خرید کتاب های کنکور
با تخفیف ویژه
و
ارسال رایگان
Medabook.com
مدابوک
دریافت برنامه ریزی و مشاوره
از مشاوران رتبه برتر
موسسه کنکوری آیدی نوین
۰۲۱ ۲۸۴۲۵۴

درسنامه ۱

توابع چندجمله‌ای ـ توابع صعودی و نزولی

توابع چندجمله‌ای

توابعی را که ضابطهٔ آن‌ها، چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر باشند، توابع چندجمله‌ای می‌گوییم. به عبارت دیگر به تابع با ضابطهٔ $f(x)=a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱ x+a_۰$ که در آن $a_۰$، $a_۱$، … و a_n اعداد حقیقی، $a_n \neq ۰$ و $n\in \mathbb{W}$، تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌گوییم.

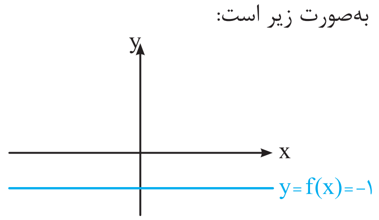
نکته

دامنهٔ توابع چندجمله‌ای برابر مجموعهٔ اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ خواهد بود.

به طور مثال هر یک از توابع مقابل یک تابع چندجمله‌ای با دامنهٔ $\mathbb{R}$ می‌باشند: $g(x)=-۳x^۲+۵x+۱$ $\quad$ $f(x)=۲x^۵-۴x^۳-\frac{۱}{۲}x+۳$

انواع توابع چندجمله‌ای که تا به حال با آن‌ها آشنا شده‌ایم به‌صورت زیر می‌باشند:

۱) تابع چندجمله‌ای از درجهٔ صفر که به آن تابع ثابت می‌گوییم. ضابطهٔ تابع ثابت به‌صورت $f(x)=a$ است که در آن a یک عدد حقیقی دلخواه است. نمودار تابع ثابت به‌صورت یک خط به موازات محور xها می‌باشد. به عنوان مثال، نمودار تابع $f(x)=-۱$ به‌صورت زیر است:



۲) تابع چندجمله‌ای از درجهٔ یک که به آن تابع خطی می‌گوییم. ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=ax+b$، $a\neq ۰$ می‌باشد. نمودار آن یک خط راست است و برای رسم آن از دو نقطهٔ دلخواه روی آن استفاده می‌کنیم.

۳) تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۲ که ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=ax^۲+bx+c$، $a\neq ۰$، است. نمودار تابع درجه ۲ را سهمی می‌گوییم و برای رسم آن باید رأس سهمی را مشخص کنیم:

$$S\left(x=-\frac{b}{۲a}, f\left(-\frac{b}{۲a}\right)=-\frac{\Delta}{۴a}\right)$$

اگر $a>۰$، سهمی رو به بالا و اگر $a<۰$، آن‌گاه سهمی رو به پایین است.

نکته

می‌توان در صورت امکان، محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات را مشخص کرد.

مثال

نمودار تابع درجه دوم به معادلهٔ $f(x)=-x^۲+۶x-۵$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا مختصات رأس سهمی را مشخص می‌کنیم:

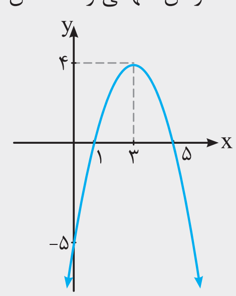
$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۶}{۲(-۱)}=۳ \Rightarrow y=f(۳)=-۹+۱۸-۵=۴$$

$$x=۰\Rightarrow y=-۵ \;,\; y=۰\Rightarrow -x^۲+۶x-۵=۰ \xrightarrow{\times(-۱)} x^۲-۶x+۵=۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)(x-۵)=۰ \Rightarrow x=۱ \text{ یا } x=۵$$

S

x	۱	۳	۵
y	۰	۴	۰

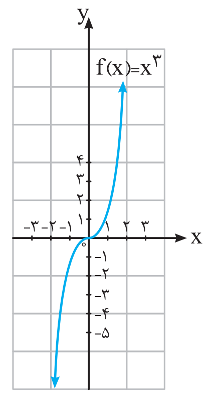


درسنامه ۱

تابع درجه ۳

تابع چندجمله‌ای با ضابطهٔ $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ ،$(a \neq ۰)$ یک تابع درجهٔ ۳ است. دامنه و برد این تابع برابر $\mathbb{R}$، مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

نمودار تابع $y = x^۳$ به کمک نقطه‌یابی به‌صورت زیر است:



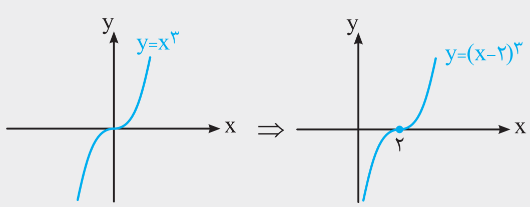
x	$f(x) = x^۳$
۲-	۸-
۱-	۱-
$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۸}$
۰	۰
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۸}$
۱	۱
۲	۸

با اطلاعاتی که داریم، نمی‌توان نمودار تابع درجه ۳ را در حالت کلی رسم کرد اما می‌توان نمودار برخی از توابع درجه سوم را با استفاده از انتقال، قرینه و... به کمک نمودار $y = x^۳$ رسم کرد.

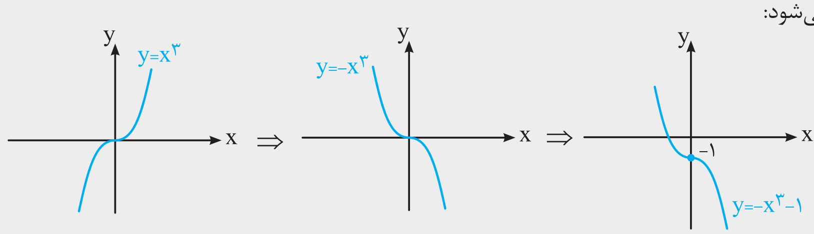
مثال **نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.**

آ) $y = (x - ۲)^۳$ ب) $y = -x^۳ - ۱$

پاسخ: آ) اگر نمودار $y = x^۳$ را دو واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y = (x - ۲)^۳$ به‌دست می‌آید.



ب) ابتدا نمودار $y = x^۳$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -x^۳$ به‌دست آید. با انتقال نمودار $y = -x^۳$ به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین، نمودار $y = -x^۳ - ۱$ رسم می‌شود:

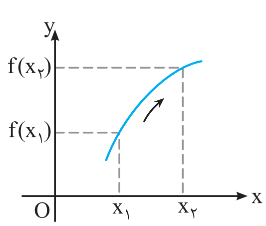


توابع صعودی و نزولی

تعریف: اگر D بازه‌ای در دامنهٔ تابع f باشد، می‌گوییم f در بازهٔ D اکیداً صعودی است هرگاه برای هر $x_۱, x_۲ \in D$ داشته باشیم:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$$

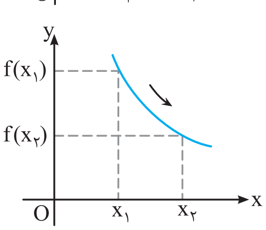
در نمودار مقابل، وقتی مقدار x در دامنهٔ تابع f افزایش می‌یابد، مقدار y نیز افزایش می‌یابد.



تعریف: می‌گوییم f در بازهٔ D اکیداً نزولی است، هرگاه برای هر $x_۱, x_۲ \in D$ داشته باشیم:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۲) < f(x_۱)$$

در نمودار مقابل، وقتی مقدار x در دامنهٔ f افزایش می‌یابد، مقدار y کاهش می‌یابد.



درسنامه ۱

تعریف: به تابعی که فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم.

تعریف: تابع f روی بازهٔ D صعودی است اگر و فقط اگر برای هر $x_1, x_2 \in D$:

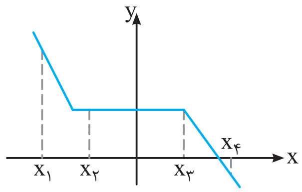
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

و تابع f روی بازهٔ D نزولی است اگر و تنها اگر برای هر $x_1, x_2 \in D$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \le f(x_1)$$

در نمودار مقابل، با افزایش مقدار x در دامنهٔ تابع f، مقدار y یا کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) = f(x_3) > f(x_4)$$



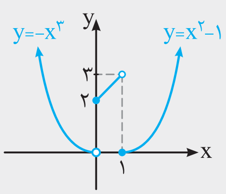
تعریف: به تابعی که فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.

تعریف: تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. با توجه به تعریف، تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

مثال

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \ge 1 \\ x + 2 & 0 \le x < 1 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$ **را رسم کنید و مشخص کنید تابع f در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی است.**

پاسخ: با رسم سهمی $y = x^2 - 1$ در بازهٔ $[1, +\infty)$، خط $y = x + 2$ در بازهٔ $[0, 1)$ و تابع درجه سوم $y = -x^3$ در بازهٔ $(-\infty, 0)$، نمودار تابع f به‌صورت مقابل رسم می‌شود:

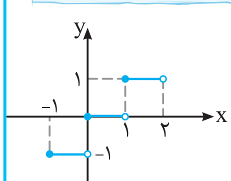


با توجه به نمودار تابع f، تابع f روی بازهٔ $(-\infty, 0)$، تابعی اکیداً نزولی، روی بازهٔ $[0, 1)$، تابعی اکیداً صعودی و در بازهٔ $[1, +\infty)$، تابعی اکیداً صعودی است.

نکته

تفاوت نمودار توابع اکیداً یکنوا و توابع یکنوا در این است که در توابع یکنوا قسمتی از نمودار یا تمام نمودار می‌تواند خطی به موازات محور x ها باشد.

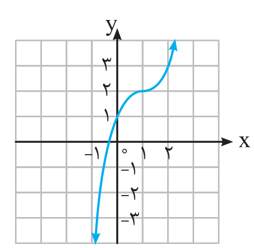
به عنوان مثال، تابع $y = [x]$ که نمودار آن به‌صورت مقابل است، تابعی یکنوا است ولی اکیداً یکنوا نمی‌باشد.



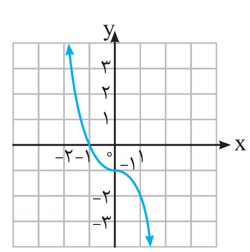
سؤالات امتحانی

۱. **ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.** (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۵ کتاب درسی)

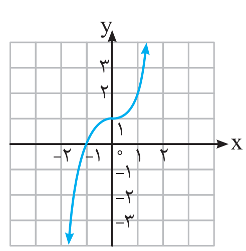
آ) $y = x^3 + 1$ ب) $y = -x^3 - 1$ پ) $y = (x-1)^3 + 2$ ت) $y = (x+1)^3 - 1$



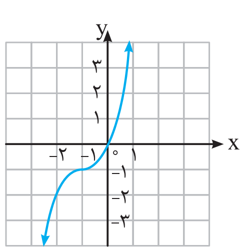
(۱)



(۲)



(۳)



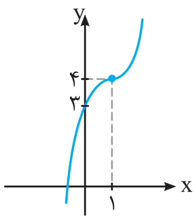
(۴)

۲. **نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.** (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

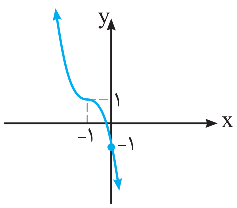
آ) $y = x^{۳} - ۱$ ب) $y = -x^{۳} - ۲$ پ) $y = (x+۲)^{۳} - ۱$

ت) $y = (x-۱)^{۳} + ۲$ ث) $y = -(x-۱)^{۳} - ۱$ ج) $y = x^{۳} + ۳x^{۲} + ۳x$

۳. **نمودار تابع $y = a(x-b)^{۳} + c$ به‌صورت مقابل است. مقادیر a، b و c را مشخص کنید.**



۴. **نمودار تابع $f(x) = a(x+b)^{۳} + c$ به‌صورت مقابل است. مقدار $f(۱)$ را به‌دست آورید.**



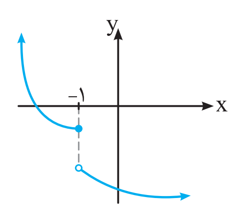
۵. **نمودار تابع $f(x) = x^{۳}$ را به اندازهٔ ۲ واحد به سمت چپ و سپس به اندازهٔ ۵ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟**

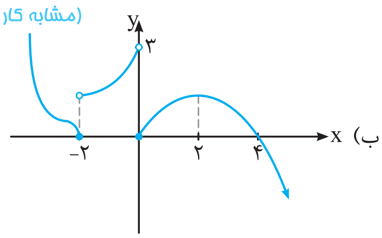
۶. **نمودار $f(x) = x^{۳}$ را ابتدا به اندازهٔ یک واحد به سمت راست و سپس به اندازهٔ ۷ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g حاصل شود. نمودار توابع f و g با چه طول‌هایی همدیگر را قطع می‌کنند؟**

۷. **تابع چندجمله‌ای از درجهٔ دوم f مفروض است. اگر $f(۰) = ۲$، $f(۱) = ۰$ و $f(-۱) = ۱۰$ باشند، ضابطهٔ f را مشخص کنید.**

۸. **تابع چندجمله‌ای از درجهٔ سوم f مفروض است. اگر ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$، $x = -۱$، $x = -۲$ و $x = ۲$ باشند و $f(۰) = -۴$، مقدار $f(۳)$ را به‌دست آورید.**

۹. **در هر کدام از توابع زیر، مشخص کنید در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی (صعودی) و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی (نزولی) هستند.** (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۸ کتاب درسی)





۱۰. آ) روی بازهٔ $[۰,۲]$ نمودار یک تابع را رسم کنید که روی بازهٔ $[۰,۱]$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $[۱,۲]$ اکیداً نزولی باشد.

ب) روی بازهٔ $[-۱,۱]$ نمودار تابعی را رسم کنید که روی بازهٔ $(-۱,۰]$ و $[۰,۱]$ اکیداً صعودی باشد ولی روی بازهٔ $[-۱,۱]$ اکیداً صعودی نباشد.

۱۱. **نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.** (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

$$f(x) = \begin{cases} x+۱ & x < -۲ \\ ۱ & -۲ < x < ۱ \\ -۲x & x > ۱ \end{cases}$$

۱۲. **نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.**

آ) $f(x) = -x^{۲} + ۴x$ ب) $f(x) = x + |x|$ پ) $f(x) = \sqrt[۳]{x}$ ت) $f(x) = \dfrac{۱}{x}$

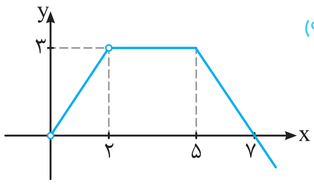
ث) $f(x) = -x^{۳} + ۲$ ج) $f(x) = ۲^{x} - ۲$ چ) $f(x) = \log_{۳} x$ ح) $f(x) = x^{۲}|x|$

خ) $f(x) = \cos x \,,\, x \in [-\pi, ۲\pi]$

۱۳. **ضابطهٔ تابعی را بنویسید که در دامنهٔ خود غیریکنوا باشد.**

۱۴. نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (نهایی ـ خرداد ۹۱)

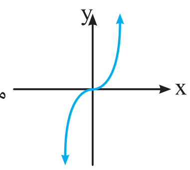
تابع در بازهٔ .... اکیداً صعودی و در بازهٔ .... اکیداً نزولی و در بازهٔ $[0,5]$، .... است.



پاسخ‌های تشریحی

۱

آ) اگر نمودار $y=x^3$ که به‌صورت



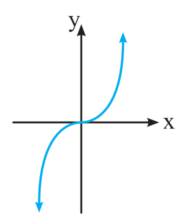
می‌باشد را به اندازهٔ یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y=x^3+1$ به‌دست می‌آید. نمودار (۳)، انتقال‌یافتهٔ نمودار $y=x^3$ به اندازهٔ یک واحد به سمت بالا است.

ب) اگر نمودار $y=x^3$ را ابتدا نسبت به محور x ها قرینه کنیم و سپس به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y=-x^3-1$ به‌دست می‌آید. نمودار (۲)، نمودار $y=-x^3-1$ می‌باشد.

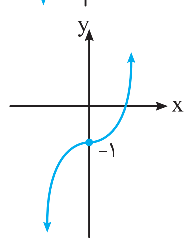
پ) اگر نمودار $y=x^3$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت راست و سپس به اندازهٔ ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y=(x-1)^3+2$ به‌دست می‌آید. نمودار (۱)، نمودار $y=(x-1)^3+2$ می‌باشد.

ت) اگر نمودار $y=x^3$ را ابتدا به اندازهٔ یک واحد به سمت چپ و سپس به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y=(x+1)^3-1$ به‌دست می‌آید. نمودار (۴)، نمودار $y=(x+1)^3-1$ می‌باشد.

۲ نمودار تابع $y=x^3$ به‌صورت مقابل است:

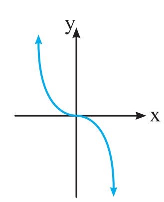


آ) اگر نمودار $y=x^3$ را یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y=x^3-1$ به‌دست می‌آید:

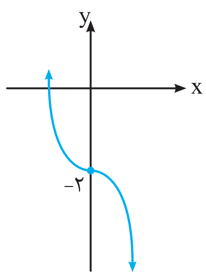


دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.

ب) ابتدا نمودار $y=x^3$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-x^3$ به‌دست آید:

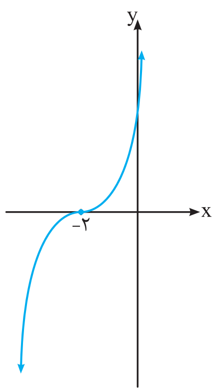


با انتقال نمودار $y=-x^3$ به اندازهٔ دو واحد به سمت پایین، نمودار $y=-x^3-2$ به‌دست می‌آید:

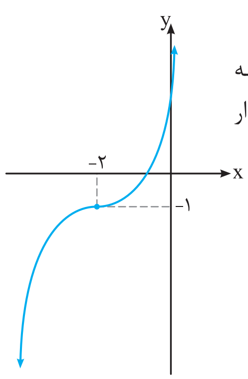


دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.

پ) با انتقال نمودار $y=x^3$ به اندازهٔ ۲ واحد به سمت چپ، نمودار $y=(x+2)^3$ به‌دست می‌آید:

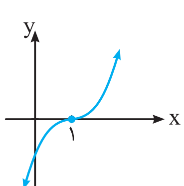


نمودار $y=(x+2)^3$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم، تا نمودار $y=(x+2)^3-1$ به‌دست آید:

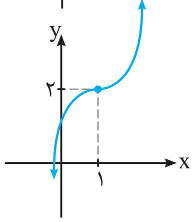


دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.

ت) اگر نمودار $y=x^3$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $y=(x-1)^3$ به‌دست می‌آید:

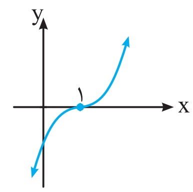


با انتقال نمودار $y=(x-1)^3$، به اندازهٔ دو واحد به سمت بالا نمودار $y=(x-1)^3+2$ به‌دست می‌آید.

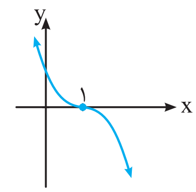


دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

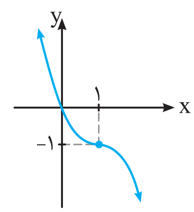
ث) اگر نمودار $y=x^3$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $y=(x-1)^3$ به‌دست می‌آید:



با قرینه کردن نمودار $y=(x-1)^3$ نسبت به محور xها، نمودار $y=-(x-1)^3$ به‌دست می‌آید:



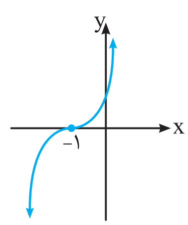
نمودار $y=-(x-1)^3$ را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=-(x-1)^3-1$ به‌دست آید:
دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.



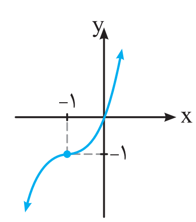
ج) با اضافه و کم کردن عدد یک به سمت راست ضابطهٔ تابع و استفاده از اتحاد مکعب دو جمله‌ای، عبارت را به‌صورت $y=(x+1)^3-1$ می‌نویسیم:

$$y=x^3+3x^2+3x=(x^3+3x^2+3x+1)-1=(x+1)^3-1$$

اگر نمودار $y=x^3$ را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار $y=(x+1)^3$ به‌دست می‌آید:



با انتقال نمودار $y=(x+1)^3$ به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین، نمودار $y=(x+1)^3-1$ به‌دست می‌آید:



دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.

۳ اگر نمودار $y=ax^3$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت راست و سپس به اندازهٔ ۴ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، آن‌گاه نمودار $y=a(x-1)^3+4$ ، $(a>0)$ به‌دست می‌آید. بنابراین در ضابطهٔ $y=a(x-b)^3+c$ ، مقدار b برابر یک و مقدار c برابر ۴ است. از طرفی نمودار از نقطهٔ $(0,3)$ عبور کرده است، پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ $y=a(x-1)^3+4$ صدق می‌کند. بنابراین:

$$3=a(0-1)^3+4\Rightarrow 3=-a+4\Rightarrow a=1$$

۴ اگر نمودار $y=ax^3\ (a<0)$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت چپ و سپس به اندازهٔ یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، آن‌گاه ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=a(x+1)^3+1$ درمی‌آید:

$$y=a(x+1)^3+1=a(x+b)^3+c\Rightarrow b=1\ ,\ c=1$$
$$\Rightarrow y=a(x+1)^3+1$$

طبق نمودار، نقطهٔ $(0,-1)$ روی نمودار تابع قرار دارد، بنابراین مختصات آن در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$$-1=a(0+1)^3+1\Rightarrow a=-2$$
$$\Rightarrow f(x)=-2(x+1)^3+1\Rightarrow f(1)=-2(1+1)^3+1=-15$$

۵ اگر نمودار $f(x)=x^3$ را به اندازهٔ ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم، آن‌گاه ضابطهٔ f به‌صورت $y=(x+2)^3$ درمی‌آید. با انتقال نمودار $y=(x+2)^3$ به اندازهٔ ۵ واحد به سمت پایین، ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=(x+2)^3-5$ درمی‌آید. با قرار دادن عدد صفر به جای x، محل تلاقی نمودار با محور yها به‌دست می‌آید:

$$y=(x+2)^3-5\xrightarrow{x=0}y=(0+2)^3-5=8-5=3$$

۶ اگر نمودار $y=x^3$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، ضابطهٔ آن به‌صورت $y=(x-1)^3$ درمی‌آید. با انتقال نمودار تابع $y=(x-1)^3$ به اندازهٔ ۷ واحد به سمت بالا، ضابطهٔ تابع g به‌صورت $g(x)=(x-1)^3+7$ درمی‌آید. با حل معادلهٔ $f(x)=g(x)$، طول نقاط تلاقی نمودار توابع f و g مشخص می‌شود:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^3=(x-1)^3+7$$
$$\Rightarrow \cancel{x^3}=(\cancel{x^3}-3x^2+3x-1)+7\Rightarrow 3x^2-3x-6=0$$
$$\xrightarrow{\div 3}x^2-x-2=0\Rightarrow (x-2)(x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=2\\x=-1\end{cases}$$

۷ ضابطهٔ تابع چندجمله‌ای از درجهٔ دوم به‌صورت $f(x)=ax^2+bx+c$ است:

$$f(0)=2\Rightarrow a(0)^2+b(0)+c=2\Rightarrow c=2$$
$$f(1)=0\Rightarrow a(1)^2+b(1)+c=0\xrightarrow{c=2}a+b=-2\quad(1)$$
$$f(-1)=10\Rightarrow a(-1)^2+b(-1)+c=10\xrightarrow{c=2}a-b=8\quad(2)$$
$$(1),(2)\Rightarrow\begin{cases}a+\cancel{b}=-2\\a-\cancel{b}=8\end{cases}\Rightarrow 2a=6\Rightarrow a=3$$
$$\xrightarrow{a+b=-2}3+b=-2\Rightarrow b=-5\Rightarrow f(x)=3x^2-5x+2$$

۸ $x=-1$، $x=-2$ و $x=2$ ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ می‌باشند، پس $f(x)$ بر $x+1$، $x+2$ و $x-2$ بخش‌پذیر است و داریم:

$$f(x)=a(x+1)(x+2)(x-2)\ ,\ f(0)=-4$$
$$\Rightarrow f(0)=a(0+1)(0+2)(0-2)=-4\Rightarrow -4a=-4\Rightarrow a=1$$
$$\Rightarrow f(x)=(x+1)(x+2)(x-2)\Rightarrow f(3)=(3+1)(3+2)(3-2)=20$$

۹ تابع f اکیداً صعودی است، هرگاه:

$$x_۱ , x_۲ \in D_f , x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$$

تابع f اکیداً نزولی است، هرگاه:

$$x_۱ , x_۲ \in D_f \ , \ x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$$

تابع f صعودی است، هرگاه:

$$x_۱ , x_۲ \in D_f \ , \ x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \le f(x_۲)$$

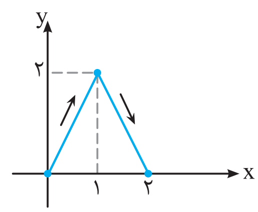
تابع f نزولی است، هرگاه:

$$x_۱ , x_۲ \in D_f , x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \ge f(x_۲)$$

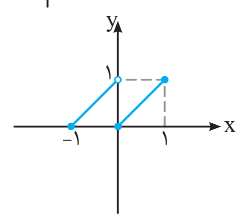
آ) با توجه به شکل و با افزایش x، مقدار تابع همواره کم‌تر می‌شود. بنابراین تابع روی $\mathbb{R}$، اکیداً نزولی است.

ب) با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های $(-\infty,-۲]$ و $[۲,+\infty)$، اکیداً نزولی و در بازه‌های $(-۲,۰)$ و $[۰,۲]$، تابعی اکیداً صعودی است.

۱۰ آ) اگر نمودار f به‌صورت مقابل باشد، آن‌گاه نمودار f در بازهٔ $[۰,۱]$ در حال صعود و در بازهٔ $[۱,۲]$ در حال نزول است.



ب) اگر نمودار f به‌صورت مقابل باشد، آن‌گاه f روی بازه‌های $[-۱,۰)$ و $[۰,۱]$ در حال صعود است ولی در بازهٔ $[-۱,۱]$ نه صعودی و نه نزولی است.

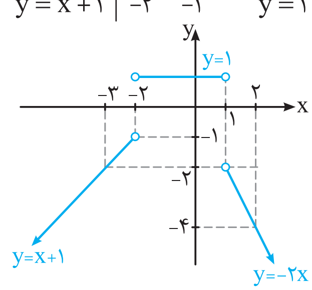


۱۱ برای رسم نمودار تابع سه ضابطه‌ای f، باید خط $y = x+۱$ را در محدودهٔ $(-\infty,-۲)$، خط $y=۱$ را در محدودهٔ $(-۲,۱)$ و خط $y=-۲x$ را در محدودهٔ $(۱,+\infty)$ رسم کنیم (برای رسم خط، دو نقطه از خط را مشخص می‌کنیم):

x	-۳	-۲
$y=x+۱$	-۲	-۱

x	-۲	۱
$y=۱$	۱	۱

x	۱	۲
$y=-۲x$	-۲	-۴



با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(-\infty,-۲)$، تابعی اکیداً صعودی، در بازهٔ $(-۲,۱)$، تابعی ثابت و در بازهٔ $(۱,+\infty)$، تابعی اکیداً نزولی می‌باشد.

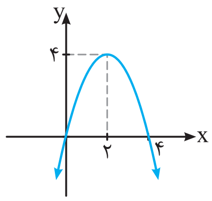
۱۲ آ) برای رسم نمودار $y=-x^۲+۴x$، رأس سهمی و نقاط تلاقی با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم:

$$x_S = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۴}{۲(-۱)} = ۲ \Rightarrow y = -(۲)^۲ + ۴(۲) = ۴$$

$$x = ۰ \Rightarrow y = ۰ \ , \ y = ۰ \Rightarrow -x^۲ + ۴x = ۰ \Rightarrow x(-x+۴) = ۰$$

$\Rightarrow x = ۰$ یا $x = ۴$

با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(-\infty,۲)$ اکیداً صعودی و تابع در بازهٔ $(۲,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

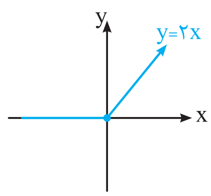


ب) با حذف قدرمطلق، تابع را به‌صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$|x| = \begin{cases} x & x \ge ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

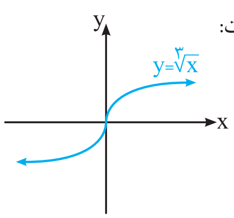
$$\Rightarrow y = x + |x| = \begin{cases} x+x & x \ge ۰ \\ x+(-x) & x < ۰ \end{cases} = \begin{cases} ۲x & x \ge ۰ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases}$$

با رسم تابع ثابت $y=۰$ برای $x<۰$ و نیم‌خط $y=۲x$ برای $x \ge ۰$، نمودار تابع f رسم می‌شود:



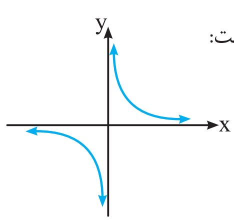
نمودار f در بازهٔ $[۰,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $(-\infty,۰]$، هم صعودی و هم نزولی است (f تابع ثابت است). تابع f در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ صعودی است.

پ) نمودار تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x}$ به‌صورت زیر است:



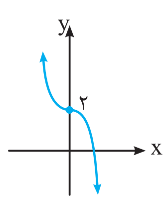
با توجه به نمودار، تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

ت) نمودار تابع گویای $y = \frac{۱}{x}$ به‌صورت زیر است:



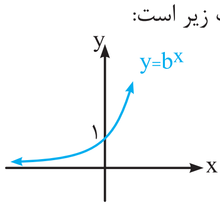
تابع در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است. ولی تابع روی $\mathbb{R}$ غیریکنوا است.

ث) نمودار تابع $y=-x^۳+۲$ به‌صورت زیر است:

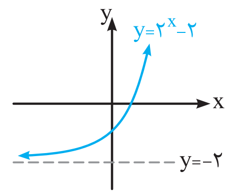


تابع روی $\mathbb{R}$، اکیداً نزولی است.

ج) نمودار تابع نمایی $y=b^x$ $(b>۱)$، به‌صورت زیر است:

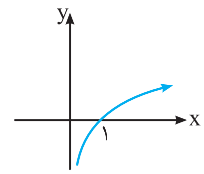


اگر نمودار تابع $y=2^x$ را به اندازهٔ دو واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y=2^x-2$ به‌دست می‌آید:



تابع روی $\mathbb{R}$، اکیداً صعودی است.

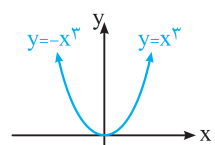
چ) نمودار تابع $y=\log_b x$، وقتی که $b>1$ باشد، به‌صورت مقابل است:



با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

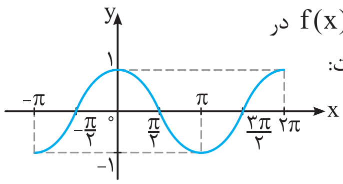
ح) $$y=x^2|x|=\begin{cases}x^2(x) & x\geq 0\\ x^2(-x) & x<0\end{cases}=\begin{cases}x^3 & x\geq 0\\ -x^3 & x<0\end{cases}$$

نمودار تابع به‌صورت مقابل است:



تابع در بازهٔ $(-\infty,0]$، اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[0,+\infty)$، اکیداً صعودی است.

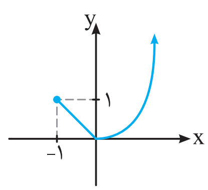
خ) نمودار تابع $f(x)=\cos x$ در بازهٔ $[-\pi,2\pi]$ به‌صورت مقابل است:



با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های $[-\pi,0]$ و $[\pi,2\pi]$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[0,\pi]$، اکیداً نزولی است.

۱۳ ابتدا نمودار تابعی را رسم می‌کنیم که ابتدا اکیداً نزولی و سپس اکیداً صعودی باشد و سپس ضابطهٔ آن را می‌نویسیم:

ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=\begin{cases}-x & -1\leq x\leq 0\\ x^2 & x>0\end{cases}$ است.



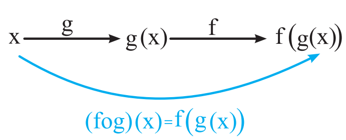
۱۴ $(0,2)$، $[5,+\infty)$، ثابت

درسنامه ۲

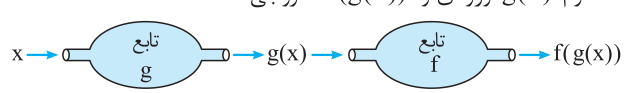
ترکیب توابع

تعریف: ترکیب دو تابع f و g تابعی است که آن را با نماد fog نشان می‌دهیم (بخوانید اف اُ جی) و به‌صورت $(fog)(x)=f(g(x))$ یا $fog: x\longrightarrow f(g(x))$ تعریف می‌کنیم.

نمودار ترکیب دو تابع به‌صورت مقابل است:



مراحل ساخت تابع fog : x باید در دامنهٔ g باشد. در مرحلهٔ اول، x ورودی و $g(x)$ خروجی است. $g(x)$ باید در دامنهٔ f باشد. در مرحلهٔ دوم، $g(x)$ ورودی و $f(g(x))$ خروجی است.



بنابراین برای به‌دست آوردن ضابطهٔ $(fog)(x)$، در تابع f به جای x ضابطهٔ $g(x)$ را قرار می‌دهیم و اگر بخواهیم ضابطهٔ $(gof)(x)$ را به‌دست بیاوریم، کافی است در ضابطهٔ تابع g به جای x ضابطهٔ $f(x)$ را قرار دهیم.

مثال **اگر $f(x)=3x-2$ و $g(x)=4x-3$ دو تابع باشند، ضابطهٔ هر یک از توابع fog و gof را مشخص کنید.**

پاسخ: اگر در ضابطهٔ تابع f به جای x، $g(x)$ قرار دهیم، ضابطهٔ تابع $(fog)(x)$ مشخص می‌شود:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(4x-3)=3(4x-3)-2=12x-9-2=12x-11$$

همچنین با قرار دادن $f(x)$ به جای x در ضابطهٔ تابع g، ضابطهٔ تابع $(gof)(x)$ مشخص می‌شود:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(3x-2)=4(3x-2)-3=12x-8-3=12x-11$$

درسنامه ۲

مثال

اگر $f(x)=x^۲-۵x+۲$ و $g(x)=۲x-۱$ باشند، جواب‌های معادلهٔ $(fog)(x)=-۴$ را مشخص کنید.

پاسخ: ضابطهٔ تابع fog را به‌دست می‌آوریم و آن را مساوی ۴- قرار می‌دهیم: $(fog)(x)=f(g(x))=f(۲x-۱)=(۲x-۱)^۲-۵(۲x-۱)+۲$

$$(fog)(x)=-۴\Rightarrow (۲x-۱)^۲-۵(۲x-۱)+۲=-۴$$

با فرض $۲x-۱=A$، داریم: $A^۲-۵A+۲=-۴\Rightarrow A^۲-۵A+۶=۰\Rightarrow (A-۲)(A-۳)=۰$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=۲\\A=۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x-۱=۲\\۲x-۱=۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x=۳\\۲x=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۳}{۲}\\x=۲\end{cases}$$

مثال

اگر $f(x)=۳x+a$، $g(x)=۲x-۱$ و $(fog)(x)=(gof)(x)$ باشد، مقدار gof را به ازای $x=۲$ به‌دست آورید.

پاسخ: ابتدا مقدار a را به‌دست می‌آوریم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(۲x-۱)\xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم.} ۲x-۱]{\text{در ضابطهٔ } f \text{ به جای } x\text{،}}۳(۲x-۱)+a=۶x-۳+a$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(۳x+a)\xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم.} ۳x+a]{\text{در ضابطهٔ } g \text{ به جای } x\text{،}}۲(۳x+a)-۱=۶x+۲a-۱$$

$$(fog)(x)=(gof)(x)\Rightarrow ۶x-۳+a=۶x+۲a-۱\Rightarrow a-۳=۲a-۱\Rightarrow a=-۲$$

$$(gof)(۲)=g(f(۲)),f(x)=۳x-۲\Rightarrow f(۲)=۶-۲=۴\Rightarrow g(f(۲))=g(۴)\xrightarrow{g(x)=۲x-۱}۲(۴)-۱=۷$$

مثال

اگر $f=\{(۵,۲),(۳,۰),(۱,۴),(۲,-۱)\}$ و $g=\{(۴,۲),(۳,۱),(۲,۱),(۱,۶)\}$ دو تابع باشند، هر یک از توابع fog و gog را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

پاسخ: برای مشخص کردن تابع fog، ابتدا تابع g روی x اثر می‌کند:

$$۳\xrightarrow{g}۱\xrightarrow{f}۴ \qquad (fog)(۳)=۴$$

$$۴\xrightarrow{g}۲\xrightarrow{f}-۱ \qquad (fog)(۴)=-۱$$

$$۱\xrightarrow{g}۶\xrightarrow{f}? \qquad (fog)(۱) \text{ وجود ندارد.}$$

$$۲\xrightarrow{g}۱\xrightarrow{f}۴ \qquad (fog)(۲)=۴$$

$$\Rightarrow fog=\{(۴,-۱),(۳,۴),(۲,۴)\}$$

برای مشخص کردن تابع gog، داریم:

$$(gog)(۴)=g(g(۴))=g(۲)=۱\Rightarrow(۴,۱)\in gog \ ,\ (gog)(۳)=g(g(۳))=g(۱)=۶\Rightarrow(۳,۶)\in gog$$

$$(gog)(۲)=g(g(۲))=g(۱)=۶\Rightarrow(۲,۶)\in gog \ ,\ (gog)(۱)=g(g(۱))=g(۶) \text{ تعریف‌نشده}$$

بنابراین: $gog=\{(۴,۱),(۳,۶),(۲,۶)\}$

مثال

تابع $h(x)=(x^۳-۱)^۲$ را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید (به دو طریق).

پاسخ: روش اول: تابع $y=x^۳$ را به عنوان تابع $g(x)$ در نظر می‌گیریم و با قرار دادن x به جای $x^۳$، تابع حاصل را $f(x)$ در نظر می‌گیریم: $g(x)=x^۳,f(x)=(x-۱)^۲\Rightarrow h(x)=f(g(x))=f(x^۳)=(x^۳-۱)^۲$

روش دوم: تابع $y=x^۳-۱$ را به عنوان تابع $g(x)$ در نظر می‌گیریم و با قرار دادن x به جای $x^۳-۱$، تابع حاصل را $f(x)$ در نظر می‌گیریم: $g(x)=x^۳-۱, f(x)=x^۲\Rightarrow h(x)=f(g(x))=f(x^۳-۱)=(x^۳-۱)^۲$

درسنامه ۲

دامنهٔ تابع مرکب

برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع gof دو روش وجود دارد:

روش اول: تابع $gof(x)$ را تشکیل دهیم و دامنهٔ تابع به‌دست آمده را تعیین کنیم (در این روش نباید ضابطهٔ تابع را در هیچ مرحله‌ای ساده کنیم).

مثال اگر $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشد، دامنهٔ تابع fog را به‌دست آورید.

پاسخ: $(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^{۲}$

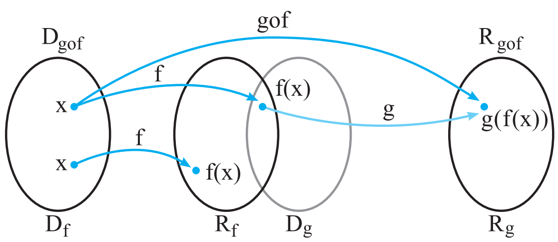
دامنهٔ تابع $y=(\sqrt{x})^{۲}$ مجموعهٔ $[۰,+\infty)$ است، بنابراین: $D_{fog}=[۰,+\infty)\ ,\ x\ge ۰\Rightarrow (fog)(x)=x$

توجه کنید که اگر قبل از تعیین دامنه به جای $(\sqrt{x})^{۲}$، x بنویسیم، ضابطهٔ تابع به‌صورت $(fog)(x)=x$ درمی‌آید که دامنهٔ آن برابر $\mathbb{R}$ خواهد بود. بنابراین ضروری است که ابتدا دامنهٔ تابع را محاسبه کنیم و سپس آن را ساده کنیم.

روش دوم: دامنهٔ تابع مرکب gof، مجموعهٔ x هایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱) x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲) $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.



بنابراین دامنهٔ تابع gof را می‌توان به‌صورت مقابل نوشت: $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

توجه کنید که اگر $f(x)$ در دامنهٔ تابع g وجود نداشته باشد، آن‌گاه مقدار $g(f(x))$ تعریف نشده است.

نکته

با توجه به تعریف دامنهٔ gof، شرط آن‌که تابع gof تشکیل شود، آن است که: $R_f \cap D_g \ne \varnothing$

مثال اگر $f(x)=\frac{x-۱}{۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-۲}$ دو تابع باشند. آن‌گاه:

آ) دامنهٔ تابع gof را به کمک تعریف به‌دست آورید.

ب) مقدار تابع fog را به ازای $x=۱۱$ به‌دست آورید.

پاسخ: آ) دامنهٔ تابع درجه اول f برابر $\mathbb{R}$ است. برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع رادیکالی g، داریم: $x-۲\ge ۰\Rightarrow x\ge ۲\Rightarrow D_g=[۲,+\infty)$

طبق تعریف، دامنهٔ تابع gof به‌صورت مقابل است: $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid \frac{x-۱}{۲}\ge ۲\}$

$$\frac{x-۱}{۲}\ge ۲\Rightarrow x-۱\ge ۴\Rightarrow x\ge ۵\Rightarrow D_{gof}=\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge ۵\}=[۵,+\infty)$$

ب) مقدار تابع fog به ازای $x=۱۱$، برابر $f(g(۱۱))$ است: $g(x)=\sqrt{x-۲}\Rightarrow g(۱۱)=\sqrt{۹}=۳\Rightarrow f(g(۱۱))=f(۳)=\frac{۳-۱}{۲}=۱$

محاسبهٔ $f(x)$ با در اختیار داشتن $g(x)$ و $f(g(x))$

اگر ضابطهٔ توابع $g(x)$ و $f(g(x))$ داده شده باشند و بخواهیم ضابطهٔ $f(x)$ را به‌دست آوریم، کافی است به جای $g(x)$، A قرار دهیم و از این تساوی x را برحسب A به‌دست آوریم و در ضابطهٔ $f(g(x))$ جایگزین کنیم.

مثال اگر $g(x)=\frac{x-۱}{x}$ و $f(g(x))=۲x$ باشد، ضابطهٔ تابع f را مشخص کنید.

پاسخ:

$$g(x)=A\Rightarrow \frac{x-۱}{x}=A\Rightarrow x-۱=Ax\Rightarrow x-xA=۱\Rightarrow x(۱-A)=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۱-A}$$

$$f(g(x))=۲x\Rightarrow f(A)=۲\times\frac{۱}{۱-A}=\frac{۲}{۱-A}\Rightarrow f(x)=\frac{۲}{۱-x}$$

درسنامه ۲

محاسبهٔ $g(x)$ با در اختیار داشتن $f(g(x))$ و $f(x)$

اگر $f(g(x))$ و $f(x)$ معلوم باشند و $g(x)$ را بخواهیم، ابتدا از روی ضابطهٔ تابع f، $f(g(x))$ را به‌دست می‌آوریم و سپس آن را با ضابطهٔ $f(g(x))$ داده‌شده برابر قرار می‌دهیم و از این تساوی ضابطهٔ $g(x)$ را تعیین می‌کنیم.

مثال **اگر $f(g(x))=۲x$ و $f(x)=\frac{x}{x-۱}$ باشد، ضابطهٔ $g(x)$ را مشخص کنید.**

پاسخ: از ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{x-۱}$، $f(g(x))$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)-۱}\ ,\ f(g(x))=۲x \Rightarrow \frac{g(x)}{g(x)-۱}=\frac{۲x}{۱}$$

$$\Rightarrow g(x)=۲xg(x)-۲x \Rightarrow g(x)-۲xg(x)=-۲x \Rightarrow g(x)(۱-۲x)=-۲x \Rightarrow g(x)=\frac{-۲x}{۱-۲x}$$

تبدیل نمودار توابع

با رسم نمودار توابع جدید به کمک انتقال از روی نمودار برخی از توابع خاص آشنایی دارید. ابتدا این مطالب را یادآوری می‌کنیم و سپس رسم‌های جدیدی را بیان می‌کنیم.

تغییرات نمودار در راستای محور y ها: فرض کنیم نمودار $y=f(x)$ را در اختیار داشته باشیم و k **عددی حقیقی و مثبت** باشد. اگر نقطهٔ $A(a,b)$، نقطه‌ای روی نمودار $y=f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ $A'(a,b+k)$، نقطه‌ای روی نمودار تابع $y=f(x)+k$ می‌باشد. پس برای رسیدن به نقطهٔ A' از نقطهٔ A، کافی است نقطهٔ A را به اندازهٔ k واحد به سمت بالا انتقال دهیم. بنابراین:

۱) برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد در جهت مثبت محور y ها (به بالا) انتقال دهیم.

به همین ترتیب:

۲) برای رسم نمودار $y=f(x)-k$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد در جهت منفی محور y ها (به پایین) انتقال دهیم.

رسم نمودار $y=kf(x)$

اگر نقطهٔ $A(a,b)$، نقطه‌ای روی نمودار $y=f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ $A'(a,kb)$ $(f(a)=b \xrightarrow{y=kf(x)} y=kf(a)=kb)$، نقطه‌ای روی نمودار تابع $y=kf(x)$ است. پس برای مشخص کردن نقطهٔ A' از روی نقطهٔ A، کافی است عرض نقطهٔ A را k برابر کنیم. بنابراین:

۳) برای رسم نمودار $y=kf(x)$، کافی است **عرض** همهٔ نقاط واقع بر نمودار $y=f(x)$ را k برابر کنیم.

نکته

در حالت خاص برای رسم نمودار $y=-f(x)$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

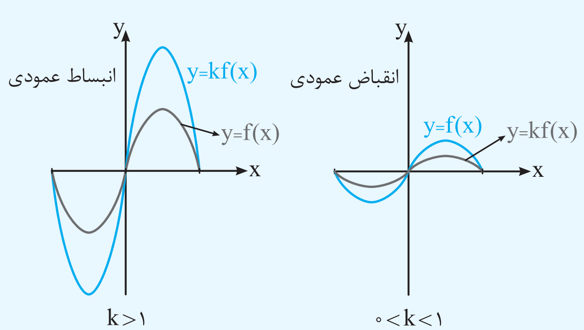
نکته

نمودار تابع $y=kf(x)$ به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید:

ـ اگر $k>۱$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است.

ـ اگر $۰<k<۱$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k جمع می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است.

ـ اگر $k<۰$، ابتدا نمودار f نسبت به محور x ها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.



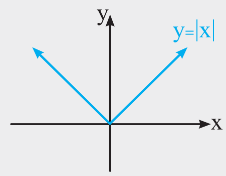
نکته

دامنهٔ تابع $y=kf(x)+a$ با دامنهٔ تابع $y=f(x)$ یکی است ولی برد آن‌ها لزوماً یکی نیست.

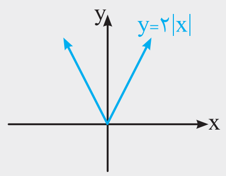
درسنامه ۲

مثال **نمودار تابع $f(x)=۲|x|-۱$ را به کمک نمودار تابع $y=|x|$ رسم کنید.**

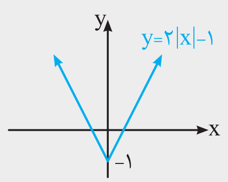
پاسخ: نمودار تابع $y=|x|$ به‌صورت مقابل است:



عرض نقاط روی نمودار تابع $y=|x|$ را دو برابر می‌کنیم تا نمودار $y=۲|x|$ به‌دست بیاید:



نمودار تابع $y=۲|x|$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=۲|x|-۱$ رسم شود:



تغییرات نمودار در راستای محور xها: فرض کنید نمودار $y=f(x)$ را در اختیار داشته باشیم و $k>۰$ عددی حقیقی باشد.

اگر $A(a,b)$ نقطه‌ای روی نمودار $y=f(x)$ باشد $(f(a)=b)$، آن‌گاه نقطهٔ $A'(a+k,b)$، نقطه‌ای روی نمودار $y=f(x-k)$ است، زیرا:
$f((a+k)-k)=f(a)=b$

برای مشخص کردن نقطهٔ A' از روی نقطهٔ A، کافی است نقطهٔ A را به اندازهٔ k واحد به سمت راست انتقال دهیم. بنابراین:

۱) برای رسم نمودار $y=f(x-k)$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد در جهت مثبت محور xها (به سمت راست) منتقل کنیم.

به همین ترتیب:

۲) برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد در جهت منفی محور xها (به سمت چپ) منتقل کنیم.

در واقع با تبدیل x به $x-k$ $(x+k)$ در تابع f و انتقال نمودار f به اندازهٔ k واحد به سمت راست (چپ)، نمودار $f(x-k)$ $(f(x+k))$ به‌دست می‌آید.

رسم نمودار $|f|$

مقدار تابع $y=|f(x)|$، به ازای تمام مقادیر $x\in D_f$ غیرمنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) می‌باشد:

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq ۰ \\ -f(x) & f(x)<۰ \end{cases}$$

پس هیچ قسمتی از نمودار $y=|f(x)|$ در پایین محور xها قرار نمی‌گیرد.

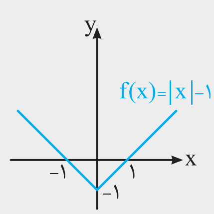
برای رسم نمودار $y=|f(x)|$، بدون تعیین علامت $f(x)$ و حذف قدرمطلق، از نکتهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

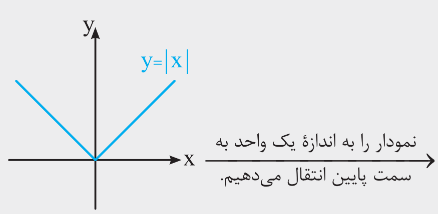
نکته

برای رسم نمودار $y=|f(x)|$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور xهاست، قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور xها رسم کنیم.

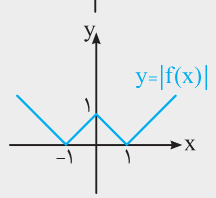
مثال **نمودار تابع $y=||x|-۱|$ را رسم کنید.**

پاسخ: ابتدا نمودار $f(x)=|x|-۱$ را رسم می‌کنیم.





در بازهٔ $(-۱,۱)$، نمودار f زیر محور xها قرار دارد. نمودار این قسمت را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=|f(x)|$ به‌دست آید:



درسنامه ۲

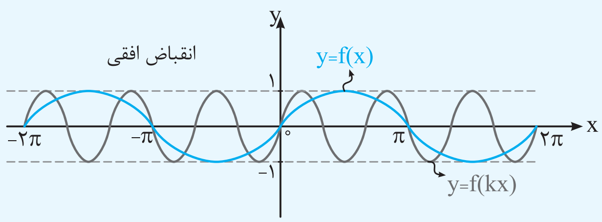
نکته

برای رسم نمودار $y=f(kx)$، کافی است طول همهٔ نقاط واقع بر نمودار $y=f(x)$ را بر k تقسیم کنیم، بدون آن‌که عرض نقاط متناظر تغییری کند.

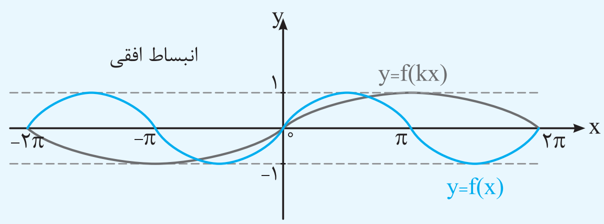
نکته

نمودار تابع $y=f(kx)$ به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید:

اگر $k>0$، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور xها به‌دست آورد. در حالتی که $k>1$ نمودار $y=f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (نمودار در راستای محور xها جمع‌تر می‌شود) و در حالتی که $0<k<1$ نمودار $y=f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (نمودار در راستای محور xها بازتر می‌شود) می‌شود.

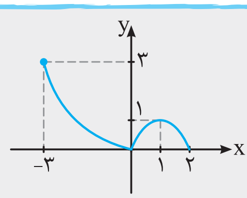


$k>1$

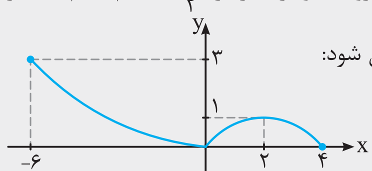


$0<k<1$

مثال **نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})-1$ را رسم کنید.**

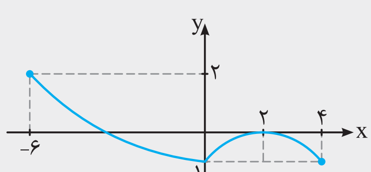


پاسخ: برای رسم نمودار تابع $y=f(\frac{1}{2}x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$، کافی است طول نقاط روی نمودار f را بر $\frac{1}{2}$ تقسیم کنیم (یا در ۲ ضرب کنیم). پس طول نقاط را دو برابر می‌کنیم تا طول نقاط روی نمودار $y=f(\frac{1}{2}x)$ مشخص شود:



$y=f(\frac{1}{2}x)$

نمودار $y=f(\frac{1}{2}x)$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم:



$y=f(\frac{1}{2}x)-1$

اگر $A(a,b)$ نقطه‌ای روی نمودار $y=f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ $A'(-a,b)$، نقطه‌ای روی نمودار $y=f(-x)$ است. می‌دانیم A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به محور yها است، بنابراین:

نکته

اگر نمودار تابعی را نسبت به محور yها قرینه کنیم، برای به‌دست آوردن ضابطهٔ آن، کافی است در ضابطهٔ تابع اولیه، به جای x، عبارت $-x$ را قرار دهیم، بدون آن‌که y را تغییر دهیم.

درسنامه ۲

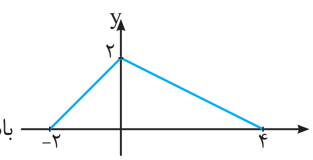
نکته

برای رسم نمودار $y=f(-x)$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

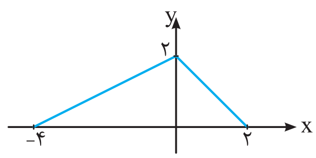
نکته

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ به کمک نمودار $y=f(x)$ در حالتی که $k<۰$ باشد، ابتدا نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه و سپس با ضریب $\frac{۱}{|k|}$ به طور افقی منبسط یا منقبض می‌کنیم.

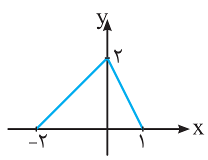
به عنوان مثال، اگر نمودار $y=f(x)$ به‌صورت



باشد، برای رسم نمودار $y=f(-۲x)$، ابتدا نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:



حال این نمودار را با ضریب $\frac{۱}{۲}$، منقبض می‌کنیم (طول نقاط را بر عدد ۲ تقسیم می‌کنیم، بدون آن‌که عرض نقطهٔ متناظر تغییری کند):



سؤالات امتحانی

۱۵. اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۵,-۱),(۰,۲)\}$ و $g=\{(۴,-۲),(-۱,۵),(۲,۱),(۳,۰)\}$ دو تابع باشند، توابع fog، gof و gog را به‌دست آورید. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۴۲ کتاب درسی)

۱۶. برای دو تابع $f=\{(۱۱,۷),(-۲,۴),(۳,-۵),(۲,-۵)\}$ و $g=\{(۲,۱۱),(۴,-۲),(۶,۳),(۳,۲)\}$، تابع fog را به‌صورت زوج مرتب بنویسید. (نهایی ـ دی ۹۵)

۱۷. اگر $f(x)=۲x-\sqrt{x}$ و $g=\{(۱,۵),(۶,۳),(۲,۶)\}$ دو تابع باشند به طوری‌که $g(f(a))=۳$ باشد، مقدار a را به‌دست آورید.

۱۸. کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

آ) اگر $f(۲)=۱$ و $g(۱)=-۱$، آن‌گاه $(gof)(۲)=-۱$

ب) اگر $f(x)=۲x-۳$ و $g(x)=\sqrt{x^۲+۳}$، آن‌گاه $(fog)(۱)=f(۱)$

پ) اگر f تابعی با دامنهٔ D_f و برد R_f و g تابعی با دامنهٔ D_g و برد R_g باشد، آن‌گاه شرط تشکیل تابع fog آن است که $D_f\cap R_g\neq\varnothing$ باشد.

۱۹. جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

آ) اگر $f(x)=x^۲-۱$ و $g(x)=x+۲$ باشد، مقدار تابع fog به ازای $x=۱$، .... است.

ب) در رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$، اگر $۰<k<۱$، آن‌گاه نمودار در امتداد محور x ها، .... می‌شود.

پ) دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ با دامنهٔ تابع $y=f(x)$ برابر .... و برد آن‌ها یکسان .... $(k\neq\pm۱)$

ت) برای رسم نمودار تابع $g(x)=|x+۱|-۲$ با استفاده از نمودار تابع $f(x)=|x|$، نمودار f، یک واحد روی محور .... به سمت .... و .... واحد روی محور .... به سمت پایین انتقال پیدا می‌کند.

۲۰. توابع $f(x)=\frac{۳x}{x-۱}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ داده شده‌اند. (نهایی- خرداد ۹۳)

آ) تابع fog را تشکیل دهید.

ب) دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

۲۱. **توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ داده شده‌اند.** (نهایی- خرداد ۹۴)

آ) دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به‌دست آورید. ب) تابع gof را تشکیل دهید.

۲۲. **دو تابع $f(x)=\sqrt{۱-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$ را در نظر بگیرید.** (نهایی- خرداد ۹۵)

آ) دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به‌دست آورید. ب) مقدار $(gof)(-۳)$ را به‌دست آورید.

۲۳. **اگر $f(x)=x+۳$ و $g(x)=\sqrt{۱-x}$ دو تابع باشند.** (نهایی- خرداد ۹۱)

آ) دامنهٔ توابع f و g را به‌دست آورید. ب) دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف محاسبه کنید.

پ) ضابطهٔ fog را بنویسید.

۲۴. **دو تابع $f(x)=\frac{x+۲}{x-۳}$ و $g(x)=\frac{۱}{x-۱}$ داده شده‌اند.** (نهایی- شهریور ۹۰)

آ) ضابطهٔ تابع fog را بنویسید. ب) دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف تعیین کنید.

۲۵. **توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=۲x-۴$ و $g(x)=\sqrt{x-۶}$ داده شده‌اند.** (نهایی- خرداد ۹۲)

آ) ضابطهٔ تابع gof را بنویسید. ب) دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

۲۶. **توابع $f(x)=\sqrt{x-۴}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۱}$ داده شده‌اند.** (نهایی- خرداد ۸۹)

آ) ضابطهٔ تابع gof را تعیین کنید. ب) دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف آن به‌دست آورید.

۲۷. **اگر $f(x)=x+a$ و $g(x)=x^۲+bx$ باشد، a و b را طوری تعیین کنید که داشته باشیم: $(fog)(x)=x^۲+۴x+۱$** (نهایی- شهریور ۹۲)

۲۸. **اگر $f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=۳x+k$ باشد، مقدار k را طوری بیابید که $(fog)(x)=(gof)(x)$** (نهایی- شهریور ۸۷)

۲۹. **اگر $f(x)=x+a$ و $g(x)=ax^۲+bx+c$ باشند، a، b و c را طوری تعیین کنید که داشته باشیم: $(fog)(x)=x^۲-۳x+۴$** (نهایی- شهریور ۸۸)

۳۰. **هر یک از توابع زیر را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید.** (مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)

آ) $y=\sqrt[۳]{x^۳-۱}$ ب) $y=(۲x^۳-x^۲+۵)^۴$ پ) $y=\sqrt{x^۲+۳}$ ت) $y=\frac{x^۲+۲}{x^۲-۱}$

۳۱. **در هر یک از قسمت‌های زیر، با توجه به ضابطه‌های f(x) و g(x)، معادلات مورد نظر را تشکیل دهید و آن‌ها را حل کنید.**

(مشابه تمرین ۹ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

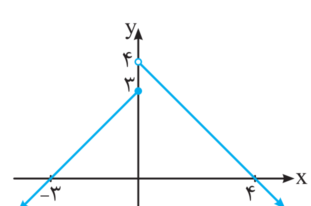
آ) $g(x)=۵x+۲$ ، $f(x)=۴x-۱$ ، $(fog)(x)=-۲۳$

ب) $f(x)=۳x^۲-۴x-۷$ ، $g(x)=۲x+۵$ ، $(gof)(x)=-۱$

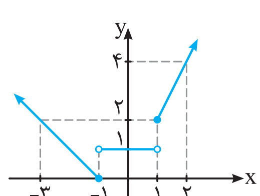
۳۲. **با توجه به نمودار توابع f و g، هر یک از مقادیر زیر را به‌دست آورید.** (مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

آ) $(fog)(۲)$ ب) $(gof)(۰)$ پ) $(gof)(۴)$

ت) $(fog)(-۱)$ ث) $(fof)(-۴)$ ج) $(gog)(۵)$



نمودار تابع f



نمودار تابع g

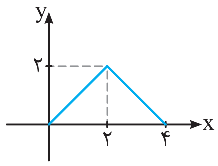
۳۳. **اگر $f(۳x+۲)=۹x^۲-۶x$ باشد، ضابطهٔ تابع f را مشخص کنید.**

۳۴. **اگر $g(x)=\frac{x-۱}{x}$ و $f(g(x))=x+۳$ باشد، ضابطهٔ تابع f را مشخص کنید.**

۳۵. اگر $(fog)(x)=۸x+۱۲$ و $f(x)=۲x+۴$ باشند، تابع $g(x)$ را تعیین کنید. (نهایی- دی ۹۰)

۳۶. اگر $f(x)=x^{۲}+۲x+۲$ باشد، تابع $g(x)$ را به گونه‌ای مشخص کنید که $(fog)(x)=x^{۲}-۴x+۵$ (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)

۳۷. نمودار تابع f با ضابطهٔ $y=f(x)$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار توابع $y=f(x+۲)$ و $y=-۲f(x)+۱$ را رسم کنید و دامنه و برد هر یک را تعیین کنید.



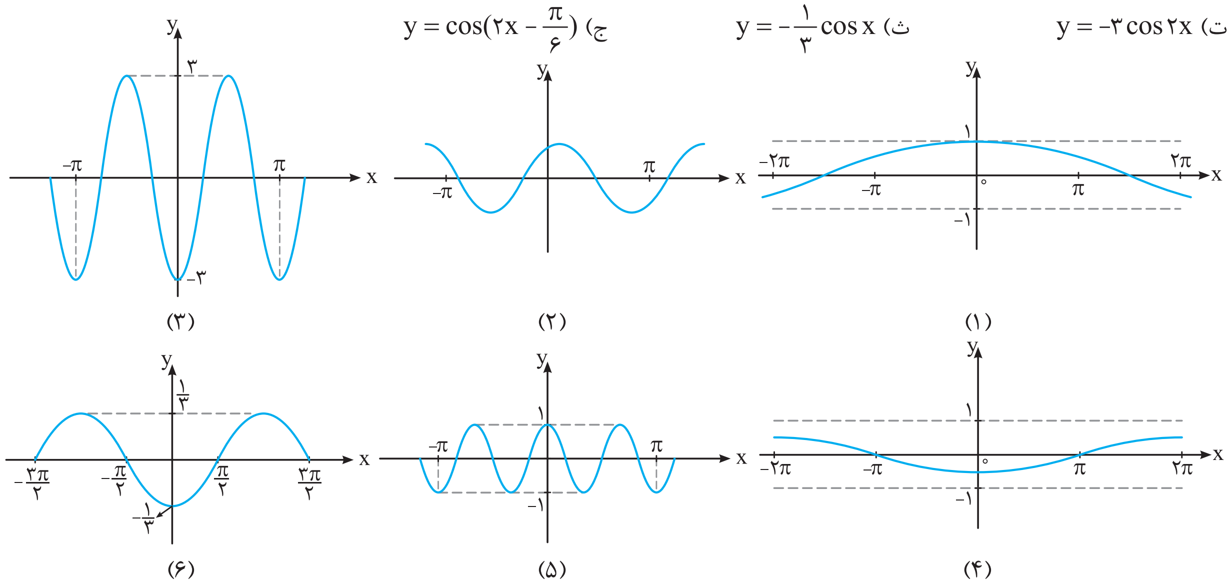
۳۸. ابتدا نمودار تابع $f(x)=|x-۳|$ را در بازهٔ $[۲،۴]$ رسم کنید، سپس به کمک آن، نمودار تابع $y=f(-x)$ را رسم کنید. (نهایی ـ دی ۹۱)

۳۹. ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم نموده و سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x)=-۲f(x)-۱$ را رسم کنید. (نهایی ـ خرداد ۹۲)

۴۰. با استفاده از نمودار تابع $y=\cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است. ضابطهٔ هر نمودار را مشخص کنید. (مشابه تمرین ۱۰ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

آ) $y=\cos ۳x$ ب) $y=\cos(\frac{۱}{۳}x)$ پ) $y=-\frac{۱}{۲}\cos\frac{۱}{۲}x$

ت) $y=-۳\cos ۲x$ ث) $y=-\frac{۱}{۳}\cos x$ ج) $y=\cos(۲x-\frac{\pi}{۶})$



۴۱. با استفاده از نمودار $y=\sin x$، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. (مشابه تمرین ۱۱ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

آ) $y=\sin(\frac{x}{۲})$ ب) $y=-۲\sin(۳x)$ پ) $y=۳\sin(۳x)-۱$ ت) $y=\cos(۲(x+\frac{\pi}{۴}))-۱$

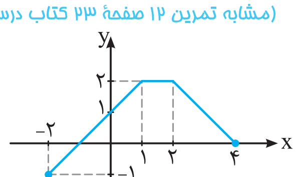
۴۲. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

آ) $f(x)=|\cos x|\,,\ x\in[-\pi،۲\pi]$ ب) $g(x)=|x^{۲}-۲x|$ پ) $h(x)=|x^{۳}|$ ت) $t(x)=||x-۱|-۱|$

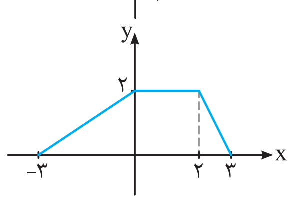
۴۳. با استفاده از نمودار تابع f، نمودارهای خواسته‌شده را رسم کنید. (مشابه تمرین ۱۲ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

آ) $y=f(۲x)+۱$ ب) $y=\frac{۱}{۲}f(-x)-۱$

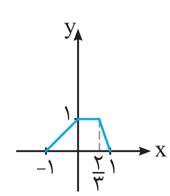
پ) $y=۲f(x+۱)-۱$ ت) $y=-f(\frac{x}{۲})$



۴۴. نمودار تابع $y=f(x)$ و $y=af(bx)+c$ به‌صورت مقابل می‌باشند. مقادیر a، b و c را به‌دست آورید.



نمودار f



نمودار $y=af(bx)+c$

پاسخ‌های تشریحی

۱۵ در تابع fog، x را باید از دامنهٔ تابع g اختیار کنیم:

$$\begin{cases}(fog)(۴)=f(g(۴))=f(-۲) & \text{تعریف‌نشده}\\(fog)(-۱)=f(g(-۱))=f(۵)=-۱\\(fog)(۳)=f(g(۳))=f(۰)=۲\\(fog)(۲)=f(g(۲))=f(۱)=۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow fog=\{(-۱,-۱),(۳,۲),(۲,۴)\}$$

در تابع gof، x را باید از دامنهٔ تابع f اختیار کنیم:

$$\begin{cases}(gof)(۲)=g(f(۲))=g(۳)=۰\\(gof)(۵)=g(f(۵))=g(-۱)=۵\\(gof)(۱)=g(f(۱))=g(۴)=-۲\\(gof)(۰)=g(f(۰))=g(۲)=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow gof=\{(۲,۰),(۵,۵),(۱,-۲),(۰,۱)\}$$

در تابع gog، x را باید از دامنهٔ تابع g اختیار کنیم:

$(gog)(۴)=g(g(۴))=g(-۲)$ تعریف نشده

$(gog)(-۱)=g(g(-۱))=g(۵)$ تعریف‌نشده

$(gog)(۲)=g(g(۲))=g(۱)$ تعریف‌نشده

$(gog)(۳)=g(g(۳))=g(۰)$ تعریف‌نشده

بنابراین تابع gog تشکیل نمی‌شود.

---

۱۶ xها را باید از دامنهٔ g انتخاب کنیم:

$(fog)(۲)=f(g(۲))=f(۱۱)=۷$

$(fog)(۴)=f(g(۴))=f(-۲)=۴$

$(fog)(۶)=f(g(۶))=f(۳)=-۵$

$(fog)(۳)=f(g(۳))=f(۲)=-۵$

$$\Rightarrow fog=\{(۲,۷),(۴,۴),(۶,-۵),(۳,-۵)\}$$

۱۷

$$f(x)=۲x-\sqrt{x}\Rightarrow f(a)=۲a-\sqrt{a}\ ,\ g(f(a))=۳,\ g(۶)=۳$$

$$\Rightarrow f(a)=۶\Rightarrow ۲a-\sqrt{a}=۶\Rightarrow ۲a-۶=\sqrt{a}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}}(۲a-۶)^۲=a\Rightarrow ۴a^۲-۲۴a+۳۶=a$$

$$\Rightarrow ۴a^۲-۲۵a+۳۶=۰\ ,\ \Delta=(-۲۵)^۲-۴(۴)(۳۶)=۴۹$$

$$a=\frac{۲۵\pm ۷}{۲(۴)}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۳۲}{۸}=۴\\a=\frac{۱۸}{۸}=\frac{۹}{۴}\end{cases}$$

هر دو عدد به‌دست آمده برای a را در معادلهٔ $۲a-۶=\sqrt{a}$ قرار می‌دهیم. $a=۴$، در معادله صدق می‌کند ولی $a=\frac{۹}{۴}$ در این معادله صدق نمی‌کند. پس فقط $a=۴$ قابل قبول است.

---

۱۸ آ) درست است، زیرا: $(gof)(۲)=g(f(۲))=g(۱)=-۱$

ب) نادرست است، زیرا:

$$(fog)(۱)=f(g(۱))=f(\sqrt{۱^۲+۳})=f(۲)=۴-۳=۱$$

$$f(۱)=۲-۳=-۱\Rightarrow(fog)(۱)\neq f(۱)$$

پ) درست است، زیرا برای آن‌که مقدار $f(g(x))$ تعریف شده باشد، باید $g(x)$ در دامنهٔ تابع f قرار داشته باشد، پس باید داشته باشیم $D_f\cap R_g\neq\varnothing$

---

۱۹ آ) $(fog)(۱)=f(g(۱))=f(۳)=۳^۲-۱=۸$

ب) منبسط   پ) است ـ نیست   ت) xها ـ چپ ـ دو ـ yها

---

۲۰ آ) اگر در تابع f به جای x، $g(x)=\sqrt{x}$ قرار دهیم، آن‌گاه ضابطهٔ تابع $(fog)(x)=f(g(x))$ به‌دست می‌آید:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=\frac{۳\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}$$

ب) طبق تعریف، داریم: $D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}$

دامنهٔ توابع f و g به‌صورت زیر هستند:

$$f(x)=\frac{۳x}{x-۱}\ ,\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$$

$$g(x)=\sqrt{x}\Rightarrow x\geq ۰\Rightarrow D_g=[۰,+\infty)$$

$$g(x)\in D_f\Rightarrow\sqrt{x}\in\mathbb{R}-\{۱\}\Rightarrow\sqrt{x}\neq ۱\Rightarrow x\neq ۱$$

بنابراین: $D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}$

$$=\{x\in[۰,+\infty)\mid x\neq ۱\}=[۰,۱)\cup(۱,+\infty)$$

---

۲۱ آ) طبق تعریف، داریم: $D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}$

دامنهٔ تابع $f(x)=\sin x$ برابر $\mathbb{R}$ است و داریم:

$$g(x)=\sqrt{۱-x^۲}\Rightarrow ۱-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۱$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم.}}|x|\leq ۱\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱\Rightarrow D_g=[-۱,۱]$$

$$f(x)\in D_g\Rightarrow\sin x\in[-۱,۱]\Rightarrow -۱\leq\sin x\leq ۱$$

می‌دانیم $\sin x$ همواره عددی از ۱- تا ۱ است، بنابراین نامساوی $-۱\leq\sin x\leq ۱$ به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ برقرار است. پس داریم:

$$D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

ب) $(gof)(x)=g(f(x))=g(\sin x)$

$$=\sqrt{۱-\sin^۲x}=\sqrt{\cos^۲x}=|\cos x|$$

---

۲۲ آ) طبق تعریف، داریم: $D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}$

دامنهٔ توابع f و g را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{۱-x}\Rightarrow ۱-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۱\Rightarrow D_f=(-\infty,۱]$$

$$g(x)=\sqrt{x-۱}\Rightarrow x-۱\geq ۰\Rightarrow x\geq ۱\Rightarrow D_g=[۱,+\infty)$$

$$f(x)\in D_g\Rightarrow\sqrt{۱-x}\in[۱,+\infty)\Rightarrow\sqrt{۱-x}\geq ۱$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}}۱-x\geq ۱\Rightarrow x\leq ۰\Rightarrow x\in(-\infty,۰]$$

$$\Rightarrow D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}$$

$$=\{x\in(-\infty,۱]\mid x\in(-\infty,۰]\}=(-\infty,۰]$$

ب) مقدار $(gof)(-۳)$ با مقدار $g(f(-۳))$ برابر است، داریم:

$$f(x)=\sqrt{۱-x} \Rightarrow f(-۳)=\sqrt{۱-(-۳)}=۲$$

$$\Rightarrow g(f(-۳))=g(۲) \xrightarrow{g(x)=\sqrt{x-۱}} \sqrt{۲-۱}=۱$$

۲۳ آ) $f \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$ دوجمله‌ای از درجهٔ یک می‌باشد.

$g \Rightarrow ۱-x\ge ۰ \Rightarrow x\le ۱$ تابع رادیکالی با فرجهٔ زوج می‌باشد.

$$\Rightarrow D_g=(-\infty,۱]$$

ب) $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x+۳\in(-\infty,۱]\}$

$$=\{x\in\mathbb{R}\mid x+۳\le۱\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le-۲\}=(-\infty,-۲]$$

پ) $(fog)(x)=f(g(x)) \xrightarrow{g(x)=\sqrt{۱-x}} f(\sqrt{۱-x})$

$$\xrightarrow{f(x)=x+۳} \sqrt{۱-x}+۳$$

۲۴ آ) $(fog)(x)=f(g(x)) \xrightarrow{g(x)=\frac{۱}{x-۱}} f\left(\frac{۱}{x-۱}\right)$

$$\xrightarrow{f(x)=\frac{x+۲}{x-۳}} \frac{\frac{۱}{x-۱}+۲}{\frac{۱}{x-۱}-۳} = \frac{\frac{۱+۲(x-۱)}{\cancel{x-۱}}}{\frac{۱-۳(x-۱)}{\cancel{x-۱}}}=\frac{۲x-۱}{۴-۳x}$$

ب) f و g هر دو تابع کسری گویا هستند، بنابراین:

$$f(x)=\frac{x+۲}{x-۳}\xrightarrow{x-۳\ne۰} D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$$

$$g(x)=\frac{۱}{x-۱}\xrightarrow{x-۱\ne۰} D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}-\{۱\}\mid \frac{۱}{x-۱}\in\mathbb{R}-\{۳\}\}$$

$$\frac{۱}{x-۱}\in\mathbb{R}-\{۳\}\Rightarrow\frac{۱}{x-۱}\ne۳\Rightarrow x-۱\ne\frac{۱}{۳}\Rightarrow x\ne\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow D_{fog}=\{x\in\mathbb{R}-\{۱\}\mid x\ne\frac{۴}{۳}\}=\mathbb{R}-\{۱,\frac{۴}{۳}\}$$

۲۵ آ) $(gof)(x)=g(f(x))\xrightarrow{f(x)=۲x-۴} g(۲x-۴)$

$$\xrightarrow{g(x)=\sqrt{x-۶}} \sqrt{(۲x-۴)-۶}=\sqrt{۲x-۱۰}$$

ب) دامنهٔ تابع gof با استفاده از تعریف به‌صورت زیر است:

$D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}$ ، $f(x)=۲x-۴\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

$$g(x)=\sqrt{x-۶}\Rightarrow x-۶\ge۰\Rightarrow x\ge۶\Rightarrow D_g=[۶,+\infty)$$

بنابراین: $D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}\mid ۲x-۴\in[۶,+\infty)\}$

$$۲x-۴\in[۶,+\infty)\Rightarrow ۲x-۴\ge۶\Rightarrow۲x\ge۶+۴\Rightarrow x\ge۵$$

$$\Rightarrow D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge۵\}=[۵,+\infty)$$

۲۶ آ) $(gof)(x)=g(f(x))\xrightarrow{f(x)=\sqrt{x-۴}} g(\sqrt{x-۴})$

$$\xrightarrow{g(x)=\frac{۱}{x^۲-۱}} \frac{۱}{(\sqrt{x-۴})^۲-۱}=\frac{۱}{(x-۴)-۱}=\frac{۱}{x-۵}$$

ب) $f(x)=\sqrt{x-۴}\Rightarrow x-۴\ge۰\Rightarrow x\ge۴\Rightarrow D_f=[۴,+\infty)$

$$g(x)=\frac{۱}{x^۲-۱}\Rightarrow x^۲-۱\ne۰\Rightarrow x^۲\ne۱\Rightarrow x\ne\pm۱\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{\pm۱\}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}=\{x\ge۴\mid \sqrt{x-۴}\ne\pm۱\}$$

$\sqrt{x-۴}\ne۱\Rightarrow x-۴\ne۱\Rightarrow x\ne۵$ ، $\sqrt{x-۴}\ne-۱$ (برقرار است.)

$$\Rightarrow D_{gof}=\{x\ge۴\mid x\ne۵\}=[۴,۵)\cup(۵,+\infty)$$

۲۷ ضابطهٔ $(fog)(x)$ را به‌دست می‌آوریم و آن را برابر عبارت $x^۲+۴x+۱$ قرار می‌دهیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^۲+bx)$$

$$=(x^۲+bx)+a=x^۲+bx+a$$

$$(fog)(x)=x^۲+۴x+۱\Rightarrow x^۲+bx+a=x^۲+۴x+۱$$

$$\Rightarrow b=۴ \text{ ، } a=۱$$

۲۸ ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست می‌آوریم و آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))\xrightarrow{g(x)=۳x+k} f(۳x+k)$$

$$\xrightarrow{f(x)=۲x+۱} ۲(۳x+k)+۱=۶x+۲k+۱ \quad (۱)$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(۲x+۱)=۳(۲x+۱)+k=۶x+۳+k \quad (۲)$$

$$(fog)(x)=(gof)(x)\xrightarrow{(۱),(۲)} \cancel{۶x}+۲k+۱=\cancel{۶x}+۳+k$$

$$\Rightarrow ۲k-k=۳-۱\Rightarrow k=۲$$

۲۹ ضابطهٔ $(fog)(x)$ را به‌دست می‌آوریم و آن را مساوی عبارت $x^۲-۳x+۴$ قرار می‌دهیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(ax^۲+bx+c)$$

$$=(ax^۲+bx+c)+a=ax^۲+bx+(a+c)$$

$$(fog)(x)=x^۲-۳x+۴$$

$$\Rightarrow ax^۲+bx+(a+c)=x^۲-۳x+۴\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\b=-۳\\a+c=۴\xrightarrow{a=۱}c=۳\end{cases}$$

۳۰ آ) تابع $y=x^۳$ را به عنوان تابع $g(x)$ و با قرار دادن x به جای $x^۳$، تابع $y=\sqrt[۳]{x-۱}$ را به عنوان تابع $f(x)$ در نظر می‌گیریم:

$$g(x)=x^۳ \text{ ، } f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$$

$$\Rightarrow (fog)(x)=f(g(x))=f(x^۳)=\sqrt[۳]{x^۳-۱}$$

ب) تابع $y=۲x^۳-x^۲+۵$ را به عنوان تابع $g(x)$ و با قرار دادن x به جای $g(x)$، تابع $y=x^۴$ را به عنوان تابع $f(x)$ در نظر می‌گیریم:

$$g(x)=۲x^۳-x^۲+۵ \text{ ، } f(x)=x^۴$$

$$\Rightarrow (fog)(x)=f(۲x^۳-x^۲+۵)=(۲x^۳-x^۲+۵)^۴$$

پ)

$$g(x)=x^۲, f(x)=\sqrt{x+۳}\Rightarrow (fog)(x)=f(x^۲)=\sqrt{x^۲+۳}$$

ت) $g(x)=x^۲, f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}\Rightarrow f(g(x))=f(x^۲)=\frac{x^۲+۲}{x^۲-۱}$