end{cases}$$



نمودارش به شکل مقابل می‌شود، پس $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-۱$.

تابع g را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

$$g(x)=\frac{x^۲-۴}{x-۲}=\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=x+۲\quad (x\ne ۲)$$



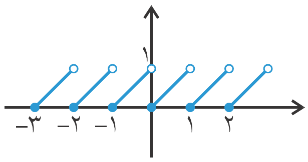
نمودارش به شکل مقابل می‌شود، پس $\lim\limits_{x\to ۲^-} g(x)=۴$.

پاسخ مسئله برابر است با:

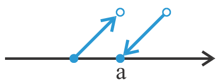
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x-1}+\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=-1+4=3$$

۷۶۴. گزینه۳

نمودار تابع $f(x)=x-[x]$ به شکل مقابل است.



اگر a عددی صحیح باشد، نمودار تابع f در همسایگی a به شکل مقابل می‌شود. بنابراین:



$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to a^+} f(x)=0\\&\lim_{x\to a^-} f(x)=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)-\lim_{x\to a^-} f(x)=-1$$

۷۶۵. گزینه۲

در همسایگی $x=1$، تابع f را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

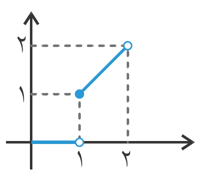
$$f(x)=\begin{cases}x^2(1-0) & 0<x<1\\ x^2(1-1) & 1\le x<2\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^2 & 0<x<1\\ 0 & 1\le x<2\end{cases}$$

۷۶۶. گزینه۴

ضابطهٔ تابع $f(x)=x[x]$ و نمودارش را در همسایگی ۱ بررسی می‌کنیم. این همسایگی $(0,2)$ فرض می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned}&0<x<1\Rightarrow [x]=0\Rightarrow x[x]=0\\&1\le x<2\Rightarrow [x]=1\Rightarrow x[x]=x\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}0 & 0<x<1\\ x & 1\le x<2\end{cases}$$

پس نمودار تابع به شکل زیر می‌شود. برای حدهای چپ و راست داریم:



$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 1^-} f(x)=0\\&\lim_{x\to 1^+} f(x)=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)\ne \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

پس در $x=1$ حد ندارد.

۷۶۷. گزینه۳

تابع $f(x)=[x]\cdot[x+1]$ را در همسایگی ۰ یعنی $(-1,1)$ بررسی می‌کنیم.

$$0\le x<1\Rightarrow [x]=0\Rightarrow [x]\cdot[x+1]=0$$

$$-1<x<0\Rightarrow [x+1]=0\Rightarrow [x]\cdot[x+1]=0$$

پس در بازهٔ $(-1,1)$ داریم $f(x)=0$. پس:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

۷۶۸. گزینه۱

$$\left.\begin{aligned}&x\to 1^+\Rightarrow x>1\Rightarrow 1+x>2\Rightarrow 1+x\to 2^+\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x+1)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=1\\&x\to 1^-\Rightarrow x<1\Rightarrow 1+x<2\Rightarrow 1+x\to 2^-\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x+1)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=2\end{aligned}\right\}\ \frac{\lim_{x\to 1^+} f(x+1)}{\lim_{x\to 1^-} f(x+1)}=\frac{1}{2}$$

توجه کنید که حاصل‌ها به کمک نمودار به‌دست آمده‌اند.

۷۶۹. گزینه۳

$$x\to \frac{1}{2}^+\Rightarrow x>\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{1}{x}<2\Rightarrow \frac{1}{x}\to 2^-\quad ,\quad \lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=3$$

توجه کنید که حاصل به کمک نمودار به‌دست آمده است.

۷۷۰. گزینه۳

$$x\to 0^-\Rightarrow x<0\Rightarrow x-1<-1\Rightarrow x-1\to -1^-\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x-1)=\lim_{x\to -1^-} f(x)=2$$

$$x\to 1^+\Rightarrow x>1\Rightarrow 2x+1>3\Rightarrow 2x+1\to 3^+\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(2x+1)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=1$$

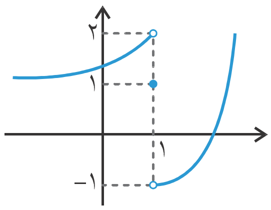
۷۷۱. گزینه۳

وقتی x با مقادیر کمتر از ۱ (یعنی از سمت چپ) به ۱ میل می‌کند، عرض شاخهٔ سمت چپ نهایتاً به ۱ می‌رسد، ولی با مقداری بیشتر از ۱، که حاصل را به‌صورت 1^+ می‌کند:

$$x\to 1^-\Rightarrow f(x)=1^+\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(f(x))=\lim_{x\to 1^+} f(x)=0$$

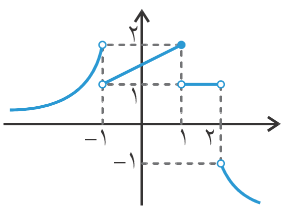
حاصل نهایی به کمک نمودار به‌دست آمده است.

۷۷۲. گزینهٔ ۳



$$\lim_{x\to 0^+} f(|x|+1)=\lim_{x\to 0^+} f(x+1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=-1$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(|x|+1)=\lim_{x\to 0^+} f(x+1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=-1$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(|x|+1)=\lim_{x\to 0^-} f(|x|+1)=-1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(|x|+1)=-1$$

۷۷۳. گزینهٔ ۳



گزینهٔ ۱ درست است زیرا: $\lim_{x\to 0^-} f(x-1)=\lim_{x\to -1^-} f(x)=2=f(1)$

گزینهٔ ۲ درست است زیرا: $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$

گزینهٔ ۴ درست است زیرا: $\lim_{x\to 2^-} f(x)=1$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=-1 \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} |f(x)|=1$$

اما گزینهٔ ۳ نادرست است زیرا $\lim_{x\to -1} f(x)$ موجود نیست.

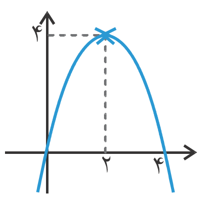
$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -1^-} f(x)=2\\ \lim_{x\to -1^+} f(x)=1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x) \text{ موجود نیست}$$

۷۷۴. گزینهٔ ۴

نکته: حاصل یک حد یا وجود ندارد یا یک عدد می‌شود، ولی هیچ‌گاه حاصل به‌صورت حدی نیست. مثلاً:

$$\lim_{x\to 2^+} 2x=4 \to \text{درست} \quad , \quad \lim_{x\to 2^+} 2x=4^+ \to \text{نادرست}$$

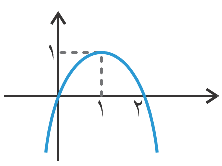
با توجه به نمودار تابع داریم:



$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=4$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=4$$
$$\Rightarrow \left[\lim_{x\to 2} f(x)\right]=[4]=4$$

۷۷۵. گزینهٔ ۴

تابع $f(x)$ را در همسایگی ۱ بررسی می‌کنیم. بازهٔ همسایگی $(0,2)$ در نظر می‌گیریم:



$$0<x<1 \Rightarrow 0<f(x)<1 \Rightarrow [f(x)]=0 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-}[f(x)]=0$$
$$1<x<2 \Rightarrow 0<f(x)<1 \Rightarrow [f(x)]=0 \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}[f(x)]=0$$
$$\lim_{x\to 1^-}[f(x)]=\lim_{x\to 1^+}[f(x)]=0 \Rightarrow \lim_{x\to 1}[f(x)]=0$$

۷۷۶. گزینهٔ ۴

$$x\to -2^- \xrightarrow{x<-2} |x|\to 2^+ \Rightarrow |x|-3\to -1^+ \Rightarrow \lim_{x\to -2^-} f(|x|-3)=-2$$

۷۷۷. گزینهٔ ۳

باید حد چپ و راست جداگانه محاسبه شود و ببینیم اگر حد وجود دارد، مقدار آن چقدر است.

$$x\to -1^+ \Rightarrow x>-1 \Rightarrow x^2<1 \Rightarrow 2x^2<2 \Rightarrow 2x^2-1<1 \Rightarrow 2x^2-1 \Rightarrow 1^- \Rightarrow \lim_{x\to -1^+} f(2x^2-1)=1$$
$$x\to -1^+ \Rightarrow x>-1 \Rightarrow x^2<1 \Rightarrow -2x^2<-2 \Rightarrow 3-2x^2>1 \Rightarrow 3-2x^2\to 1^+ \Rightarrow \lim_{x\to -1^+} f(3-2x^2)=2$$
$$\lim_{x\to -1^+} (f(2x^2-1)+f(3-2x^2))=1+2=3$$
$$x\to -1^- \Rightarrow x<-1 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow 2x^2-1>1 \Rightarrow 2x^2-1\to 1^+ \Rightarrow \lim_{x\to -1^-} f(2x^2-1)=2$$
$$x\to -1^- \Rightarrow x<-1 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow -2x^2<-2 \Rightarrow 3-2x^2<1 \Rightarrow 3-2x^2\to 1^- \Rightarrow \lim_{x\to -1^-} f(3-2x^2)=1$$
$$\lim_{x\to -1^-} (f(2x^2-1)+f(3-2x^2))=2+1=3$$

حد چپ و راست این تابع در نقطهٔ $x=-1$ با هم برابرند و مساوی ۳ هستند. پس در $x=-1$ حد وجود داشته و برابر ۳ است.

۷۷۸. گزینه۴

$$x \to -۱^- \overset{x<-۱}{\Rightarrow} x^۲ \to ۱^+ \overset{x^۲>۱}{\Rightarrow} -x^۲ \to -۱^- \Rightarrow -x^۲+۲ \to ۱^- \Rightarrow f(-x^۲+۲) \to -۲^+ \Rightarrow \lim_{x\to -۱^-} [f(-x^۲+۲)] = -۲$$

۷۷۹. گزینه۴

$$x \to -۲^+ \overset{x>-۲}{\Rightarrow} x^۲ \to ۴^- \Rightarrow [x^۲]=۳ \Rightarrow \lim_{x\to -۲^+} f([x^۲]-۲) = f(۱) = -۱$$

$$x \to -۲^+ \Rightarrow x^۲ \to ۴^- \Rightarrow x^۲-۲ \to ۲^- \Rightarrow |x^۲-۲| \to ۲^- \Rightarrow \lim_{x\to -۲^+} f(|x^۲-۲|) = -۱$$

$$\lim_{x\to -۲^+} f([x^۲]-۲) + \lim_{x\to -۲^+} f(|x^۲-۲|) = -۱-۱ = -۲$$

۷۸۰. گزینه۲

$$x \to -۱^+ \Rightarrow ۲x \to -۲^+ \Rightarrow -۲x \to ۲^- \Rightarrow [-۲x]=۱ \Rightarrow \lim_{x\to -۱^+} f(|x+۱|+[-۲x]) = \lim_{x\to -۱^+} f(|x+۱|+۱)$$

$$x \to -۱^+ \Rightarrow x+۱ \to ۰^+ \Rightarrow |x+۱| \to ۰^+ \Rightarrow |x+۱|+۱ \to ۱^+ \Rightarrow \lim_{x\to -۱^+} f(|x+۱|+۱) = ۱$$

$$x \to -۱^- \Rightarrow ۲x \to -۲^- \Rightarrow -۲x \to ۲^+ \Rightarrow [-۲x]=۲ \Rightarrow \lim_{x\to -۱^-} f(|x+۱|+[-۲x]) = \lim_{x\to -۱^-} f(|x+۱|+۲)$$

$$x \to -۱^- \Rightarrow x+۱ \to ۰^- \Rightarrow |x+۱| \to ۰^+ \Rightarrow |x+۱|+۲ \to ۲^+ \Rightarrow \lim_{x\to -۱^-} f(|x+۱|+۲) = ۲ \Rightarrow |۱-۲| = ۱$$

دقت کنید $[-۲x]$ در فرآیند حدی مثل عدد ثابت عمل می‌کند.

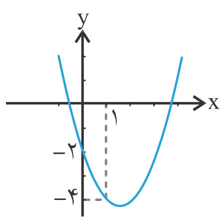
۷۸۱. گزینه۱

$$x \to ۱^+ \Rightarrow f(x) \to -۱^- \Rightarrow |f(x)| \to ۱^+ \Rightarrow \lim_{x\to ۱^+} [|f(x)|] = ۱ \quad , \quad x \to ۱^+ \Rightarrow f(x) \to -۱^- \Rightarrow [f(x)] = -۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۱^+} |[f(x)]| = ۲$$

$$x \to ۱^- \Rightarrow f(x) \to ۱^- \Rightarrow |f(x)| \to ۱^- \Rightarrow \lim_{x\to ۱^-} [|f(x)|] = ۰ \quad , \quad x \to ۱^- \Rightarrow f(x) \to ۱^- \Rightarrow [f(x)] = ۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۱^-} |[f(x)]| = ۰$$

$$\left(\lim_{x\to ۱^+} [|f(x)|] + \lim_{x\to ۱^+} |[f(x)]|\right) - \left(\lim_{x\to ۱^-} [|f(x)|] + \lim_{x\to ۱^-} |[f(x)]|\right) = ۱+۲-۰ = ۳$$

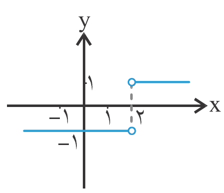
۷۸۲. گزینه۳



همان‌طور که می‌دانیم وقتی $x \to ۱$ ، آنگاه $x^۲-۳x-۲ \to -۴$ ، امّا باید متوجه شویم زمانی که $x \to ۱^+$ ، آنگاه این عبارت از چه سمتی به -۴ میل می‌کند. برای این کار نمودار $y = x^۲-۳x-۲$ را رسم می‌کنیم. همان‌طور که می‌دانید این نمودار از نوع سهمی است و در نقطه‌ای به طول $x = \frac{-b}{۲a} = \frac{۳}{۲}$ مینیمم مقدار خود را اختیار می‌کند. همان‌طور که در شکل پیداست زمانی که $x \to ۱^+$ ، $x^۲-۳x-۲$ از مقادیر کمتر از -۴ یعنی -۴^- به سمت آن میل می‌کند. بنابراین:

$$x \to ۱^+ \Rightarrow x^۲-۳x-۲ \to -۴^- \Rightarrow \lim_{x\to ۱^+} f(x^۲-۳x-۲) = ۱$$

۷۸۳. گزینه۳



$$\begin{cases} x>۲ \Rightarrow |x-۲| = x-۲ \\ x<۲ \Rightarrow |x-۲| = -x+۲ \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} ۱ & ;x>۲ \\ -۱ & ;x<۲ \end{cases}$$

نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

$$x \to ۲^- \Rightarrow f(x) \to -۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۲^-} f(f(x)) = \lim_{x\to -۱} f(x) = -۱$$

در واقع زمانی که $x \to ۲^-$ ، $f(x)$ دقیقاً برابر -۱ است و حد آن در تمامی لحظات برابر با -۱ است.

۷۸۴. گزینه۱

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = ۲ \quad , \quad x \to ۳^- \Rightarrow f(x) \to ۲^- \Rightarrow \lim_{x\to ۳^-} g(f(x)) = \lim_{x\to ۲^-} g(x) = ۰ \quad , \quad \lim_{x\to ۳^-} f(x) + \lim_{x\to ۳^-} g(f(x)) = ۲+۰ = ۲$$

۷۸۵. گزینه۲

$$\left.\begin{array}{l} x \to ۲^+ \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} ۴-x^۲ \to ۰^- \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲^+} f(۴-x^۲) = \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = b \\ x \to ۲^- \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} x^۲-۲x \to ۰^- \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x^۲-۲x) = \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = b \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to ۲^+} f(۴-x^۲) + \lim_{x\to ۲^-} f(x^۲-۲x) = ۲b$$