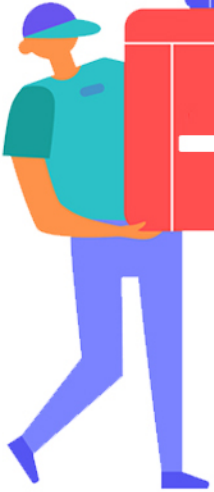


خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و ارسال رایگان

Medabook.com



هدابوک



دریافت برنامه ریزی و مشاوره

از مشاوران رتبه برتر

هوسه کنکوری آیدی نوین

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۴



فهرست

فصل اول: عبارتهای جبری

۷

جلسه اول: ریشه و توان

جلسه دوم: اتحاد و تجزیه

جلسه سوم: تعیین علامت و نامعادله

جلسه چهارم: بازه و مجموعه

۸

۱۴

۲۳

۳۰

فصل دوم: قدر مطلق و برکت، الگو و دنباله

۳۷

جلسه اول: قدر مطلق و برکت

جلسه دوم: الگو و دنباله

۳۸

۵۱

فصل سوم: هندسه تحلیلی و جبر

۶۳

جلسه اول: هندسه تحلیلی

جلسه دوم: تابع و معادله درجه دو

جلسه سوم: معادلات گنگ و گویا

۶۴

۷۰

۸۰

فصل چهارم: توابع نمایی و لگاریتمی

۸۷

جلسه اول: توابع نمایی و لگاریتمی

۸۸

فصل پنجم: تابع

۱۰۱

جلسه اول: تعریف تابع

جلسه دوم: اعمال جبری و ترکیب توابع

جلسه سوم: تابع یک به یک و تابع وارون

جلسه چهارم: رسم نمودار از روی ضابطه

۱۰۲

۱۱۵

۱۲۷

۱۳۷

فصل ششم: مثلثات

۱۵۷

جلسه اول: یادآوری مباحث پایه‌ای در مثلثات

جلسه دوم: دایره مثلثاتی

جلسه سوم: رسم توابع مثلثاتی

جلسه چهارم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

جلسه پنجم: معادلات مثلثاتی

۱۵۸

۱۶۷

۱۷۵

۱۸۹

۱۹۷

حد و پیوستگی

بررسی رفتار تابع در اطراف یک نقطه از دامنه‌اش، هدف اصلی این فصل است. در ادامه فصل به بررسی پیوستگی و در نهایت حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت می‌پردازیم. با یادگیری این فصل، درک مفهوم مشتق و مسائل مربوط به آن آسان‌تر می‌شود.

📖 **رویکرد مؤلفان کتاب درسی:** این فصل با حذف شدن مطالبی مانند مجانب‌های قائم و افقی ساده‌تر شده است. در کنکور نظام جدید، ۴ تست از این فصل طرح شده است.

🌟 **مهم‌ترین مباحث:** پیوستگی، قاعده هوییتال و ابهام بی‌نهایت بر بی‌نهایت

برای مشاهده فیلم پاسخ
به برخی از تست‌های مهم
فصل رمزینه را اسکن کنید.



جلسه اول

پایه یازدهم

حد و پیوستگی

بخش پذیری

تعریف حد
حد راست
حد چپ

از طریق نمودار

محاسبه حد
توابع شامل جزء صحیح
توابع شامل قدر مطلق
توابع مثلثاتی

تجزیه

محاسبه حدهای
کسری شامل
عبارات گنگ

حدهای رادیکالی با فرجه ۲
حدهای رادیکالی با فرجه ۳
حدهای رادیکالی با فرجه ۴

تعریف همسایگی
همسایگی محذوف
همسایگی یک طرفه

قاعده هوییتال

پیوستگی
در نقطه
روی بازه

بخش پذیری

برای تدریس این بحث می‌خواهیم سفری به دوران ابتدایی تا نهم دبیرستان داشته باشیم. می‌خواهم عدد ۱۳ را به ۵ تقسیم کنم. مراحل تقسیم را می‌نویسم:



فکر می‌کنم این روش را در سال سوم ابتدایی یاد گرفتید. در سال چهارم ابتدایی به شما یاد دادند که تقسیم خود را امتحان کنید.

مقسوم باید برابر جمع باقی‌مانده با حاصل ضرب خارج قسمت در مقسوم‌علیه باشد، یعنی: باقی‌مانده + خارج قسمت \times مقسوم‌علیه = مقسوم

$$13 = 5 \times 2 + 3$$

حالا از ابتدایی برویم به سال نهم! اگر یادتان باشد در این سال تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای را یاد گرفتید.

مثلاً یاد گرفتید که $x^2 + 2x - 1$ را بر $x + 1$ تقسیم کنید.

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x - 1 \quad | \quad x + 1 \\ - (x^2 + x) \quad \quad \quad x^2 - x + 3 \\ \hline -x^2 + 2x - 1 \\ - (-x^2 - x) \\ \hline 3x - 1 \\ - (3x + 3) \\ \hline -4 \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(x^2 - x + 3) + (-4)$$

امتحان تقسیم را می‌نویسیم:

چگونه می‌توانم باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $x^2 + 2x - 1$ را بر $x + 1$ بیابم بدون این که عملیات تقسیم را انجام دهم؟

$$x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(x^2 - x + 3) + (-4)$$

به رابطه امتحان تقسیم دقت کنید:



اگر x_0 روی دامنه f تغییر کند، می‌توانیم x_0 را با متغیر x جایگزین کنیم. در این صورت تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را این‌طور تعریف می‌کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مشروط بر آن که حد فوق موجود باشد.



آقا زیر دیپلم صحبت کنید ما هم بفهمیم! من که هیچی نفهمیدم.

اجازه بدید یک مثال دیگر بزنم.

فرض کنید می‌خواهیم مشتق تابع $f(x) = x^2 + x$ را در نقطه‌ای مانند x_0 پیدا کنیم.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^2 + (x_0+h) - (x_0^2 + x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0^2 + 2x_0h + h^2) + (x_0+h) - x_0^2 - x_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x_0 + h + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h + 1 = 2x_0 + 1 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 2x + 1$$

اگر x_0 بتواند همه مقادیر دامنه $f(x)$ را اختیار کند، می‌توان جای x_0 ، x قرار داد، یعنی:

در واقع تابع مشتق تابع $f(x) = x^2 + x$ برابر $f'(x) = 2x + 1$ است. با دانستن ضابطه تابع مشتق، دیگر نیازی به محاسبه حد نیست.

$$f'(3) = 2(3) + 1 = 7$$

مثلاً اگر بخواهیم مشتق تابع $f(x) = x^2 + x$ را در $x = 3$ بیابیم، از فرمول $f'(x) = 2x + 1$ استفاده می‌کنیم.



یعنی دیگه لازم نیست حد رو حساب کنیم؟

خیر، اگر تابع مشتق را داشته باشیم فقط کافی است x را در آن جای گذاری کنیم.

دامنه تابع مشتق

این تابع (مشتق) مانند هر تابعی دامنه‌ای دارد که می‌توان (آن) را این‌گونه تعریف کرد «دامنه تابع به استثنای نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر نیست.» به زبان ساده‌تر می‌توان نوشت:

$$D_{f'} = D_f - \{x \mid \text{f در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست}\}$$



مثلاً تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ با دامنه \mathbb{R} ، در $x = \pm 2$ مشتق‌پذیر نیست، دامنه تابع مشتق $f(x)$ برابر $D_{f'} = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$ است.

در تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، مشتق در $x = 1$ وجود ندارد و با توجه به این که دامنه تابع، بازه $[1, +\infty)$ است، دامنه تابع مشتق برابر است با:

$$D_{f'} = D_f - \{x = 1\} = [1, +\infty) - \{1\} = (1, +\infty)$$

$y = g(x)$

تست آموزشی: اگر دامنه تابع مشتق تابع $f(x) = |x-2|g(x)$ برابر \mathbb{R} و نمودار تابع $g(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، کدام k است؟

(1) -1

(2) -2

(3) -3

(4) -4

از آنجایی که دامنه تابع مشتق، برابر \mathbb{R} است، تابع $f(x)$ همواره مشتق‌پذیر است، بنابراین تابع f در $x = 2$ نیز مشتق‌پذیر است:

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|g(x) - 0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)g(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = k$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|g(x) - 0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)g(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -g(x) = -3$$

مشتق چپ و راست تابع در $x = 2$ برابرند، پس $k = -3$ است.

اتحاد $x^n - a^n$

می‌خواهیم خارج قسمت تقسیم $a^n - b^n$ را بر $a - b$ پیدا کنیم یا به عبارت دیگر می‌خواهیم $a^n - b^n$ را تجزیه کنیم. اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر را که به یاد دارید:

فلش‌بک

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

به نظر شما اگر من اتحاد $a^4 - b^4$ را بنویسم به چه صورتی خواهد شد؟



استاد پرانتز اول که تغییر نمی‌کند ولی پرانتز دوم بزرگ‌تر می‌شود. من حدس می‌زنم از a^3 شروع بشه و یکی یکی از توان a کم شه و به توان b اضافه شه. تا جایی که دیگه a از بین بره، یعنی اتحادش بشه:
 $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
 دقیقاً. با همین منطق می‌شه اتحاد $a^n - b^n$ را نوشت:



$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^{n-1})$$

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

مثال

در تجزیه $128a^7 - b^{14} = (2a - b^2) \times A$ ضریب جمله شامل a^2 در عبارت A کدام است؟

۴ $2b^4$

۳ $2b^6$

۲ $8b^2$

۱ $2b^3$



بله آقا، اگه $128a^7 - b^{14}$ رو $(2a - b^2)^7$ و b^{14} رو $(b^2)^7$ در نظر بگیریم، می‌شه گفت:
 $128a^7 - b^{14} = (2a)^7 - (b^2)^7 = (2a - b^2)((2a)^6 + (2a)^5b^2 + (2a)^4(b^2)^2 + (2a)^3(b^2)^3 + (2a)^2(b^2)^4 + (2a)(b^2)^5 + (b^2)^6)$
 $64a^6 + 32a^5b^2 + 16a^4b^4 + 8a^3b^6 + 4a^2b^8 + 2ab^{10} + b^{12}$
 حالا پرانتز دوم را ساده‌تر می‌کنیم:
 مشخص است که ضریب a^2 در این چندجمله‌ای، $2b^4$ است، پس گزینه «۴» درست است.

محاسبه مشتق برخی از توابع

بچه‌های عزیز! محاسبه حد برای تعیین مقدار مشتق کار دشوار و خسته‌کننده‌ای است، به همین دلیل قواعدی را به شما یاد می‌دهم که بدون استفاده از حد، تابع مشتق را بیابید.

۱ مشتق تابع ثابت، صفر است، مثلاً اگر $f(x) = 5$ باشد، $f'(x) = 0$ است.

۲ مشتق تابع $f(x) = x^n; n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ برابر $f'(x) = nx^{n-1}$ است، مثلاً مشتق تابع $f(x) = x^5$ برابر $f'(x) = 5x^4$ است یا مثلاً مشتق $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

برابر $f'(x) = -2x^{-3}$ است. اجازه بدهید این فرمول را برایتان ثابت کنم.

مثال ثابت کنید مشتق در هر نقطه‌ای مانند x_0 از تابع $f(x) = x^n$ برابر $f'(x) = nx^{n-1}$ است.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \dots + x_0^{n-1})}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \dots + x_0^{n-1} = x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}$$



اگه توان عددی غیر صحیح باشه چی؟ باز این رابطه درسته؟

بله، به شرط مشتق پذیر بودن تابع $f(x) = x^P; (P \in \mathbb{Q} - \{0\})$ ، مشتق آن $f'(x) = P \cdot x^{P-1}$ است. مثلاً مشتق تابع $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ برابر $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ است.

۳ مشتق تابع $f(x) = \sqrt{ax + b}$ برابر $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$ است، مثلاً مشتق تابع $f(x) = \sqrt{5x - 1}$ برابر $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x - 1}}$ است.

۴ مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{ax + b}$ برابر $f'(x) = \frac{a}{3\sqrt[3]{(ax + b)^2}}$ است، مثلاً مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{2x + 5}$ برابر $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x + 5)^2}}$ است.

۵ ضریب تأثیری در مشتق گیری ندارد! یعنی اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آن گاه $g(x) = kf(x)$ (k عددی ثابت است) نیز در $x = a$ مشتق پذیر و مشتق آن نیز برابر است با:
 $g'(x) = kf'(x)$

مثلاً مشتق تابع $f(x) = -\frac{7}{3}x^{-4} = -\frac{7}{3x^4}$ برابر $f'(x) = -\frac{7}{3}(-4x^{-5}) = \frac{28}{3x^5}$ است.

۶ اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آن گاه توابع $f \pm g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$) نیز در $x = a$ مشتق پذیرند.

۷ مشتق مجموع یا تفاضل دو تابع، برابر مجموع یا تفاضل مشتق دو تابع است.

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$



مثلاً مشتق تابع $f(x) = 3x^2 - \frac{x^5}{15}$ برابر $f'(x) = 2(3x) - \frac{5x^4}{15} = 6x - \frac{x^4}{3}$ است.

این قاعده برای محاسبه مشتق مجموع یا تفاضل سه تابع و بیشتر نیز معتبر است. برای محاسبه مشتق حاصل ضرب دو تابع، از فرمول روبه‌رو استفاده می‌کنیم:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$



مثلاً مشتق تابع $f(x) = (2x^2 + 1)(-x^2 + 7x - 2)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^2 + 1)'(-x^2 + 7x - 2) + (2x^2 + 1)(-x^2 + 7x - 2)' \\ &= 6x^2(-x^2 + 7x - 2) + (2x^2 + 1)(-2x + 7) \end{aligned}$$



استاد آگه ضرب سه تابع باشه چی؟

مشتق ضرب سه تابع یا بیشتر، به این صورت محاسبه می‌شود که: «مشتق تابع اول ضرب در سایر توابع به‌علاوه مشتق تابع دوم ضرب در سایر توابع به‌علاوه...»

$$(f \cdot g \cdot h)'(x) = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$



مثلاً مشتق تابع $f(x) = (\frac{x^2}{2} - \frac{1}{5})(x^2 - \frac{7x}{3})\sqrt{\frac{x}{5} + 2}$ برابر است با:

$$f'(x) = (\frac{2x}{2})(x^2 - \frac{7x}{3})\sqrt{\frac{x}{5} + 2} + (\frac{x^2}{2} - \frac{1}{5})(2x - \frac{7}{3})\sqrt{\frac{x}{5} + 2} + (\frac{x^2}{2} - \frac{1}{5})(x^2 - \frac{7x}{3}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{5} + 2}}$$

۹ برای محاسبه مشتق خارج قسمت دو تابع، از فرمول روبه‌رو استفاده می‌کنیم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$$



مثلاً مشتق تابع $f(x) = \frac{3x^2 - x}{x^2 + 2}$ برابر است با:

$$f'(x) = \frac{(6x - 1)(x^2 + 2) - (3x^2 - x)(2x)}{(x^2 + 2)^2}$$

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

۱۰ مشتق تابع مرکب $f \circ g$ از فرمول روبه‌رو قابل محاسبه است:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

مثال اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 + x - 3$ باشند، مشتق تابع $f \circ g(x)$ را بیابید.

با توجه به این که $g'(x) = 2x + 1$ و $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، به محاسبه مشتق خواسته شده می‌پردازیم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)) = (2x + 1) \cdot f'(x^2 + x - 3) = (2x + 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x - 3}}$$

آقا چطوری $f'(g(x))$ رو حساب کردید؟



اول ضابطه $f'(x)$ را حساب کردیم، بعد به جای x های اون $g(x)$ را قرار دادیم. این فرمول را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$(f(u))' = u' \cdot f'(u)$$



مثلاً اگر $f'(x) = 3x^2 - x$ باشد، آن گاه مشتق تابع $f(\frac{1}{x})$ به صورت زیر است:

$$\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2} \left(3\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x}\right)$$

نکته با استفاده از فرمول مشتق تابع مرکب، می‌توان فرمول مشتق‌های توابع $f(x) = x^n$ ، $f(x) = \sqrt{x}$ ، $f(x) = \sqrt[3]{x}$ و $f(x) = \frac{1}{x}$ را تعمیم و گسترش داد.



آهنگ تغییر متوسط با شیب خط قاطع و آهنگ تغییر لحظه‌ای با مفهوم مشتق در آن نقطه متناظرند. آهنگ تغییر متوسط تابع در

$$\text{بازه } [a, b] \text{ برابر است با: } \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

تست آموزشی: آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 144}$ نسبت به x روی بازه‌ای از $x = 5$ تا $x = 9$ کدام است؟
 (۱) $0/4$ (۲) $0/5$ (۳) $0/6$ (۴) $0/7$

اگر a را 5 فرض کنیم در این صورت h برابر 4 می‌شود، یعنی $[a, a+h] = [5, 5+4]$ است. آهنگ تغییر متوسط را به این صورت می‌نویسیم:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(5+4) - f(5)}{4} = \frac{\sqrt{(5+4)^2 + 144} - \sqrt{5^2 + 144}}{4} = \frac{\sqrt{225} - \sqrt{169}}{4} = \frac{15 - 13}{4} = \frac{1}{2} = 0/5$$

برای حل این سؤال می‌توانستیم از همان ابتدا بدون پیدا کردن a و h بنویسیم:

$$\frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} = \frac{\sqrt{81 + 144} - \sqrt{25 + 144}}{4} = \frac{\sqrt{225} - \sqrt{169}}{4} = \frac{15 - 13}{4} = 0/5$$

تست آموزشی: در تابع $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع نسبت به متغیر x روی بازه $[2, 2/02]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x = 2$ چقدر بیشتر است؟

- (۱) $\frac{1}{202}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{51}$ (۴) $\frac{2}{51}$

اول آهنگ تغییر متوسط رو پیدا می‌کنیم:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2/02) - f(2)}{2/02 - 2} = \frac{\frac{2/02}{2/02-1} - \frac{2}{2-1}}{0/02} = \frac{\frac{2/02}{0/02} - 2}{0/02} = \frac{\frac{2/02 - 2/04}{0/02}}{0/02} = -\frac{0/02}{1/02} \times \frac{1}{0/02} = \frac{-1}{1/02} = \frac{-100}{102}$$

بعد از تابع مشتق می‌گیریم و بهش 2 میدیم تا آهنگ تغییر لحظه‌ای رو پیدا کنیم:

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{-1}{(2-1)^2} = -1$$

چون گفته آهنگ تغییر متوسط چقدر از آهنگ تغییر لحظه‌ای بیشتره، پس آهنگ آنی رو از متوسط کم می‌کنیم:

$$-\frac{100}{102} - (-1) = -\frac{100}{102} + 1 = \frac{-100 + 102}{102} = \frac{2}{102} = \frac{1}{51}$$

آقا اون جا برای چی گفته نسبت به متغیر x ؟ تو قبلی‌ها نگفته بود!

خواست باشه در توابع $y = f(x)$ که x متغیر مستقل است همیشه آهنگ تغییر، نسبت به متغیر x می‌باشد، چه در صورت سوال قید کند چه نکند.

تست آموزشی: نقطه $M(x, y)$ بر روی منحنی به معادله $y = \sqrt{x+8}$ در حال حرکت است. T فاصله نقطه M تا مبدا مختصات است. آهنگ تغییر لحظه‌ای T در نقطه $x = 7$ کدام است؟

- (۱) $\frac{15}{16}$ (۲) $\frac{15}{8}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{5}{4}$

خوب نوبتی هم باشه، نوبت منه!

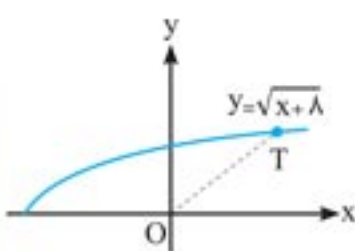
کاری نداره از y مشتق می‌گیریم و به جاش 7 رو قرار میدیم.

نه! نه! در این تست آهنگ تغییر y را نخواسته که از آن مشتق بگیریم. آهنگ تغییر T را خواسته و باید از T مشتق بگیریم.

اصلاً T وجود نداره که از چی مشتق بگیریم؟

خوب خودمان آن را می‌سازیم!

ما بسازیمش! 😊 چطوری؟



سوالات تستی



۱۱۸۶. چند نقطه روی خط $y = x + 1$ یافت می‌شود که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه $A(0, 1)$ و $B(1, 2)$ برابر ۶ باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۱۱۸۷. اگر $B(-2, -3)$ و $F(1, 1)$ به ترتیب یک رأس ناکانونی و کانون یک بیضی قائم باشند، طول وتر کانونی بیضی کدام است؟

- (۱) $\frac{32}{5}$ (۲) $\frac{18}{5}$ (۳) $\frac{25}{3}$ (۴) $\frac{32}{3}$

۱۱۸۸. اگر زاویه بین خطی که کانون و رأس ناکانونی را به هم وصل می‌کند با محور کانونی 60° باشد، طول وتر کانونی کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}b$ (۲) $2b$ (۳) $\frac{2}{\sqrt{3}}b$ (۴) $\sqrt{3}b$

۱۱۸۹. اگر فاصله یک کانون تا نزدیک‌ترین رأس به آن برابر ۱ باشد و فاصله کانون تا رأس ناکانونی برابر ۵ باشد، طول وتر کانونی بیضی کدام است؟

- (۱) $\frac{32}{5}$ (۲) $\frac{18}{5}$ (۳) $\frac{25}{3}$ (۴) $\frac{32}{3}$

۱۱۹۰. دو رأس کانونی یک بیضی $A(7, 1)$ و $A'(-3, 1)$ هستند. اگر بیضی بر محور x مماس باشد، فاصله کانونی آن چقدر است؟

- (۱) $2\sqrt{26}$ (۲) $2\sqrt{6}$ (۳) $4\sqrt{6}$ (۴) ۸

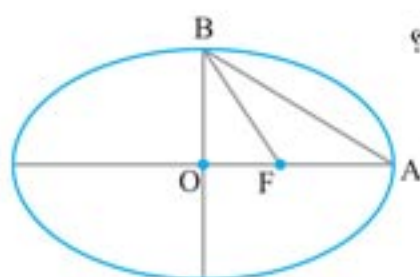
۱۱۹۱. از نقطه $M(5, 3)$ چند مماس بر بیضی با طول قطر بزرگ ۶ و فاصله کانونی $2\sqrt{5}$ و مرکز $O(2, 1)$ می‌توان رسم کرد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) دو مماس عمود بر هم (۴) دو مماس غیر عمود

۱۱۹۲. نقطه M روی محیط یک بیضی با طول قطر بزرگ ۱۰ و طول قطر کوچک ۶ تغییر مکان می‌دهد. اگر F و F' کانون‌های بیضی باشند، بیشترین

مساحت مثلث FMF' کدام است؟

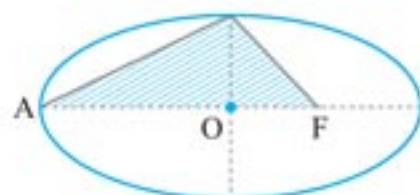
- (۱) ۱۴ (۲) ۱۸ (۳) ۲۲ (۴) ۱۲



۱۱۹۳. در شکل مقابل اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{4}{5}$ باشد، نسبت مساحت مثلث ABF به مساحت مثلث OBF کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$

- (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$



۱۱۹۴. اگر طول قطر بزرگ و کوچک بیضی ۶ و ۴ باشند، مساحت ناحیه هاشور خورده برابر کدام است؟

- (۱) $3 + \sqrt{7}$ (۲) ۴

- (۳) $3 + \sqrt{5}$ (۴) ۵

۱۱۹۵. در یک بیضی افقی به مرکز $O(3, 1)$ ، اگر طول قطر کانونی آن برابر ۱۰ و طول فاصله کانونی آن برابر ۸ باشند، آن‌گاه حاصل جمع کمترین مقدار

طول و بیشترین مقدار عرض نقاط روی محیط بیضی کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

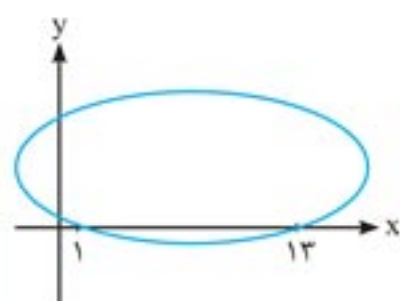
۱۱۹۶. در یک بیضی نقاط $A(6, 1)$ و $A'(-2, 1)$ دو سر قطر بزرگ و خروج از مرکز آن $\frac{\sqrt{3}}{4}$ است. محدوده تغییرات y کدام است؟

- (۱) $[-1, 3]$ (۲) $[-1, 2]$ (۳) $[-3, 1]$ (۴) $[-2, 1]$

۱۱۹۷. خروج از مرکز یک بیضی قائم برابر $\frac{4}{5}$ است. اگر نقطه $O(-4, -1)$ مرکز بیضی و طول یکی از رأس‌های ناکانونی بیضی برابر ۱ باشد، طول قطر بزرگ بیضی

کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۰



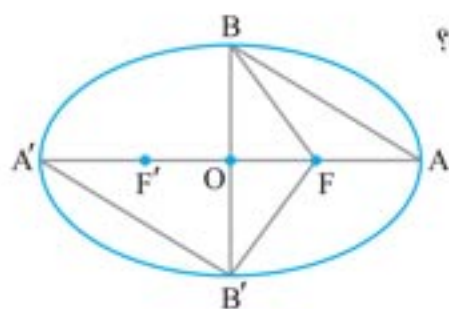
۱۱۹۸. در شکل مقابل، اگر یکی از کانون‌های بیضی باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

- (۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

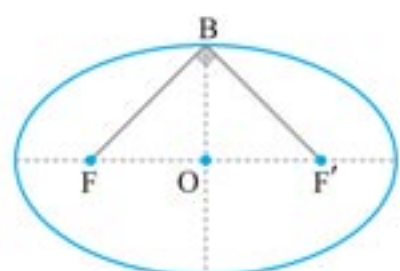
۱۱۹۹. اگر خروج از مرکز یک بیضی $\frac{1}{4}$ باشد، زاویه بین خطی که از کانون و رأس ناکانونی می‌گذرد با محور کانونی کدام است؟

- (۱) 30° (۲) 60° (۳) 45° (۴) 120°



۱۲۰۰. در شکل مقابل، مساحت مثلث $A'B'F$ ، 5 برابر مساحت مثلث BFA است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{5}$



۱۲۰۱. با توجه به شکل مقابل، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

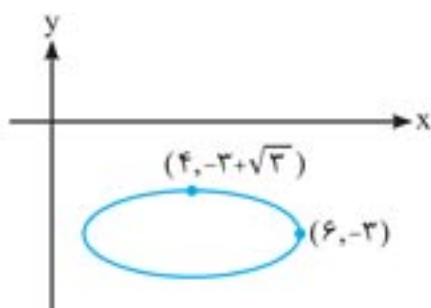
- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

۱۲۰۲. در یک بیضی فاصله مرکز تا کانون، $\sqrt{3}$ برابر فاصله مرکز تا رأس ناکانونی است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۲۰۳. اگر دو کانون بیضی با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشند، طول قطر کوچک این بیضی کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 4 (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$



۱۲۰۴. با توجه به شکل مقابل، مجموع فواصل هر نقطه از بیضی از دو کانون آن کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5

۱۲۰۵. نقطه M روی محیط یک بیضی با طول قطر بزرگ 10 و طول قطر کوچک 6 تغییر مکان می‌دهد. اگر F و F' کانون‌های بیضی باشند، محیط مثلث FMF' کدام است؟

- (۱) 14 (۲) 18 (۳) 22 (۴) مقدار ثابتی نیست.

۱۲۰۶. اگر بیشترین و کمترین فاصله دو مماس موازی که بر یک بیضی رسم می‌شوند، به ترتیب 16 و 8 باشند، فاصله کانونی بیضی کدام است؟

- (۱) $8\sqrt{3}$ (۲) $4\sqrt{3}$ (۳) 12 (۴) 6

۱۲۰۷. حاصل ضرب فاصله رأس کانونی یک بیضی از دو کانون بیضی کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}b$ (۲) $2b$ (۳) $2b^2$ (۴) b^2

۱۲۰۸. A و B دو نقطه ثابت در صفحه هستند و نقطه متحرک M در صفحه طوری حرکت می‌کند که $\frac{MA - 2MB}{MA - 4} = 3$. در این صورت بیشترین فاصله نقاط مکان هندسی نقطه M از یکدیگر کدام است؟

- (۱) 6 (۲) 4 (۳) 12 (۴) $\frac{3}{2}$

۱۲۰۹. روی یک بیضی حداکثر چند نقطه مانند M وجود دارد به طوری که $\widehat{FMF'} = 90^\circ$ باشد؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۱۲۱۰. اگر مساحت چهارضلعی $BF'B'F$ در یک بیضی برابر 24 و محیط آن برابر 20 بوده، b و c به ترتیب نصف قطر کوچک و نصف فاصله کانونی باشند، آن‌گاه حاصل $(b-c)^2$ کدام است؟ (ب و B' نقاط دو سر قطر کوچک و F و F' کانون‌های بیضی هستند.) (کانون فرهنگی آموزش)

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۱۲۱۱. در یک بیضی به مرکز $O(2,0)$ و کانون‌های $F(3,0)$ و $F'(1,0)$ و قطر بزرگ 4 ، مساحت محدود به خطوط مماس بر منحنی در هر رأس کانونی و غیر کانونی کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰ با کمی تغییر)

- (۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $8\sqrt{3}$ (۳) 8 (۴) $2\sqrt{3}$

۱.۵

راهبرد می‌دانیم که برای حل نامعادلات قدرمطلقى به فرم $|A| < |B|$ یا $|A| > |B|$ می‌توان طرفین نامعادله را به توان ۲ رساند که قدرمطلق‌ها حذف شوند و پس از مرتب کردن نامعادله به دست آمده داریم:

$$|A| < |B| \xrightarrow{\text{به توان } 2} A^2 < B^2 \Rightarrow A^2 - B^2 < 0 \Rightarrow (A-B)(A+B) < 0$$

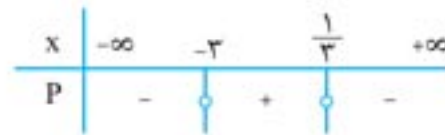
پس برای حل نامعادله $|A| < |B|$ کافی است نامعادله $(A-B)(A+B) < 0$ را حل کنیم و برای حل نامعادله $|A| > |B|$ باید نامعادله $(A-B)(A+B) > 0$ را حل کنیم.

$$\left| \frac{x-2}{2x+1} \right| > 1 \Rightarrow \frac{|x-2|}{|2x+1|} > 1 \xrightarrow{x \neq -\frac{1}{2}} |x-2| > |2x+1|$$

چون مخرج باید مخالف صفر باشد.

$$\Rightarrow (x-2-2x-1)(x-2+2x+1) > 0$$

$$\Rightarrow (-x-3)(3x-1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$



$$\Rightarrow S = (-3, \frac{1}{3}) - \{-\frac{1}{3}\} = (-3, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

۱.۶

ابتدا به کمک ویژگی $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ نامعادله را کمی ساده کرده و سپس با به توان ۲ رساندن طرفین، حل را ادامه می‌دهیم:

$$\left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1 \Rightarrow \frac{|2-x|}{|2x-3|} > 1$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین می‌کنیم}} |2-x| > |2x-3|$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان 2}} (2-x)^2 > (2x-3)^2$$

$$\Rightarrow 4+x^2-4x > 4x^2-12x+9 \Rightarrow 3x^2-8x+5 < 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 4 \xrightarrow{\text{بعد از تعیین علامت}} 1 < x < \frac{5}{3}$$

حواست باشه

در نامعادله داده شده، $x = \frac{3}{2}$ ریشهٔ مخرج است، پس دامنهٔ نامعادله به صورت $\mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ می‌باشد. با توجه به مجموعه جواب به دست آمده، $x = \frac{3}{2}$ در بازهٔ $(1, \frac{5}{3})$ قرار دارد که احتمالاً طراح محترم به این مطلب توجه نکرده‌اند، پس جواب کلی این نامعادله به صورت $\left(1, \frac{5}{3}\right) - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ می‌باشد که در بین گزینه‌ها نیست و ما همان جواب بازهٔ $(1, \frac{5}{3})$ را انتخاب کرده‌ایم.

۱.۷

روش اول:

$$2x+1-|x-2| > |x^2+1| \Rightarrow 2x+1-|x-2| > x^2+1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 2: 2x+1-x+2 > x^2+1 \Rightarrow \frac{x^2-x-2}{(x-2)(x+1)} < 0 \\ \Rightarrow -1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با } x \geq 2} x \in \emptyset \\ x < 2: 2x+1+x-2 > x^2+1 \Rightarrow \frac{x^2-3x+2}{(x-2)(x-1)} < 0 \\ \Rightarrow 1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با } x < 2} 1 < x < 2 \end{cases}$$

جواب نهایی، اجتماع دو جواب \emptyset و $1 < x < 2$ است که برابر $1 < x < 2$ می‌شود.

روش دوم: فرمول مینوع (عددگذاری): ابتدا عددی مانند $\frac{3}{2}$ را در رابطه اصلی قرار می‌دهیم:

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow 2\left(\frac{3}{2}\right)+1-|\frac{3}{2}-2| > |\frac{9}{4}+1|$$

$$\Rightarrow 4-\frac{1}{2} > \frac{13}{4} \Rightarrow \frac{7}{2} > \frac{13}{4} \Rightarrow \frac{14}{4} > \frac{13}{4} \quad \checkmark$$

چون $x = \frac{3}{2}$ در رابطه صدق کرد پس گزینه‌های «۱» و «۲» که فاقد $\frac{3}{2}$ هستند، رد می‌شوند. از طرفی $x = 0$ در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینهٔ «۳» که شامل صفر می‌باشد، رد می‌شود و لذا گزینهٔ «۴» صحیح است.

۱.۸

روش اول:

$$-1 < \frac{3x-1}{x-3} < 3 \xrightarrow{-1} -2 < \frac{3x-1}{x-3} - 1 < 2$$

$$\Rightarrow -2 < \frac{3x+1-x+3}{x-3} < 2 \Rightarrow -2 < \frac{2x+4}{x-3} < 2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2(x+2)}{x-3} \right| < 2 \xrightarrow{+2} \left| \frac{x+2}{x-3} \right| < 1$$

$$\Rightarrow |x+2| < |x-3| \xrightarrow{\text{توان 2}} x^2+4x+4 < x^2-6x+9$$

$$\Rightarrow 10x < 5 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

روش دوم: فرمول مینوع با توجه به گزینه‌ها، $x = 2$ را در نامعادله بررسی می‌کنیم:

$$-1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3 \xrightarrow{x=2} -1 < \frac{7}{-1} < 3 \Rightarrow -1 < -7 < 3$$

غیرقابل قبول

پس $x = 2$ جزء جواب‌های مسأله نباید باشد، لذا گزینهٔ «۱» پاسخ صحیح است.

۱.۹

وقتی نمودار تابع $y = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ بالاتر از نمودار تابع $y = 2x + |x|$ است، یعنی:

$$-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x + |x|$$

برای حل این نامعادله باید یک بار $x \geq 0$ و بار دیگر $x < 0$ فرض کنیم.

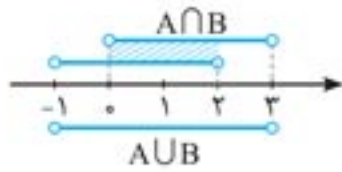
$$x \geq 0 \Rightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x + x$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} < 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 3x - 9 < 0 \Rightarrow \Delta = 121$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3-11}{4} = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2} \\ x_2 = \frac{-3+11}{4} = 2 \end{cases} \Rightarrow -\frac{7}{2} < x < 2$$

۱۱۴.

ابتدا اجتماع و اشتراک دو مجموعه را می‌یابیم. برای این کار بهتر است به نمودار محور طول‌ها بپردازیم.



$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$$

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$$

حال کافی است اشتراک را از اجتماع کم کنیم:

$$(A \cup B) - (A \cap B) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0 \text{ یا } 2 \leq x < 3\}$$

۱۱۵.

توجه کنید اگر از اعضای مجموعه \mathbb{Z} قدرمطلق بگیریم، همه اعضای آن مثبت یا صفر می‌شوند یعنی $|\mathbb{Z}| = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ بنابراین:

$$B = \{2^{|x|} \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots\} = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$$

از طرفی در مورد A داریم:

$$A = \{2^x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{2^1, 2^2, 2^3, \dots\} = \{2, 4, 8, \dots\}$$

و در نتیجه $B - A$ به مجموعه تک عضوی $\{1\}$ تبدیل می‌شود.

۱۱۶.

مجموعه‌های $(-1, 2)$ و $[-1, 2]$ زیرمجموعه مجموعه $[-1, 2]$ است. توجه کنید مجموعه $\{\emptyset\}$ تهی نیست!

۱۱۷.

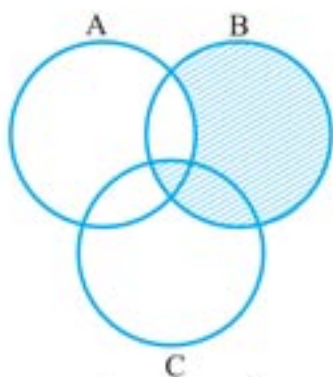
فلش‌بک تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی 2^n است. اگر به اعضای یک مجموعه n عضوی یک عضو دیگر اضافه کنیم، تعداد اعضای آن $n+1$ می‌گردد. پس اگر قبلاً تعداد زیرمجموعه‌ها 2^n بوده، تعداد زیرمجموعه‌های

$$\frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n \times 2^1}{2^n} = 2$$

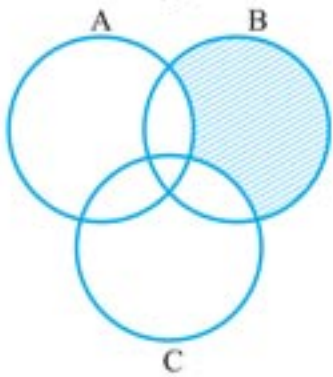
مجموعه جدید 2^{n+1} است.

۱۱۸.

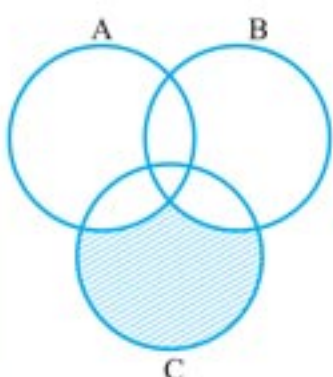
با توجه به این که همه گزینه‌ها شامل $A \cap B \cap C$ یعنی قسمت مشترک سه مجموعه هستند، بهتر است در هر گزینه فقط قسمت‌های متفاوت را بررسی کنیم.



گزینه ۱: $B - (A \cap C)$



گزینه ۲: $(B - A) - C$



گزینه ۳: $(C - B) - A$

اشتراک با شرط $x \geq 0$ بازه $[0, 1)$ است.

$$x < 0 \Rightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x - x \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} < 0$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 3x - 9 < 0 \Rightarrow \Delta = 81$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3-9}{4} = -3 \\ x_2 = \frac{-3+9}{4} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow -3 < x < \frac{3}{2}$$

اشتراک با شرط $x < 0$ بازه $(-3, 0)$ است.

اجتماع مجموعه جواب‌ها $-3 < x < 1$ و مرکز بازه -1 است.

۱۱۰.

بالاتر بودن تابع $y = \sqrt{5+4x-x^2}$ از $y = |x-3|+2$ یعنی حل نامعادله $\sqrt{5+4x-x^2} > |x-3|+2$ اکنون باید این نامعادله را از روش تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق و حالت‌بندی آن حل کنیم.

$$\text{الف) } x \geq 3 \xrightarrow{\begin{matrix} (x-3) \geq 0 \\ |x-3| = x-3 \end{matrix}} \sqrt{5+4x-x^2} > x-1$$

$$\xrightarrow{\text{مجنور طرفین}} 5+4x-x^2 > x^2-2x+1$$

$$\Rightarrow 2x^2-6x-4 < 0 \Rightarrow x^2-3x-2 < 0 \Rightarrow \Delta = 17$$

$$\Rightarrow \frac{3-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{17}}{2} \xrightarrow{\begin{matrix} \text{اعمال شرط} \\ \text{اولیه } x \geq 3 \end{matrix}} 3 \leq x < \frac{3+\sqrt{17}}{2} \quad ①$$

$$\text{ب) } x \leq 3 \xrightarrow{\begin{matrix} (x-3) \leq 0 \\ |x-3| = -x+3 \end{matrix}} \sqrt{5+4x-x^2} > -x+5$$

$$\xrightarrow{\text{مجنور طرفین}} 5+4-x^2 > x^2-10x+25$$

$$\Rightarrow 2x^2-14x+20 < 0 \Rightarrow x^2-7x+10 < 0 \Rightarrow 2 < x < 5$$

$$\xrightarrow{\text{اعمال شرط}} 2 < x \leq 3 \quad ②$$

$$\Rightarrow \text{جواب اصلی} = A \cup B = \left[3, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) \cup (2, 3] = \left(2, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$$

۱۱۱.

x	$-\infty$	-3	-1	2	$+\infty$
$x+1$	-		-		+
$f(x)$	-		+		+
$(x+1)f(x)$	+		-		+

$$\Rightarrow D = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty) \cup \{-1\} \Rightarrow \mathbb{R} - (-3, 2)$$

۱۱۲.

با توجه به شکل $A \subseteq B$ است، بنابراین $A - B = \emptyset$ است و نیازی به محاسبه این عبارت به کمک اعضا نیست.

$$C - A = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\} - \{3, 4\} = \{1, 2, 7, 8, 9\}$$

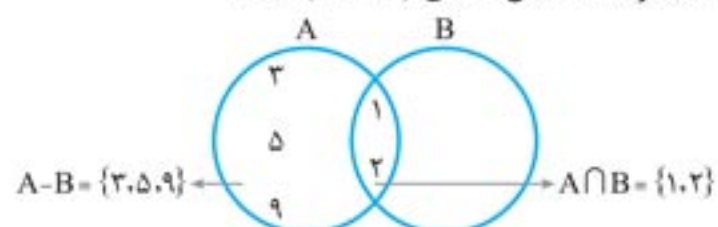
همان‌طور که می‌بینید این مجموعه پنج عضو دارد.

۱۱۳.

بهتر است حل این سؤال را به کمک شکل شروع کنیم.

اکنون چون $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ می‌باشد، متوجه می‌شویم که عدد ۴ تنها عددی است که فقط عضو B است.

در نتیجه مجموعه B شامل اعضای $\{1, 2, 4\}$ است.



$$A - B = \{3, 5, 9\} \quad A \cap B = \{1, 2\}$$

۱۲۴

ابتدا باید کمترین و بیشترین مقادیر بازه $[-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$ را به x در عبارت $\frac{3-2x}{2}$ بدهیم تا بیشترین و کمترین مقدار عبارت $\frac{3-2x}{2}$ پیدا شود.

$$x = -\frac{1}{3} : \frac{3-2(-\frac{1}{3})}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

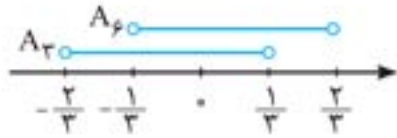
$$x = \frac{5}{3} : \frac{3-2(\frac{5}{3})}{2} = \frac{3-5}{2} = -1$$

بنابراین بیشترین و کمترین مقادیر عبارت مطلوب به ترتیب ۲ و -۱ می‌باشند، پس بازه حاصل $[-1, 2]$ است.

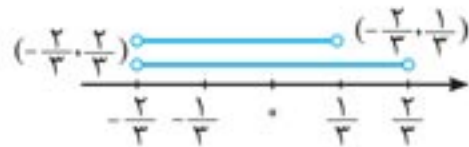
تذکر از آن جایی که خود $x = -\frac{1}{3}$ در بازه $[-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$ وجود ندارد پس

عدد ۲ هم که حاصل قرار دادن $x = -\frac{1}{3}$ در عبارت $\frac{3-2x}{2}$ بوده، وجود ندارد و بازه در ۲ باید باز باشد.

۱۲۵



$$A_r = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), A_e = (-\frac{2}{6}, \frac{4}{6}) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

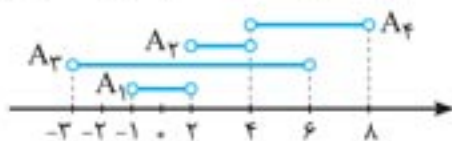


$$A_r \cup A_e = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \Rightarrow (A_r \cup A_e) - A_r$$

$$= (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) - (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

۱۲۶

با توجه به تعریف A_1, A_2, A_3, A_4 مجموعه‌های A_1, A_2, A_3, A_4 را می‌نویسیم:



$$A_1 = (-1, 2), A_2 = (2, 4), A_3 = (-3, 6), A_4 = (4, 8)$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = (-3, 8)$$

اعداد صحیح این بازه عبارتند از: $\{-3, -1, 0, 1, 2, \dots, 7\}$

پس ۱۰ عدد صحیح متعلق به این بازه است.

۱۲۷

با استفاده از قوانین مجموعه‌ها داریم و توجه به این که اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه $B' \subseteq A'$ است.

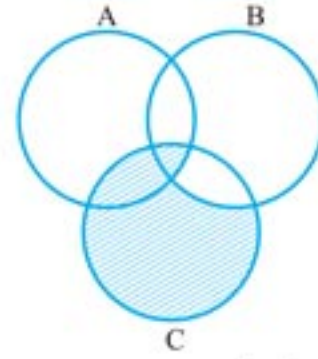
بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: $(A - B')' = (A \cap B)' = A'$

گزینه ۲: $(A - (B' \cap A'))' = (A - B')' = (A \cap B)' = A'$

گزینه ۳: $B' \cup A' = A'$

گزینه ۴: $A - (A' - B) = A - (A' \cap B') = A - B' = A \cap B = A$

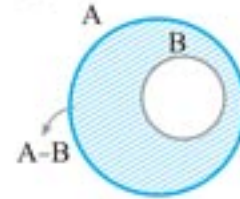


گزینه ۴: $C - (B - A)$

با توجه به نمودارها مشخص می‌گردد گزینه «۲» صحیح است.

۱۱۹

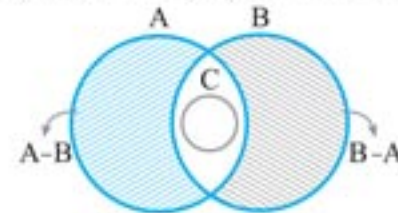
از آن جایی که $A \cup B = A$ است، بنابراین B زیر مجموعه A است. حال به کمک شکل، حاصل عبارت خواسته شده را می‌یابیم. از آنجا که $B \subseteq A$ ، پس $A \cap B = B$ است. کافی است $A - B$ را هاشور بزیم.



همان طور که می‌بینید اجتماع قسمت هاشور خورده با $A \cap B$ که همان B است، مجموعه A را به طور کامل پوشش می‌دهد و $(A \cap B) \cup (A - B) = A$ می‌شود.

۱۲۰

با توجه به این که $C \subseteq A \cap B$ نمودار این سه مجموعه به صورت مقابل است:



همان طور که می‌بینید $C \subseteq (B - A) \cup (A - B)$ و $C \subseteq A - B, C \subseteq B - A$ می‌باشند و فقط C می‌تواند زیر مجموعه $A \cup B$ باشد.

۱۲۱

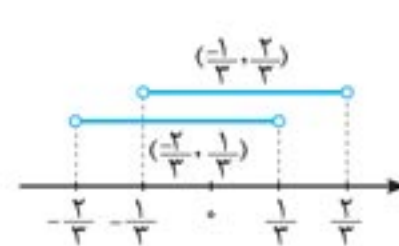
با توجه به مطالب درسنامه می‌توان گفت قسمت «الف» و «ب» درست هستند ولی قسمت‌های «ب» و «ت» درست نیستند، یعنی در مورد $A - B = \emptyset$ نمی‌توان قطعاً گفت $A = B$ است چرا که مثلاً ممکن است $A \subseteq B$ باشد.

همین طور از این که قسمت مشترک A و B با قسمت مشترک A و C برابر است نمی‌توان نتیجه گرفت $B = C$ است.

نکته نمی‌توان از طرفین یک تساوی چیزی را خط زد، یعنی:

$$A \cap C = A \cap B \not\Rightarrow C = B$$

۱۲۲



$$A_r = (-\frac{2}{3}, \frac{2-2}{3}) = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

$$A_e = (-\frac{2}{6}, \frac{6-2}{6}) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

$$(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

۱۲۳

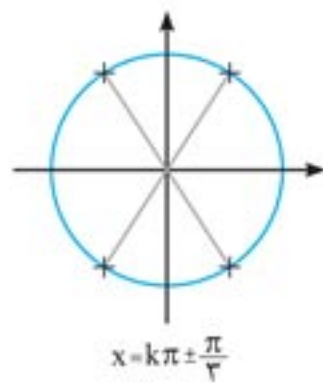
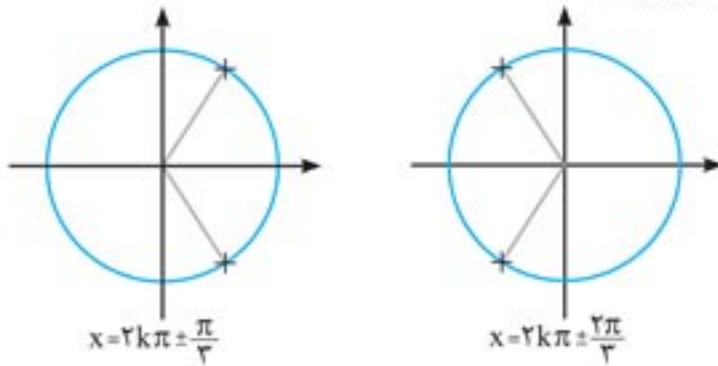
$$\begin{cases} -a > 1 \Rightarrow a < -1 \\ 2a + 7 > -a \Rightarrow a > -\frac{7}{3} \end{cases} \xrightarrow{\cap} -\frac{7}{3} < a < -1$$

یا

$$\begin{cases} 2a + 7 < -1 \Rightarrow a < -4 \\ 2a + 7 > -a \Rightarrow a > -\frac{7}{3} \end{cases} \xrightarrow{\cap} \emptyset$$

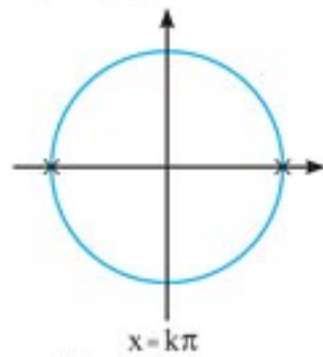
جواب $-\frac{7}{3} < a < -1$ است که فقط یک عدد صحیح در آن وجود دارد.

تذکر کسینوس زاویه $(\frac{\pi}{3})$ برابر $\frac{1}{2}$ و کسینوس زاویه $(\frac{2\pi}{3})$ برابر $(-\frac{1}{2})$ است. بین جواب‌های به دست آمده، اجتماع می‌گیریم. (همه جواب‌ها را روی هم می‌ریزیم).

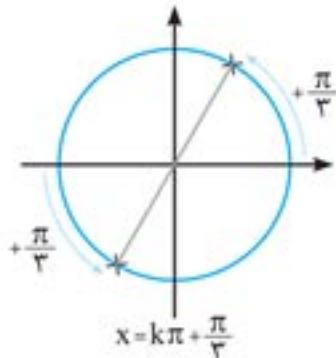


پس جواب کلی معادله به صورت $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ می‌شود.

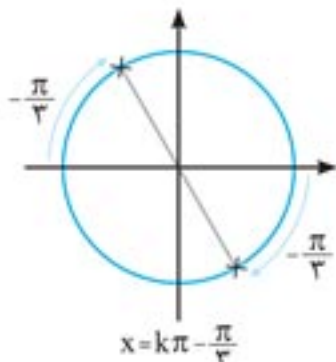
برای توضیح بیشتر نقاط معادله $x = k\pi$ بر روی دایره مثلثاتی به صورت زیر است:



اگر این دو نقطه را در جهت مثبت به اندازه $\frac{\pi}{3}$ حرکت دهیم، به معادله $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$ و شکل زیر می‌رسیم:



اگر این دو نقطه را در جهت منفی به اندازه $(\frac{\pi}{3})$ حرکت دهیم، به معادله $x = k\pi - \frac{\pi}{3}$ و شکل زیر می‌رسیم:



بنابراین در این حالت نیز جواب کلی معادله برابر $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ است.

روش اول: با فرض $\cos 2x \neq 0$ ، طرفین تساوی را بر $\cos 2x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\cos 2x + \sin 2x}{\cos 2x} = 0 \Rightarrow 1 + \tan 2x = 0 \Rightarrow \tan 2x = -1$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

روش دوم:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \text{ و } \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$$

فلش‌بک

با توجه به یادآوری فوق در معادله $\cos 2x + \sin 2x = 0$ داریم:

$$\cos 2x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = \sin(-2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x = 2k\pi + (\frac{\pi}{2} - 2x) \Rightarrow 0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad * \\ -2x = (2k+1)\pi - (\frac{\pi}{2} - 2x) \Rightarrow -2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow -4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

تذکر در دایره مثلثاتی نقاط نشان‌دهنده $\frac{k\pi}{2} + \alpha$ با $-\frac{k\pi}{2} + \alpha$ یکی هستند. به این دلیل که k عددی صحیح است و اگر پشت آن منفی هم قرار بگیرد باز عدد صحیح است.

$$\text{بنابراین، داریم: } x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

۰۷۲۷

راهبرد در حل معادلات مثلثاتی که در آن‌ها کسینوس توان ۱ و

سینوس توان ۲ دارد، با اتحاد $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ سینوس را به کسینوس تبدیل می‌کنیم، در نتیجه معادله به صورت یک معادله درجه دو در می‌آید که باید آن را حل کنیم. اگر در معادله، سینوس توان ۱ و کسینوس توان ۲ داشت، کسینوس را به سینوس تبدیل و معادله را حل می‌کنیم.

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 2\cos^2 x + 3\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$

با فرض این که $-1 \leq t \leq 1$ باشد، کسینوس را مساوی t در نظر می‌گیریم:

$$2t^2 - 3t - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2)(-2) = 25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{3 + \sqrt{25}}{4} = 2 \quad * \\ t_2 = \frac{3 - \sqrt{25}}{4} = -\frac{1}{2} \quad \checkmark \end{cases}$$

$t = 2$ غیرقابل قبول است، چون در بازه $[-1, 1]$ قرار ندارد. کسینوس $\frac{\pi}{3}$ برابر $\frac{1}{2}$ است، بنابراین کسینوس $(\pi - \frac{\pi}{3})$ برابر $-\frac{1}{2}$ می‌شود:

$$t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

۰۷۲۸

برای ساده کردن معادله، از اتحاد $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ استفاده می‌کنیم:

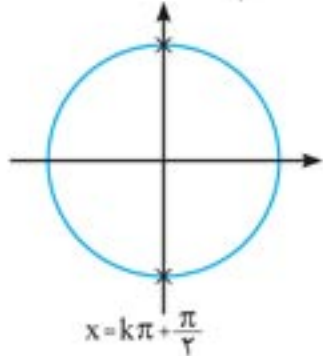
$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + 2\cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

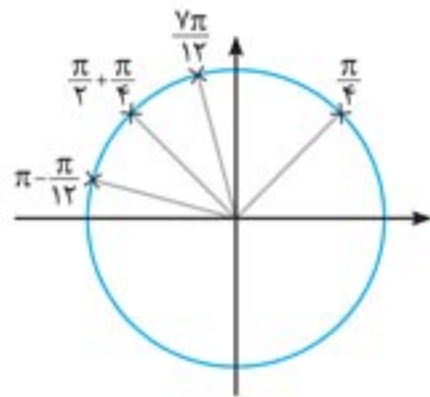
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad ① \\ 2\sin 2x + 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin(-\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ 2x = (2k+1)\pi - (-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

تذکر کسینوس در نقاط $k\pi + \frac{\pi}{2}$ که در دایره مشخص شده‌اند، صفر می‌شود:



با توجه به جواب‌های به دست آمده به k اعداد صحیح می‌دهیم و جواب‌های موجود را در بازه $[0, \pi]$ (که به صورت زیر می‌شوند) با هم جمع می‌کنیم:



$$\text{مجموع جوابها} = \frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{2}$$

۷۲۱

$$\sin(x + \frac{\pi}{\lambda}) + \cos(x - \frac{3\pi}{\lambda}) = 1 \quad ①$$

$$\begin{cases} \alpha = x + \frac{\pi}{\lambda} \\ \beta = x - \frac{3\pi}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow \alpha - \beta = x + \frac{\pi}{\lambda} - x + \frac{3\pi}{\lambda} = \frac{4\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادله}} \sin \alpha + \cos \beta = 1$$

$$\sin(\beta + \frac{\pi}{2}) + \cos \beta = 1 \Rightarrow 2\cos \beta = 1 \Rightarrow \cos \beta = \frac{1}{2}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(x - \frac{3\pi}{\lambda}) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$x - \frac{3\pi}{\lambda} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{17\pi}{24} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{24} \end{cases}$$

تنها جواب‌هایی که در بازه $[0, 2\pi]$ واقعند، $\frac{\pi}{24}$ و $\frac{17\pi}{24}$ می‌باشند.

$$\text{مجموع جوابها} = \frac{\pi}{24} + \frac{17\pi}{24} = \frac{2\pi}{4}$$

۷۲۹

در سمت چپ تساوی و در کمان کسینوس، زاویه $\frac{\pi}{3}$ وجود دارد. پس نسبت مثلثاتی به سینوس تغییر می‌کند، از طرفی انتهای کمان $(\frac{\pi}{3} - x)$ در ربع اول دایره مثلثاتی قرار دارد. در نتیجه علامت کسینوس مثبت است:

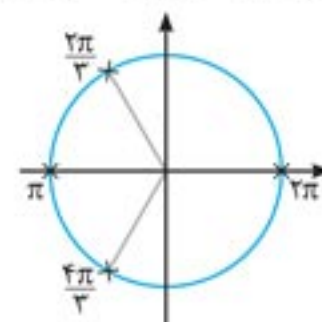
$$\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{3} - x) = 0 \Rightarrow \sin 2x + \sin x = 0$$

در ادامه از دو روش مسئله را حل می‌کنیم:
روش اول:

$$\sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\sin x \Rightarrow \sin 2x = \sin(-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - x \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \\ 2x = (2k+1)\pi - (-x) \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

به k اعداد صحیح می‌دهیم و جواب‌هایی را که در بازه $[0, 2\pi]$ هستند، با هم جمع می‌کنیم:



$$\Rightarrow \text{مجموع جوابها} = \frac{2\pi}{3} + \pi + \frac{4\pi}{3} + 2\pi = 5\pi$$

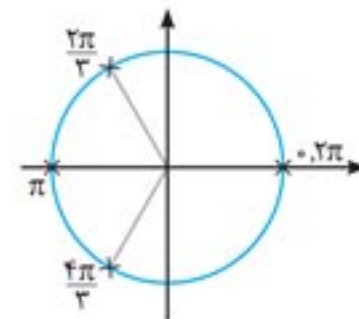
روش دوم: در این روش از اتحاد $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow 2\sin x \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ 2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

به k اعداد صحیح می‌دهیم و جواب‌هایی را که در بازه $[0, 2\pi]$ هستند، با هم جمع می‌کنیم:



$$\Rightarrow \text{مجموع جوابها} = \frac{2\pi}{3} + \pi + \frac{4\pi}{3} + 2\pi = 5\pi$$

۷۳۰

سمت راست تساوی را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$\sin 4x = \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \sin 4x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

در سمت راست تساوی از اتحاد $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ و در سمت چپ تساوی از اتحاد $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ استفاده می‌کنیم، با این تفاوت که $4x$ برابر 2α و متناظر با آن $2x$ برابر α است:

$$\sin 4x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) \Rightarrow 2\sin 2x \cos 2x = -\cos 2x$$

$$\Rightarrow 2\sin 2x \cos 2x + \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x(2\sin 2x + 1) = 0$$